



Proyecto Final de Carrera

Ingeniería Industrial

Curso 2010-2011



Estudio por elementos finitos del efecto sobre el vaso de dispositivos para pinzado de arterias durante cirugía

ANEXOS

Olga Marco Herreros

Diciembre de 2010

Director: Pablo Sáez Viñas

Codirector: Estefanía Peña Baquedano

Área de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Departamento de Ingeniería Mecánica

Centro Politécnico Superior

Universidad de Zaragoza

ANEXO A: TEJIDO VASCULAR

En la siguiente sección se explican la estructura arterial, las características más importantes de cada capa y las funciones fundamentales a la que se destinan. Además, se realiza una clasificación de los tipos de arterias que pueden encontrarse en función de su ubicación y de sus características fundamentales.

A.1. - INTRODUCCIÓN

Las arterias están constituidas por tres capas diferenciadas, formadas cada una de ellas por distintas sustancias que marcarán las funciones fundamentales del vaso sanguíneo.

A.2. - CAPAS ARTERIALES

Las arterias son conductos de pequeño espesor, elásticos, con ramificaciones divergentes, cuya función principal consiste en distribuir por todo el organismo la sangre bombeada de las cavidades ventriculares del corazón en cada sistole.

Las arterias se componen fundamentalmente de tres capas concéntricas. Ordenadas de mayor a menor proximidad a la luz del vaso, dichas capas son [2]:

- Íntima
- Media
- Adventicia

Las capas se encuentran embebidas en una matriz extracelular, rica en elastina y colágeno, que sirve de soporte y de comunicación entre las células.

A pesar de que esta disposición en tres capas es común a todos los vasos sanguíneos, existen diferencias en relación a la función desarrollada en cada región del aparato circulatorio y de cada sistema (venas, arterias y vasos linfáticos). Los parámetros más representativos, que son el grosor y el grado de inervación, marcan las diferencias entre unos vasos y otros. Existen otros parámetros, pero de menor importancia.

La íntima está presente en todos los vasos y su composición es siempre constante, por lo que la clasificación de los vasos se basa en la descripción histológica de las otras dos capas y es normalmente la media donde se realiza la especialización histológica.

Sus características, funciones y componentes de cada una de las capas se explican por separado a continuación.

A.2.1. - Íntima

La íntima es la capa interna del vaso y se encuentra en contacto directo con la sangre circulante. Consta de las siguientes capas, nombradas de dentro hacia fuera del vaso:

- Endotelio: Es una monocapa de células cuyo espesor se halla entre los 0.2-0.4 μm ; su ancho ronda los 10 μm y su longitud los 100 μm .
- Subendotelio o lámina basal: capa rica en colágeno, principalmente del tipo I y III, elastina, fibronectina, laminina y proteoglicanos [3]. Su espesor varía mucho en función del tipo de vaso de que se trate.
- Lámina elástica interna: Esta capa es muy fina y fenestrada y es la encargada de separar la túnica íntima de la túnica media [4].

La capa endotelial no contribuye significativamente al soporte de cargas en la pared; en cambio, el subendotelio sí que tiene esta característica. Las funciones de esta capa consisten en regular el intercambio de sustancias con los tejidos subyacentes y en llevar a cabo una intensa actividad metabólica, lo cual ejerce una influencia significativa sobre el tono vascular.

A.2.2. - Media

La media es la capa de mayor grosor y está formada por células musculares lisas fusiformes, dispuestas, circular o helicoidalmente, en capas alrededor del lumen del vaso. Estas células poseen un único núcleo central; su diámetro es de 2-5 μm y su longitud de 20-60 μm . Además, poseen elastina y fibras de colágeno (tipo I, en un 30%, y tipo III, en un 70%).

Sus principales funciones son: servir como soporte muscular de la pared arterial y encargarse de la actividad vasomotora. El aparato contráctil se encuentra en el interior de las células musculares lisas, formado por filamentos finos de actina y gruesos de miosina.

Las células musculares lisas están enlazadas para asegurar la unidad funcional y facilitar la coordinación de la contracción [5]. Su disposición es circunferencial, lo que proporciona al vaso la capacidad de soportar grandes tensiones en dicha dirección. Además, son las encargadas de mantener el contacto con las células endoteliales a través de la lámina elástica interna, que es la capa que separa la íntima de la media [6]. De la misma manera, la lámina elástica externa lo hace entre la media y la adventicia.

A.2.3. - Adventicia

La adventicia es la capa más alejada de la luz del vaso. Está formada por tejido conectivo (fibras de colágeno y elastina), fibroblastos de orientación longitudinal y mastocitos. Además, posee una lámina elástica externa que separa esta capa de la media. A través de la adventicia penetra una red de vasos denominados *vasa vasorum* y unas fibras nerviosas que inervan las arterias [7]. El espesor de la capa depende de la función fisiológica del vaso y de la ubicación del mismo.

Las fibras de colágeno son principalmente del tipo I, presentan una estructura formada por dos familias de fibras enlazadas helicoidalmente y proporcionan a la pared arterial estabilidad y resistencia. Cuando dichas fibras de colágeno se encuentran en una situación relajada, la capa adventicia es más flexible que la media. Pero si esta situación se modifica, la adventicia pasa a tener una mayor rigidez, con lo que se consigue prevenir a la arteria de deformaciones excesivas e incluso de posibles rupturas.

La función principal de esta capa es la de ejercer como soporte estructural de los vasos sanguíneos, además de jugar un papel importante en la patogenia de algunas enfermedades cardiovasculares.

En la Figura A.1 se muestra una ilustración de la disposición de las arterias en capas.

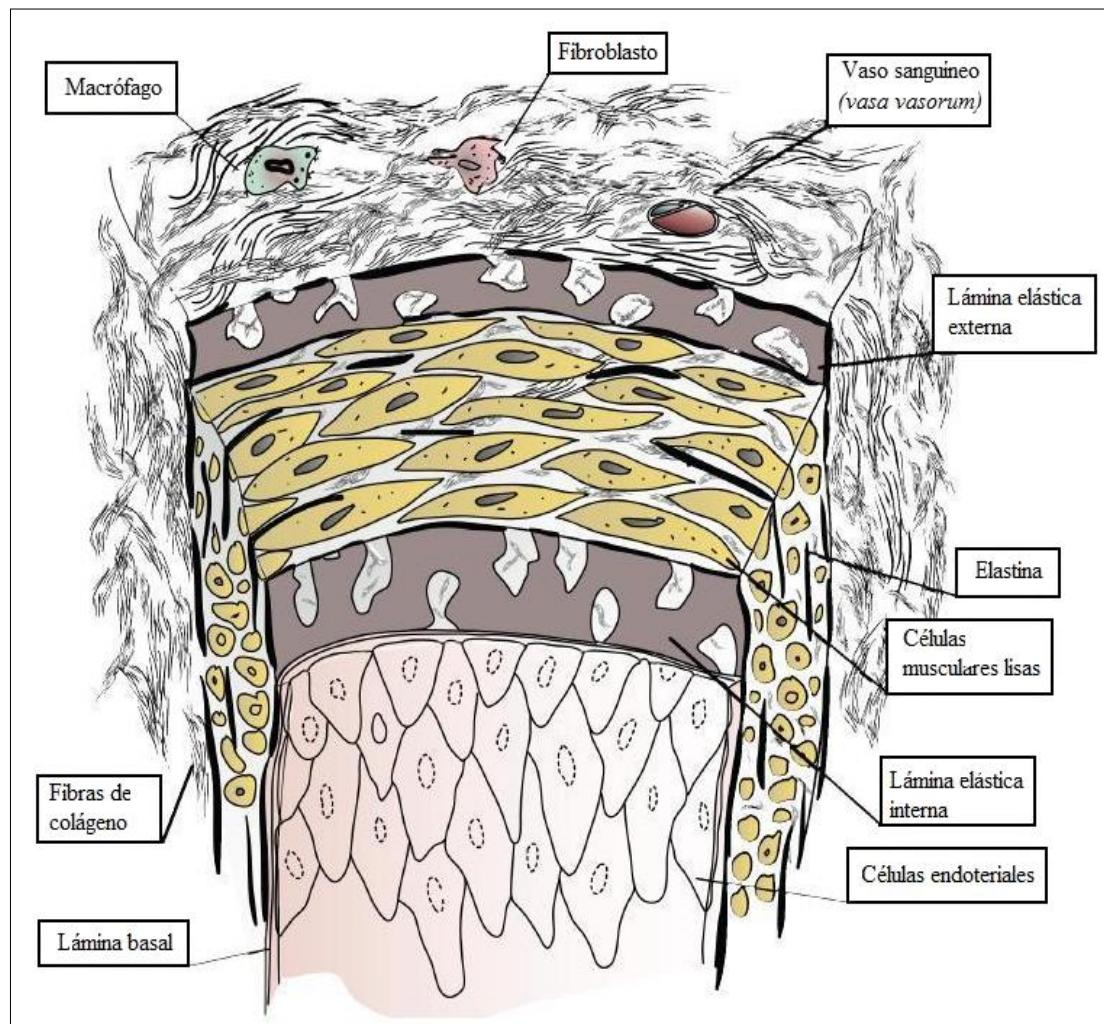


Figura A.1: Corte transversal de una arteria.

A.2.4. - Matriz extracelular

La matriz extracelular tiene una función estructural como soporte de las células de la pared del vaso, además de estar implicada en la mecánica y en la función vascular. La matriz extracelular es la que marca las propiedades elásticas y participa en los procesos de hidratación, filtración de iones e interacción con células, así como en la disposición

de factores del crecimiento. La matriz extracelular se compone principalmente de colágeno y de elastina; en una menor proporción, se pueden encontrar los proteoglicanos, las glicoproteínas y las integrinas.

Las moléculas de la matriz extracelular son sintetizadas por tres tipos de células:

- Células endoteliales
- Células musculares lisas
- Células adventicias

La pared del vaso está expuesta a multitud de factores que pueden dañar la matriz extracelular; en ese caso, las células musculares lisas pueden sintetizar moléculas de la matriz extracelular e inhibidores de las enzimas que la degradan, cambiando así su composición y su entramado tridimensional.

A continuación se explica cada uno de los componentes de la matriz de forma separada y se comentan sus características y sus propiedades más representativas.

Colágeno

El colágeno es una proteína muy rígida, dispuesta en forma de fibras, que limita la distensión del vaso producida por la presión. El crecimiento del colágeno es lento, comparado con el resto de proteínas, y su tiempo de vida media es diez veces mayor que el de ellas. Debido a esta característica, el recambio de colágeno de la matriz extracelular es muy lento, por lo que aumenta la vulnerabilidad del vaso.

La mayoría del colágeno que se puede encontrar a nivel vascular es de tipo I, con una proporción del 60%, y de tipo III, con un 30% [8]. El 10% restante incluye colágeno de la membrana basal tipo IV, V, VI microfibrilar y colágenos tipo VIII, XII y XIV, como se pueden ver en la Tabla A.1.

Elastina

La elastina es la proteína más abundante en arterias de gran tamaño. Su presencia provoca una menor resistencia que el colágeno, pero confiere al vaso una mayor elasticidad. La elastina constituye el 90% de las fibras elásticas, que contienen otras fibras como las fibrilinas y las microfibrillas, asociadas a glicoproteínas (ver Tabla A.1). Las fibras de elastina forman láminas fenestradas, Figura A.2, que permiten el contacto celular a través de sus agujeros. Están diseñadas para que la tensión se distribuya uniformemente a través de la pared arterial [9].

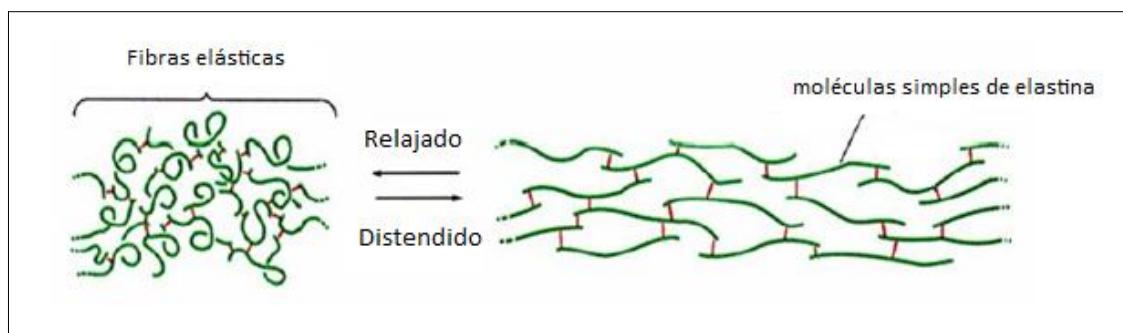


Figura A.2: Estructura y comportamiento de las fibras de elastina sometidas a cargas.

La elastina tiene la función de regular la presión arterial al mantener la presión diastólica elevada en las arterias, ya que almacena temporalmente la energía producida por la sístole cardíaca. Cuando el ciclo cardíaco está en su punto de menor presión (diástole), libera dicha energía comprimiendo la sangre contenida, con lo que el vaso retorna al tamaño original. Así, durante la diástole la presión de los vasos no disminuye tanto como en el corazón. Por todo ello, las variaciones de presión en las arterias durante el ciclo cardíaco son de una amplitud relativamente pequeña, dando lugar a un flujo continuo y a una irrigación adecuada de los órganos. Esto es de extrema importancia e induce una diferencia muy apreciable entre las presiones del corazón y la aorta, 120/5 mm Hg y 120/80 mm Hg respectivamente [10].

Glicoproteínas, Proteoglicanos e Integrinas

Las proteínas descritas anteriormente, colágeno y elastina, se encuentran inmersas en un gel viscoelástico compuesto por diversos proteoglicanos y glicoproteínas, Tabla A.1.

Los proteoglicanos proporcionan las propiedades de turgencia y resistencia a compresión.

Por otro lado, las glicoproteínas son las encargadas de provocar la interacción entre las células y los elementos de la matriz extracelular a través de unos receptores que son las integrinas.

En la siguiente tabla, se presenta un resumen de lo explicado anteriormente, donde se exponen las moléculas integrantes y sus funciones principales para cada uno de los componentes estructurales.

COMPONENTES ESTRUCTURALES	MOLÉCULAS	PROPIEDADES PRINCIPALES
Fibras de colágeno	Colágenos Tipo I y III (aprox. 90%) Colágenos Tipo V, VI, VIII, XII, XIV, XV y XVIII	Resistencia extensible
Fibras elásticas	Elastina (aprox. 90%) Fibrilina 1 y 2, MAG 1 y 2, Emilina 1 y 2, Fibulina-5	Elasticidad
Membrana basal de las células endoteliales y de las células musculares lisas	Colágeno Tipo IV Lamininas, Entactina Perlecan (HS-P-G)	Filtración y resistencia
Otros componentes	Proteoglicanos: -Versican(CS-PG),hyalurano -Biglican (DS-PG), decorin (DS-PG), lumican (KS-PG) (PG pequeña) -Sindecanos (HS-PG), glipican (HS-PG) (PG asociados a células)	Hidratación, filtración, interacciones con otros componentes de la matriz extracelular, reservorio de factores de crecimiento.
	Glicoproteínas estructurales: Fibronectinas, Vitronectina	Interacciones entre células y otras moléculas de la matriz extracelular a través de integrinas
	Células de la matriz celular: Trombospondinas, SPARC, Tenasoinas, Osteopontina, Proteínas de la familia CCC	Estructura, bioreactividad.

Tabla A.1: Componentes de la matriz extracelular (adaptado de Jacob, 2003) [11].

A.3. - TIPOS DE ARTERIAS

La principal función de los vasos es la circulación sanguínea, aunque, dependiendo de su localización, poseen otras funciones que los diferencian y que sirven para su clasificación:

A.3.1. - Arterias elásticas

Las arterias elásticas son grandes vasos de conducción de flujo, pueden llegar a tener un diámetro de entre 1 y 2 cm e incluyen la aorta, el tronco braquiocefálico y las arterias carótidas primitivas, subclavias e iliacas primitivas. La característica más destacada es que poseen una pared flexible que permite la adaptación al flujo.

Las arterias elásticas pueden llegar a expandirse alrededor de un 10% en cada latido del corazón, debido a la elastina que poseen. Por otro lado, el colágeno, 100 veces más rígido que la elastina, impide la sobredistensión del vaso.

Con todas estas características, se puede afirmar que tienen como funciones conducir y regular el caudal sanguíneo.

Características histológicas:

- Íntima: tiene la capa subendotelial más desarrollada y es rica en fibras elásticas, lo que provoca un aumento de su espesor. Existe un movimiento independiente entre la capa íntima y las demás debido a la existencia de una capa de tejido conectivo laxo del endotelio (tejido conectivo subendotelial).

- Media: formada por láminas concéntricas fenestradas y por fibras elásticas. El número de capas de elastina se incrementa con la edad, por lo que puede llegar a unas 70 capas en la edad adulta.
- Adventicia: aparece más delgada que la túnica media y apenas se puede apreciar la lámina elástica externa

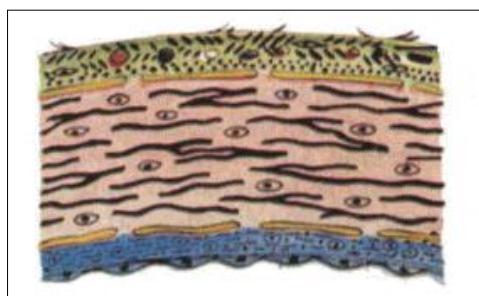


Figura A.3: Corte transversal de una arteria elástica [12].

A.3.2. - Arterias musculares

Su principal característica es la capacidad de regular el flujo sanguíneo dependiendo de la necesidad de la demanda local, por lo que influyen sobre la presión arterial media local y el flujo sanguíneo. Cuando los vasos se dilatan, la resistencia cae y el flujo local aumenta; por otro lado, la vasoconstricción aumenta la resistencia local reduciendo el flujo sanguíneo.

Las arterias musculares más destacadas forman las principales ramas de distribución del árbol arterial, formado por las arterias radiales, la femoral, la coronaria y la cerebral. Se ramifican para distribuir la sangre por los diferentes órganos.

Características histológicas:

- Íntima: es más delgada que en las arterias elásticas; además, posee una lámina elástica interna bien diferenciada.
- Media: formada por numerosas capas concéntricas de células musculares lisas, con una cantidad variable de fibras elásticas, fibras reticulares y proteoglicanos.
- Adventicia: rica en colágeno y, en menor proporción, en fibras elásticas. Puede tener la lámina elástica externa claramente distingible, pero puede estar incompleta en algunas zonas.



Figura A.4: Corte transversal de una arteria muscular [12].

A.3.3. - Arteriolas

Las arteriolas son las ramas terminales del árbol que irrigan el lecho capilar y poseen un diámetro por debajo de 0.1 a 0.5 mm. Controlan el flujo sanguíneo que llega a los capilares.

Características histológicas:

- Íntima: su capa subendotelial es más pequeña que en los anteriores vasos; además, no se puede apreciar un lámina elástica interna.
- Media: formada por 1 ó 2 capas concéntricas de células musculares lisas.
- Adventicia: suele estar poco desarrollada y apenas se distingue la lámina elástica externa.



Figura A.5: Corte transversal de una arteriola [12].

A.4. - TIPOS DE PATOLOGÍAS

En este apartado se realiza una enumeración de las principales patologías que pueden ser provocadas por la obstrucción o la degeneración de un vaso [13].

A.4.1. - Disección aórtica

La disección aórtica ocurre cuando se produce un desgarro en la pared de la aorta, que causa, en consecuencia, un sangrado en el interior y a lo largo de la pared. Cuando se presenta una ruptura, se crean dos vías: una en la que la sangre continúa circulando y otra en la que permanece quieta. El desgarro puede continuar creciendo y, a medida que este se transmite a través de la pared, puede provocar un ensanchamiento o abombamiento de la misma y, en consecuencia, un aneurisma.

La aorta presenta dos trayectorias, denominadas ascendente y descendente, y, dependiendo de dónde ocurra la disección, se clasifica como tipo A o tipo B respectivamente.

