
7.	Anexos.....	34
7.1	Anexo I. Definición de los modos de transporte.....	35
1.	El modo carretera.....	35
2.	El modo ferroviario.....	39
3.	Modo aéreo.....	40
4.	El modo marítimo.....	42
7.2	Anexo II. Desarrollo del modelo de cálculo de los costes del transporte de mercancías en cada modo de transporte.....	44
7.3	Anexo III. Descripción de problemas NP- completos	47
1.	Introducción	47
2.	Teoría de la computabilidad.....	47
3.	Tesis de Church- Turing	48
4.	Decibilidad.....	48
5.	Complejidad Computacional	49
7.4	Anexo IV. Metaheurísticas	51
1.	Introducción	51
2.	Heurísticas	52
3.	Técnicas Heurísticas	53
4.	Técnicas Heurísticas para el VRP.....	53
5.	Técnicas Metaheurísticas	53
6.	Técnicas Metaheurísticas para el VRP.....	54
7.5	Anexo V. VRP (Vehicle Routing Problem).....	55
1.	Introducción	55
2.	Problema del agente viajero (TSP).....	55
3.	Complejidad del TSP y aproximaciones.....	56
4.	Problema de ruteo de vehículos (VRP)	56
8.	Referencias bibliográficas	57

7. Anexos

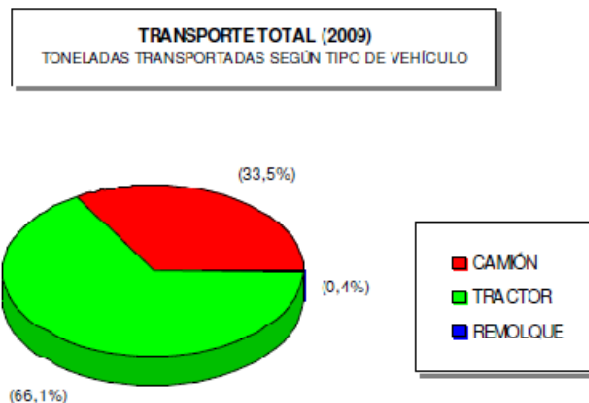
7.1 Anexo I. Definición de los modos de transporte

1. El modo carretera

El transporte por carretera puede clasificarse atendiendo a distintos criterios. A continuación se definen los tipos de vehículos autorizados para el transporte de mercancías en España.

- **Camión:** está provisto de medio propio de propulsión mecánica.
- **Remolque:** diseñado para ser enganchado a un vehículo automóvil de carretera.
- **Cabeza tractora:** es el provisto de medio propio de propulsión mecánica que arrastra a un semirremolque.
- **Semirremolque:** remolque sin eje delantero, acoplado al vehículo que lo arrastra de tal manera que parte de dicho remolque, así como parte de su peso y de su carga, descansan sobre un vehículo tractor.

Se expone a continuación la clasificación según tipos de vehículos



Fuente: Encuesta Permanente de Transporte de Mercancías por Carretera (Ministerio de Fomento).

Estos vehículos se dividen, según la Ley de Ordenación de los Transportes Terrestres (LOTT) y el Reglamento de la Ley de Ordenación de los Transportes Terrestres (ROTT) en:

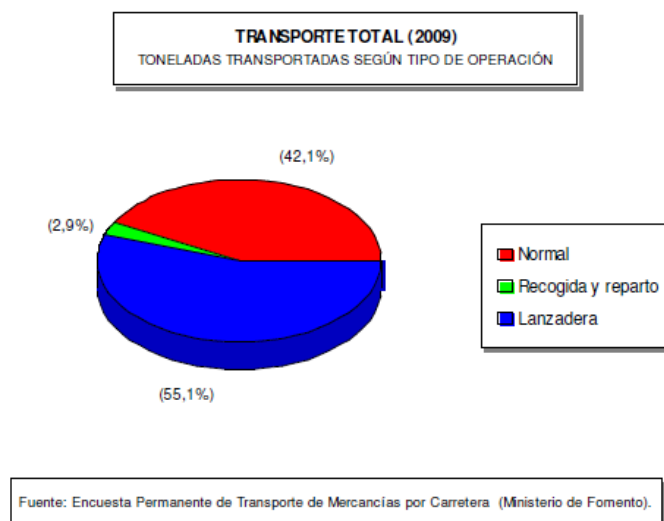
- ✓ **Vehículo ligero:** vehículo automóvil especialmente acondicionado para el transporte de mercancías cuyo peso máximo autorizado no exceda de 6 toneladas, o que, aun sobrepasando dicho peso, tenga una capacidad de carga útil no superior a 3,5 toneladas. Asimismo, se especifica que no será necesaria la obtención de título habilitante para la realización de transportes públicos de mercancías realizados en vehículos de hasta 2 toneladas, inclusive, de masa máxima autorizada y de transportes privados complementarios de mercancías

que se realicen en vehículos de hasta 3,5 toneladas, inclusive, de masa máxima autorizada, hasta el 16 de noviembre de 2006 este límite era de 2 toneladas.

- ✓ **Vehículo pesado:** Vehículo automóvil especialmente acondicionado para el transporte de mercancías, cuyo peso máximo autorizado sea superior a 6 toneladas y cuya capacidad de carga exceda de 3,5 toneladas. Las cabezas tractoras tendrán la consideración de vehículos pesados cuando tengan una capacidad de arrastre de más de 3,5 toneladas.

Otra clasificación de los vehículos se establece según los tipos de operación de transporte que realicen:

- ✓ **Recogida y reparto:** es toda operación de transporte de una mercancía que es cargada y/o descargada por lotes fraccionados a lo largo del recorrido del vehículo. Este tipo de operación de transporte sólo se considera en flujos realizados dentro de una misma comunidad autónoma, para flujos interregionales la operación es considerada como de transporte normal.
- ✓ **Transporte de lanzadera o de viajes repetidos:** se entiende por tal al transporte que consiste en una serie de viajes efectuados en el día, repetidos e idénticos en cuanto a la mercancía, a la distancia y al lugar de carga y descarga.
- ✓ **Transporte normal:** es toda operación de transporte que no encaja en las modalidades anteriores.

