Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas: una propuesta didáctica para 3º de ESO

Linear equations systems with two unknown variables: a didactical proposal for 3º ESO

Autor

Beatriz Alegre Terrado

Director

Janeth A. Cárdenas Lizarazo

Facultad de Educación

2015/2016

Repositorio de la Universidad de Zaragoza – Zaguan http://zaguan.unizar.es

Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas: una propuesta didáctica para 3º de ESO

Autor: Beatriz Alegre Terrado

Director: Janeth A. Cárdenas Lizarazo

Junio de 2016

EDUCACIÓN FACULTAD DE ZARAGOZA

Universidad Zaragoza

1542

ÍNDICE

1 INTRODUCCIÓN

Se presenta esta propuesta didáctica sobre el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas para el tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria en el marco del Trabajo Final del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas, en la especialidad de Matemáticas.

La propuesta didáctica seguirá la siguiente estructura:

- Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.
- Propuesta de enseñanza.
- Secuencia didáctica.
- Evaluación.

2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

A continuación se presentan los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, clasificándolos según el número de soluciones, mostrando sus diferentes representaciones y analizando la tecnología sobre la que se sustentan. Además se repasa su evolución a lo largo de la historia del hombre.

Según el Diccionario de la Real Academia Española (2014), un sistema de ecuaciones es definido por “conjunto de dos o más ecuaciones cuya solución es común a todas ellas” y por ecuación se entiende “una igualdad que contiene una o más incógnitas”, por lo que la palabra clave que va a dar sentido a toda la propuesta didáctica será “la igualdad”.

Los sistemas de ecuaciones pueden clasificarse atendiendo a diferentes propiedades:

- Según el grado de las ecuaciones: ecuaciones de primer grado o lineales, de segundo grado o cuadráticas, de tercer grado, de cuarto grado o de grado n (siendo n un número cualquiera).
- En cuanto al número de ecuaciones, el sistema será de una ecuación, dos ecuaciones, tres ecuaciones, y así sucesivamente.
- Dependiendo del número de incógnitas que tenga, el sistema será de una incógnita, de dos incógnitas, etc.

Este trabajo se centra en el estudio de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

2.1 Las ecuaciones lineales

Las ecuaciones lineales con dos incógnitas pueden escribirse, en términos algebraicos y de manera general, como

$$ax + by = c$$

donde x e y representan las incógnitas o variables y a, b y c son coeficientes constantes. Los términos x e y se asumen como incógnitas cuando se trata de determinar el valor concreto que toman para que se cumpla la igualdad, mientras que se entienden como variables cuando pueden tomar distintos valores para los cuales sea cierta la igualdad.

Cualquier ecuación de este tipo, representa una línea recta dentro de un plano cartesiano, pasando de esta manera, del registro algebraico al registro gráfico. Un ejemplo de ello puede ser la ecuación $2x + 3y = 3$ (Imagen 1).

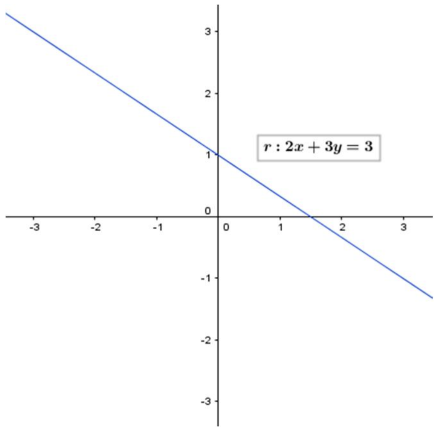


Imagen 1. Ejemplo de representación algebraica y gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas.

Esta representación, se trabaja también en la Educación Secundaria como parte de la función lineal, la cual se define como una correspondencia entre los elementos de un conjunto inicial y los elementos de un conjunto de llegada de tal manera que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde uno y solo un elemento del conjunto de llegada y cuya expresión viene dada por $y = mx + n$, donde m representa la pendiente y n la ordenada en el origen.

Al hacer la conexión entre la ecuación lineal y la función lineal se ve que en la función lineal la pendiente será $m = -\frac{a}{b}$ y la ordenada en el origen $n = \frac{c}{b}$, siendo a, b y c los coeficientes constantes de la expresión general de la ecuación de la recta.

2.2 Tipos y representaciones de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se puede representar algebraicamente por

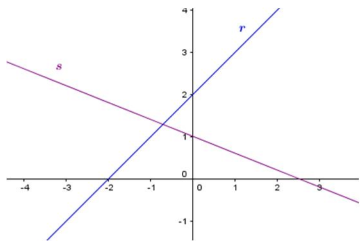
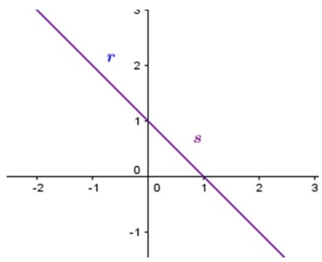
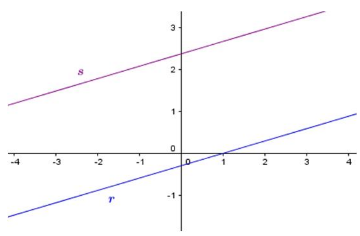
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases},$$

donde x e y representan las incógnitas y a_i, b_i y c_i $(i = 1,2)$ son coeficientes constantes. Gráficamente, se podrá representar mediante dos líneas rectas en el plano cartesiano.