Las causas por las que se puede presentar una disección son desconocidas, pero existen ciertos factores que aumentan el riesgo de aparición: ateroesclerosis, hipertensión, envejecimiento, válvula aórtica bicúspide, coartación de la aorta, trastornos del tejido conectivo, síndrome de Ehlers-Danlos, cirugía o procedimientos

cardíacos, síndrome de Marfan, embarazo, seudoxantoma elástico, inflamación vascular debida a afecciones como arteritis y sífilis.

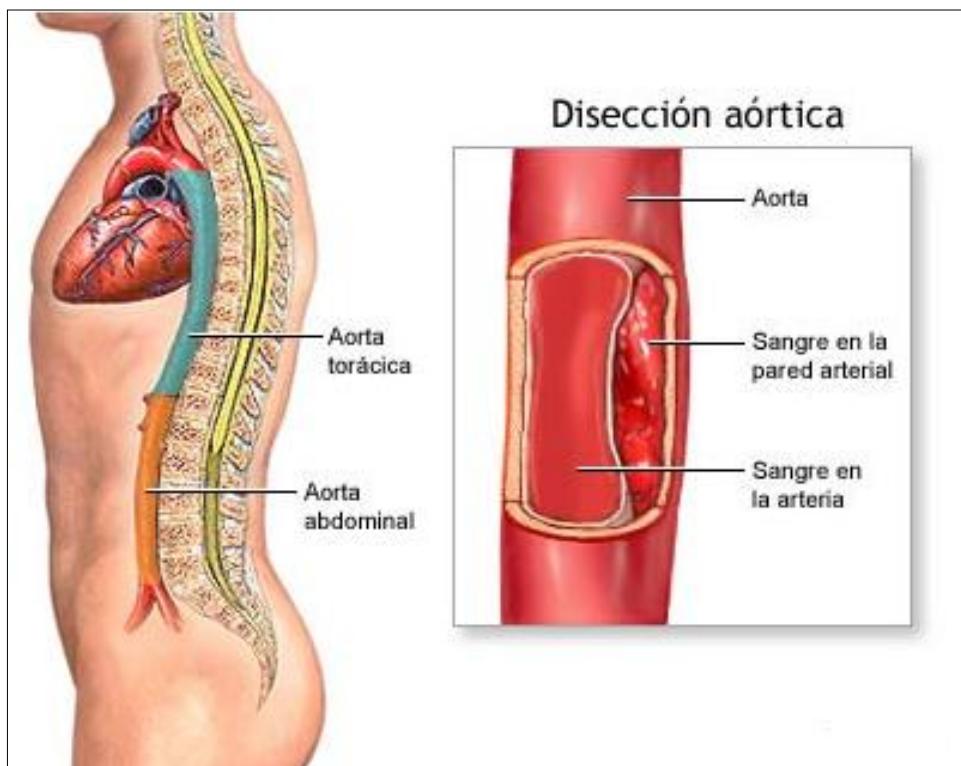


Figura A.6: Efectos de una disección aórtica.

A.4.2. - Aneurisma

Un aneurisma de aorta es una dilatación localizada que produce una debilidad en la pared de la arteria. En niveles más profundos, se puede decir que en la mayoría de las ocasiones se debe a cambios degenerativos ateroscleróticos, que se manifiestan en un importante adelgazamiento de la capa muscular media. Esta razón corresponde al 90 por ciento de los casos. El resto tiene su explicación en defectos en la construcción proteica de la pared aórtica, en traumatismos, infecciones, necrosis quísticas de la media, arteritis, conectivopatías y disecciones.

Los aneurismas se desarrollan lentamente a lo largo de los años y en algunos casos pueden llegar a romperse si su expansión es rápida, lo que se denomina ruptura del aneurisma. En otros casos, puede aparecer un sangrado por filtración de la pared del vaso, lo que origina una disección aórtica.

Existen dos escenarios donde se puede producir esta patología: en el abdomen (aneurisma aórtico abdominal) y en el tórax (aneurisma aórtico torácico).

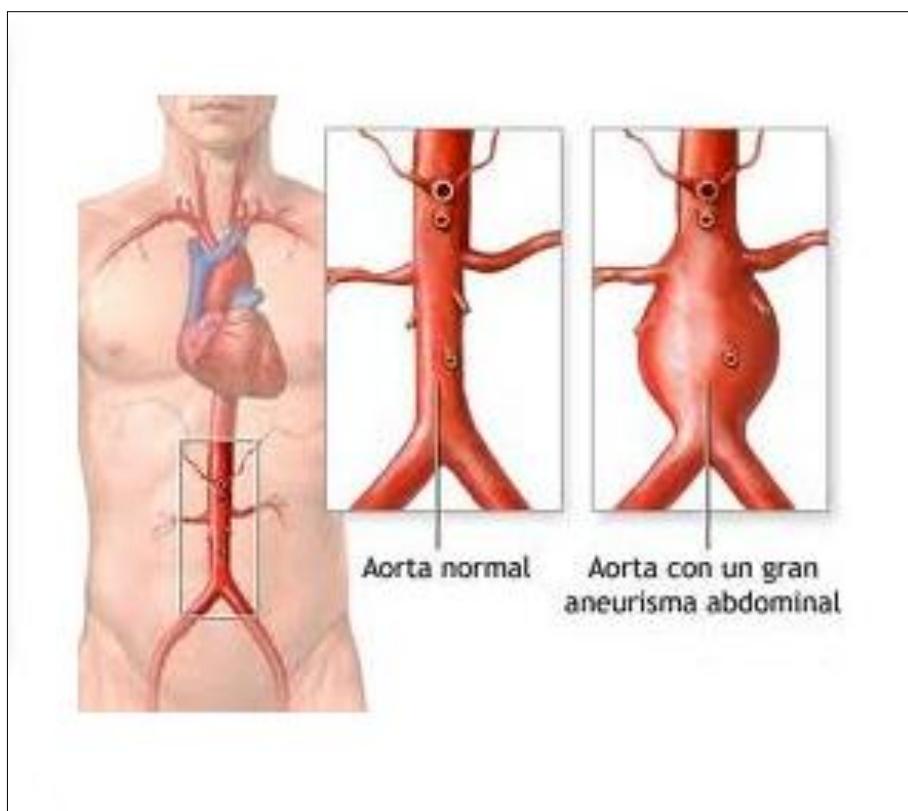


Figura A.7: Efectos de una aneurisma.

A.4.3. - Ateroesclerosis

Es la acumulación y depósito de sustancias lipídicas en las paredes de las arterias. Esta acumulación produce una inevitable inflamación que conlleva una multiplicación y migración de las células musculares lisas de la pared de la arteria, fenómeno que produce una disminución del diámetro del vaso y dificultad para la correcta circulación de la sangre.

El material depositado se vuelve más grueso con el tiempo, con la posibilidad de que se formen depósitos de calcio que incluso pueden desprenderse e incorporarse al torrente sanguíneo. Estas placas llegan hasta los vasos más pequeños, bloqueándolos o produciendo la muerte del tejido.

La aterosclerosis es causa de anginas, ataque cardíaco o ictus cerebrales. La formación de la placa puede producir un debilitamiento de la pared y, en última instancia, un aneurisma.

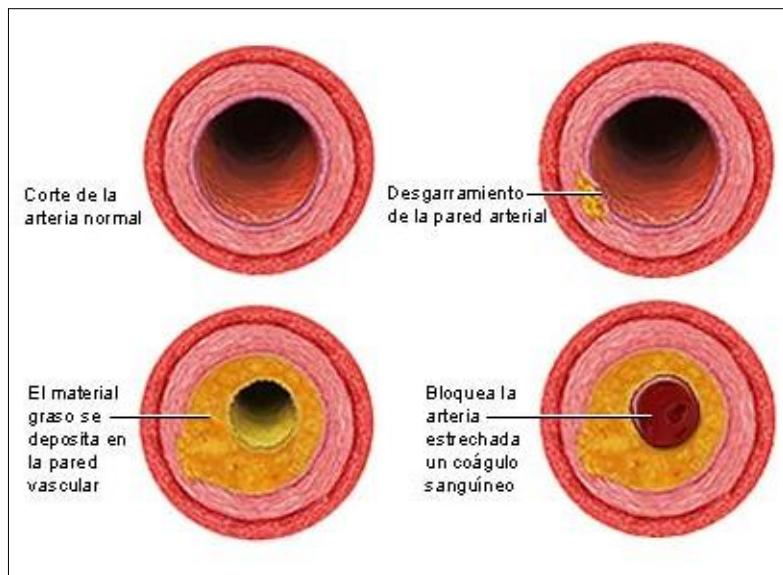


Figura A.8: Efectos de una ateroesclerosis.

A.4.4. - Insuficiencia aórtica

Es una disfunción de la válvula aórtica cardíaca por la que ésta se debilita o se abomba e impide que dicha válvula cierre herméticamente. Esto lleva a que se presente el flujo retrógrado de sangre desde la aorta hacia el ventrículo izquierdo (la cámara inferior izquierda del corazón).

Esta patología puede ser producida por cualquier causa o afección que debilite la válvula aórtica y actúa mediante la dilatación de la cámara inferior izquierda del corazón, con lo que se produce una disminución de su capacidad de bombear sangre en cada contracción, disminución que éste compensa elevando el ritmo para aumentar la cantidad de sangre bombeada.

La insuficiencia aórtica es producida por: espondilitis anquilosante, disección aórtica, problemas congénitos de las válvulas, endocarditis, hipertensión arterial, síndrome de Marfan, síndrome de Reiter, sífilis, lupus eritematoso sistémico.

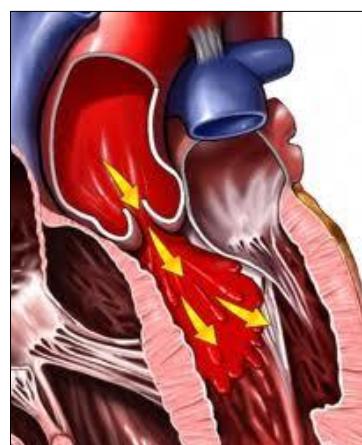


Figura A.9: Efectos de una insuficiencia aórtica.

ANEXO B: MODELO DE COMPORTAMIENTO PARA EL MATERIAL ARTERIAL

Para poder obtener resultados válidos, es necesario introducir un modelado de material que reproduzca el comportamiento de los tejidos, que en este caso será un modelo hiperestático anisótropo [2] formado por una matriz sólida y fibras de colágeno con dos direcciones preferentes. En la primera parte se explica de una forma general la Mecánica de Medios Continuos aplicada a materiales hiperelásticos, y en una segunda, se explicará de una manera más específica la formulación del material hiperelástico y su implementación en el Método de los Elementos Finitos.

Posteriormente, se expondrá la metodología para la definición de las dos familias de fibras y las bases teóricas de la mecánica del daño continuo. Por último, se explicará la forma en la que se han llevado a la práctica ambos aspectos.

B.1. - INTRODUCCIÓN

Las características generales de los tejidos biológicos blandos son las grandes deformaciones, la viscoelasticidad, la heterogeneidad y la incompresibilidad, por lo que el modelo utilizado tiene que tener similares características. Además, se tiene que incluir en el modelo la existencia de un reforzamiento con dos familias de fibras de colágeno y elastina, lo que obliga a considerar el material como anisótropo.

Por tanto, el modelo implementado en ABAQUS ha de tener un comportamiento hiperelástico, incompresible y anisótropo.

B.2. - MECÁNICA DE MEDIOS CONTINUOS APLICADA A MATERIALES HIPERELÁSTICOS

B.2.1.- Ecuaciones del movimiento

Un Medio Continuo se define como un conjunto infinito de partículas dentro de un sólido, de un fluido o de un gas, cuyo estudio se realiza de una manera macroscópica, por lo que se asume la inexistencia de discontinuidades entre las partículas. De esta forma, se puede realizar una descripción matemática del mismo a través de funciones continuas.

A fin de explicar el movimiento más elemental, se describe la posición de cada partícula a lo largo del tiempo. Para ello, se define como configuración Ω_t el lugar geométrico de las posiciones que ocupan en el espacio las partículas del medio continuo en el instante t .

Si el intervalo de tiempo utilizado es $t = t_0$, instante de referencia, la configuración que se define en ese punto se denomina inicial, material o de referencia, y se denota por Ω_0 . Ambas configuraciones, anteriormente descritas, se muestran en la Figura B.1.

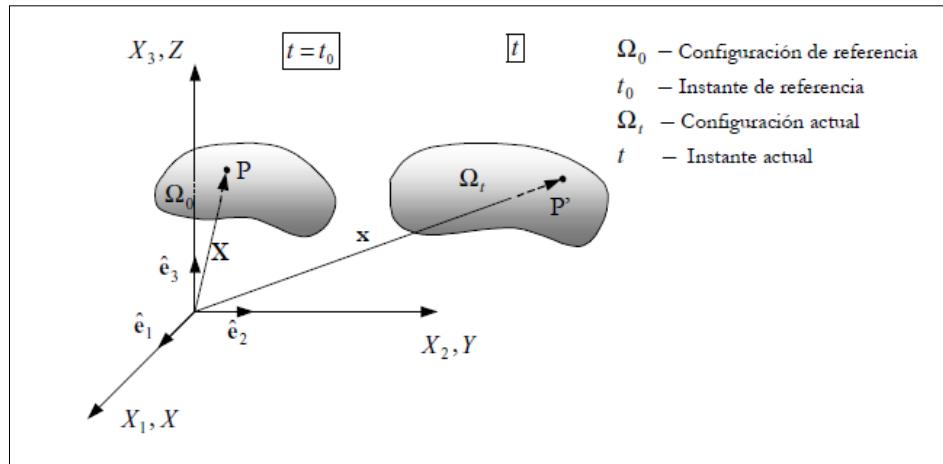


Figura B.1: Configuraciones del medio continuo [14].

Si se toma como referencia el sistema de coordenadas (X, Y, Z) de la Figura B.1 y su base ortonormal ($\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$), el vector de posición \mathbf{X} de una partícula que ocupa un punto P en el espacio referido a la configuración de inicial tiene la forma:

$$\mathbf{X} = X_1 \bar{e}_1 + X_2 \bar{e}_2 + X_3 \bar{e}_3 = X_i \bar{e}_i \quad (\text{B.1})$$

donde (X_1, X_2, X_3) se denominan coordenadas materiales.

En la configuración actual Ω_t , la partícula que se encontraba en el punto P ocupa el punto espacial P' (ver Figura B.1), y en este punto su vector de posición \mathbf{x} viene dado por:

$$\mathbf{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3 = x_i \bar{e}_i \quad (\text{B.2})$$

donde (x_1, x_2, x_3) se denominan coordenadas espaciales de la partícula en el instante de tiempo t .

Una vez definidas ambas configuraciones, se puede describir el movimiento de las partículas del medio continuo a través de la evolución de sus coordenadas espaciales a lo largo del tiempo. Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento que proporcionan las coordenadas espaciales en función de las materiales son:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \varphi(\mathbf{X}, t) \\ x_i &= \varphi_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Si se describe el movimiento a través de la evolución de las coordenadas materiales, se obtienen, de la misma manera, las ecuaciones del movimiento inversas:

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

$$X_i = \varphi_i^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{B.4})$$

La función φ tiene que cumplir, para poder garantizar la existencia de su inversa, las siguientes condiciones:

- Condición de consistencia: $\varphi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$, ya que \mathbf{X} es el vector de posición en el instante de referencia $t = 0$.
- $\varphi \in C^1$, por lo que es continua y con derivadas continuas en cada punto y en cada instante.
- φ es biunívoca, lo que garantiza que dos partículas no ocupen el mismo punto en el mismo instante de tiempo o que una misma partícula ocupe simultáneamente dos posiciones diferentes en el espacio.
- $J = \det \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right] > 0$. Al imponer que el jacobiano sea mayor que cero, se consigue que todo diferencial de volumen sea positivo. Un caso particular aparece cuando en un movimiento no se produce ninguna deformación o es un problema incompresible; entonces, $J = 1$.

En la Figura B.2 se muestra la trayectoria de una partícula cuya ecuación se obtiene de la expresión $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$, particularizada para un valor fijo de las coordenadas materiales \mathbf{X} .

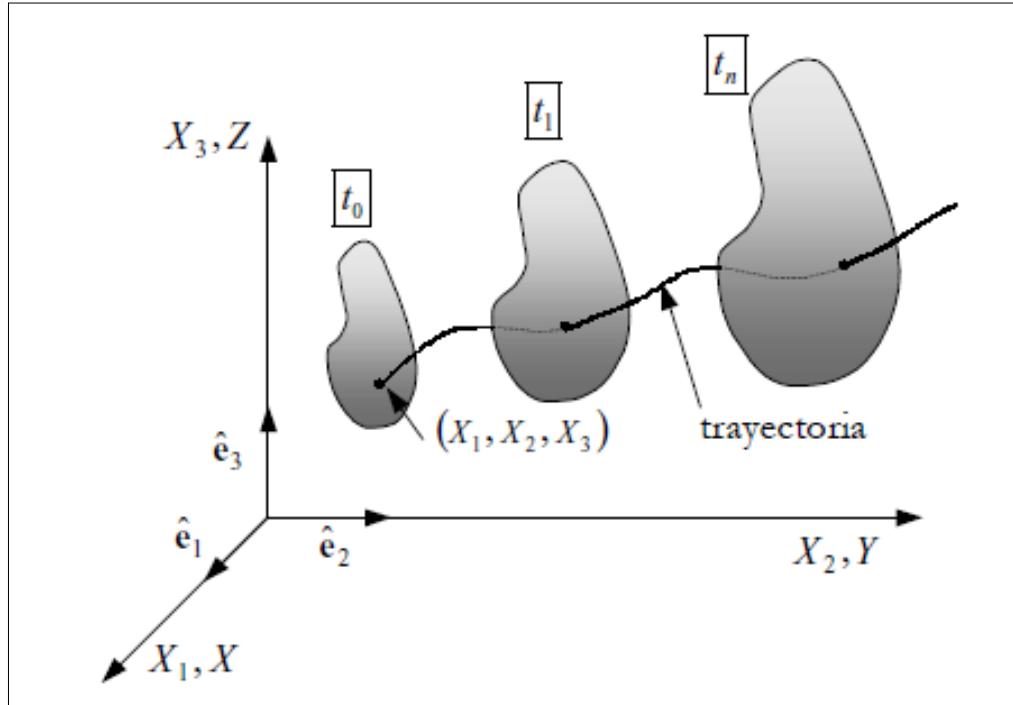


Figura B.2: Trayectoria de una partícula [14].

B.2.2. - Descripción del movimiento

La descripción matemática de las propiedades de las partículas del medio continuo se puede caracterizar a través de dos formulaciones diferentes: formulación lagrangiana o material y la formulación euleriana o espacial. Se diferencian fundamentalmente en el tipo de argumento que aparece en las funciones matemáticas que describen las propiedades del medio continuo. En la lagrangiana se utilizan como argumento las coordenadas materiales y en la euleriana las espaciales. Posteriormente, y a fin de que se pueda observar la diferencia entre ambas, se definen algunas magnitudes en ambas configuraciones:

- La primera de las magnitudes es el desplazamiento, definido por el vector \mathbf{u} , que une los puntos P y P' , como se muestra en la Figura B.3:

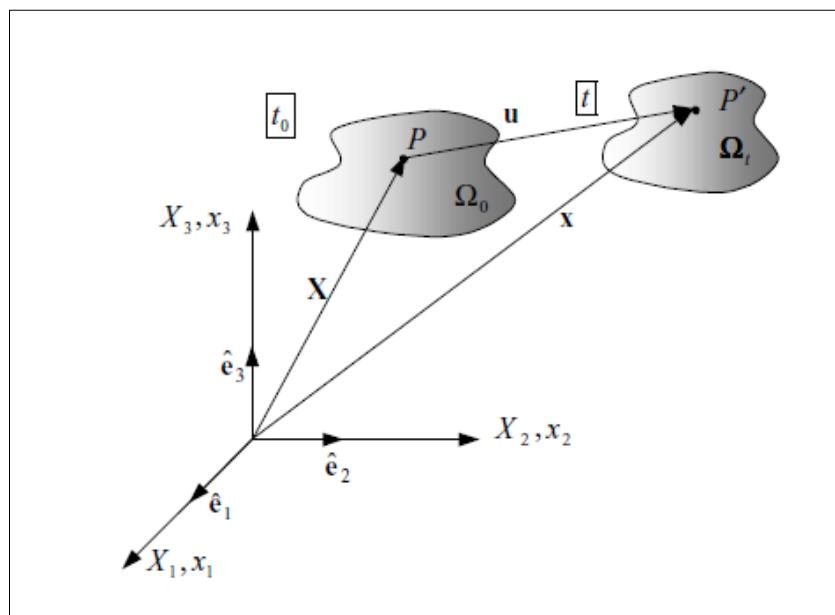


Figura B.3: Desplazamiento de una partícula P [14].