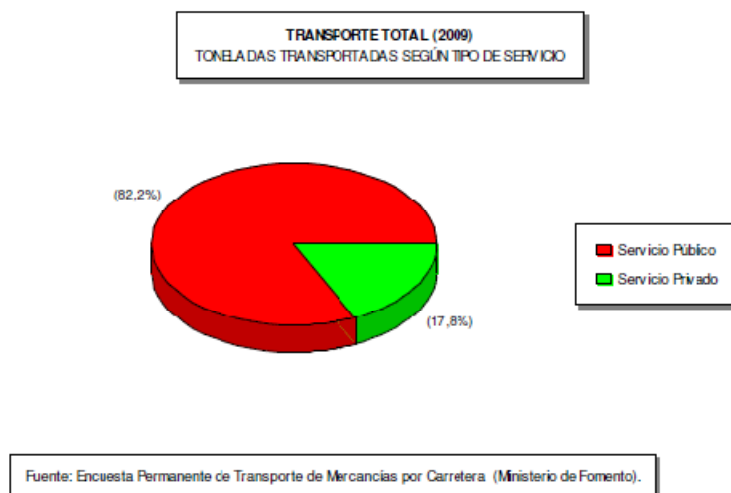


También se puede clasificar el transporte por carretera según sea por cuenta propia (privado) o bien por cuenta ajena (publico):

- ✓ **Privado (por cuenta propia):** es cuando el vehículo se utiliza, única y exclusivamente, para el transporte propio sin pago por el servicio. Es decir, el

vehículo pertenece al poseedor de la autorización y se utiliza para el transporte de sus propias mercancías.

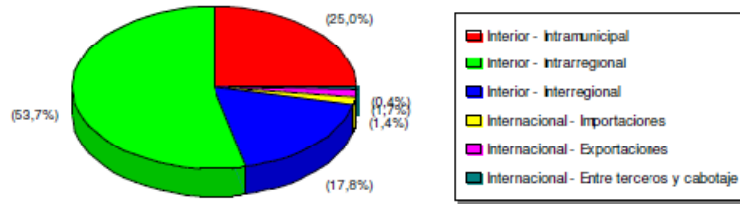
- ✓ **Público (por cuenta ajena):** en este caso, el vehículo se utiliza, exclusivamente, para el transporte de mercancías por carretera a título oneroso y por cuenta de otro.



Otra posible clasificación del transporte por carretera viene dada por el radio de acción del transporte

- ✓ **De radio local y provincial:** son los autorizados para circular dentro de la zona delimitada por una circunferencia, cuyo centro es el domicilio legal del vehículo y cuyo radio es de 100 kilómetros, es decir, un vehículo de radio provincial está autorizado para el transporte de mercancías por la provincia de residencia del vehículo.
- ✓ **De radio nacional:** es el autorizado a circular por todo el territorio nacional, es decir, el realizado por los vehículos que están autorizados para llevar a cabo servicios públicos discrecionales de mercancías y que se otorgan sin limitación de radio de acción lo cual les permite realizar el transporte en todo el territorio del Estado.

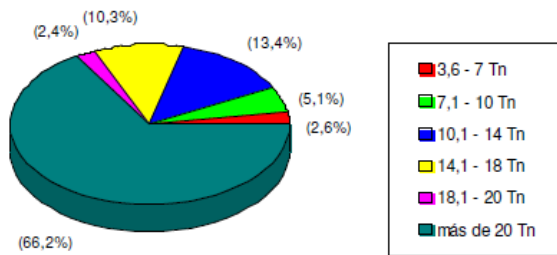
TRANSPORTE TOTAL (2009)
 TONELADAS TRANSPORTADAS SEGÚN TIPO DE DESPLAZAMIENTO



Fuente: Encuesta Permanente de Transporte de Mercancías por Carretera (Ministerio de Fomento).

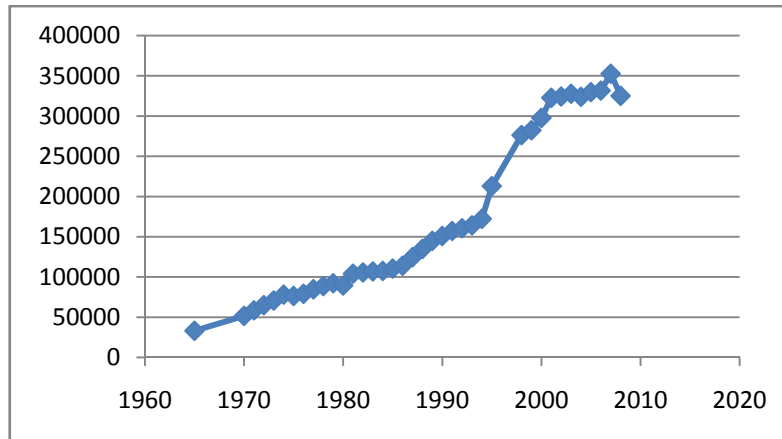
Por último, el transporte por carretera puede clasificarse según la capacidad de carga de los vehículos que lo realizan. Esto es, por el peso máximo de mercancías declarada admisible por la autoridad competente del país de matriculación del vehículo, comprende el peso bruto de las mercancías y de los embalajes, así como la tara de los contenedores, cajas móviles y paletas.

TRANSPORTE TOTAL (2009)
 TONELADAS TRANSPORTADAS SEGÚN CAPACIDAD DE CARGA



Fuente: Encuesta Permanente de Transporte de Mercancías por Carretera (Ministerio de Fomento).

A continuación se muestra un gráfico con la evolución, en toneladas – kilometro, del transporte de mercancías por las carreteras españolas desde 1965 hasta 1998.



Evolución del transporte de mercancías en las carreteras españolas

2. El modo ferroviario

En el Libro Blanco del Transporte, una de las premisas es revitalizar el ferrocarril como transporte de mercancías, hablando del ferrocarril como un modo de transporte con una imagen ambivalente, por un lado el modernismo de las redes de alta velocidad y por otro el arcaísmo del sistema de transporte de mercancías. En el mismo libro se cita como con 241.000 millones de toneladas/km transportadas en 1998, frente a 283.000 en 1970, la cuota del mercado del ferrocarril en Europa pasó del 21,1% al 8,4%.

En la actualidad se está intentando revitalizar este modo de transporte, a través de la intermodalidad.

A continuación, se explican los tipos de vagones utilizados en el transporte de mercancías, así como los tipos de contenedores en función de la mercancía transportada y las opciones de carga y descarga de los mismos.

❖ Tipos de vagones

- Vagones abiertos: Transporte de madera en rollizos, traviesas, etc...
- Vagones cerrados: aplicaciones varias, mercancías paletizadas, bobinas con eje en posición horizontal...
- Vagones cisterna: transporte de combustibles líquidos.
- Vagones tolva: Transporte de mercancías a granel
- Vagones plataforma: usos varios
- Vagones plataforma porta-automóviles: transporte de automóviles
- Vagones plataforma portabobinas. Transporte de bobinas de materiales varios.
- Vagones portacontenedores: transporte de mercancía containerizada.

En los anexos se exponen fotografías de cada tipo de vagón para la mejor comprensión de los mismos.

❖ Tipos de contenedores

La mayoría de la mercancía se transporta en el interior de contenedores (recipientes con unas dimensiones normalizadas), facilitando así la carga, descarga y manipulación de la misma durante el proceso.

