Apéndices

Apéndice A

Valores propios e invariantes del gradiente de velocidad y del tensor velocidad de deformación

A.1. Caso del gradiente de velocidad a_{ij}

La ecuación característica para el tensor $\boldsymbol{a}$ es:

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0 \tag{A.1}$$

donde

$$\begin{aligned} P &= -traza(\mathbf{a}) \\ Q &= \frac{1}{2}\left[P^2 - traza(\mathbf{a}^2)\right] \\ R &= -det(a) = \frac{1}{3}\left[-P^3 + 3PQ - traza(\mathbf{a}^3)\right] \end{aligned} \tag{A.2}$$

Estas expresiones de los invariantes son validaS en el caso general *(compresible e incompresible).*

Con el cambio $x = \lambda + \frac{P}{3}$, la ecuación característica A.1 resulta:

$$x^3 + px + q = 0 \tag{A.3}$$

donde los nuevos parámetros $p,\ q$ son:

$$\begin{aligned} p &= Q - \frac{P^2}{3} \\ q &= \frac{P}{3}\left(\frac{2P^2}{9} - Q\right) + R \end{aligned} \tag{A.4}$$

Siguiendo el método de *Rey Pastor (1954)* se hace ahora el cambio : $x = u + v$ y se obtiene a partir de A.4:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \tag{A.5}$$

Esta última ecuación equivale al sistema

$$\begin{cases} 3uv = -p \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \tag{A.6}$$

que puede escribirse: $\begin{cases} u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$

Luego u^3 y v^3 son las raíces de la ecuación de segundo grado:

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{A.7}$$

donde: $\begin{cases} y_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \\ y_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \end{cases}$

Las soluciones válidas para el par (u, v) son únicamente las que cumplan las ecuaciones A.6, es decir $uv = -\frac{p}{3}$.

Con esta última condición las raíces de la ecuación A.3 son:

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{A.8}$$

donde D es el discriminante, $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. O en función de P, Q y R:

$$D = \frac{1}{108}[27R^2 + (4P^3 - 18PQ)R + 4Q^3 - P^2Q^2] \tag{A.9}$$

La condición de discriminante nulo es, entonces:

$$27R^2 + (4P^3 - 18PQ)R + 4Q^3 - P^2Q^2 = 0 \tag{A.10}$$

Esta ecuación define la superficie que en el espacio de fases P, Q, R separa las regiones con autovalores reales de aquellas con autovalores complejos.

A continuación se estudia la solución en función del discriminante D.

<u>Caso $D > 0$.</u> $\sqrt{D}$ es real. Llamado $\begin{cases} u_1 = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}} \\ v_1 = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

Se obtiene

$$\begin{cases} x_1 = u_1 + v_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)i \\ x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)i \end{cases}$$

Donde, entre todos los pares posibles de valores de u y v se han escogido los que satisfacen A.6. Se han utilizado las raíces cúbicas de la unidad, que son:

$$1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Por lo tanto en el caso de discriminante negativo la ecuación característica tiene un valor propio real, y dos complejos conjugados.

<u>Caso $D = 0$.</u> Entonces $u_1 = v_1$ y las raíces son:

$$\begin{cases} x_1 = 2u_1 = -2\left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ x_2 = x_3 = -u_1 = \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

tres raíces reales con dos de ellas iguales.

Ó si $u_1 = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0 \rightarrow$ tres raíces reales iguales a cero.

<u>Caso $D < 0$.</u> $\sqrt{D}$ imaginario puro.

u^3 y v^3 serán $-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \rho(cos\theta \pm i\ sen\theta)$

donde $\rho = \sqrt{\frac{-p^3}{27}}$, $\theta = arc\ cos\left(-\frac{q}{2\rho}\right)$

Las tres raíces se obtienen eligiendo dos pares (u, v) que cumplan A.6. Resultan:

$$\begin{cases} x_1 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \\ x_2 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \\ x_3 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

tres raíces reales y distintas.

En los tres casos considerados, la suma de las tres raíces da cero debido a la transformación $x = \lambda + \frac{P}{3}$ que se hizo al principio.