De ahí que el campo vectorial de desplazamientos en forma material venga determinado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ & \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \\ U_i(\mathbf{X}, t) = x_i(\mathbf{X}, t) - X_i & & i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (B.5)$$

De la misma manera, la descripción espacial del mismo es:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \\ u_i(\mathbf{x}, t) &= x_i - X_i(\mathbf{x}, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (B.6)$$

- La descripción material de la velocidad se determina:

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

$$V_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{B.7})$$

Si se dispone de las ecuaciones inversas del movimiento $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$, es posible obtener la descripción espacial de la velocidad como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \quad (\text{B.8})$$

- Una vez definida la velocidad, se introduce la aceleración, cuya descripción material es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t): \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

$$A_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial V_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{B.9})$$

Partiendo de la descripción espacial de la velocidad (B.8), se puede obtener la correspondiente a la aceleración:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{B.10})$$

B.2.3. - Descripción de la deformación

El concepto de deformación está adscrito a la variación de entornos de un punto más que a la modificación de las coordenadas de un solo punto. Por tanto, para poder determinar las deformaciones, se introduce el gradiente de deformación a través de las derivadas del movimiento respecto a las diferentes coordenadas.

Para explicar el tensor gradiente de deformación, se parte del movimiento que describen dos partículas en el medio continuo. La primera ocupa la posición P , en la configuración de referencia Ω_0 , y la P' en la configuración actual Ω_t . De la misma manera, la otra partícula ocupa la posición Q y Q' , respectivamente, como se muestra en la Figura B.4.

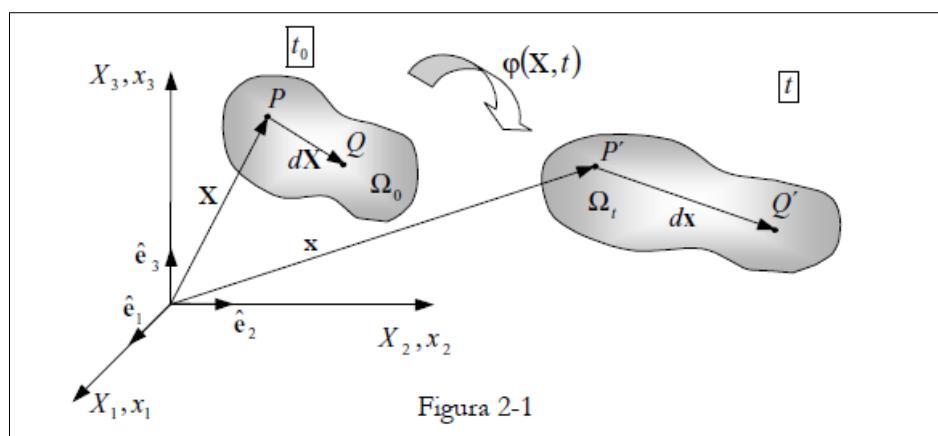


Figura B.4: Movimiento en el medio continuo [14].

Si se parte de las ecuaciones del movimiento, descritas en (B.3), y se realiza la derivada con respecto a las coordenadas materiales \mathbf{X} , se obtiene la ecuación fundamental de la deformación, cuya expresión es:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{B.11})$$

Una vez obtenida la ecuación fundamental de la deformación, se puede definir el tensor gradiente material de deformación $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \otimes \bar{\nabla}$$

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{B.12})$$

En forma matricial, el tensor gradiente material de deformación \mathbf{F} viene dado:

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{x} \otimes \bar{\nabla}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Como se puede apreciar en las fórmulas (B.12 y B.13), el gradiente de deformación proporciona la relación entre la configuración inicial y la deformada, por lo que representa la evolución del vector posición en función de su correspondiente posición relativa en el instante de referencia.

De la misma manera se puede definir el tensor de deformación inverso, pero, en lugar de partir de las ecuaciones del movimiento, se parte de las ecuaciones de movimiento inversas, descritas en (B.4). Los demás cálculos son similares, y de ahí que la expresión para el tensor gradiente espacial de deformación o tensor gradiente de la deformación inverso sea:

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{X} \otimes \bar{\nabla}$$

$$F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{B.14})$$

Donde su expresión matricial es:

$$[\mathbf{F}^{-1}] = [\mathbf{X} \otimes \bar{\nabla}] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Al ser la segunda -expresión (B.14)- la función inversa de la primera -expresión (B.12)-, se tiene que cumplir que:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{ij} \quad \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{1} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{IJ} \quad (\text{B.16})$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de segundo orden.

Además del tensor gradiente de deformación, para realizar los cálculos son necesarios otros tensores que se pasan a definir a continuación:

- Tensor de deformación de Green por la derecha \mathbf{C} como un campo tensional definido sobre la configuración inicial:

$$\mathbf{C}: \Omega_0(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad o \quad C_{IJ} = F_{kl} F_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial X_I} \frac{\partial x_k}{\partial X_J} \quad (\text{B.17})$$

- Tensor de deformación de Green por la izquierda \mathbf{b} como un campo tensional definido sobre la configuración deformada:

$$\mathbf{b}: \Omega_t(\varphi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad o \quad b_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_K} \frac{\partial x_j}{\partial X_K} \quad (\text{B.18})$$

Una de las características comunes a los tensores \mathbf{C} y \mathbf{b} es que poseen los mismos valores propios, que coinciden con el cuadrado de los alargamientos principales λ_1^2, λ_2^2 y λ_3^2 . Dichos alargamientos se muestran en la Figura B.5:

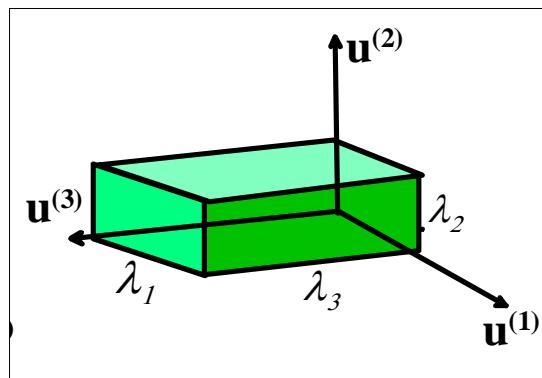


Figura B.5: Alargamientos principales referidos a cada dirección.

Si se fija una configuración en un instante de tiempo t , Ω_t , se define el tirón o “pull-back” como:

$$[\Omega_t^*(\mathbf{b})] = \mathbf{F}^T \mathbf{b} \mathbf{F} \quad (\text{B.19})$$

que corresponde al tensor en la configuración indeformada.

De la misma manera, se define el empuje o “pull-forward” como:

$$[\varphi_t * (\mathbf{C})] = \mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{B.20})$$

que corresponde con un tensor del mismo tipo que el inicial, pero definido en la configuración deformada.

La formulación estándar de elementos finitos presenta dificultades para materiales quasi-incompresibles, debido a la elevada contribución de la dilatación en los términos de la diagonal. Para evitar esos problemas, es necesario aplicar la descomposición octaédrica-desviadora del gradiente deformación y desacoplar ambos efectos; de esta forma, se considera una descomposición multiplicativa de \mathbf{F} en una parte volumétrica y una parte desviadora [15].

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{vol} \tilde{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{F}_{vol} = J^{\frac{1}{3}} \mathbf{1}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad (\text{B.21})$$

El cambio volumétrico del material es debido a \mathbf{F}_{vol} , por lo que se cumple:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = J^{\frac{2}{3}} \tilde{\mathbf{C}} \quad \text{con} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{F}}^T \tilde{\mathbf{F}} \quad (\text{B.22})$$

B.2.4. - Comportamiento constitutivo hiperelástico quasi-incompresible

De la misma manera que para el gradiente de deformación, se puede realizar una descomposición aditiva para la función densidad de energía de deformación [15,16]:

$$\psi = \psi_{vol}(\mathbf{J}) + \psi_{ich}(\tilde{\mathbf{C}}) \quad (\text{B.23})$$

La función ψ_{vol} se añade a la parte desviadora para forzar la quasi-incompresibilidad, que puede interpretarse como una función de penalización del jacobiano [17], y ψ_{ich} es la energía desviadora asociada a los cambios de forma.

El segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff para materiales hiperelásticos, si se aplica la descomposición aditiva de la función densidad de energía de deformación (B.23), da como resultado dos contribuciones: una volumétrica y otra desviadora [16,17]:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{S}_{vol} + \mathbf{S}_{ich} \quad (\text{B.24})$$

$$\mathbf{S}_{vol} = \frac{\partial \psi_{vol}(\mathbf{J})}{\partial \mathbf{C}} = J p \mathbf{C}^{-1} \quad (\text{B.25})$$

$$\mathbf{S}_{ich} = 2 \frac{\partial \psi_{ich}(\tilde{\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) : \tilde{\mathbf{S}} = J^{-\frac{2}{3}} [\mathbb{P} : \tilde{\mathbf{S}}] \quad (\text{B.26})$$

En la que \mathbb{P} es el tensor de proyección de 4º orden; \mathbb{I} , tensor identidad de 4º orden. p , presión hidrostática, y $\tilde{\mathbf{S}}$ se definen como:

$$p = \frac{\partial \psi_{vol}(J)}{\partial J} \quad y \quad \tilde{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial \psi_{ich}(\tilde{\mathbf{C}})}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} \quad (B.27)$$

Con todo esto, se puede definir el tensor de Cauchy, separado en sus dos componentes, como se indica a continuación:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{vol} + \boldsymbol{\sigma}_{ich} \quad (B.28)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{vol} = p \mathbf{1} \quad (B.29)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ich} = \mathbb{P} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (B.30)$$

donde \mathbb{P} es el tensor de proyección de 4º orden en la configuración espacial y $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ se define como $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2J^{-1}\mathbf{F}\tilde{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T$.

De la misma manera se puede reescribir el tensor elástico si se aplica a la expresión (B.24) de la forma:

$$\mathbb{C} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} \quad (B.31)$$

Si se realiza una descomposición aditiva, se obtienen las contribuciones volumétricas e isocóricas del tensor elástico, igual que para el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff (B. 24):

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_{vol} + \mathbb{C}_{ich} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{vol}}{\partial \mathbf{C}} + 2 \frac{\partial \mathbf{S}_{ich}}{\partial \mathbf{C}} \quad (B.32)$$

Si se aplica el empuje sobre \mathbb{C} y premultiplicando por $\frac{1}{J}$, se puede escribir el tensor elástico en la configuración espacial \mathbb{C} :

$$\mathbb{C} = \frac{1}{J} \phi_*(\mathbb{C}) \quad (B.33)$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}_{vol} + \mathbb{C}_{ich} \quad (B.34)$$

B.3. - DEFINICIÓN DE LA MATRIZ MATERIAL HIPERELÁSTICA PARA DOS FAMILIAS DE FIBRAS

B.3.1. - Definición de la matriz anisotropía

Se plantea a continuación la teoría hiperelástica anisótropa para la inclusión de las fibras en los tejidos biológicos blandos formados por dos direcciones preferentes, tal y como se observa en la Figura B.6:

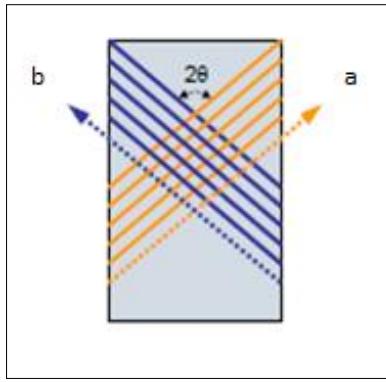


Figura B.6: Material formado por el entrelazamiento de dos familias de fibras.

Las direcciones principales vienen dadas por los vectores \mathbf{a}^0 y \mathbf{b}^0 y se caracterizan por el ángulo θ que existe entre las direcciones de las fibras preferentes, ángulo que no siempre tiene que ser de 90° .

Para explicar el fundamento teórico, suponemos que se parte de una matriz material hiperelástica con dos familias de fibras dispuestas unidireccionalmente con una dirección preferente cada una. La dirección preferente de las fibras en la configuración inicial y en la deformada viene determinada por los vectores $\mathbf{a}^0, \mathbf{b}^0$ y \mathbf{a}, \mathbf{b} , respectivamente. De esta manera, la función densidad de energía de deformación tendrá la siguiente dependencia:

$$\psi = \psi(\mathbf{X}, \mathbf{C}, \mathbf{A}^0, \mathbf{B}^0) \quad (\text{B.35})$$

donde $\mathbf{A}^0 = \mathbf{a}^0 \otimes \mathbf{a}^0$ y $\mathbf{B}^0 = \mathbf{b}^0 \otimes \mathbf{b}^0$ son tensores estructurales asociados a las direcciones de anisotropía. Además, se tiene que cumplir que la función densidad de energía de deformación permanece constante si las fibras en la configuración inicial sufren una rotación descrita por un tensor ortogonal \mathbf{Q} , cuya dependencia se puede formular de la forma:

$$\psi = \psi(\mathbf{X}, \mathbf{C}, \mathbf{A}^0, \mathbf{B}^0) = \psi(\mathbf{X}, \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \mathbf{A}^0 \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \mathbf{B}^0 \mathbf{Q}^T) \quad (\text{B.36})$$

Por tanto, en este caso ψ es una función tensorial isótropa dependiente de tres tensores que, a su vez, dependen de \mathbf{C} , \mathbf{A}^0 y \mathbf{B}^0 para todo tensor ortogonal \mathbf{Q} .

B.3.2. - Descomposición de la función densidad de energía de deformación en función de los invariantes

Se puede realizar una descomposición de la función de densidad de energía de deformación expresada en términos de nueve invariantes, dependientes del tensor y de la dirección de las fibras. La parte isocórica ψ_{ich} se divide en una parte isótropa, ψ_{iso} , asociada a la matriz de colágeno, que en este caso corresponde a un modelo neo hookeano, y otra parte anisótropa, ψ_{ani} , dependiente de las fibras de colágeno.

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_{vol}(\mathbf{J}) + \psi_{iso}(\tilde{\mathbf{C}}) + \psi_{ani}(\tilde{\mathbf{C}}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \\ &= \psi_{vol}(\mathbf{J}) + \psi_{ich}(\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3, \tilde{I}_4, \tilde{I}_5, \tilde{I}_6, \tilde{I}_7, \tilde{I}_8, \tilde{I}_9) \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Basándose en [18], los invariantes necesarios para caracterizar el comportamiento de un material reforzado con dos familias de fibras son del I_4 al I_9 , ya que del I_1 al I_3 son idénticos a los utilizados en la teoría isótropa. Las fórmulas para todos ellos serán las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_1 &= \text{tr} \tilde{\mathbf{C}} = J^{\frac{-2}{3}} \text{tr} \mathbf{C} \\
 \tilde{I}_2 &= \frac{1}{2} ((\text{tr} \tilde{\mathbf{C}})^2 - \text{tr} \tilde{\mathbf{C}}^2) = J^{\frac{-4}{3}} ((\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2) \\
 \tilde{I}_3 &= \det \tilde{\mathbf{F}} \\
 \tilde{I}_4 &= \mathbf{a}^0 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{a}^0 = J^{\frac{-2}{3}} \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{a}^0 = \bar{\lambda}^2 \\
 \tilde{I}_5 &= \mathbf{a}^0 \cdot \tilde{\mathbf{C}}^2 \cdot \mathbf{a}^0 = J^{\frac{-2}{3}} \mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{a}^0 \\
 \tilde{I}_6 &= \mathbf{b}^0 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{b}^0 = J^{\frac{-2}{3}} \mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{b}^0 = \bar{\lambda}^2 \\
 \tilde{I}_7 &= \mathbf{b}^0 \cdot \tilde{\mathbf{C}}^2 \cdot \mathbf{b}^0 = J^{\frac{-2}{3}} \mathbf{b}^0 \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{b}^0 \\
 \tilde{I}_8 &= (\mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{b}^0) \cdot \mathbf{a}^0 \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{b}^0 \\
 \tilde{I}_9 &= (\mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{b}^0)^2
 \end{aligned} \tag{B.38}$$

De donde se puede afirmar que los invariantes del I_4 al I_9 están asociados con la anisotropía generada por las dos familias de fibras, y que el producto escalar entre \mathbf{a}^0 y \mathbf{b}^0 es una constante determinada por el coseno del ángulo entre las dos direcciones principales de las fibras en la configuración inicial. Además, se puede simplificar el cálculo teniendo en cuenta que el invariante I_9 no depende de la deformación, por lo que no es necesaria su consideración para este cálculo.

Al aplicar la dependencia anteriormente descrita de la función densidad de energía de deformación y la regla de la cadena de la derivación, se obtiene el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \psi(\mathbf{X}, \mathbf{C}, \mathbf{A}^0, \mathbf{B}^0)}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{a=1}^8 \frac{\partial \tilde{\psi}(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_8)}{\partial \tilde{I}_a} \frac{\partial \tilde{I}_a}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} \tag{B.39}$$

Donde el valor de las derivadas de los invariantes viene dado de la forma siguiente:

$$\frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \frac{\partial \text{tr} \tilde{\mathbf{C}}}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \frac{\partial (\tilde{\mathbf{I}} : \tilde{\mathbf{C}})}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} \quad o \quad \frac{\partial \tilde{I}_1}{\partial C_{AB}} = \delta_{AB} \tag{B.40}$$

$$\frac{\partial \tilde{I}_2}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \frac{1}{2} \left(2 \text{tr} \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{I} - \frac{\partial \text{tr} (\tilde{\mathbf{C}}^2)}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} \right) = \tilde{I}_1 \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{C}} \quad o \quad \frac{\partial \tilde{I}_2}{\partial C_{AB}} = \tilde{I}_1 \delta_{AB} - C_{AB} \tag{B.41}$$

$$\frac{\partial \tilde{I}_3}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \tilde{I}_3 \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \quad o \quad \frac{\partial \tilde{I}_3}{\partial C_{AB}} = \tilde{I}_3 C_{AB}^{-1} \quad (B.42)$$

$$\frac{\partial \tilde{I}_4}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \mathbf{a}^0 \otimes \mathbf{a}^0 = \mathbf{A}^0 \quad o \quad \frac{\partial \tilde{I}_4}{\partial C_{AB}} = a^{0A} a^{0B} \quad (B.43)$$

$$\frac{\partial \tilde{I}_5}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \mathbf{a}^0 \otimes \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{a}^0 + \mathbf{a}^0 \tilde{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{a}^0 \quad o \quad \frac{\partial \tilde{I}_5}{\partial C_{AB}} = a^{0A} C_{BC} a^{0C} + a^{0B} C_{AC} a^{0C} \quad (B.44)$$

$$\frac{\partial \tilde{I}_6}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \mathbf{b}^0 \otimes \mathbf{b}^0 = \mathbf{B}^0 \quad o \quad \frac{\partial \tilde{I}_6}{\partial C_{AB}} = b^{0A} b^{0B} = B^{AB} \quad (B.45)$$

$$\frac{\partial \tilde{I}_7}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \mathbf{b}^0 \otimes \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{b}^0 + \mathbf{b}^0 \tilde{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{b}^0 \quad o \quad \frac{\partial \tilde{I}_7}{\partial C_{AB}} = b^{0A} C_{BC} b^{0C} + b^{0B} C_{AC} b^{0C} \quad (B.46)$$

$$\frac{\partial \tilde{I}_8}{\partial \tilde{\mathbf{C}}} = \frac{1}{2} (\mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{b}^0) (\mathbf{a}^0 \otimes \mathbf{b}^0 + \mathbf{b}^0 \otimes \mathbf{a}^0) \quad o \quad \frac{\partial \tilde{I}_8}{\partial C_{AB}} = \frac{1}{2} (a^{0A} b^{0B}) (a^{0A} b^{0B} + b^{0A} a^{0B}) \quad (B.47)$$

Introduciendo todas estas expresiones, el resultado del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff es:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = 2 \left[& \left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{I}_1} + \tilde{I}_1 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{I}_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{I}_2} \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{I}_3 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{I}_3} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{I}_4} \mathbf{A}^0 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{I}_5} (\mathbf{a}^0 \otimes \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{a}^0 + \mathbf{a}^0 \tilde{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{a}^0) \right. \\ & + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{I}_6} \mathbf{B}^0 + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{I}_7} (\mathbf{b}^0 \otimes \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{b}^0 + \mathbf{b}^0 \tilde{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{b}^0) + \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{I}_8} (\mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{b}^0) (\mathbf{a}^0 \otimes \mathbf{b}^0 \\ & \left. + \mathbf{b}^0 \otimes \mathbf{a}^0) \right] \end{aligned} \quad (B.48)$$

De esta fórmula hay que destacar que los términos $\partial \tilde{\psi} / \partial \tilde{I}_4 \mathbf{A}^0$ y $\partial \tilde{\psi} / \partial \tilde{I}_6 \mathbf{B}^0$ caracterizan la contribución de las tensiones sufridas en la dirección de las fibras y su significado físico es la tensión necesaria para alargar las mismas.