Un contenedor debe cumplir los siguientes requisitos para cumplir con la recomendación ISO-R-668:

- Carácter permanente y resistente para soportar un uso repetitivo
- Debe facilitar su movilidad en una o más modalidades de transporte
- Dispositivos que faciliten su movilidad, sobre todo en su transferencia de un vehículo a otro en una o más modalidades de transporte
- Ser proyectado de manera que facilite su llenado y vaciado.

Los tipos de contenedores más importantes utilizados en el transporte de mercancías (aéreo, marítimo y terrestre) son:

- Dry Van: Contenedor estándar, cerrado herméticamente, sin refrigeración ni ventilación
- High Cube: Contenedor estándar de 40 pies, con sobre altura de 9.6 pies (2.90m)
- Reefer: Contenedor refrigerado de 40 pies, contiene un sistema de conservación de frío/calor con un termostato incorporado. (mercancía perecedera)
- Open Top: Contenedor abierto por la parte de arriba.
- Flat Rack: Contenedor sin paredes. (mercancías atípicas)
- Open Side: Contenedor abierto por uno de sus lados (cargas de mayores dimensiones en longitud)
- Tank o Contenedor cisterna: Contenedor para el transporte de líquidos
- Flexi-Tank: Contenedor para el transporte de líquidos. Alternativa al contenedor cisterna.

3. Modo aéreo

El transporte aéreo es competitivo para mercancías de valor con pequeño volumen y para productos que requieren transporte urgente, como perecederos o para cubrir una producción ante roturas de stocks.

Como resumen del modo aéreo, se expone a continuación un cuadro resumen de los agentes intervinientes en el proceso de carga aérea y sus funciones en la misma, obtenido de

AGENTE	CARACTERÍSTICAS BÁSICAS	MODO	TIPO DE CARGA	MODALIDAD	VARIABLES QUE CONDICIONAN
Integrador	<p>Sistema puerta a puerta.</p> <p>Poseen hubs repartidos estratégicamente por Europa y el resto del mundo.</p> <p>Limitación el volumen y peso de los bultos.</p>	Intermodal, aéreo con carretera y/o ferrocarril.	<p>Principalmente carga express y paquetería.</p> <p>También carga general.</p>	<p>Principalmente servicio exclusivo de carga con flota propia.</p> <p>Ocasionalmente fletan otras compañías y utilizan bodegas de vuelos regulares.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - organización de las expediciones - preparación de los pedidos - tipo de carga - modalidad - nivel de servicio - características que condicionan la carga - consolidación - área de influencia
Transitario	<p>Gestión de los servicios de transporte:</p> <p>Consolidación, documentación, transporte terrestre y despacho de aduanas.</p>	Intermodal, aéreo con carretera.	Principalmente perecederos, mercancía peligrosa, valiosa y carga express.	Depende de la decisión del agente.	<ul style="list-style-type: none"> - origen de importaciones - productos de importación - estacionalidad - condiciones especiales
Compañía Aérea	<p>Transporte aéreo.</p> <p>Algunas compañías realizan el handling.</p>	Aéreo	<p>Depende de la compañía.</p> <p>Principalmente carga general, perecederos y carga express.</p>	Todas, dependiendo de la compañía.	<ul style="list-style-type: none"> - destino - origen - estacionalidad - tamaño de flota - capacidad del avión
Aeropuerto	<p>Oportunidades en la ubicación geográfica estratégica y la posibilidad de intermodalidad.</p> <p>Nivel de servicio depende del aeropuerto, limitaciones para operar en horario nocturno.</p>	Aéreo	Depende de si tienen PIF se puede albergar mayor diversidad de mercancías.	Depende de la compañía.	<ul style="list-style-type: none"> - producto de exportación - origen de importaciones - área de influencia
Agentes de aduanas	<p>Trámites del despacho aduanero de la mercancía en importación, exportación y tránsito.</p> <p>En transporte nacional sólo para liquidar el IVA de la mercancía que proviene de Canarias.</p>	Aéreo	Principalmente perecederos, carga general y valiosa.		<ul style="list-style-type: none"> - producto de exportación - producto de importación - destino - modalidad - tipo de carga - nivel de servicio - área de influencia

4. El modo marítimo

El transporte marítimo es el medio de transporte de mercancías más antiguo, lo que hace que presente unos usos y reglamentaciones muy diferentes a las de los demás medios de transporte.

Sus ventajas son:

- bajo coste
- permite el movimiento de grandes volúmenes de mercancía

Su principal desventaja es la lentitud.

El Bill of Lading o conocimiento de embarque, es el principal documento de transporte empleado en el campo marítimo. Es un documento singular por su triple función:

- Recibo de las mercancías embarcadas.
- Prueba del contrato de transporte, cuyas condiciones suelen figurar al dorso.
- Documento acreditativo de la propiedad de la mercancía transportada. Esto significa que nos permite la venta de la mercancía durante el tiempo que esta se encuentra viajando.
- Dentro del transporte marítimo podemos optar por dos opciones, según las necesidades que tengamos en el momento.

Navegación libre

La desarrollan los denominados buques tramp. Es el servicio que nos ofrecen buques sin itinerario fijo, que van transportando cargamentos entre puertos según sean contratados en cada momento. Los buques dedicados a la navegación libre transportan, en general, grandes cargamentos de pocos cargadores. Se trata casi siempre de mercancías a granel (petróleo, carbón, soja o pescado congelado) o de maquinaria de grandes dimensiones para proyectos industriales.

Pactar un flete según esta modalidad dependerá de la oferta y la demanda puntual. Los corredores de fletes, llamados en inglés shipbrokers, son los profesionales que actúan como intermediarios entre los cargadores y los operadores de los buques. Se encargan de localizar el buque idóneo y de plasmar las condiciones acordadas entre las partes en el contrato de transporte, que en este caso se denomina póliza de fletamiento.

Líneas regulares

Los buques de línea regular tienen un itinerario fijo y público, con salidas frecuentes y espaciadas de forma regular. Nos permiten el envío de mercancías en cantidades mucho menores que las que se transportan en navegación libre y un mismo barco puede transportar mercancía de miles de cargadores. Cada uno pagará en función del espacio utilizado. En la actualidad la mayor parte de los buques de línea regular se dedican al transporte de mercancías containerizadas.

En la mayor parte de los casos, los fletes de las líneas regulares son acordados por los grupos de armadores que sirven una determinada zona, en lo que se conoce como conferencias de fletes.

En el transporte marítimo es muy común el uso de los contenedores para almacenar la carga.

Un contenedor es un recipiente o caja especialmente construido para permitir el transporte de mercancías como una unidad.