Deshaciendo el cambio se obtienen las verdaderas raíces $\left(\lambda_i = x_i - \frac{P}{3}\right)$ que son los valores propios de $\boldsymbol{a}$. Resultan, en función del signo del discriminante:

- $D > 0.$

$$\begin{cases} \lambda_1 = u_1 + v_1 - \frac{P}{3} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{P}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)i \\ \lambda_3 = -\frac{1}{2}(u_1 - v_1) - \frac{P}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)i \end{cases}$$

$$donde \begin{cases} u_1 = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}} \\ v_1 = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{D}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

- $D = 0.$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2u_1 - \frac{P}{3} \\ \lambda_2 = \lambda_3 = -u_1 - \frac{P}{3} \end{cases}$$

  con $u_1 = \left(-\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

  Ó si $u_1 = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{P}{3}$

- $D < 0.$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3}\right) - \frac{P}{3} \\ \lambda_2 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{P}{3} \\ \lambda_3 = 2\rho^{\frac{1}{3}} cos\left(\frac{\theta}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{P}{3} \end{cases}$$

$$con \begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{-p^3}{27}} \\ \theta = arc\ cos\left(-\frac{q}{2\rho}\right) \end{cases}$$

  Donde se observa que la suma de las tres raíces es igual al primer invariante cambiado de signo, como corresponde al hecho de que un cambio de base no altera la traza del tensor.

  En el caso incompresible $P = a_{ii} = 0$, y la suma de las raíces será nula.

A.2. Caso del tensor velocidad de deformación S_{ij}

En este caso los invariantes son:

$$\begin{aligned} P_S &= -traza(\mathbf{S}) \\ Q_S &= \frac{1}{2}\left[P_S^2 - traza(\mathbf{S}^2)\right] \\ R_S &= -det(S) = \frac{1}{3}\left[-P_S^3 + 3P_SQ_S - traza(\mathbf{S}^3)\right] \end{aligned} \tag{A.11}$$

Ahora, sin embargo, se tiene una matriz simétrica y por lo tanto sólo se obtendrán valores propios reales. El desarrollo es idéntico al caso anterior pero sólo existirá el caso $D \leq 0$. Valen las mismas expresiones que en el caso de $\boldsymbol{a}$ sustituyendo P, Q,R por P_S, Q_S,R_S.

En el caso incompresible la suma de los tres valores propios del tensor velocidad de deformación será siempre cero, ya que $P_S = P = 0$. Por lo tanto habrá siempre un autovalor negativo, y otro positivo, con el tercero intermedio ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ *con* $\lambda_1 > 0,\ \lambda_3 < 0$). Se utilizará la notación:

$$\lambda_1 = \alpha \qquad \lambda_2 = \beta \qquad \lambda_2 = \gamma$$

Cuando $D = 0$ se obtendrán dos iguales y uno distinto y cuando, además, $Q_S = 0$ y $R_S = 0$ se obtendrá $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Apéndice B

Ecuaciones de transporte y relaciones de Betchov

B.1. Ecuaciones para la vorticidad ω y enstrofía E

La ecuación de Navier Stokes en forma vectorial es:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \tag{B.1}$$

con la condición de selenoidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Se obtendrá la ecuación para la vorticidad tomando el rotacional de la ecuación B.1, ya que $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$. Resulta:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] = \nu \nabla^2 \omega \tag{B.2}$$

El término de presión ha desaparecido, ya que el rotacional de un gradiente es nulo.

Resulta, en notación tensorial

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t} + u_l \frac{\partial \omega_k}{\partial x_l} = \omega_l \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \nu \nabla^2 \omega_k \tag{B.3}$$

Descomponiendo ahora $\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$ en sus partes simétrica y antisimétrica:

$$S_{kl} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \qquad \text{y} \qquad W_{kl} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$$

Resulta: $\omega_l = \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \omega_l S_{kl} + \omega_l R_{kl}$.

Pero $\omega_l R_{kl} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{lki}\omega_i\omega_l = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{kil}\omega_i\omega_l = 0$.