B.3.3. - Función densidad de energía de deformación con fibras

Si se parte de la descomposición aditiva de la función de densidad de energía de deformación (B.37), y se aplican las simplificaciones explicadas anteriormente, se reescriben cada una de las contribuciones por separado. Habitualmente, y por simplicidad, únicamente se consideran los invariantes \tilde{I}_4 y \tilde{I}_6 , ya que son los únicos que tienen un significado físico claro.

Para un modelo hiperelástico con fibras, Gardiner [18] propone una ψ_{vol} :

$$\psi_{vol} = \frac{1}{2D} \ln(J)^2 \quad (B.49)$$

donde D es la inversa del módulo de compresibilidad, $D = \frac{1}{k}$.

Respecto a la componente isocórica de la función densidad de energía de deformación, tiene dos contribuciones separadas: una es la aportación de la matriz sólida y otra la de las fibras de la forma:

$$\psi_{ich} = \psi_{iso} + \psi_{ani} \quad (B.50)$$

La aportación de la matriz sólida ψ_{iso} , para la cual Holzapfel [19] propone un modelo material tipo Mooney-Rivlin [20], basado en el primer invariante de deformación que se denomina modelo Neo-Hookeano, es:

$$\psi_{iso} = \frac{C_1}{2}(\tilde{I}_1 - 3) \quad (B.51)$$

donde C_1 es una constante neo hookeana determinada de forma experimental y que en elasticidad lineal se identifica con el módulo de cizalladura G .

Por otro lado, la aportación de las fibras de colágeno, que propone para el modelo Holzapfel [21], es:

$$\psi_{ani}(\tilde{I}_4, \tilde{I}_6) = \frac{k_1}{2k_2} \exp\{[k_2(\tilde{I}_4 - 1)^2] - 1\} + \frac{k_1}{2k_2} \exp\{[k_2(\tilde{I}_6 - 1)^2] - 1\} \quad (B.52)$$

B.3.4. - Aplicación práctica al modelo en estudio

Una vez explicado el fundamento teórico, se pasa a explicar cómo se ha introducido dicha disposición en el modelo de ABAQUS. Se lleva a cabo a través de un programa en MATLAB, que genera los vectores de orientación de las fibras, y posteriormente se pasa al programa TEC-PLOT a fin de obtener los gráficos necesarios.

Para poder ejecutar el programa creado en MATLAB, se tienen que introducir en él todas las coordenadas de cada elemento de la malla que componen la arteria diseñada en el modelo de ABAQUS.

Una vez realizado este paso, se procede a la generación de los ficheros que contienen los vectores de orientación de las fibras. Para ello, se necesita conocer los lugares por los que tiene que pasar una fibra, calculados mediante los puntos de Gauss de cada uno de los elementos de malla. Posteriormente, para cada uno de los puntos de Gauss, se hacen pasar dos fibras, con la misma dirección pero en sentido contrario, ya que la estructura real de la arteria está formada por dos familias de fibras (apartado B.3.1). Por tanto, el fichero que se genera está compuesto por las coordenadas correspondientes a cada fibra colocadas en cada uno de los elementos de malla.

Una vez realizados los cálculos y obtenidos los ficheros necesarios para poder realizar las gráficas, se pasa a utilizar el programa TEC-PLOT, que plasmará de una forma gráfica todos los resultados obtenidos por el anterior proceso.

En las gráficas se pueden observar las direcciones de las fibras. Será el usuario quien elija el ángulo θ que forman las dos familias de fibras. Debido a que el modelo diseñado

tiene un elevado número de elementos en la malla, no se pueden apreciar con nitidez los resultados, por lo que se realizó un modelo con las mismas características pero con menos elementos en la malla, para que se puedan observar algunos ejemplos de diferentes direcciones con distintos valores del ángulo θ , como se muestran en las Figuras B.7 y B.8.

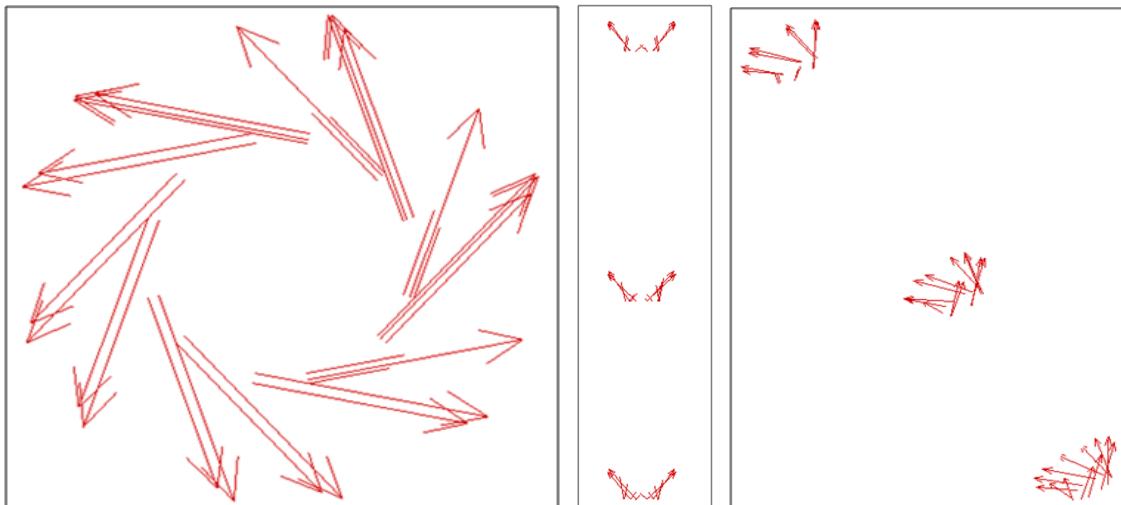


Figura B.7: Generación de las fibras en el plano XY, YZ o XZ y en 3D, respectivamente, para un ángulo $\theta = 45^\circ$.

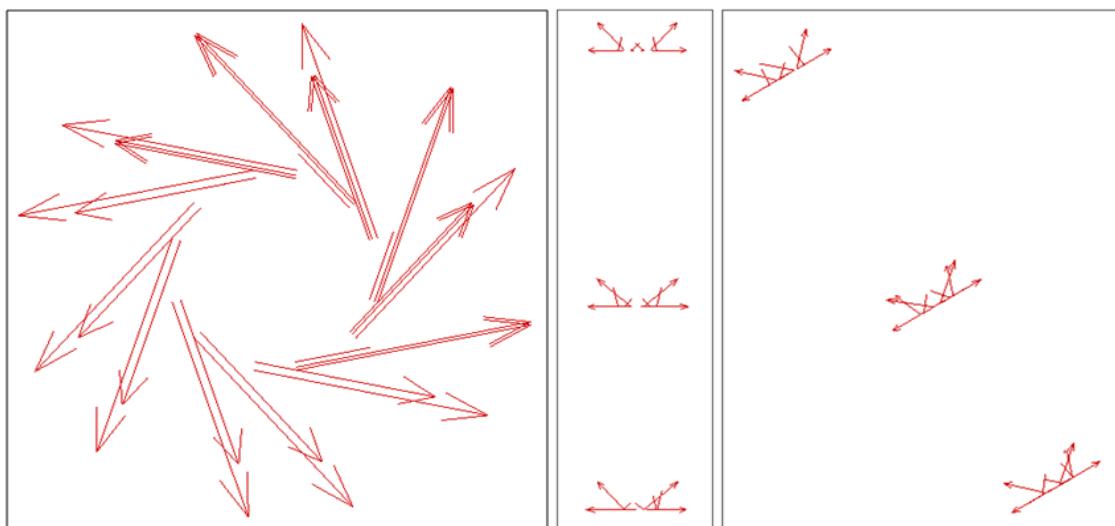


Figura B.8: Generación de las fibras en el plano XY, YZ o XZ y en 3D, respectivamente, para un ángulo $\theta = 90^\circ$.

B.4. - MODELO DE DAÑO

El modelo estructural de daño usado en este trabajo es capaz de describir el reblandecimiento del material cuando es sometido a situaciones no fisiológicas mediante variables internas para describir situaciones con efectos irreversibles. Para tratar comportamientos cercanos a la fractura, se deberían utilizar otras técnicas como los modelos de cohesión, ya que la convergencia de los modelos de daño falla, aunque tales técnicas sobrepasan el alcance de este trabajo.

El modelo de daño empleado en este trabajo usa el concepto de variables internas, que proporciona una descripción general de los materiales sometidos a efectos irreversibles y que, además, debe cumplir la inecuación de Clausius-Planck, expresada en su forma material y sin efectos térmicos como:

$$D = -\dot{\psi} + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \geq 0 \quad (\text{B.53})$$

donde D es la disipación interna y (\cdot) es la derivada temporal.

Ya que la parte volumétrica está relacionada con el contenido de agua en los tejidos blandos, se puede suponer que el daño sólo se ve afectado por la parte desviadora, por lo que las componentes de la energía libre se pueden escribir:

$$\psi_{iso}(\bar{I}_1) = [1 - D_m]\psi_{0,iso}(\bar{I}_1) \quad (\text{B.54})$$

$$\psi_{ani} = [1 - D_{f_4}]\psi_{0,ani}(\bar{I}_4) + [1 - D_{f_6}]\psi_{0,ani}(\bar{I}_6) = [1 - D_{f_4}]$$

$$\frac{k_1}{2k_2} \exp\{[k_2(\tilde{I}_4 - 1)^2] - 1\} + [1 - D_{f_6}] \frac{k_1}{2k_2} \exp\{[k_2(\tilde{I}_6 - 1)^2] - 1\} \quad (\text{B.55})$$

donde $[1 - D_i]$ ($i = m, f_4, f_6$) es un factor de reducción y $D_i \in [0,1]$ es un incremento monótono de la variable interna de daño [22]. Asociado a la matriz (m) y a cada familia de fibras (f_4, f_6), $\psi_{0,i}$ es el término efectivo de la función densidad de energía de deformación de la matriz o las fibras sin daño.

Para verificar la desigualdad de Clausius-Plank, $D = f\dot{D} \geq 0$, se debe cumplir que $f_i = -\partial\psi_i(\bar{I}_i)/\partial D \geq 0$. La fuerza termodinámica f es la conjugada de la variable interna D , de manera que el proceso podría ser controlado por f en lugar de por D [22 y 23].

Se define la ecuación de evolución del daño en términos de deformaciones; por lo tanto, la energía libre en la dirección de integración sólo será función de los invariantes modificados ($\bar{I}_1, \bar{I}_4, \bar{I}_6$). La variable de daño D viene dada por la ecuación irreversible de evolución

$$\theta_i = \sqrt{2\psi_{0,i}(\bar{I}_i(s))} \quad (\text{B.56})$$

donde $\bar{I}_i(s)$ son cada uno de los invariantes ($\bar{I}_1, \bar{I}_4, \bar{I}_6$) en el pseudo-tiempo $s \in \mathbb{R}^+$.

La fuerza máxima termodinámica se logra en todo el historial de cargas.

$$\theta_i^* = \max_{s \in (-\infty, t)} \sqrt{2\psi_{0,i}(\bar{I}_i(s))} \quad (\text{B.57})$$

Entonces, el criterio de daño referido viene determinado por la condición:

$$\phi_i(\bar{I}_i(s), \theta_{s,i}^*) = \sqrt{2\psi_{0,i}(\bar{I}_i(s))} - \theta_i^* \leq 0 \quad (B.58)$$

Lo que conduce a dos diferentes situaciones: si $\phi_i < 0$, no existe daño; y si $\phi_i = 0$, se define la superficie de daño. Hay que tener en cuenta que la situación de $\phi_i > 0$ es imposible, ya que en ese caso se modifica $\theta_{s,i}^*$. La actualización de esta superficie de daño se produce cuando la energía libre de un punto determinado del material es superior a θ_i^* . Con lo que se puede definir la normal a la superficie de daño en el espacio como $N_i = \partial \mathbf{c} \phi_i$, donde se pueden encontrar las siguientes situaciones:

$$\phi_i \leq 0 \quad y \quad \begin{cases} N_i: \dot{\mathbf{C}} < 0 \\ N_i: \dot{\mathbf{C}} = 0 \\ N_i: \dot{\mathbf{C}} > 0 \end{cases} \quad (B.59)$$

Que corresponden, tomando la terminología de la plasticidad [24], a estados de descarga, de carga neutra y de carga respectivamente. La anterior ecuación necesita, con el objetivo de completar la definición del modelo, la ecuación de evolución de la variable de daño D

$$\frac{dD_i}{dt} = \begin{cases} h_i(\theta_i) \dot{\theta}_i & \text{si } \phi_i = 0 \quad y \quad N_i: \dot{\mathbf{C}} > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (B.60)$$

donde $h_i(\theta_i) = dD_i/d\theta_i = -dg_i/d\theta_i$ son las funciones que caracterizan la evolución del daño en el material.

Para el caso particular de este proyecto, el factor de integración se define a partir de la función sigmoide:

$$g = [1 - D] = \frac{1}{[1 + \exp[a[\theta - c]]]} \quad (B.61)$$

donde el parámetro a se usa para definir la pendiente, mientras que c mide el centro de la función.

B.5. - FORMULACIÓN DÉBIL Y LINEALIZACIÓN

B.5.1. - Principio variacional

La formulación de elementos finitos está basada en un principio variacional que describe la energía total del sistema. Una estructura variacional está basada en un funcional escalar dependiente de una o varias variables desconocidas, de forma que la solución al problema elástico es aquella que hace mínimo este funcional. Por tanto, es la que asegura que la energía del sistema alcanza un mínimo en el punto solución [25].

El funcional Π definido en términos de φ tiene la expresión:

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \{\psi(\mathbf{X}, \mathbf{C}(\varphi))\} dV + \Pi_{ext}(\varphi) \quad (B.62)$$

donde Π_{ext} es la energía potencial de la carga exterior en la configuración inicial y está definida de la siguiente manera:

$$\Pi_{ext}(\varphi) = - \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{B} \varphi dV - \int_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \varphi dA \quad (B.63)$$

en la que ρ_0 es la densidad en la configuración inicial, \mathbf{B} son las fuerzas volumétricas y $\bar{\mathbf{t}}$ son las cargas exteriores aplicadas sobre el contorno $\partial\Omega_t$.

La primera variación del funcional Π respecto a φ en la dirección η es:

$$D_{\varphi} \Pi \cdot \eta = \int_{\varphi(\Omega)} \boldsymbol{\sigma} : [\nabla \eta] - g_{ext}(\eta) dV = 0 \quad (B.64)$$

donde $g_{ext}(\eta)$ es el trabajo virtual de las cargas exteriores en la configuración espacial.

El resultado de la linealización de la ecuación variacional (B.64) sobre la configuración φ es:

$$\delta [D_{\varphi} \Pi \cdot \eta] = \int_{\varphi(\Omega)} \nabla \eta : \{\nabla(\Delta \mathbf{u}) \bar{\boldsymbol{\sigma}} + [\tilde{\mathcal{C}} + p(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - 2\mathbb{I}] : \nabla(\Delta \mathbf{u})\} dV \quad (B.65)$$

en la que $\delta[\cdot]$ es la notación de la derivada en el punto φ en la dirección de variación $\Delta \mathbf{u}$.

Se obtiene la solución en $\varphi_0 + \Delta \mathbf{u}^h$ cuando se aplica una linealización consistente del modelo de desplazamientos generalizados \bar{G}_e en φ_0 al tomar una estimación inicial para $\Delta \mathbf{u}^h$ y al conocer la configuración de referencia φ_0 . Para estimar $\Delta \mathbf{u}^h$ se realizan unas aproximaciones de forma iterativa a través del uso de método de Newton-Raphson. Así, el resultado de la linealización es [26]:

$$L_{\varphi_0} \bar{G}_e(\varphi) = \bar{G}_e(\varphi_0) + D\bar{G}_e(\varphi_0) \cdot (\varphi - \varphi_0) = \bar{G}_e(\varphi_0) + D\bar{G}_e(\varphi_0) \cdot (\Delta \mathbf{u}^h) \quad (B.66)$$

Una vez llegado a este punto, puede obtenerse la linealización del modelo de desplazamientos generalizados:

$$\begin{aligned} DG_e \cdot \Delta \mathbf{u} &= \int_{V_{ref}} \{[\nabla(\Delta \mathbf{u}) \boldsymbol{\sigma}] : \nabla \eta\} J_{ej\xi} d\xi + \\ &+ \int_{V_{ref}} \{\nabla^s(\Delta \mathbf{u}) : [p(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2\mathbb{I}) + \tilde{\mathcal{C}}_{ich}] : (\nabla^s \eta)\} J_{ej\xi} d\xi \end{aligned} \quad (B.67)$$

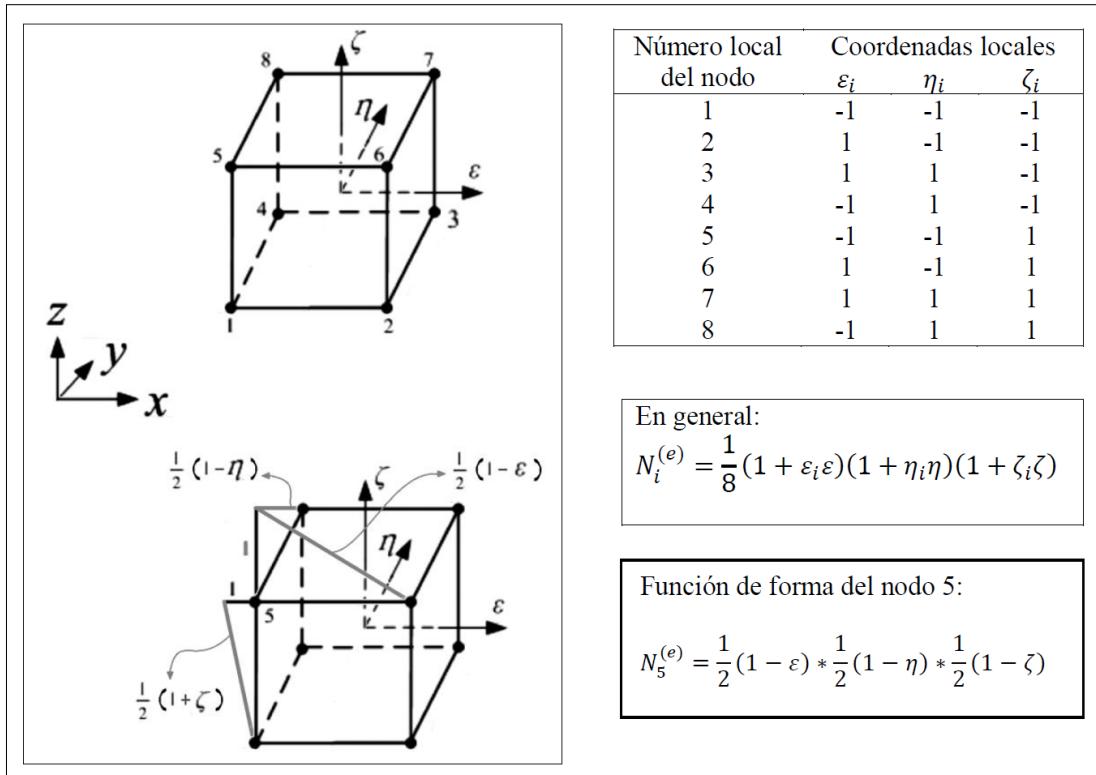


Figura B.9: Hexaeder trilineal y funciones de forma.