Las ventajas del uso de contenedores son:

- La mercancía sufre menos manipulaciones, reduciendo los costes y tiempos de carga y descarga.
- La mercancía viaja más protegida. Disminuiremos así el riesgo de daños, robo y el coste de los embalajes necesarios para el transporte.
- Permite la utilización de buques muy efectivos y rápidos con gran capacidad de carga.
- En el envío de las mercancías containerizadas también existe la comercialización como cargas completas y en grupaje:
- El grupaje marítimo, también llamada LCL (less than container load) se utiliza para envíos pequeños en los que queremos pagar solo por lo espacio utilizado. Pagaremos los fletes por volumen o tonelada (facturaremos el que resulte mayor). Normalmente tendremos que pagar cómo importe mínimo una tonelada. Los servicios LCL sólo son comercializados por transitarios.
- El envío en contenedor completo, también llamado FCL (full container load). En esta modalidad pagaremos por unidad de colector enviado. Se pueden contratar a través de los transitarios que seleccionan entre todas las navieras del mercado o directamente a los agentes de las navieras que trabajan captando carga sólo para su empresa.
- El envío de mercancías containerizadas exige que se conozcan los tipos de contenedores existentes y sus dimensiones, con el fin de solicitar y seleccionar el tipo apropiado y optimizar los envíos, ya que cómo pagamos por contenedor el tamaño del pedido deberá adaptarse a las dimensiones y espacio disponible.

7.2 *Anexo II. Desarrollo del modelo de cálculo de los costes del transporte de mercancías en cada modo de transporte*

Modo Carretera

El coste en el transporte por carretera se valora según la suma de unos costes fijos (comunes a todos los vehículos de carretera y todas las empresas transportistas) más los costes propios de cada vehículo o empresa transportista en particular, que por el carácter particular de cada caso no están estandarizados.

Los costes directos se pueden modelizar según la siguiente fórmula (tomada del observatorio de costes del transporte de mercancías por carretera del Ministerio de Fomento).

Así pues el coste total sería la suma de costes directos e indirectos:

$$CT = CD + CI$$

Y los costes directos se calculan según la siguiente fórmula:

$$CD = C_{tp} + C_{km}$$

Siendo:

$$C_{tp} (\text{Costes por tiempo}) = A + F + P + S + C_f + D$$

$$C_{km} (\text{Costes kilométricos}) = C + N + M + R$$

Siendo:

A – Coste de amortización del vehículo

F – coste de financiación del vehículo

P – coste de personal de conducción

S – coste de los seguros

C_f – costes fiscales

D – dietas del conductor

C – Coste del combustible

N – coste de desgaste de los neumáticos

M – coste de mantenimiento del vehículo.

R – Reparaciones del vehículo

Modo Ferroviario

Al igual que en el caso de la carretera, en el ferrocarril también existen unos costes directos y otros indirectos, particulares estos últimos a cada caso, por lo que

nos centraremos en modelizar los costes directos, basándonos en el estudio “Costes del transporte de mercancías por ferrocarril”, elaborado por la Fundación de los Ferrocarriles Españoles en el Observatorio del ferrocarril en España, publicado en noviembre de 2008.

La fórmula para calcular estos costes directos en el transporte de mercancías por ferrocarril es la siguiente:

$$CD=Ce+Cpc+Cml+Cmv+Cam+Ccc+Cst$$

Siendo,

- Ce – costes de energía
- Cpc – costes de personal de conducción
- Cml – costes de mantenimiento de la locomotora
- Cmv – costes de mantenimiento de los vagones
- Cam – costes de amortización
- Ccc – costes de cánones de circulación
- Cst – costes de servicio en terminales

Los costes de amortización de desglosan en:

$$Cam= Cal+Cav+Cfl+Cfv$$

Siendo,

- Cal – coste de amortización locomotora
- Cav – coste amortización vagones
- Cfl – coste financiación locomotora
- Cfv – coste financiación vagones

Modo marítimo

En el caso del transporte marítimo, los costes se dividen en los costes de los acarreo terrestres, costes de los servicios portuarios y los costes del tramo marítimo propiamente dicho, así el coste total (CT) es la suma de,

$$CT= Cat+Cop+Ctm$$

Siendo

$$\text{Costes acarreo terrestre } Cat= Ct + Ckm$$

Siendo a su vez,

Costes de tiempo (Ct) igual a la suma de:

Amortización de la cabeza tractora y el semirremolque
Financiación de la cabeza tractora y el semirremolque
Nómina del personal de conducción
Seguros del vehículo
Costes fiscales
Dietas

Costes kilométricos (Ckm) igual a la suma de:

Combustible
Neumáticos
Mantenimiento
Reparaciones

Costes de la operativa portuaria (Cop) se obtendrá multiplicando el tiempo de operativa por el coste de los servicios portuarios asociados a la operativa.

Costes del tamo marítimo (Ctm), se obtendrá como la suma de:

Coste del capital
Coste de reparaciones, mantenimiento, seguros y trámites administrativos
Coste de la tripulación
Coste del combustible
Coste de las tasas y tarifas portuarias
Costes de inventario

Modo aéreo

A continuación se detallan los costes del transporte de mercancías para el modo aéreo, el coste total (CT) vendría dado por:

$$CT = Ct + Ce + Co + Ceq$$

Siendo,

Ct – Coste temporal del transporte aéreo

Ce – coste energético debido al consumo de combustible, que depende fuertemente de la distancia recorrida, la velocidad utilizada y del peso transportado por el avión.

Co – coste operativo de carga y descarga de la mercancía en el avión

Ceq – coste de equipamiento de carga y descarga, que abarca a su vez:

- Coste de tratamiento de la documentación
- Coste por control de seguridad

7.3 Anexo III. Descripción de problemas NP- completos

1. Introducción

Para hablar de los problemas NP-Completos se tiene que entender en primer lugar lo que se conoce como la *Teoría de la Computabilidad*. Esta disciplina es una de las cuatro partes que constituyen la lógica matemática: teoría de conjuntos, teoría de modelos, teoría de la demostración y la teoría de la computabilidad y se ocupa del estudio y clasificación de las relaciones y aplicaciones computables. Además, la teoría de la computabilidad, junto con la teoría de autómatas, lenguajes y máquinas, es el fundamento de la informática teórica y esta, a su vez, de la industria de los ordenadores.

La importancia de esta teoría radica en que permite dividir los problemas en decidibles y no decidibles. Lo que es muy útil teniendo en cuenta que el objetivo de este trabajo es resolver un problema que se corresponde con la definición de problema indecidible. De modo que se identifica con la combinación de dos problemas típicos de estudio dentro de esta disciplina. Uno de ellos es el problema TSP o problema del viajante y el segundo es el problema de la mochila.