Por lo tanto: $\omega_l \dfrac{\partial u_k}{\partial x_l} = S_{kl}\omega_l$ y la ecuación B.3 queda:

$$\frac{D\omega_k}{Dt} = S_{kl}\omega_l + \nu\nabla^2\omega_k \tag{B.4}$$

El estiramiento de ω, debido al tensor velocidad de deformación recibe el nombre de vector estiramiento de vorticidad *(vortex stretching)*:

$$G_i = S_{ij}\omega_j \tag{B.5}$$

El vector G_i aumenta, en promedio, la magnitud de la vorticidad, mientras que el término difusivo la amortigua en las pequeñas escalas debido a la viscosidad.

Se define la enstrofía como el cuadrado de la vorticidad:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\omega \cdot \omega = \frac{1}{2}|\omega|^2 \tag{B.6}$$

Para obtener su ecuación de evolución, se toma la ecuación B.4 en forma tensorial, se multiplica por ω_k y se contrae, resultando:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\omega_k^2\right) + u_l \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{1}{2}\omega_k^2\right) = S_{lk}\omega_l\omega_k + \nu\omega_k\nabla^2\omega_k \tag{B.7}$$

El último término del lado derecho de B.7 puede escribirse:

$$\omega_k\nabla^2\omega_k = \frac{1}{2}\nabla^2\omega_k^2 - \nabla\omega_k\nabla\omega_k = \frac{1}{2}\nabla^2\omega_k^2 - \frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}$$

Finalmente se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\omega_k^2\right) + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\omega_k^2\right) = S_{kj}\omega_k\omega_j + \nu\nabla^2\left(\frac{1}{2}\omega_k^2\right) - \nu\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}\frac{\partial\omega_k}{\partial x_j}$$

donde $S_{kj}\omega_k\omega_j$ es el término de producción de enstrofía, y el producto doblemente contraído del tensor gradiente de vorticidad $\dfrac{\partial\omega_k}{\partial x_j}\dfrac{\partial\omega_k}{\partial x_j}$, se llama disipación de enstrofía. En forma compacta:

$$\frac{D\mathbf{E}}{Dt} = \omega \cdot \mathbf{S} \cdot \omega + \nu\nabla^2\mathbf{E} - \nu(\nabla\omega \cdot \nabla\omega) \tag{B.8}$$

El escalar $S_{kj}\omega_k\omega_j$ es el producto escalar del vector estiramiento de vorticidad por el propio vector vorticidad. El resultado será positivo en la medida en que G_i y ω_i estén alineados en dirección y sentido. En este caso habrá producción neta de vorticidad y de enstrofía.

B.2. Ecuación para el tensor velocidad de deformación S_{ij}

Con la notación $\mathbf{a} = \nabla \mathbf{u}$, $a_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ se tiene para a_{ij}:

$$\frac{Da_{ij}}{Dt} = -a_{ik}a_{kj} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \nabla^2 a_{ij} \tag{B.9}$$

La ecuación para $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right)$ resulta de la suma de las ecuaciones para a_{ij} y a_{ji}.

Se obtiene:

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} = -\frac{1}{2}\left(a_{ik}a_{kj} + a_{jk}a_{ki}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \nabla^2 S_{ij} \tag{B.10}$$

Sustituyendo en el primer término de la derecha $a_{ij} = S_{ij} + W_{ij}$ y aplicando $S_{ij} = S_{ji}$, $W_{ij} = -W_{ji}$, se obtiene:

$$-\frac{1}{2}\left(a_{ik}a_{kj} + a_{jk}a_{ki}\right) = S_{ik}S_{kj} - W_{ik}W_{kj}$$

Ahora bien, puede comprobarse que: $W_{ik}W_{kj} = \frac{1}{4}\left(\omega_i\omega_j - \delta_{ij}\omega_k^2\right)$

Finalmente, sustituyendo estos resultados, se obtiene:

$$\frac{DS_{ij}}{Dt} = -S_{ik}S_{kj} - \frac{1}{4}\left(\omega_i\omega_j - \delta_{ij}\omega_k^2\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + \nu \nabla^2 S_{ij} \tag{B.11}$$

B.3. Disipación de energía cinética

La ecuación de cantidad de movimiento es:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i$$

Multiplicando por u_i y contrayendo índices resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_i^2\right) + u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}u_i^2\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(pu_i) + \nu u_i \nabla^2 u_i$$

donde se ha utilizado la incompresibilidad $\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0\right)$ para introducir u_i en la derivada de la presión.