B.5.2. - Implementación en elementos finitos

A la hora de implementar la fórmula anteriormente comentada para un modelo en tres dimensiones, es necesario escribir:

$$\eta = [\eta_x \ \eta_x \ \eta_x]^T, \quad \mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} N_{k,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{k,z} \\ N_{k,y} & N_{k,x} & 0 \\ 0 & N_{k,z} & N_{k,y} \\ N_{k,z} & 0 & N_{k,x} \end{bmatrix} \quad (\text{B.68})$$

$$\nabla^s \eta = \sum_{k=1}^{N_{\text{nodos}}} \mathbf{B}_k \eta_k =$$

$$= [\eta_{x,x} \ \eta_{y,y} \ \eta_{z,z} \ \eta_{x,y} + \eta_{y,x} \ \eta_{y,z} + \eta_{z,y} \ \eta_{x,z} + \eta_{z,x}]^T \quad (\text{B.69})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz}]^T \quad (\text{B.70})$$

Para poder obtener la matriz geométrica y material correspondiente a la linealización del modelo de desplazamientos generalizados (B.67), es necesario reescribir las siguientes magnitudes de la forma [26]:

$$\widehat{\mathbf{B}}_k = \begin{bmatrix} N_{k,x} & 0 & 0 \\ N_{k,x} & 0 & 0 \\ N_{k,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{k,x} & 0 \\ 0 & N_{k,x} & 0 \\ 0 & N_{k,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{k,x} \\ 0 & 0 & N_{k,x} \\ 0 & 0 & N_{k,x} \end{bmatrix} \quad (B.71)$$

$$\begin{aligned} \nabla^s \boldsymbol{\eta} &= \sum_{k=1}^{N_{\text{nodos}}} \mathbf{B}_k \boldsymbol{\eta}_k = \\ &= [\eta_{x,x} \ \eta_{x,y} \ \eta_{x,z} \ \eta_{y,y} \ \eta_{y,z} \ \eta_{y,x} \ \eta_{z,z} \ \eta_{z,y} \ \eta_{z,x}]^T \end{aligned} \quad (B.72)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (B.73)$$

Por tanto, la rigidez geométrica puede escribirse como:

$$\int_{V_{\text{ref}}} \{ [\nabla(\Delta \mathbf{u}) \boldsymbol{\sigma}] : \nabla \boldsymbol{\eta} \} J_e j_\xi d\xi = \sum_{i=1}^{N_{\text{nodos}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{nodos}}} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{K}_{ij}^G \Delta \mathbf{u}_j \quad (B.74)$$

donde \mathbf{K}^G es la matriz geométrica en un análisis no-lineal en desplazamientos, definida por:

$$\mathbf{K}_{ij}^G = \int_{V_{\text{ref}}} \widehat{\mathbf{B}}_i^T \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_e \widehat{\mathbf{B}}_j J_e j_\xi d\xi \quad (B.75)$$

De la misma manera, se obtiene la rigidez del material como:

$$\int_{V_{\text{ref}}} \{ \nabla^s(\Delta \mathbf{u}) : [p(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2\mathbb{I}) + \tilde{\mathbf{C}}_{ich}] : (\nabla^s \boldsymbol{\eta}) \} J_e j_\xi d\xi = \sum_{i=1}^{N_{\text{nodos}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{nodos}}} \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{K}_{ij}^M \Delta \mathbf{u}_j \quad (B.76)$$

donde \mathbf{K}^M es la matriz material en un análisis no-lineal en desplazamientos, definida por:

$$\mathbf{K}_{ij}^M = \int_{V_{\text{ref}}} \widehat{\mathbf{B}}_i^T [p(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} - 2\mathbb{I}) + \tilde{\mathbf{C}}_{ich}] \widehat{\mathbf{B}}_j J_e j_\xi d\xi \quad (B.77)$$

De la misma manera que anteriormente se ha calculado $\varphi_0 + \Delta\mathbf{u}^h$ para la configuración inicial en (B.66), se va a hallar la solución para el incremento $\varphi_n + \Delta\mathbf{u}_{n+1}$, conocida la configuración φ_n en el tiempo t_{n+1} . El punto inicial es la linearización consistente del modelo de desplazamientos generalizado G_e en φ_n para estimar $\Delta\mathbf{u}_{n+1}$ en el tiempo t_{n+1} . A esta estimación también se le aplica el método de Newton, cuyo resultado es [26]:

$$L_{\varphi_n} G_e(\varphi) = G_e(\varphi_n) + D G_e(\varphi_n) \cdot (\Delta\mathbf{u}_{n+1}) \quad (\text{B.78})$$

La solución para $\Delta\mathbf{u}_{n+1}$ es la calculada iterativamente a través del método de Newton:

$$\Delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k+1)} = \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{(k)} + \Delta(\Delta\mathbf{u})_{n+1}^{(k+1)} \quad (\text{B.79})$$

donde $\Delta(\Delta\mathbf{u})_{n+1}^{(k+1)}$ es el incremento del desplazamiento en la iteración $k + 1$.

El desarrollo de la linearización de la expresión (B.78) en el entorno de una configuración $\varphi = \varphi_n$ a nivel elemental da lugar a la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{nodos}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{nodos}}} (\mathbf{K}^M(\varphi_n^k) + \mathbf{K}^G(\varphi_n^k))_{ij} (\Delta(\Delta\mathbf{u}_{n+1}^{k+1}))_j = \sum_{i=1}^{N_{\text{nodos}}} \left(\mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}}(\varphi_n^k) \right)_i \quad (\text{B.80})$$

donde $\Delta\mathbf{u}$ es la estimación inicial del incremento hacia la configuración desconocida φ_{n+1} . Si se resuelve $\Delta\mathbf{u}$, la configuración en cada iteración $n + 1$ se aproxima mediante:

$$\varphi_{n+1}^{k+1} = \varphi_{n+1}^k + \Delta\mathbf{u}_{n+1}^{k+1} \quad (\text{B.81})$$

Una forma simplificada de escribir la expresión (B.80) se muestra a continuación:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}_{n+1})_{ij} (\Delta\mathbf{u}^n) = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{u}_n) \quad (\text{B.82})$$

donde \mathbf{u}_n es la configuración conocida en el paso n y $\Delta\mathbf{u}^n$ es el incremento inicial para la configuración desconocida $n + 1$.

ANEXO C: MODELADO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DEL PINZAMIENTO DE LA ARTERIA AORTA

En este capítulo se va a realizar un resumen de todos los pasos efectuados para diseñar los modelos de ABAQUS. Ha sido necesaria la elaboración de dos modelos distintos, ya que el objetivo de este estudio es comparar los resultados con dos tipos de pinzas diferentes para comprobar cuál es la que minimiza los efectos secundarios perjudiciales del pinzado en la cirugía.

La diferencia fundamental entre los dos modelos es la geometría y la posibilidad de deformación de las pinzas utilizadas para realizar el pinzamiento del vaso, ya que el modelado de la arteria es el mismo para ambos.

C.1. - INTRODUCCIÓN

Para explicar el diseño de los modelos, el primer paso consiste en la descripción de la geometría de la arteria y la de los dos tipos de pinzas diseñados. Luego, se explican las características del mallado propuesto, adaptadas a las diferentes geometrías de las pinzas y del vaso, con una especial importancia a la zona en que se produce el pinzamiento, de donde se obtendrán los resultados finales. Posteriormente, se continúa con los tipos de materiales utilizados para cada una de las partes integrantes del diseño. En el punto siguiente, se detallan las zonas donde se define el contacto entre las diferentes pinzas y la arteria. Por último, se describen las condiciones de contorno y cargas necesarias para que cada uno de los modelos pueda realizar el movimiento del pinzamiento con la arteria presurizada [1].

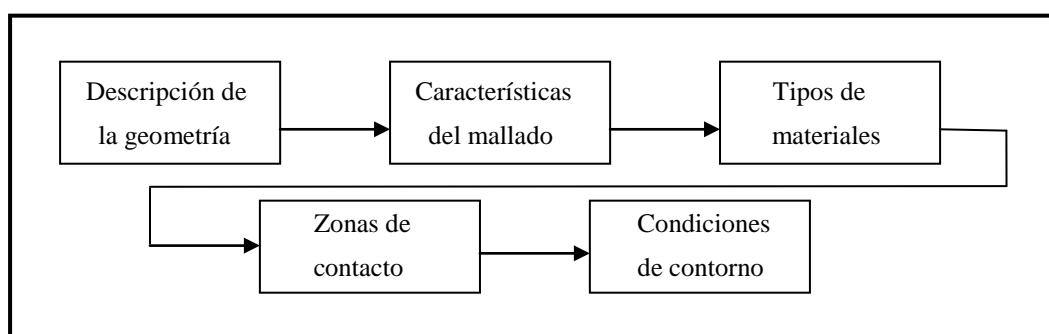


Figura C.1: Diagrama de bloques del proceso llevado a cabo para realizar el modelado.

C.2. - CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DE LOS MODELOS

C.2.1. - Características geométricas del diseño de la arteria

El diseño del vaso se ajusta a las dimensiones reales de la arteria aorta de una rata, animal de experimentación utilizado en las geometrías de las pinzas usadas. Para efectuar el modelo de la arteria, se parte de tres circunferencias concéntricas que posteriormente se extruyen, por lo que el resultado obtenido será de dos cilindros concéntricos. El exterior modela la adventicia y el interior la media, que son las principales capas de una arteria real; la íntima se ha despreciado por el mínimo aporte al soporte mecánico [Anexo A].

El diámetro externo e interno es de 2 y 1.9 mm, y el espesor de cada capa será de 0.05 mm. La longitud del vaso es de 25 mm, medida necesaria para poder realizar los análisis y observar los efectos que se producen en el vaso despreciando los efectos de borde.

A continuación, se muestra el resultado en las Figuras C.2(a) y C.2(b), vistas realizadas desde distintos planos.

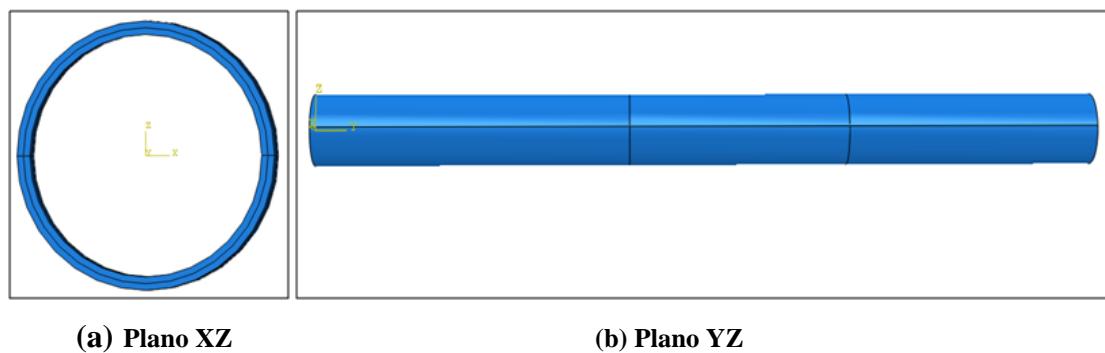


Figura C.2: Modelado de la arteria.

C.2.2. - Pinzas con muelle

El siguiente paso consiste en describir el diseño de las pinzas. Para ello se realizan los dos modelos diferentes que se desean comparar.

En primer lugar, antes de explicar la geometría del diseño realizado, se muestra el modelo real de pinzas mediante unas fotografías. En las Figuras C.3(a) y C.3(b) se puede apreciar la forma real de las pinzas utilizadas en este modelo, y además, se compara con una moneda de 1 céntimo de euro para que se pueda apreciar el tamaño de las mismas.



Figura C.3: Modelo real de las pinzas con muelle.

Para modelar las piezas mediante elementos finitos es necesario realizar una serie de hipótesis y simplificaciones para que el diseño en ABAQUS reproduzca el comportamiento de las mismas sin un elevado coste computacional.

La primera simplificación ha consistido en realizar las placas planas, sin ninguna discontinuidad, lo cual no sucede en el modelo real, tal y como puede observarse en las Figuras C.3(a) y C.3(b). Esto no afecta a los resultados que se obtengan, debido a que el pinzado real se efectúa con la zona plana, pero se consigue disminuir la complejidad del problema.

Por otro lado, el muelle que aparece en el modelo real ha sido sustituido por cuatro condiciones de contorno, que se explican en el apartado C.6.2, con el fin de que su comportamiento se asemeje lo más posible al real.

El primer modelo de pinzas se realiza a través de dos placas rectangulares en 3D, en uno de cuyos extremos se añade una pieza semicircular. Dichas placas tienen una forma similar, pero sus longitudes son diferentes. La forma de ambas se puede apreciar en la Figura C.4.

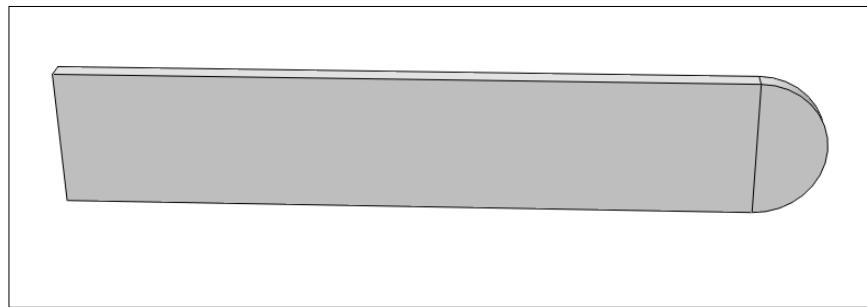


Figura C.4: Modelado de las placas del primer diseño.

Las placas tienen una altura de 1.7 mm y un grosor de 0.25 mm. La diferencia entre las placas diseñadas es su longitud: mientras que para la placa situada en la parte superior de la arteria posee una longitud de 20.5 mm, la de la parte inferior sólo se modela con una longitud de 8.5 mm, Figuras C.5(a) y C.5(b). Esta necesidad está

relacionada con las condiciones de contorno del modelo que se explicarán en el apartado C.6.2.

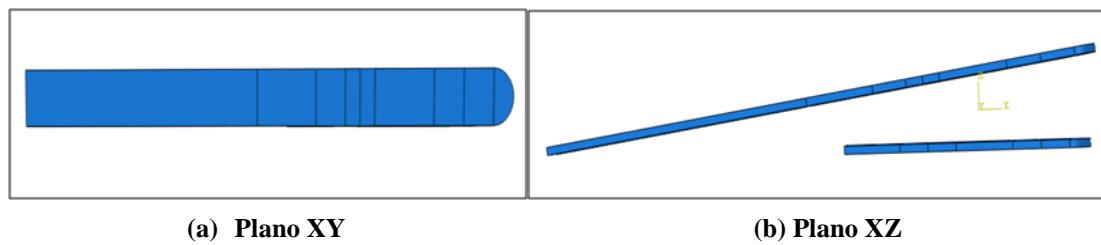


Figura C.5: Diseño del primer modelo de pinzas.

C.2.3. - Segundo modelo de pinzas

Como en el caso anterior, se muestra el modelo real por medio de unas fotografías, Figuras C.6(a) y C.6 (b), donde se puede apreciar la forma de las pinzas del segundo modelo. Además, en la Figura C.6 (b) se comparan las pinzas de ambos modelos para que pueda apreciarse el tamaño.

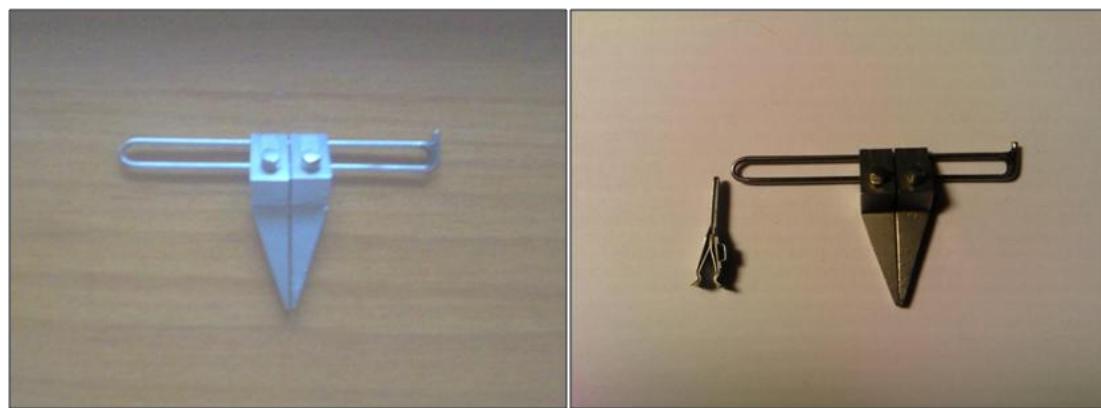


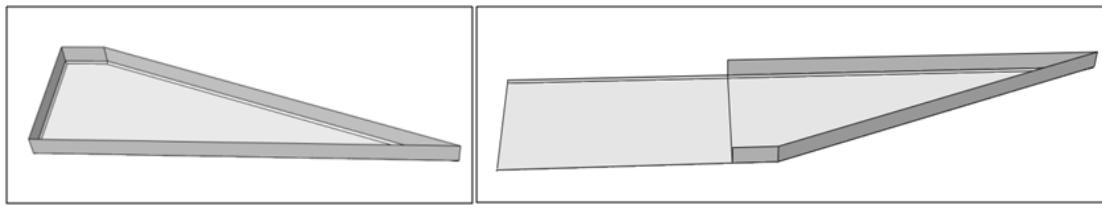
Figura C.6: Modelo real del segundo modelo de pinzas.

Como en el caso de las pinzas con muelle, también se han sustituido los mecanismos reales del movimiento por unas condiciones de contorno adecuadas para que se pueda llevar a cabo el pinzamiento del vaso, apartado C.6.3.

En este caso, en el que la deformación a flexión de la pinza es despreciable, se ha realizado un modelo con dos placas rígidas en 2D con forma triangular, además de unos salientes a lo largo de toda la placa simulando los contornos de la pinza. Ambas piezas se unen mediante un redondeo de 0.08 mm.

La forma de las placas para este modelo es la que se muestra en las Figuras C.7(a) y C.7(b). La parte triangular es igual para las dos placas; el lado más largo tiene una longitud de 14.463 mm y el más corto de 1.606 mm, y su altura es de 4.64 mm. Los salientes que se colocan a lo largo de toda la parte triangular tienen una altura de 0.72 mm. La diferencia fundamental entre la placa superior y la inferior es que la superior

posee, además, una pieza rectangular añadida, zona en la que desaparece el saliente, cuya altura coincide con la altura de la placa y cuya longitud es de 8.6 mm.