2. Teoría de la computabilidad

La teoría de la computabilidad es una de las cuatro ramas de la lógica matemática, la cual engloba: la teoría de conjuntos, la teoría de la demostración, la teoría de modelos y la teoría de la computabilidad. Esta disciplina también es una de las partes fundamentales de la informática teórica y a su vez de la industria de los ordenadores, junto a la teoría de autómatas, lenguajes y máquinas.

En esta rama de la lógica matemática se estudian los problemas decidibles y no decidibles. Si se supone el problema del máximo común divisor mediante el algoritmo de Euclides o la determinación de dos números primos mediante la criba de Eratóstenes, se puede concluir que existen algoritmos o procedimientos mecánicos que permiten obtener la solución del problema en cuestión. De forma que, hasta principios del siglo XX, se daba por hecho que existían algoritmos capaces de resolver cualquier tipo de problema, la única dificultad era encontrarlos. Por tanto, si lo que se pretende es determinar un algoritmo, no es necesario definir la clase de todos los algoritmos, esto sólo es necesario si se pretende demostrar que algún problema no es algorítmicamente soluble. Lo que se traduce como que para dicho problema no hay ningún algoritmo que lo resuelva.

Posiblemente Tietze, en 1908, fuera el primero en afirmar la no existencia de un algoritmo. En su caso se refirió a los grupos de representación finita: “...*la cuestión de cuándo dos grupos son isomorfos no es soluble en general*”.

Pero hasta 1928, momento en el que por un lado Hilbert y Ackermann en su libro de lógica, con el planteamiento de la decidibilidad de la lógica de predicados y por otro lado a partir de 1930, con el asunto de la solubilidad de todo problema matemático con Gödel, Church y Turing, no se había planteado la formalización del

concepto informal de función matemáticamente computable. Estas formalizaciones junto con otras realizadas por Kleene, Post y Markoff, dieron lugar a la hipótesis conocida como *Hipótesis de Church-Turing-Post-Kleene*, que afirma la coincidencia entre el concepto informal de función parcial mecánica o algorítmicamente computable y el concepto formal, matemático, de aplicación recursiva.

3. Tesis de Church- Turing

Al hablar de funciones, este documento se refiere a valores naturales (es decir, $f : N^n \rightarrow N$). Una función es *computable* si existe algún método efectivo, es decir, un humano con papel, lápiz y tiempo es capaz de resolverla.

La tesis de Church se basó en conjeturar que cualquier función computable podía escribirse en términos de ciertos operadores matemáticos: el cero, el sucesor de un número, la composición, la recursión primitiva y la minimización. Estas funciones se denominaron *funciones recursivas generales*.

Simultáneamente, Turing lanzó otra hipótesis. Está predice que cualquier función computable podía calcularse con unas máquinas muy simples conocidas como *máquinas de Turing*.

Finalmente, el poder expresivo de las funciones recursivas de Church y la máquina de Turing resultaron ser lo mismo. Por tanto, y tras conocerse este hecho se probó que cualquier función recursiva de Church podía calcularse con una máquina de Turing y viceversa. A estos resultados se les bautizó con *Tesis de Church-Turing*.

El hecho de que cualquier método efectivo pueda ser representado por una función recursiva general o máquina de Turing impone un límite en la computabilidad, puesto que existen funciones que no pueden ser calculadas con estas expresiones o con la máquina de Turing. Estas funciones, según la Tesis de Church-Turing, no deberían ser calculadas con ningún método existente. De hecho, en la actualidad no se conoce ningún método para la resolución de las funciones no computables.

4. Decibilidad

Según la Tesis de Church- Turing, un problema es decidible si y sólo si es computable. Es decir, si existe una máquina de Turing o expresión recursiva capaz de resolverlo. La cuestión de si, para una clase de problemas, existe un algoritmo o procedimiento efectivo que los resuelva se le denomina *problema de decisión*. Se dice que un problema es indecible si se puede demostrar que no existe ningún algoritmo que pueda responder a todas las preguntas que el problema pueda plantear. Ejemplos:

- ¿Hay enteros tales que satisfagan la ecuación $3x + 6y = 151$? Este problema tiene una respuesta negativa, NO. Por tanto, se trata de un problema de decisión.
- ¿Hay enteros (x,y) tales que se cumple la ecuación $ax+by = c$? La respuesta en este caso sería SI, tratándose de nuevo de un problema decisonal.

- ¿Para cada asignación de valores (a, b, c), se tiene un problema distinto? SI, si el máximo común divisor de a y b divide a c, para ello se tiene el algoritmo de Euclides para resolverlo.

A los problemas decisionales con respuesta negativa se les conoce como problemas *indecidibles* o *no decidibles*. Sin embargo, existen problemas elementales que el ser humano es capaz de resolver que la máquina de Turing no (modelización cognitiva), por tanto se requieren recursos de modelización no algorítmicos sino aproximados o *heurísticos*.

5. Complejidad Computacional

El criterio de decidibilidad no es suficiente para establecer si una modelización cognitiva puede ser estrictamente algorítmica. Además los recursos físicos, espacio y tiempo, son limitados, a lo que se une que ni siquiera todos los problemas decidibles son *manejables*.

Una manera de estimar la manejabilidad de un problema es medir la complejidad computacional. Los parámetros utilizados para determinar esta medida son:

- Tiempo de computación requerido (número de operaciones primitivas)
- Espacio de memoria requerido:
 - Tamaño del input.
 - Tamaño del output.
 - Resultados intermedios.

La complejidad vendrá determinada por el tiempo requerido para su resolución, dada como una función del tamaño del problema. Los resultados que se obtienen al evaluar la complejidad son dos:

- Problema solubles en tiempo *Polinómico*, vulgarmente buenos
- Problemas solubles en tiempo *Exponencial*, vulgarmente malos

Ejemplo: Determinar la complejidad de la multiplicación.

- Sean dos enteros:
 - n, formado por i dígitos.
 - m, k dígitos.
- Para obtener mxn resultan i filas que se sumarán. En cada una de las filas se tendrán aproximadamente j ($\geq k$) operaciones. Por tanto para conseguir las i filas se requieren ixj operaciones.

- Por último para sumar las filas se realizan alrededor de ixj sumas de dos números de un dígito cada uno.
- El tiempo de ejecución será proporcional al tiempo de ejecución de todas las operaciones. Como se sabe que el número de operaciones es de $2(ixj)$, se concluye que la complejidad será proporcional al factor variable de la expresión ixj .

A la hora de realizar la medida de la complejidad algorítmica es importante determinar su *tasa funcional de crecimiento*. Esta puede ser:

- Lineal (buena)
- Cuadrática (admisibile en algunos casos)
- Exponencial (no manejable)
- ...