El último término del lado derecho puede escribirse como:

$$u_i \nabla^2 u_i = \frac{1}{2}\nabla^2 u_i^2 - \nabla u_i \nabla u_i$$

Se obtiene entonces:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u_i^2\right)+u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{2}u_i^2\right)=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(pu_i)+\nu\nabla^2\left(\frac{1}{2}u_i^2\right)-\nu\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \tag{B.12}$$

donde $\nu\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}$ es la pseudodisipación de energía cinética denominada ε_p.

Promediando B.12, como las derivadas espaciales de magnitudes medias son nulas en turbulencia homogénea, resulta finalmente:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{1}{2}u_i^2\right\rangle=-\langle\varepsilon_p\rangle \tag{B.13}$$

Esta es la ecuación para la variación temporal de energía cinética media.

Se llama disipación verdadera a la cantidad $\varepsilon=2\nu S_{ij}S_{ij}$. La pseudodisipación definida antes coincide en promedio con ε, es decir $\langle\varepsilon\rangle=\langle\varepsilon_p\rangle$, sólo en turbulencia homogénea e isótropa.

Las correlaciones de orden dos para el tensor gradiente de velocidad en turbulencia homogénea vienen dadas por *(Hinze, 1975)*:

$$\left\langle\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right\rangle=C\left(-2\delta_{kl}\delta_{ij}+\frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jk}+\frac{1}{2}\delta_{jl}\delta_{ik}\right) \tag{B.14}$$

donde C es una constante del flujo.

De esta forma, con la notación $\dfrac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}=a_{\alpha\beta}$ se obtienen las correlaciones distintas de cero, que son:

$$\begin{aligned}\langle a_{\alpha\beta}^2\rangle&=2\langle a_{\alpha\alpha}^2\rangle\\ \langle a_{\alpha\beta}a_{\beta\alpha}\rangle&=-\frac{1}{2}\langle a_{\alpha\alpha}^2\rangle\\ \langle a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta}\rangle&=-\frac{1}{2}\langle a_{\alpha\alpha}^2\rangle\end{aligned} \tag{B.15}$$

donde los índices griegos repetidos no implican suma.

Así, cualquier correlación de segundo orden entre componentes del tensor puede escribirse en función de la varianza $\langle a_{11}^2\rangle$.

Puede calcularse ahora:

$$\langle a_{ij}a_{ij}\rangle=\langle(S_{ij}+W_{ij})(S_{ij}+W_{ij})\rangle=\langle S_{ij}S_{ij}+S_{ij}W_{ij}+W_{ij}S_{ij}+W_{ij}W_{ij}\rangle$$

donde $S_{ij}W_{ij}=0$ *(contracción entre un tensor simétrico y uno antisimétrico)*. Por lo tanto:

$$\langle a_{ij}a_{ij}\rangle=\langle S_{ij}S_{ij}\rangle+\langle W_{ij}+W_{ij})\rangle=\langle S_{ij}S_{ij}\rangle+\frac{1}{2}\langle\omega_j^2\rangle \tag{B.16}$$

Se calcula ahora el promedio:

$$\langle S_{ij}S_{ij}\rangle = \left\langle \frac{1}{4}(a_{ij}+a_{ji})(a_{ij}+a_{ji})\right\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle a_{ij}^2\rangle + \langle a_{ji}^2\rangle + 2\langle a_{ij}a_{ji}\rangle\right)$$

$\langle a_{ij}a_{ji}\rangle = 0$ es nulo por las relaciones de isotropía B.14.

Resulta: $\langle S_{ij}S_{ji}\rangle = \frac{1}{2}\langle a_{ij}^2\rangle$, y sustituyendo esta expresión en B.16 se obtiene

$$\langle \omega_j^2\rangle = \langle a_{ij}^2\rangle$$

Finalmente se ha demostrado que:

$$\langle a_{ij}a_{ij}\rangle = 2\langle S_{ij}S_{ij}\rangle = \langle \omega_j\omega_j\rangle \tag{B.17}$$

Es decir, $\langle \varepsilon_p\rangle = \langle \varepsilon\rangle = \nu\langle \omega^2\rangle$. Los promedios de pseudodisipación, disipación verdadera y enstrofía dividida por la viscosidad coinciden en turbulencia homogénea isótropa e incompresible. Sustituyendo las relaciones B.14 se obtiene la expresión

$$\langle \varepsilon\rangle = 15\nu\langle a_{11}^2\rangle \tag{B.18}$$

que permite escribir la disipación media de energía cinética en función de la varianza de una componente cualquiera de la diagonal del tensor gradiente de velocidad.