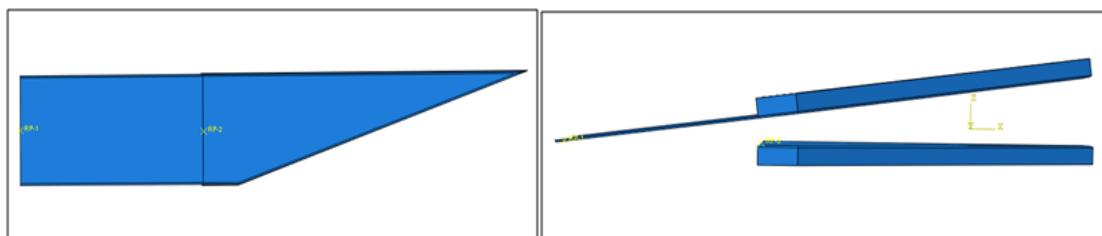


(a) Placa inferior

(b) Placa superior

Figura C.7: Modelado de las placas del segundo diseño.

Con todos los detalles descritos anteriormente, se realiza el ensamblado de las piezas cuyo resultado se puede observar en las Figuras C.8(a) y C.8(b), visto desde diferentes planos de la misma manera que para el otro modelo de pinzas.



(a) Plano XY

(b) Plano XZ

Figura C.8: Diseño del segundo modelo de placas.

C.3. - MALLADO DEL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

C.3.1. - Características del mallado de la arteria

Para realizar el mallado de la arteria se dividió el modelo en tres particiones, con el fin de lograr un tamaño de elemento más pequeño en la zona de contacto entre las placas y el vaso, particiones que también serán utilizadas para la definición del auto-contacto (apartado C.5.1) disminuyendo el número de elementos de malla cuanto mayor sea la distancia a dicha zona. Con esto se pretende obtener la mayor información en la zona de contacto y no aumentar de forma excesiva el número de elementos de la malla para reducir el coste computacional de cada modelo.

La malla posee 103320 elementos hexaédricos del tipo C3D8R. Debido al gran número de ellos, es importante poder disminuir los cálculos en la zona alejada del estudio, y de ahí la importancia de ir disminuyéndolos cuanto mayor sea la distancia a la zona de contacto entre las piezas; de lo contrario, el número de elementos del modelo sería mucho mayor. La distribución de los mismos a lo largo de la arteria es la que se explica a continuación.

En las circunferencias que definen los cilindros se impone un total de 250 elementos dispuestos en la sección transversal con tres elementos a lo largo del espesor en la capa adventicia y cuatro en la media.

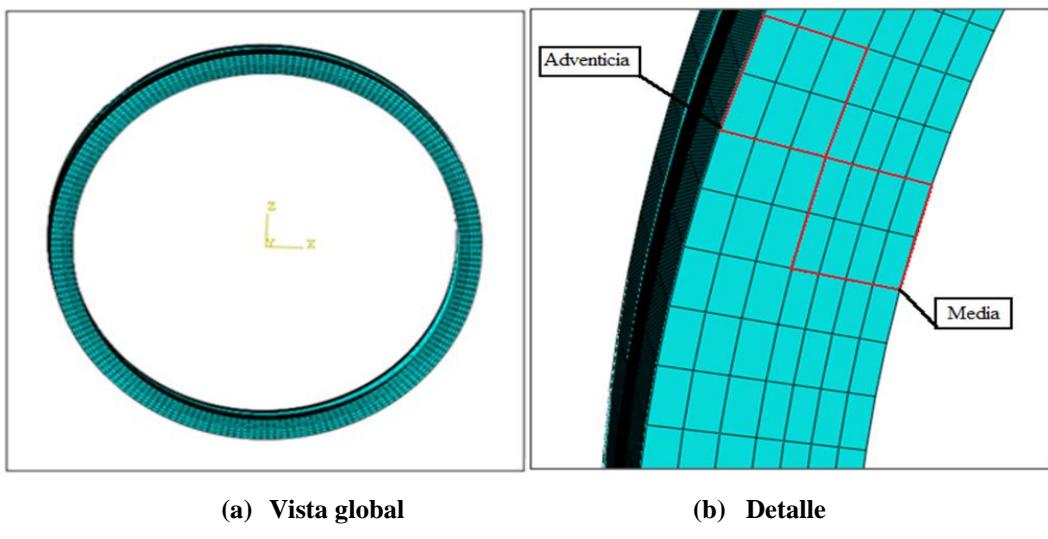


Figura C.9: Mallado transversal de la arteria.

Respecto a la vista longitudinal, se realizan tres particiones. En la central, donde se produce el contacto con las pinzas, se distribuyen 70 elementos. En las laterales se imponen 16 y 20 elementos a lo largo del eje longitudinal, ya que en ellas no existe contacto. En la Figura C.10 se aprecia el resultado del mallado para las tres particiones descritas.

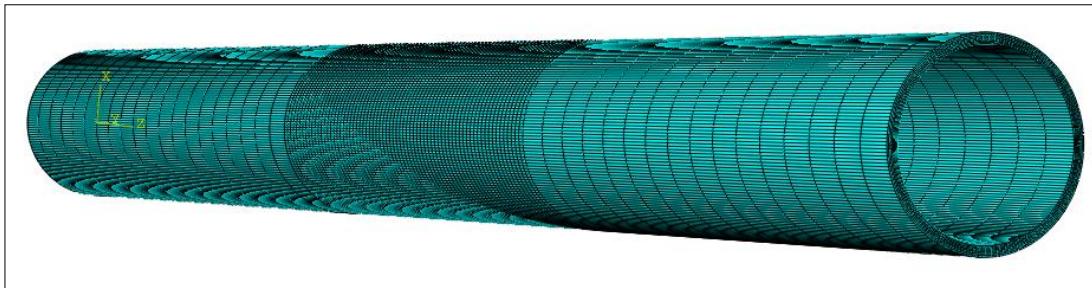


Figura C.10: Mallado de la arteria.

C.3.2. - Características del mallado para el primer modelo de pinzas

Para el mallado de las pinzas se vuelven a utilizar los elementos del tipo C3D8R y la forma hexaédrica de los mismos, aunque en la parte curva tienen que adaptarse a la geometría de la pinza, por lo que no pueden conservar la forma regular que poseen a lo largo de la parte rectangular, como se aprecia en la Figura C.11. De la misma manera que para la arteria, también se ha efectuado una serie de particiones al objeto, con el fin de utilizar el menor número de elementos de malla sin pérdida de precisión. De ahí que dichos elementos se concentren más en la zona de contacto entre la arteria y las placas y disminuyan su presencia cuanto mayor sea la distancia al mismo.

Posteriormente, se pasa a explicar de manera más concreta el mallado de las pinzas por separado.

El mallado de la placa situada en la parte inferior posee 29105 elementos repartidos en siete particiones diferentes, como muestra la Figura C.11, de las que la central posee 8400 elementos, ya que es donde se produce el contacto, y la más alejada posee 2380 elementos debido a que las variaciones con la posición inicial serán mínimas.

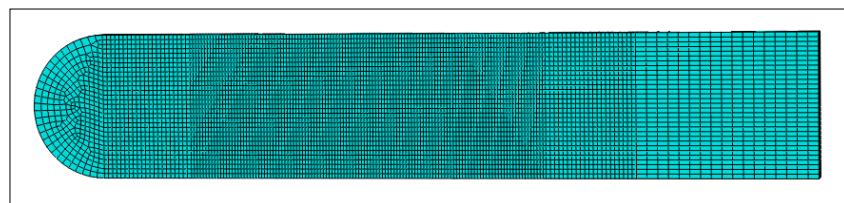


Figura C.11: Mallado de la placa inferior.

De la misma manera que antes, se realiza el mallado de la placa situado por encima de la arteria; pero en este caso, como posee una longitud mayor, el número de elementos necesarios ha sido de 39410, repartidos en nueve particiones en lugar de siete, de las que la central posee 8400 elementos y la más lejana a la zona de contacto posee 2940 elementos.

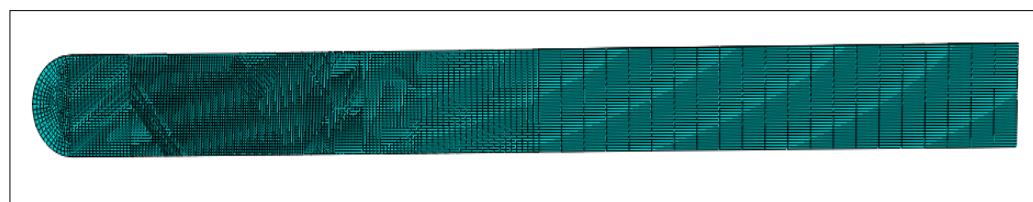


Figura C.12: Mallado de la placa superior.

Una vez realizadas todas las explicaciones, se pasa a adjuntar la imagen de las tres piezas ensambladas, Figura C.13(a); además, se muestra en la Figura C.13(b) un detalle de la zona de contacto que existe entre ellas.



(a) Vista completa

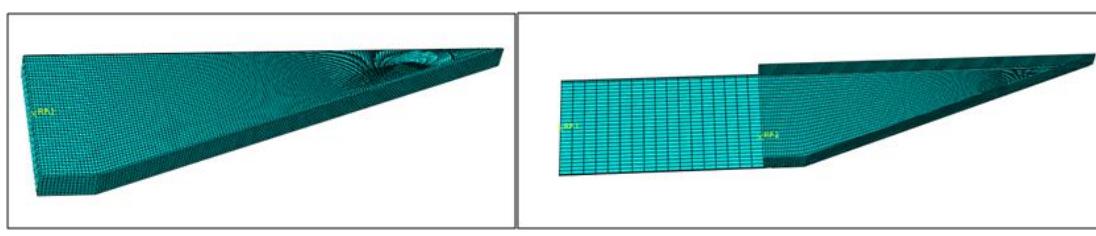
(b) Detalle zona de contacto

Figura C.13: Mallado de las tres piezas que forman el diseño.

C.3.3. - Características del mallado para el segundo modelo de pinzas

En este caso, los elementos utilizados para el mallado de las pinzas del segundo modelo son del tipo R3D4 (sólo rígido) y poseen una forma tanto rectangular como triangular. Además, al estar definidas como sólido rígido, no se realizan particiones, con lo que el mallado tiene el mismo refinamiento a lo largo de toda la pinza. La única excepción se encuentra en la parte rectangular de la pinza superior, ya que, al estar alejada de la zona de contacto, no es necesaria la existencia de un número elevado de elementos de malla y así no aumenta el peso del cálculo.

Todo lo anteriormente explicado se muestra en las Figuras C.14(a) y C.14(b), donde el mallado de la placa inferior consta de 8466 elementos y el de la superior posee 6808 elementos.

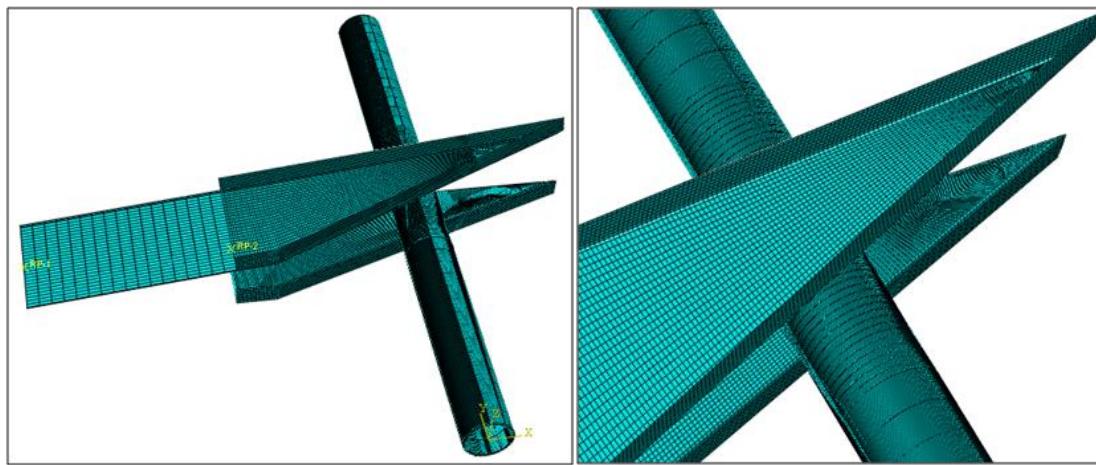


(a) Placa inferior

(b) Placa superior

Figura C.14: Mallado de las pinzas del segundo modelo.

Por último, se adjuntan las Figuras C.15(a) y C.15(b), donde se aprecia el ensamblado de las tres piezas malladas y un detalle de la zona de contacto, de la misma manera que se realizó para el otro modelo de pinzas.



(a) Vista completa

(b) Detalle zona de contacto

Figura C.15: Mallado de las tres piezas que forman el diseño.

C.4. - CARACTERÍSTICAS GENERALES DE LOS MATERIALES

Para cada una de las partes que integran los dos modelos diseñados, se utiliza un tipo de material diferente: uno para cada tipo de pinza y otro para la arteria.

Con relación al material que se utiliza para el vaso, hay que hacer referencia al capítulo de caracterización del material [Anexo D], donde se explica más detalladamente la fórmula y cómo se define.

Para ello se realiza un ajuste numérico, donde se minimiza el error entre los datos experimentales y los analíticos. Se divide el proceso en dos partes: una donde se realiza el ajuste elástico y otra donde se hallan los parámetros de daño.

El resultado de los parámetros elásticos, obtenidos por medio del ajuste entre los datos experimentales y los teóricos, se muestra en la Tabla C.1:

C_1	K_1	K_2	$\alpha(\text{rad})$	ρ	Error
53.87021	225	0.5	0.52359	0.18	0.00997

Tabla C.1: Parámetros elásticos del material usado para el vaso.

En el siguiente paso se calculan los parámetros de daño en función de los elásticos, hallados anteriormente, y la función densidad de energía de deformación expresada de la forma:

$$\psi = \text{elong} * \left(\frac{K_1}{2K_2} \right) * \left(e^{K_2 * (\text{elong}^2 - 1)^2 - 1} \right) \quad (\text{C. 1})$$

donde elong se corresponde con el alargamiento que soporta el vaso en cada uno de los experimentos efectuados.

El siguiente paso consiste en determinar los parámetros de daño a través de la función de daño g [Anexo D], cuya expresión es la siguiente:

$$g = \frac{1}{1 + e^{(C_1 * (\theta - C_2))}} \quad (\text{C. 2})$$

Por tanto, los valores obtenidos para los parámetros de daño a y c se adjuntan en la Tabla C.2:

a	c	Error
0.5	17.6	0.0273

Tabla C.2: Parámetros de daño del material del vaso.

Con todos estos parámetros, el material utilizado para el vaso queda completamente definido.

Respecto a las pinzas con muelle, se propone un material elástico lineal semejante al acero, definido a través del módulo de Young y el coeficiente de Poisson que se muestran en la Tabla C.3:

$E(\text{N/mm}^2)$	ν
209000	0.3

Tabla C.3: Parámetros que definen el material de las pinzas con muelle.

Como el segundo modelo de pinzas se caracteriza como sólido rígido, no es necesario definir ningún parámetro de material.

C.5. - DEFINICIÓN DE LAS ZONAS DE CONTACTO

Los diferentes contactos se definen en las zonas donde se produce el pinzamiento del vaso provocado por el cierre de las pinzas, y es el lugar en el que se van a concentrar las mayores tensiones y deformaciones; de ahí que sea la zona donde mayores problemas de convergencia pueden aparecer durante el cálculo. Por tanto, se realiza una serie de particiones tanto en la arteria como en las pinzas para no aumentar en exceso el coste computacional, particiones que se han explicado de una manera más detallada en el apartado C.3. Dichos contactos se suponen mecánicos con un coeficiente de fricción impuesto de 0.01 entre las superficies que intervienen en el contacto.

Dependiendo del lugar donde se produzca el contacto, se define de una forma u otra. En este caso existen dos contactos diferenciados: el que existe entre la capa interior de la propia arteria y el que hay entre la capa exterior de la misma y las pinzas.

C.5.1. - Contacto entre las capas de la arteria

La primera de las zonas de contacto que se define es común a ambos modelos diseñados, ya que se sitúa en la partición central de la arteria. En dicho lugar se impone un auto-contacto, contacto entre una superficie simple y ella misma, definido en la cara interna de la arteria, Figura C.16.

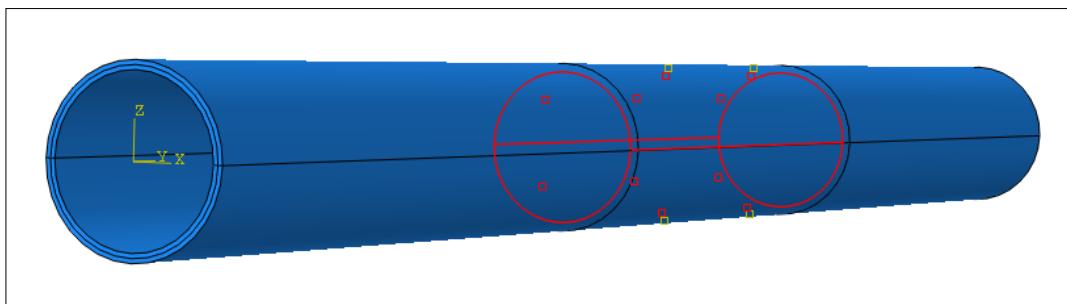


Figura C.16: Representación del contacto entre las capas que forman la arteria.

Dicho auto-contacto se produce cuando se realiza el pinzamiento del vaso, ya que la parte superior de la cara interna de la arteria entra en contacto con la inferior de la misma.

Para definir el contacto, es necesario establecer dos superficies: la maestra y la esclava. La diferencia sustancial entre ellas reside en que la superficie maestra puede penetrar en la esclava, pero no a la inversa. Por lo que la definición de éstas es importante, ya que pueden aparecer problemas de convergencia, penetración de unas superficies en otras y distorsión en los resultados. Para definir estas superficies de una forma correcta, se tiene que tener en cuenta la rigidez y el mallado de las partes que

integran el modelo. La superficie maestra debe ser la de mayor rigidez y, en el caso de materiales idénticos, la de mallado más grueso.

Debido a que el auto-contacto se realiza sobre una única superficie, ésta actúa tanto de superficie maestra como de esclava, lo que provoca un aumento de coste en el cálculo.

C.5.2. - Contacto entre la arteria y las pinzas del primer modelo

Este tipo de contacto se define entre dos superficies diferentes: entre la capa exterior de la arteria y las superficies inferiores de las particiones centrales de ambas pinzas, que son las que están en contacto con el vaso. Aquí se muestra que también en este punto son ventajosas las particiones realizadas en el diseño, ya que, si no existiesen, se debería efectuar el cálculo del contacto para toda la placa con un elevado coste computacional.

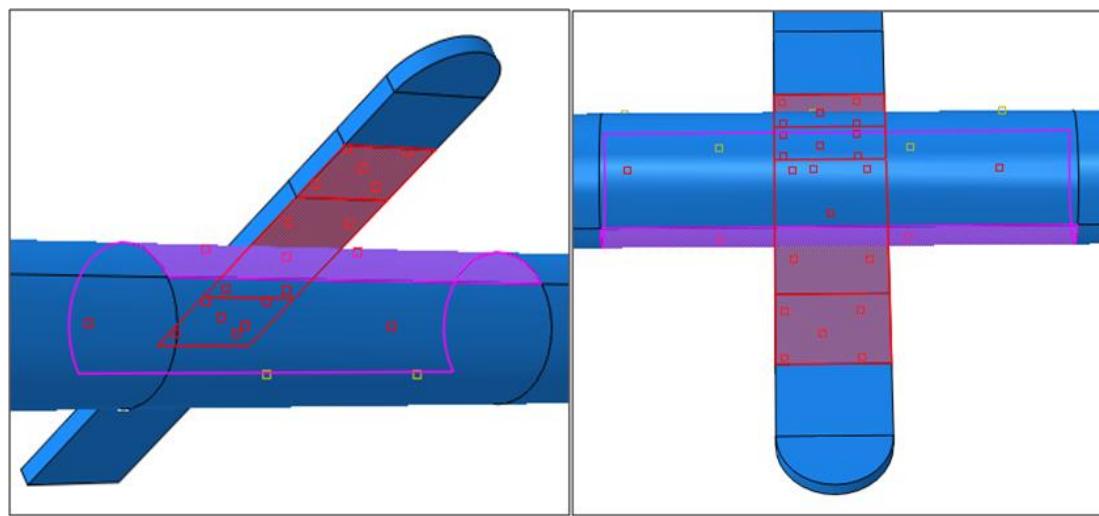


Figura C.17: Modelado del contacto entre la arteria y las pinzas del primer modelo.