La denotación de la complejidad se realiza a través de la expresión $O(f(n))$, la cual significa que la complejidad es de orden n o proporcional a n . En la determinación de la complejidad se ignoran las contantes y términos de menor orden. Es decir, si la complejidad algorítmica de un problema resulta en la siguiente expresión, $f=2n^2 + 3n + 5$, la denotación utilizada sería $O(f(n)) = n^2$, o de orden cuadrático.

Los problemas se clasifican según su complejidad de la siguiente forma:

- **Problemas P:** Existen algoritmos eficientes para su resolución en tiempo polinómico.
- **Problemas NP:** No se puede demostrar que sean problemas P, es decir, no se consigue encontrar un algoritmo que sea capaz de resolverlos en tiempo polinómico. Sin embargo, si existe una algoritmo eficiente (polinómico) para la verificación de su solución.
- **Problemas NP-Completo:** No son problemas P ni NP. En este caso si uno de la clase se solucionara mediante un algoritmo polinómico, todos tendrían un algoritmo de ese tipo, pero hasta hoy no se ha encontrado.

7.4 Anexo IV. Metaheurísticas

1. Introducción

Las heurísticas y metaheurísticas son métodos de solución que se basan en la optimización combinatoria. En la actualidad existe un incipiente interés en esta rama de las matemáticas debido a la complejidad de estos problemas en la obtención de soluciones óptimas en tiempo polinomial (anexo I).

El objetivo de estas técnicas, independientemente del campo en el que se apliquen, es que en general, tratan de construir sistemas que sean capaces de tomar decisiones en un entorno adverso.

Para entender el significado de terreno adverso en este contexto, se describe un ejemplo del problema TSP ya explicado en el anexo II. Sin embargo, aquí se incide en la generación del espacio de búsqueda para entender la importancia de la aplicación de estos métodos de optimización combinatoria.

- Se tiene un estado inicial: Clientes distribuidos en distintas localizaciones. En este caso como estado inicial: $\{SO\} = \{cx, cy, cw, cz\}$, representado en la figura 1
- Se quiere llegar a un estado objetivo: Visitar a todos los clientes recorriendo la menor distancia posible, generando el menor coste, es decir, como estado final: $\{SF\} = \{c1, c2, c3, c3\}$, representado en la figura 3
- Se necesita especificar una función objetivo que define las características del estado objetivo. La función objetivo es: $\min (\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 d_{i,j} \text{ donde } i \neq j)$.
- Matriz con las distancias entre cada punto. Como se trata de la distancia euclídea, la distancia de i a j es la misma que de j a i figura 2.
- Para conocer la mejor solución se deben realizar todas las combinaciones posibles y devolver la que nos dé el valor óptimo de la función objetivo, representado en la figura 4.

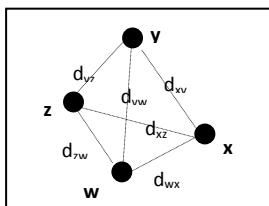


Figura 1. Estado Inicial

	X	Y	W	Z
X		d_{yx}	d_{wx}	d_{zx}
Y	d_{yx}		d_{yw}	d_{yz}
W	d_{wx}	d_{yw}		d_{wz}
Z	d_{zx}	d_{yz}	d_{wz}	

Figura 2. Matriz de distancias.

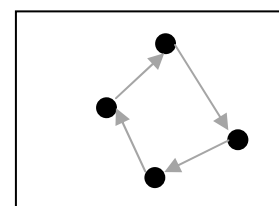


Figura 3. Estado Objetivo.

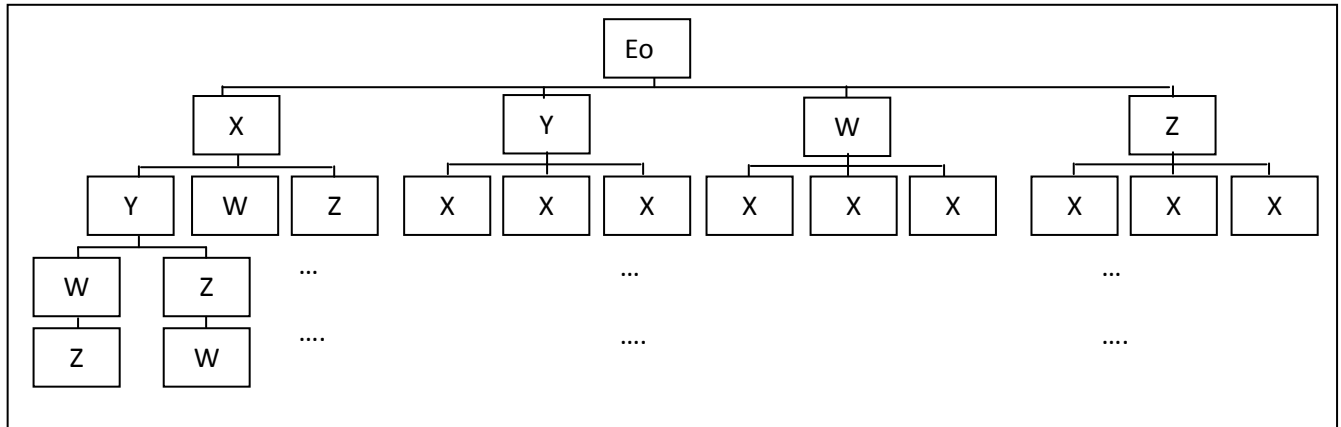


Figura 4. Combinaciones resultantes de TSP con 4 clientes

Tal y como se observa en la figura 4, los nodos o combinaciones resultantes son 24, es decir, factorial de 4, por tanto el número de combinaciones posibles dado un número de clientes n , es de factorial de n . Si n es muy grande el número de alternativas generadas a explorar es muy elevado, lo que hace que sea imposible realizar una exploración de todas ellas debido a que los recursos (tiempo, memoria) son limitados.

Con los métodos de optimización combinatoria se pretende reducir el espacio de búsqueda, de forma que algunos estados no son explorados. Esto deriva en que la solución encontrada no tiene que ser la óptima, pero si será una buena solución próxima a la mejor. La forma de realizar esto es a través de distintas técnicas, como la poda de ramificaciones que no se consideran buenas. Por ejemplo en el caso anterior, solo se expanden los estados donde la distancia entre el estado $i-1$ y el estado i es la menor de todas las posibles combinaciones.

Estas técnicas de optimización combinatoria, se dividen en técnicas de optimización local convencional (*heurísticas*) y técnicas de optimización local inteligente (*metaheurísticas*). A diferencia de un enfoque algorítmico "exacto", un método de optimización no tiene una base de matemática formal que lo sustente, es desarrollado más o menos por intuición (Ignizio y Cavalier, 1994).