B.4. Relaciones de Betchov

Betchov (1956) demuestra que el momento de tercer orden de una componente de la diagonal del tensor gradiente de velocidad es proporcional al promedio del producto de los tres autovalores del tensor velocidad de deformación. A continuación se expone brevemente el desarrollo.

Tomando como base los tres autovectores del tensor velocidad de deformación, cuyos tres autovalores se denominan a, b, y c con $|a| \geq |b| \geq |c|$, el gradiente de velocidad puede escribirse:

$$a_{ij} = \begin{vmatrix} a & \frac{\omega_3^*}{2} & -\frac{\omega_2^*}{2} \\ -\frac{\omega_3^*}{2} & b & \frac{\omega_1^*}{2} \\ \frac{\omega_2^*}{2} & -\frac{\omega_1^*}{2} & c \end{vmatrix} \tag{B.19}$$

donde ω_1^*, ω_2^*, y ω_3^* son las componentes de la vorticidad en las direcciones principales de S_{ij}. Se supone además el flujo incompresible, es decir $a + b + c = 0$. Por lo tanto b y c tienen el mismo signo, distinto al de a.

Las componentes del tensor velocidad de deformación en el sistema de referencia formado por los ejes principales pueden escribirse en función de a, b, c y los ángulos de Euler ψ, ϕ.

Para un elemento diagonal, por ejemplo $S_{11} = a_{11}$.

$$a_{11} = a\ cos^2\phi + b\ cos^2\psi\ sen^2\phi + c\ sen^2\psi\ sen\phi \tag{B.20}$$

donde ϕ es el ángulo entre el eje x_1 y el eje principal asociado al autovalor a, y ψ el ángulo entre el eje principal asociado a c y una dirección perpendicular a los ejes x_1 y el principal asociado con a.

Suponiendo independencia estadística de las direcciones espaciales *(por isotropía)*, la probabilidad de encontrar los ángulos ϕ y ψ es $\frac{1}{4\pi}\ sen\phi\ d\phi\ d\psi$. Elevando al cuadrado e integrando para promediar resulta:

$$\langle a_{11}^2 \rangle = \frac{2}{15}\langle a^2 + b^2 + c^2 \rangle \tag{B.21}$$

Analógamente, elevando B.20 al cubo e integrando:

$$\langle a_{11}^3 \rangle = \frac{24}{105}\langle abc \rangle \tag{B.22}$$

El de orden cuatro resulta:

$$\langle a_{11}^4 \rangle = \frac{8}{105}\langle a^4 + b^4 + c^4 \rangle \tag{B.23}$$

La ecuación B.22 dice que dado que $\langle a_{11}^3 \rangle < 0$, el promedio $\langle abc \rangle$ es negativo, lo que conduce por la condición de incompresibilidad a que $\langle a \rangle < 0$ y $\langle b \rangle \geq \langle c \rangle > 0$, es decir, el autovalor intermedio b *(llamado β en el texto ajeno a este apéndice)* tiene promedio positivo.

Utilizando las condiciones de homogeneidad e isotropía, con la notación B.19 puede demostrarse la relación:

$$\frac{d}{dt}\left\langle \omega_1^* + \omega_2^* + \omega_3^* \right\rangle = \frac{d}{dt}\langle \omega^2 \rangle = -\langle abc \rangle - \frac{1}{4}\nu \left\langle \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right\rangle \tag{B.24}$$

El lado izquierdo de B.24 es la variación temporal del promedio del cuadrado de la vorticidad. El segundo término del lado derecho es siempre negativo. Entonces para que haya producción de enstrofía media, el primer término del lado derecho ha de ser positivo, lo que obliga de nuevo a que el autovalor intermedio de S_{ij} tenga mayor probabilidad de ser positivo, o equivalentemente, por B.22, el momento del tercer orden de $a_{\alpha\alpha}$ es negativo.