Como se puede apreciar en la Figura C.17, existen dos tipos de superficies definidas: en color rojo se define la superficie maestra y en magenta la esclava. Su elección se realiza debido a que la rigidez de la placa es mayor que la de la arteria, con lo que se asegura un buen contacto entre ambas. Además, poseen un similar refinamiento de la malla.

C.5.3. - Contacto entre la arteria y las pinzas del segundo modelo

En este caso, de la misma manera que en el anterior, el contacto se define entre dos superficies diferentes: las pinzas y el vaso. La diferencia reside en que, como aquí las pinzas se definen como un sólido rígido, se impone que éstas sean las superficies maestras (color rojo) debido a su mayor rigidez. Por tanto, el vaso vuelve a ejercer de superficie esclava (color magenta). Todo esto se ilustra en la Figura C.18.

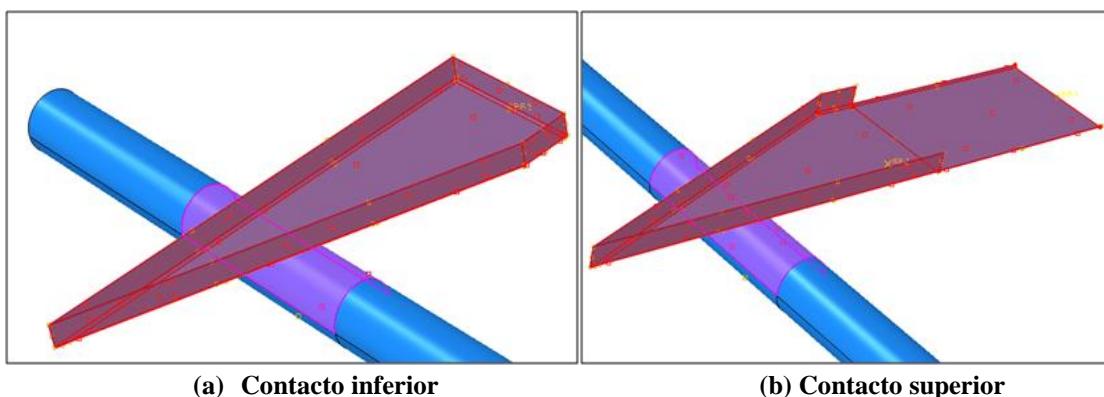


Figura C.18: Modelado del contacto entre la arteria y las pinzas del segundo modelo.

C.6.- CONDICIONES DE CONTORNO

Para establecer el pinzamiento entre las placas de los modelos y la arteria, es necesario definir las condiciones de contorno. Éstas se aplican en la arteria y otras sobre las pinzas. A continuación, se describe cada una de ellas: cuáles son sus características principales y sus puntos de aplicación.

C.6.1.- Condiciones de contorno para la arteria

Las condiciones de contorno que se han impuesto en la arteria son dos: un deslizamiento y un empotramiento. El deslizamiento se impone en uno de los extremos transversales del vaso y se encarga de impedir únicamente el desplazamiento en el eje “y”. A su vez, el empotramiento se ubica en el extremo transversal opuesto y obliga a que no se produzcan desplazamientos en ninguno de los ejes. En la Figura C.19 se pueden apreciar dichas condiciones.

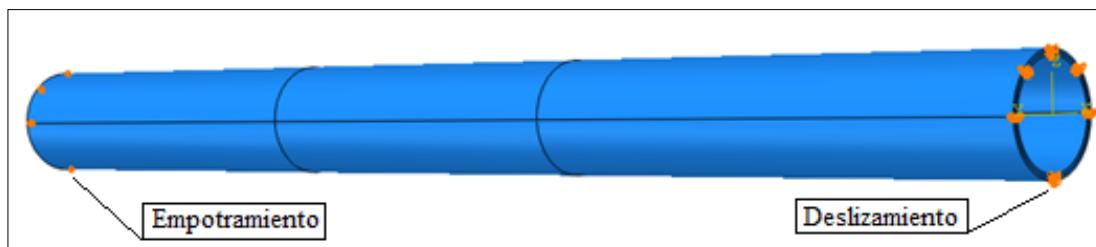


Figura C.19: Condiciones de contorno para la arteria.

C.6.2.- Condiciones de contorno del primer modelo de pinzas

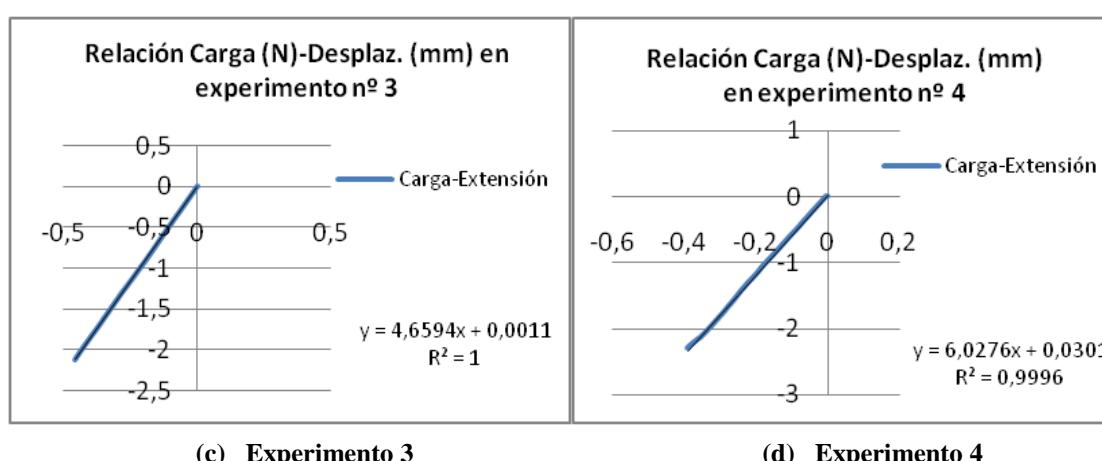
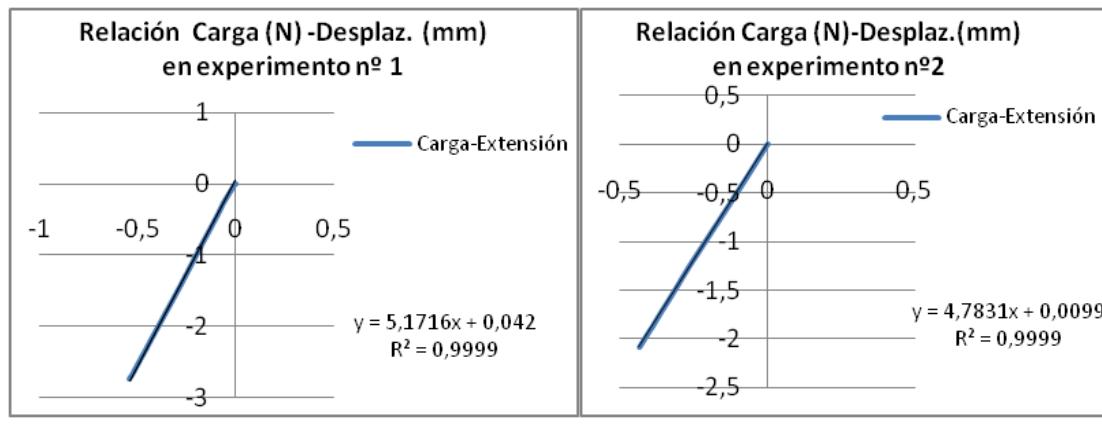
Son necesarias cuatro condiciones de contorno para las pinzas que se usan en este diseño: dos desplazamientos, uno en la placa superior y otro en la inferior, colocados en el eje de partición que define el final de la zona de contacto entre placa y arteria; un empotramiento, que impide el movimiento en puntos de la pinza inferior, y una rotación, que permite el giro de la superior para que se pueda realizar el pinzamiento.

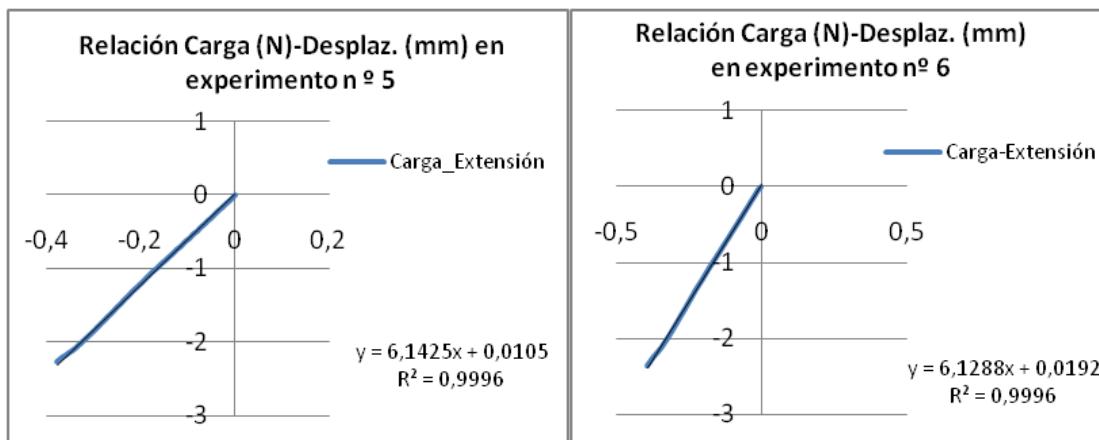
El valor de los desplazamientos necesarios para este modelo de pinzas se obtiene a través de seis pruebas experimentalmente realizadas en el laboratorio, en donde se

muestra la dependencia del desplazamiento de la pinza con la carga y la deformación que soporta el vaso. Los ensayos se realizaron en el laboratorio del I3A (Instituto de Investigación en Ingeniería de Aragón) en una máquina de ensayos uniaxial INSTRON Microtester 5848, donde se analizó la fuerza necesaria para obtener un desplazamiento de la chapa superior de la pinza.

Se realizaron en torno a unas 2000 mediciones por prueba, por lo que, para unos 2000 valores de desplazamientos, se obtienen los correspondientes a la carga y a la deformación en cada caso. Además, mediante la observación de los datos experimentales, se puede apreciar que son magnitudes directamente proporcionales: a mayor valor de desplazamiento, mayores valores de carga y de deformación soporta el vaso.

Con todos los datos obtenidos en cada experimento, se ha realizado una gráfica del desplazamiento frente a la carga; una vez obtenida esta gráfica, para poder hallar la pendiente se selecciona la parte lineal de la misma, que coincide con los primeros datos experimentales. Por tanto, repitiendo esta operación se obtienen seis gráficas diferentes con seis pendientes distintas, aunque todas del mismo rango, cuyos resultados se muestran en la Figura C.20.





(e) Experimento 5

(f) Experimento 6

Figura C.20: Gráficas de los resultados experimentales.

Con todos los valores obtenidos de cada una de las pendientes, representada en los gráficos para cada prueba, se realiza una media para obtener el valor de pendiente final, que viene dada por el siguiente valor:

$$K = \frac{5.17 + 4.78 + 4.66 + 6.03 + 6.14 + 6.13}{6} = 5.49 \frac{N}{mm} \quad (C. 3)$$

Por tanto, si el valor de la constante es de 5.49 N/mm, la relación lineal existente entre la carga aplicada al vaso y el desplazamiento que se produce en las pinzas se representa en la Figura C.21:

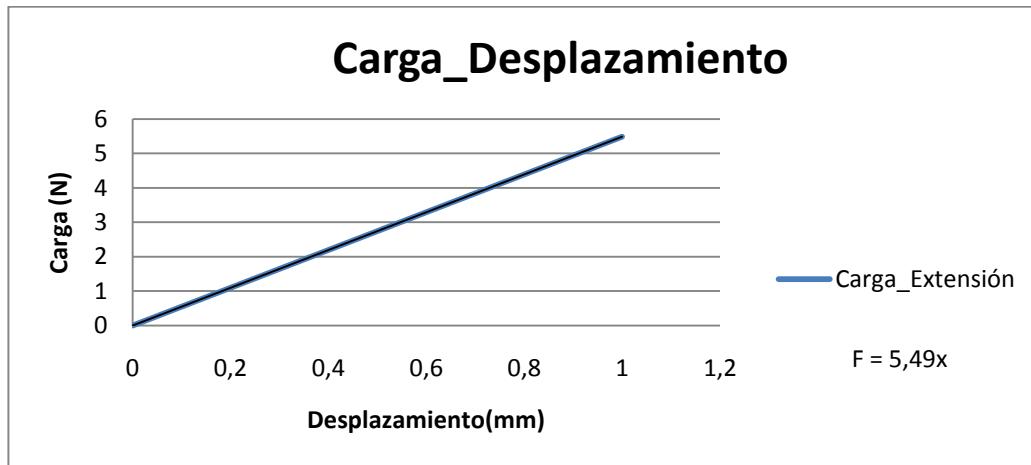


Figura C.21: Relación lineal entre carga y desplazamiento.

De la misma manera, como los valores máximos de la carga aplicada en cada experimento también son conocidos, se puede obtener un valor medio de los mismos, cuyo resultado se obtiene de la forma:

$$F_{max} = \frac{4.9 + 4.79 + 4.93 + 4.94 + 4.97 + 4.95}{6} = 4.91 N \quad (C. 4)$$

Una vez conocidos ambos valores medios, como el movimiento que realiza la pinza se puede aproximar al comportamiento de un muelle, se puede aplicar la ley de Hooke,

considerando la constante K hallada como la constante elástica del muelle, y de ahí obtener el valor del desplazamiento de la forma:

$$x = \frac{F_{max}}{K} = \frac{4.91}{5.49} = 0.9 \text{ mm} \quad (\text{C. 5})$$

Por tanto, se tiene que imponer un desplazamiento en el eje “z” de -0.9 mm en la pinza superior y otro igual, pero de sentido opuesto, en la inferior, con lo que la condición de contorno estaría totalmente definida.

Si nos referimos a la pinza que se encuentra en la parte inferior, se impone un empotramiento en el canto inferior de la placa en la zona donde no existe curvatura. Al tratarse de un empotramiento, se impiden tanto los desplazamientos como los giros en los tres ejes.

Con respecto a la superior, al desplazamiento se le ha añadido una rotación, situada en el canto más próximo al vaso, en la zona recta. Este punto es el que obliga a la pinza superior a tener un tamaño mayor, ya que el punto de rotación debe encontrarse en el mismo plano en el que se encuentra la pinza inferior. Al alargar su tamaño, esta condición se cumple y así el pinzado se realiza de forma correcta, con lo que se permite el giro sólo en el eje “y” e impide los desplazamientos en todos los ejes.

En la Figura C.22, se aprecian cada una de las condiciones de contorno explicadas con anterioridad.

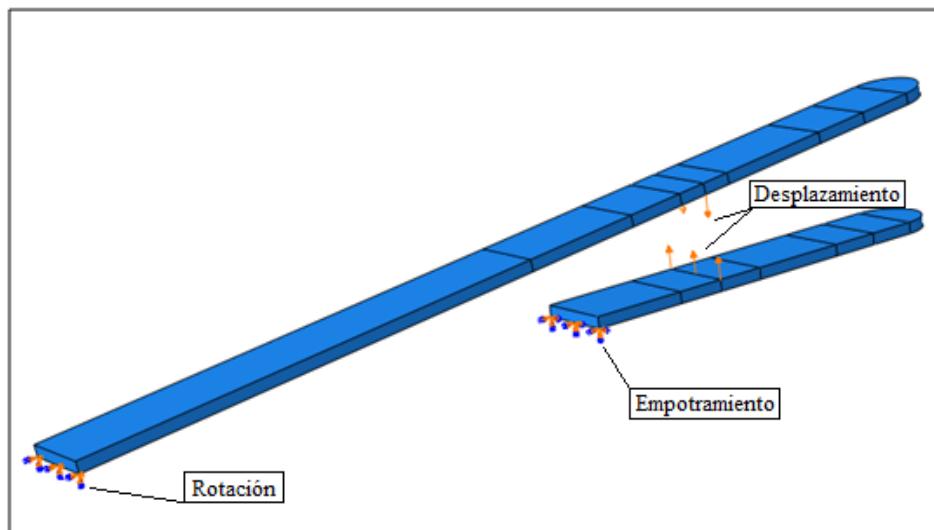


Figura C.22: Condiciones de contorno del primer modelo de pinzas.

C.6.3.-Condiciones de contorno del segundo modelo de pinzas

Para el segundo modelo de pinzas han sido necesarias tres condiciones de contorno, en lugar de las cuatro que tiene el diseño anterior, debido a que las geometrías de ambas son muy distintas y, por consiguiente, los requerimientos necesarios también lo son.

La primera es un empotramiento colocado en la placa inferior, en el punto del saliente más alejado del vaso situado en la base del triángulo, donde se impiden tanto los desplazamientos como los giros en todos los ejes.

Las otras dos condiciones se ubican en la parte rectangular de la pinza superior más alejada de la arteria, y son una rotación y un giro. La rotación impide los desplazamientos en los tres ejes y permite el giro sólo en el eje “y”, con lo que en la última condición se impone un giro en dicho eje de valor 0.174 rad. Su valor se obtiene al abrir la pinza y colocarla en el primer punto donde no toca a la arteria.

Con todas estas condiciones de contorno, que se muestran en la Figura C.23, se puede llevar a cabo el pinzado de la arteria de una forma correcta para el modelo de pinzas triangulares.

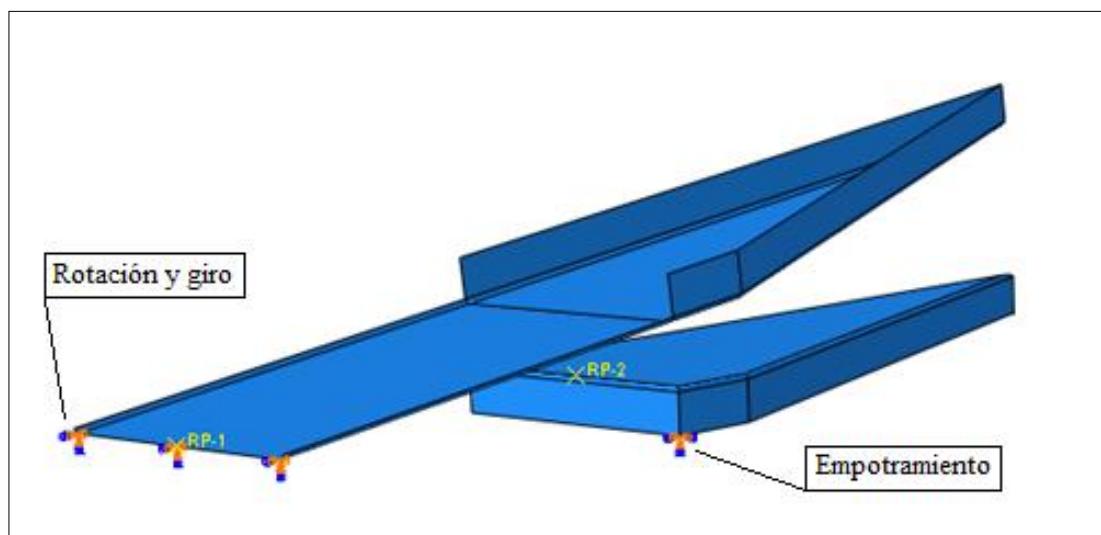


Figura C.23: Condiciones de contorno del segundo modelo de pinzas.