2. Heurísticas

La idea más genérica del término heurística está relacionada con la tarea de resolver inteligentemente problemas reales usando el conocimiento disponible (Narducci, 2005). Heurística proviene de una palabra griega con un significado relacionado con el concepto de encontrar y se vincula a la supuesta exclamación "*jheuristiche!*" o "*jeureka!*" de Arquímedes al descubrir su famoso principio (De la Cruz, 2003). Reeves (1996) define el término heurística de la siguiente forma: "*Una técnica heurística (o simplemente una heurística) es un método que busca buenas soluciones (es decir, soluciones cercanas al óptimo) a un costo computacional razonable sin poder garantizar optimalidad*".

3. Técnicas Heurísticas

Las técnicas heurísticas más relevantes se listan a continuación. Todas estas generan un árbol de búsqueda. La diferencia es el orden o criterio de expansión.

- Búsqueda en profundidad: expandir primero una rama hasta al final, según el valor de la función objetivo desde el inicio hasta el nodo a examinar.
- Búsqueda en anchura: expansión primero un nivel y pasar al siguiente, según el valor de la función objetivo desde el inicio hasta el nodo a examinar.
- Búsqueda A*: basada en una función objetivo que mide el costo de llegar desde el inicio hasta el nodo examinado, al que se le suma, una previsión del coste de alcanzar el estado objetivo desde el nodo examinado.

4. Técnicas Heurísticas para el VRP

Las técnicas heurísticas para el VRP, en general, pueden ser clasificadas dentro de cuatro categorías (Gaskell, 1967), así:

- *Constructivas*, como el método de los ahorros de Clarke y Wright, con base en el ahorro generado por insertar nuevos clientes en cada vehículo hasta completar una solución final.
- Métodos de *agrupar primero, luego enrutar*, que agrupan los clientes en varios subconjuntos, asignan cada subconjunto a un vehículo y luego resuelven cada TSP correspondiente (por ejemplo, el método de Fisher y Jaikumar, basado en el problema de asignación generalizado y el algoritmo de barrido de Gillet y Miller).
- Métodos heurísticos de *enrutar primero, luego agrupar*, que empiezan resolviendo el TSP definido por todos los clientes y luego parten la ruta hallada para asignar un tramo a cada vehículo (como el método de curvas de llenado de Bowerman, Calamai y Brenthall, y el método de partición óptima de Beasley).
- Los *métodos de mejoramiento*, como los intercambios Or–Opt.

5. Técnicas Metaheurísticas

Las metaheurísticas, también llamadas heurísticas modernas, han aparecido durante las últimas dos décadas (Yu, 1998). Su finalidad es tomar inicialmente una solución factible, para luego mejorarla usando heurísticas de mejoramiento embebidas en una estructura más general. La característica común de estos enfoques es el uso de

mecanismos para evadir óptimos locales (Moraga, 2002). Glover y Laguna (1997) definen el término “metaheurística” como: *“una estrategia maestra que guía y modifica otras heurísticas para producir soluciones más allá de aquéllas que son normalmente generadas en una solicitud por optimalidad local. Las heurísticas guiadas por tal metaestrategia pueden ser procedimientos de alto nivel o nada más que una descripción de operaciones disponibles para transformar una solución en otra, junto con reglas de evaluación asociadas.”*

En la figura 5 se puede observar un compendio de las técnicas metaheurísticas utilizadas para resolver los problemas de optimización combinatoria. Se puede observar que se han empleado varias estrategias para resolver el problema que se pueden agrupar en tres grandes categorías: búsqueda secuencial por entornos (o vecindarios), redes neuronales y algoritmos evolutivos. Dentro de cada categoría se encuentran subclasificaciones, con el fin de especificar las características de los procedimientos, según sean probabilistas o deterministas, con uno o varios operadores, constructivos, con perturbaciones, con cruzamiento de información o sin él, etc.

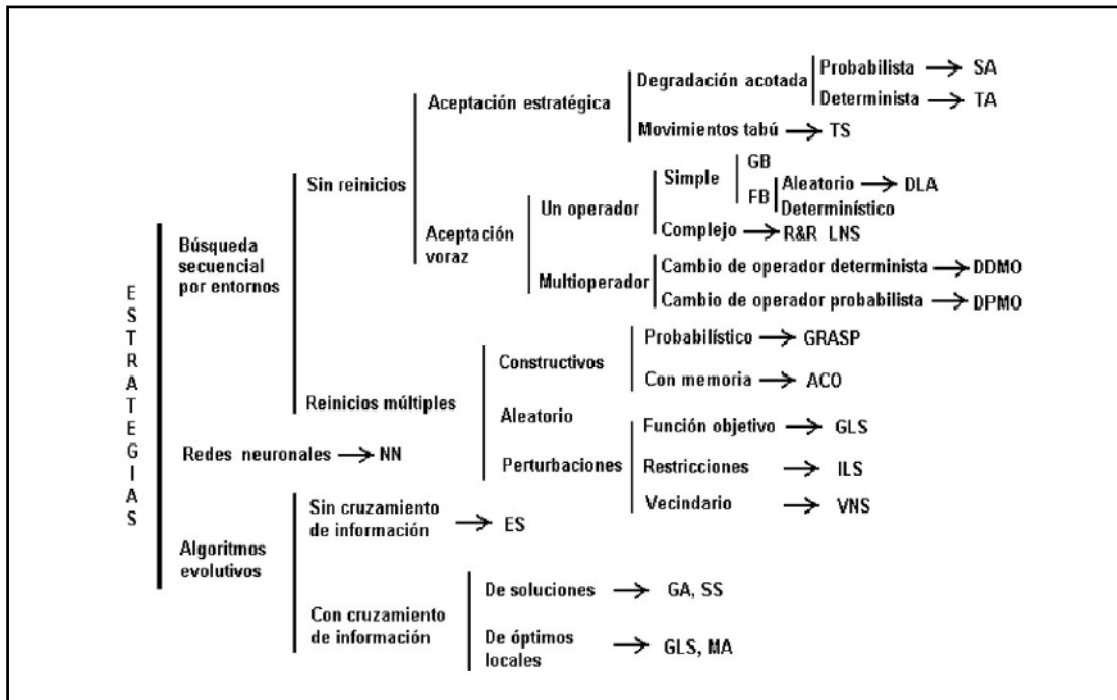


Figura 5. Técnicas para resolver problemas de optimización combinatoria.

6. Técnicas Metaheurísticas para el VRP

Entre las técnicas metaheurísticas para el VRP se encuentran las colonias de hormigas, búsqueda dispersa, algoritmos genéticos y la búsqueda tabú.

Cabe comentar que según Laporte et al. (2000), el procedimiento de búsqueda tabú ha sido la más exitosa metaheurística, en especial para resolver el VRP. En su libro Glover y Laguna (1997) presentan una muy buena discusión sobre la aplicabilidad de búsqueda tabú en problemas de optimización reales.

7.5 Anexo V. VRP (Vehicle Routing Problem)

1. Introducción

El VRP (vehicle routing problem), es el problema de enrutamiento de vehículos, data del año 1959 y fue introducido por Dantzig y Ramser, quienes describieron una aplicación real de la entrega de gasolina a las estaciones de servicio y propusieron una formulación matemática. Cinco años después, Clarke y Wright propusieron el primer algoritmo que resultó efectivo para resolverlo. De este modo, se dio comienzo a grandes investigaciones y trabajos en el área de ruteo de vehículos.

El problema VRP se corresponde con el problema del viajero (TSP, travelling salesman problema). El problema TSP pertenece al grupo de problemas NP-completos, es decir no existe una función matemática que lo resuelva en tiempo polinomial. Esto ha llevado a muchos investigadores a explorar diversos métodos para abordarlos. La mayoría de estos métodos pueden clasificarse como “exactos” o de “optimización” (Aarts y Lenstra, 2003). Estos algoritmos son descritos en el anexo IV.

Durante los años sesenta, los investigadores trataban de responder la siguiente pregunta: ¿existe un algoritmo de optimización con tiempo de ejecución polinomial para un problema como el TSP? Hasta ahora, nadie ha conseguido encontrar respuesta a esta pregunta. Sin embargo Karp, en 1972 mostró que si la respuesta es “si” para el TSP, hay también otros problemas difíciles para los cuales podría hallarse un algoritmo polinomial. Como no se ha encontrado solución para ninguno de estos problemas, Reeves en 1996 dice que esto sugiere categóricamente que la respuesta a la pregunta original es “no”. Por ello mismo, el área de optimización combinatoria resulta cada vez más atrayente para investigadores y académicos, ya que cualquier contribución en este aspecto tiene repercusiones directas en la industria.

2. Problema del agente viajero (TSP)

El problema TSP constituye la situación general y de partida para formula otros problemas combinatorios más complejos pero más prácticos, como el ruteo de vehículos. En el TSP se dispone de un solo vehículo que debe visitar a todos los clientes en una sola ruta y a costo mínimo.

No suele haber un depósito (y si lo hubiera, no se distinguiría de los clientes), no hay demanda asociada a los clientes y tampoco hay restricciones temporales.

Si se denota por $\Delta+(i)$ y $\Delta-(i)$ al conjunto de nodos adyacentes e incidentes al nodo i , es decir, $\Delta+(i) = \{j \in V \mid (i, j) \in E\}$ y $\Delta-(i) = \{j \in V \mid (j, i) \in E\}$. De manera similar, el conjunto de arcos incidentes hacia el exterior e interior del nodo i se definen como $\delta+(i) = \{(i, j) \in E\}$ y $\delta-(i) = \{(j, i) \in E\}$. El problema puede formularse matemáticamente mediante programación lineal entera (PLE) como sigue (Clarke y Wright, 1964):

$$\min \sum_{i,j \in E} c_{ij} x_{ij}, \text{ sujeto a:}$$

$$\sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ij} = 1, \forall i \in V$$

$$\sum_{j \in \Delta^-(j)} x_{ij} = 1, \forall j \in V$$

$$\sum_{i \in S, j \in \Delta^+(i) / S} x_{ij} \geq 1, \forall S \subset V$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \forall i, j \in E$$

3. Complejidad del TSP y aproximaciones

La mayor parte de los problemas de ruteo de vehículos son generalizaciones del TSP. En ese sentido, puede considerarse el VRP más simple.

El tiempo de cálculo necesario para resolver el TSP se incrementa con rapidez a medida que aumenta el número de ciudades n . En un caso general el número de rutas factibles que debe considerarse es $(n - 1)!/2$, puesto que hay $(n - 1)$ posibilidades para la primera ciudad después de la ciudad de residencia del agente, $(n - 2)$ posibilidades para la siguiente ciudad y así sucesivamente. El denominador 2 surge porque cada ruta presenta una ruta inversa equivalente con la misma distancia (TSP simétrico). Así, mientras un TSP con 10 ciudades tiene no menos de 200.000 soluciones factibles que deben ser consideradas, un problema con 20 ciudades tiene alrededor de 1016 soluciones factibles, mientras que un problema con 50 ciudades tiene alrededor de 1062 (Hillier y Lieberman, 2001). Es decir, se genera un espacio de búsqueda que crece exponencialmente, donde encontrar la solución óptima requiere de técnicas de cálculo especiales para dar con ella.

Para resolver el TSP normalmente se utilizan algoritmos de aproximación o heurísticos, la diferencia radica en que éstos nos dan una garantía de cómo podemos obtener malas soluciones. Normalmente especificada como un tiempo c del valor óptimo. El algoritmo que mejor solución ha propuesto, es el de Arora (1998). El algoritmo garantiza una aproximación de $(1+1/c)$ veces el valor óptimo, para todo $c > 1$. Esto se basa en partición geométrica y árboles de expansión. Aunque teóricamente c puede ser muy grande, esto tendrá un efecto negativo en su tiempo de corrida ($O(n(\log 2n)O(c))$ para instancias bidimensionales.

4. Problema de ruteo de vehículos (VRP)

A grandes rasgos un problema de ruteo de vehículos (VRP) consiste en, dado un conjunto de clientes y depósitos dispersos geográficamente y una flota de vehículos, determinar un conjunto de rutas de costo mínimo que comiencen y terminen en los depósitos, para que los vehículos visiten a los clientes máximo una vez.

8. Referencias bibliográficas

- Libro blanco del transporte
- Ministerio de fomento (www.fomento.es)
- Wikipedia (www.wikipedia.org)
- Renfe mercancías (www.renfe.com/empresa/mercancias/index.html)
- Michael Berliner Pedersen (2005), Optimization models and solution methods for intermodal transportation
- Anexo NP-Completo
 - Universidad de Valencia (www.uv.es)
 - Universidad complutense de Madrid (www.ucm.es)

- Anexo VRP:
 - Red de revistas científicas de América Latina (redalyc.uaemex.mx)
 - Leiden Institute of Advanced Computer Science (www.liacs.nl)
 - The VRP Web (<http://neo.lcc.uma.es/radi-aeb/WebVRP/>)
- Anexo Metaheurísticas:
 - Red de revistas científicas de América Latina (redalyc.uaemex.mx)
 - Universidad Pública de Navarra (www.ayc.unavarra.es)
 - Instituto de investigación en Inteligencia Artificial (www.iiia.csic.es)
 - Red de revistas científicas de América Latina (redalyc.uaemex.mx)