ANEXO D: AJUSTE EXPERIMENTAL

D.1. - INTRODUCCIÓN

El objetivo de este capítulo es la obtención de los parámetros que caracterizan el material de la arteria que se utiliza en el modelo de ABAQUS. El proceso llevado a cabo parte de un programa en MATLAB, que realiza un ajuste para la obtención de los parámetros basado en la minimización del error entre los datos experimentales y los datos teóricos. Estos resultados obtenidos en MATLAB se añaden al modelo de ABAQUS a través de una subrutina programada en FORTRAN por miembros del Grupo de Estructuras y Modelado de Materiales.

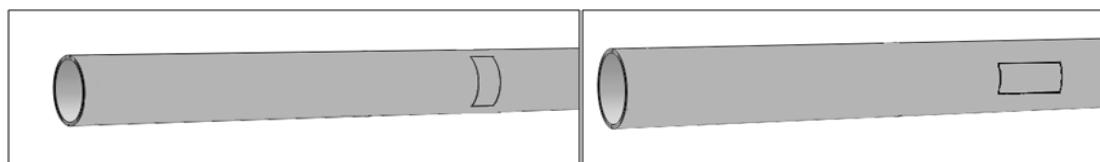
Debido al desacoplamiento entre la parte elástica y el daño, el proceso de ajuste para hallar los parámetros se ha dividido en dos partes: en la primera se ajustan los parámetros que afectan a la zona elástica; en la segunda, los parámetros que definen el daño del material.

El primer proceso de optimización se realiza cuando al vaso se le aplican cargas que no dañan el material, con el objeto de obtener los parámetros elásticos. Posteriormente, se utilizan los resultados del primer cálculo para hallar los parámetros de daño, a través de curvas de comportamiento a las que se les han aplicado unas cargas que dañan el material y, así, definir el comportamiento de forma completa.

Se representarán gráficamente ambos resultados para comprobar visualmente que tanto los datos experimentales como los teóricos, en cada una de las situaciones, se ajustan correctamente.

D.2. - ENSAYOS EXPERIMENTALES

Los ensayos experimentales realizados parten de dos muestras del vaso tomadas en direcciones diferentes, como se puede apreciar en las Figuras D.1(a) y D.1(b). En primer lugar se realiza un corte en dirección circunferencial y posteriormente en la longitudinal. Con ello se pretende estudiar el comportamiento de la arteria en las dos direcciones diferentes, debido a la anisotropía del material.



(a) Corte circunferencial

(b) Corte longitudinal

Figura D.1: Muestras tomadas para realizar los ensayos experimentales.

Una vez obtenidas las muestras, éstas se someten a ensayos uniaxiales, con lo que se obtienen las curvas que representan la tensión que soporta el vaso frente al alargamiento. De dichos ensayos se obtienen los datos experimentales que se usan para realizar los ajustes necesarios, explicados posteriormente, y que proporcionarán los parámetros que definen el comportamiento del material.

D.3. - MÉTODO DE OPTIMIZACIÓN

D.3.1. - Obtención de la función objetivo

La identificación de los parámetros del material se realiza a través de un ajuste de mínimos cuadrados, ajuste que minimiza el error entre los datos teóricos y los experimentales evaluados en las direcciones circunferencial y longitudinal conjuntamente para cada valor de alargamiento a través de la función objetivo que se muestra a continuación [27]:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^p \left[w_1 (\sigma_l - \sigma_{exp_l})_j^2 + w_2 (\sigma_c - \sigma_{exp_c})_j^2 \right] \quad (D.1)$$

donde σ_l y σ_c representan el tensor de Cauchy obtenido de forma teórica, mediante las expresiones (D.4) y (D.5) ; σ_{exp_l} y σ_{exp_c} son los datos de tensión obtenidos experimentalmente; p representa el número de puntos de muestra de los que se dispone, y w_1 y w_2 son factores de peso, que en este caso tienen un valor unidad.

En el tejido arterial se asume que existen dos familias de fibras que se disponen en dos direcciones preferentes, orientadas de una manera helicoidal a lo largo del eje longitudinal y caracterizadas por un ángulo $\pm\theta$ con respecto a la dirección circunferencial. [Anexo B]

La calidad de la identificación de los parámetros del material se puede cuantificar a través del error ε , que viene determinado por:

$$\varepsilon = \frac{1}{\nu} \sqrt{\frac{\chi^2}{p - q}} \quad \text{con } \nu = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (\sigma_l - \sigma_c)_j^2 \quad (D.2)$$

siendo q el número de parámetros que se van a identificar, por lo que $p - q$ es el número de grados de libertad.

Se puede realizar una simplificación en los cálculos si se tiene en cuenta una serie de consideraciones. La primera se refiere a las afirmaciones que realiza Holzapfel [28]: “la relación longitud-anchura de la fibra a estudio asegura una deformación homogénea en el área de medida”. La segunda de ellas es el carácter incompresible del tejido arterial. Con estas dos condiciones se puede hallar el gradiente de deformación en un estado de tracción pura [29], con lo que la tensión en la dirección del espesor es nula. De ahí que se puedan utilizar las siguientes expresiones del tensor de gradiente de deformación:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{circ} = \lambda \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \lambda^{-1} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{F}_{long} = \lambda^{-1} \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi + \lambda \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho \end{cases} \quad (D.3)$$

En la Figura D.2 se muestra un sistema de coordenadas cilíndricas para que pueda observarse la dirección de cada uno de los términos en los que se dividen las tensiones anteriores en cada una de sus correspondientes componentes.

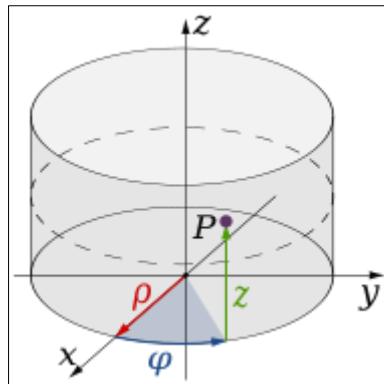


Figura D.2: Sistema de coordenadas cilíndricas.

En general, los parámetros del material deben ser identificados a través de deformaciones no homogéneas y diferentes tipos de experimentos [30,31]. En nuestro caso no se dispone de diferentes tipos de experimentos, sino sólo del uniaxial.

D.3.2. - Discusión de los datos experimentales y teóricos

En primer lugar se realiza una descripción de los datos experimentales, que serán utilizados para realizar los distintos cálculos.

Los archivos de datos experimentales están formados por parejas de puntos donde se muestra la relación no lineal que existe entre el alargamiento que se produce y la tensión a la que está sometido el vaso. El alargamiento es adimensional y la tensión se mide en kPa. Además, existe un archivo para cada componente de la tensión, uno para la circunferencial y otro para la longitudinal, debido a la existencia de ensayos experimentales en ambas direcciones.

De estos archivos se puede afirmar que existe una relación entre ambas magnitudes, siempre que se encuentren en la zona elástica: a mayor alargamiento, mayor es el valor de tensión. También se puede mencionar que el aumento del valor de la tensión en función del alargamiento es mayor en la componente circunferencial que en la longitudinal; es decir, el material es mucho más rígido en dirección circunferencial que en la longitudinal. Cuando se introduce el daño, esta dependencia deja de existir, como se muestra en la Figura D.3.

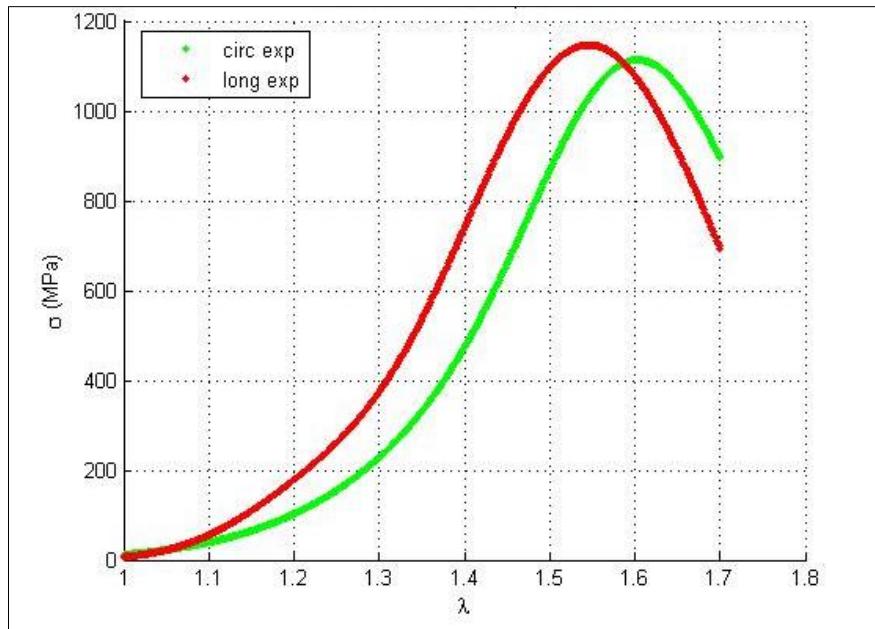


Figura D.3: Curvas de comportamiento experimentales.

D.4. - CÁLCULO DE PARÁMETROS

D.4.1. - Ajuste elástico

Para obtener los parámetros elásticos del material se parte de la función objetivo (D.3) y de una función propia de MATLAB [32], fmincon, que calcula el mínimo de dicha variable por realizar una optimización no lineal, que es el caso que nos ocupa.

La obtención de las tensiones teóricas, necesarias para hallar la función objetivo, se basa en su dependencia con respecto a los parámetros elásticos del material y en el valor del alargamiento en cada punto. Así, las componentes de las tensiones teóricas en las dos direcciones, para cada punto de muestra o valor de alargamiento, vienen expresadas de la forma:

Para la componente longitudinal:

$$\sigma_{0l} = \lambda_l \left(2C_1 + \frac{\lambda_l - 1}{\lambda_l^2} \right) \left[\frac{K_1}{K_2} e^{\left(K_2 \left((1-\rho) \left(\lambda_l^2 + \frac{2}{\lambda_l} - 3 \right) + \rho \left(\lambda_l^2 (\cos \alpha)^2 + \frac{(\sin \alpha)^2}{\lambda_l} - 1 \right)^2 \right) \right)} \right] [2K_2(1-\rho) \\ \left(\lambda_l^2 + \frac{2}{\lambda_l} - 3 \right) \left(2 \frac{\lambda_l - 2}{\lambda_l^2} \right) + 2\rho \left(\lambda_l^2 (\cos \alpha)^2 + \frac{(\sin \alpha)^2}{\lambda_l} - 1 \right) \left(2\lambda_l (\cos \alpha)^2 - \frac{(\sin \alpha)^2}{\lambda_l^2} \right)] \quad (D.4)$$

Para la componente circunferencial:

$$\begin{aligned}
\sigma_{0c} = \lambda_c \left(2C_1 + \frac{\lambda_c - 1}{\lambda_c^2} \right) \left[\frac{K_1}{K_2} e^{\left(K_2 \left((1-\rho) \left(\lambda_c^2 + \frac{2}{\lambda_c} - 3 \right) + \rho \left(\lambda_c^2 (\cos(0.5\pi - \alpha))^2 + \frac{(\sin(0.5\pi - \alpha))^2}{\lambda_c^2} - 1 \right)^2 \right) \right)} \right] \\
\left[2K_2(1-\rho) \left(\lambda_c^2 + \frac{2}{\lambda_c} - 3 \right) \left(2 \frac{\lambda_c - 2}{\lambda_c^2} \right) + 2\rho(\lambda_c^2 (\cos(0.5\pi - \alpha))^2 + \frac{(\sin(0.5\pi - \alpha))^2}{\lambda_c^2} - 1) \right] 2\lambda_c \left((\cos(0.5\pi - \alpha))^2 - \frac{(\sin(0.5\pi - \alpha))^2}{\lambda_c^2} \right) \quad (D.5)
\end{aligned}$$

Por tanto, los resultados esperados que ajustan la parte elástica cuando no existe daño son los que se muestra en la Tabla D.1.

C_1	K_1	K_2	$\alpha(\text{rad})$	ρ	Error
53.87021	225	0.5	0.52359	0.18	0.00997

Tabla D.1: Parámetros de la matriz constitutiva del material C.

Los parámetros elásticos son la base de cálculo para hallar los de daño y así poder definir completamente el comportamiento del material del vaso.

El último paso consiste en representar gráficamente la tensión en función del alargamiento, tanto de los valores experimentales como de los teóricos cuando no existe daño, para poder apreciar el ajuste.

Los experimentales serán los mismos que se han utilizado para hallar los parámetros elásticos, y los teóricos son los obtenidos mediante las expresiones (D.4) y (D.5).

De este modo, el resultado gráfico se muestra en la Figura D.4:

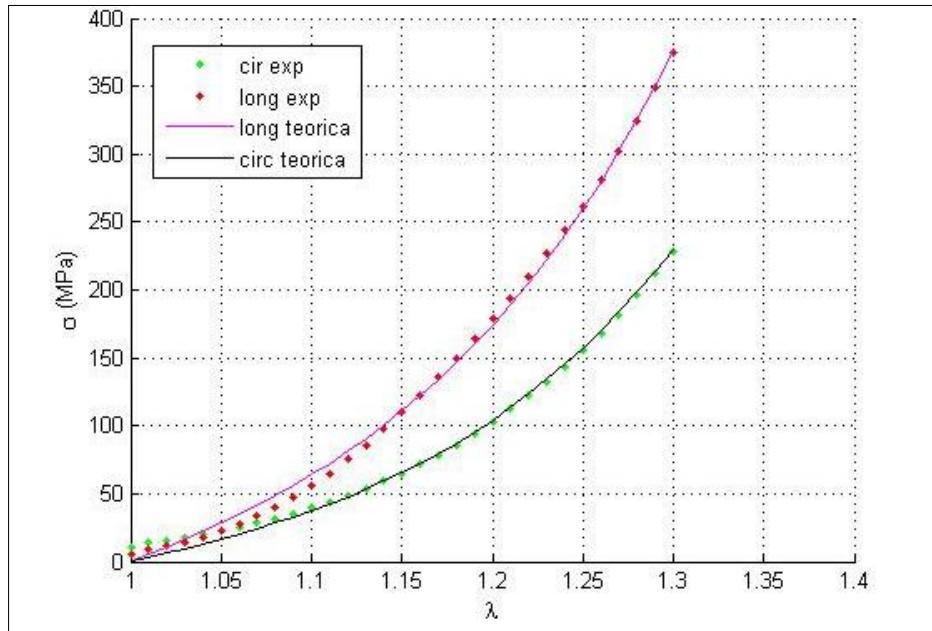


Figura D.4: Relación entre las variables σ y λ cuando no existe daño.

Como se muestra en la Tabla D.1, el error cuadrático medio obtenido en este ajuste tiene un valor de 0.00977 ($\varepsilon = 0$ implicaría que no hay error), lo que nos permite afirmar que los parámetros obtenidos para la parte elástica son válidos, por lo que se puede continuar con los cálculos posteriores para añadir el daño al modelo.

Además, una vez finalizado el cálculo, el programa da al usuario la opción de modificar algún parámetro a su voluntad, por si considera necesario realizar algún ajuste más preciso.

D.4.2. - Ajuste con daño

En este apartado se va a llevar a cabo la incorporación del daño al modelo, partiendo de los parámetros obtenidos anteriormente de la parte elástica y de un nuevo cálculo de las tensiones basado en los mismos.

Se utilizan las tensiones teóricas iniciales halladas con las expresiones (D. 4) y (D. 5), a las que posteriormente, se procederá a la introducción del daño de forma teórica y es ahí donde los cálculos se realizan de manera diferente.

Dicha incorporación se realiza a través de la función de daño g , cuya expresión se puede encontrar en el Anexo B. Con todo ello, las expresiones finales de las tensiones teóricas quedan de la siguiente forma:

$$\sigma_l = (1 - \zeta)\sigma_{0_l} = g\sigma_{0_l} \quad (\text{D. 6})$$

$$\sigma_c = (1 - \zeta)\sigma_{0_c} = g\sigma_{0_c} \quad (\text{D. 7})$$

donde σ_l y σ_c son las tensiones teóricas con daño, g es la función de daño y σ_{0_l} y σ_{0_c} son las tensiones teóricas iniciales, para cada una de las componentes.

Una vez halladas las tensiones teóricas, los cálculos necesarios para hallar los parámetros de daño son similares a la parte elástica. Por tanto, el siguiente paso es la obtención de la función objetivo (D. 1), pero calculada con los valores obtenidos en (D. 6) y (D. 7), ya que poseen una dependencia con los parámetros de daño.

Una vez obtenida la nueva función objetivo de la misma manera que en el ajuste elástico, se lleva a cabo la optimización de la función, pero en este caso se obtienen los parámetros de daño en lugar de los elásticos.

Por tanto, los resultados obtenidos para a y c se muestran en la Tabla D.2:

<i>a</i>	<i>c</i>	Error
0.5	17.6	0.0273

Tabla D.2: Parámetros de daño.

Una vez obtenidos todos los valores necesarios, se realiza la representación gráfica para comparar los datos experimentales y los hallados de una forma teórica, cuyo resultado se muestra en la Figura D.5:

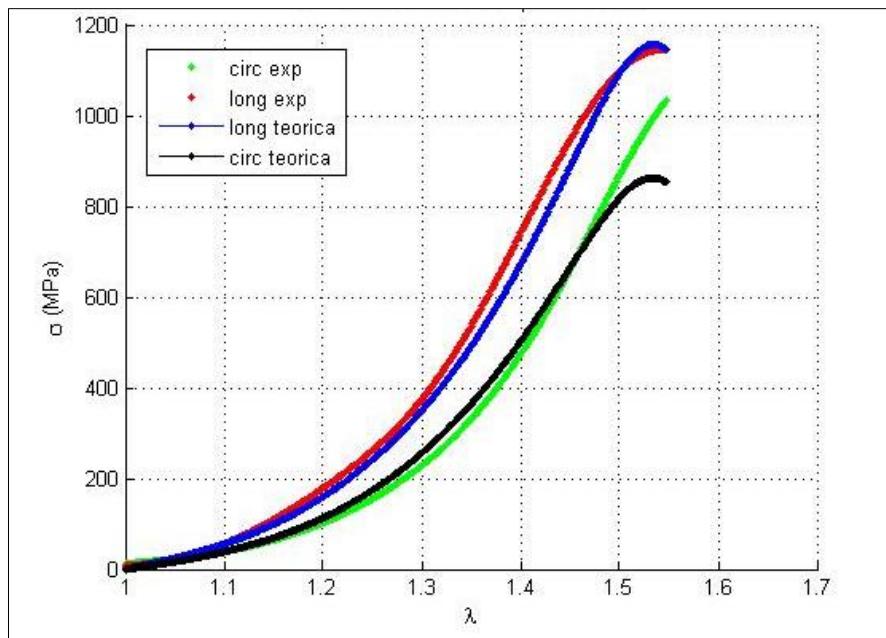


Figura D.5: Relación entre las variables σ y λ cuando existe daño.

Si se compara la Figura D.3 con la Figura D.5, se observa que para realizar el ajuste no se han utilizado todos los valores experimentales que se poseen, sino sólo los valores que llegan hasta el pico. Dichos valores se corresponden con los efectos de ablandamiento que se producen en el material y son aquellos para los que se han calculado los parámetros de daño teóricos. Los valores restantes corresponden a roturas de fibras o corrimientos en la matriz, para cuyos efectos no se calculan los parámetros de daño.

Por tanto, si se utilizan dichos datos, en la Figura D.5 se muestra que ambas componentes halladas teóricamente se ajustan de una manera muy aproximada a los datos experimentales, mediante un error de 0.0273. De ahí que los parámetros de daño a y c obtenidos se puedan dar por correctos y se pueda llevar a cabo la introducción de dichos parámetros en el modelo de ABAQUS.