Además, la solución algebraica de un sistema de ecuaciones se corresponderá con los valores de las incógnitas x e y que cumplen todas las ecuaciones a la vez y, gráficamente, con el punto de corte de las rectas que representan.

Estas dos ecuaciones pueden tener o no soluciones en común. En caso de tener soluciones en común puede compartir una o infinitas soluciones. Se llama sistema compatible determinado cuando ambas ecuaciones comparten una única solución y se dice sistema compatible indeterminado cuando comparten infinitas soluciones. En el caso de no tener soluciones en común, el sistema se llama incompatible. Su representación algebraica y geométrica se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1. Tipos de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Representación algebraica y gráfica.

Tipos de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	**Representación algebraica** $r: a_1x + b_1y = c_1$ $s: a_2x + b_2y = c_2$	**Representación gráfica y posición relativa de las rectas en el plano**
Sistema compatible determinado	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	 r y s secantes
Sistema compatible indeterminado	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ $c_2 \neq 0$	 r y s coincidentes
Sistema incompatible	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ $c_2 \neq 0$	 r y s paralelas

En cuanto a la representación tabular, los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas presentarán las siguientes formas:

1) Sistema compatible determinado:

Por ser dos rectas secantes, se tiene que $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. Luego, la tabla que lo representa será la siguiente:

$\boldsymbol{x}$	$-r$	…	-1	0	1	…	r
$\boldsymbol{y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}}$	$\frac{c_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_1} r$	…	$\frac{c_1}{b_1} + \frac{a_1}{b_1}$	$\frac{c_1}{b_1}$	$\frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}$	…	$\frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} r$
$\boldsymbol{y = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2}}$	$\frac{c_2}{b_2} + \frac{a_2}{b_2} r$	…	$\frac{c_2}{b_2} + \frac{a_2}{b_2}$	$\frac{c_2}{b_2}$	$\frac{c_2}{b_2} - \frac{a_2}{b_2}$	…	$\frac{c_2}{b_2} - \frac{a_2}{b_2} r$

La solución vendrá dada por el valor de x_1 que iguala las dos expresiones que dan lugar a y. Es decir, la solución se encontrará en el valor $x_1 = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{b_2 a_1 - b_1 a_2}$.

2) Sistema compatible indeterminado:

Al tratarse de dos rectas coincidentes, se cumple que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k_1$, luego la tabla correspondiente a este caso es:

$\boldsymbol{x}$	$-r$	…	-1	0	1	…	r
$\boldsymbol{y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}}$	$k_2 + k_3 r$	…	$k_2 + k_3$	k_2	$k_2 - k_3$	…	$k_2 - k_3 r$
$\boldsymbol{y = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2}}$	$k_2 + k_3 r$	…	$k_2 + k_3$	k_2	$k_2 - k_3$	…	$k_2 - k_3 r$

Se aprecia claramente que el valor que toma y en ambas expresiones es el mismo y, por tanto, todo par (x, y) de esta tabla será solución del sistema. Por consiguiente, el sistema tiene infinitas soluciones.

3) Sistema incompatible:

Como son rectas paralelas, se cumple que $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ y, por tanto, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = k$ y $\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}$. Luego, la representación tabular es:

$\boldsymbol{x}$	$-r$	…	-1	0	1	…	r
$\boldsymbol{y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}}$	$\frac{c_1}{b_1} + kr$	…	$\frac{c_1}{b_1} + k$	$\frac{c_1}{b_1}$	$\frac{c_1}{b_1} - k$	…	$\frac{c_1}{b_1} - kr$
$\boldsymbol{y = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2}}$	$\frac{c_2}{b_2} + kr$	…	$\frac{c_2}{b_2} + k$	$\frac{c_2}{b_2}$	$\frac{c_2}{b_2} - k$	…	$\frac{c_2}{b_2} - kr$

Es decir, en ningún caso podrá encontrarse un valor de x para el que las dos expresiones que determinan y tomen el mismo valor ya que, comparándolas, el primer sumando siempre es distinto ($\frac{c_1}{b_1} \neq \frac{c_2}{b_2}$) y el segundo es igual.

2.3 Tecnologías

Todos los sistemas de ecuaciones lineales están formados por dos o más ecuaciones, que se definen como una igualdad y es por ello que toda tecnología utilizada radica en el signo igual y su significado y utilización.

Las técnicas que se emplean en la resolución de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas están basadas en la manipulación de ecuaciones y, por tanto, en el uso del signo igual. Una vez traducido un enunciado del lenguaje habitual al lenguaje matemático (ya sea en su registro algebraico, tabular o gráfico) aparece dicho signo. Por tanto, es importante que los alumnos sepan interpretarlo y utilizarlo de la manera adecuada, ya que fundamenta y justifica todas las técnicas que se presentan en el aula.

Sin embargo, el problema fundamental que esconde este signo se encuentra en sus diferentes interpretaciones y significados que vienen determinados por el contexto en el que se mueve. Molina (2006) indica que se pueden diferenciar once significados distintos del signo igual dentro del ámbito de la aritmética y el álgebra escolar (Anexo I). Esta amplia variedad de significados facilita la aparición de errores de concepto entre los alumnos.

En referencia a esta propuesta, el significado más relevante es el de expresión de una equivalencia condicional (ecuación). Esto es, dentro del álgebra, expresa una equivalencia, mediante el signo igual, que solo es cierta para algún o algunos valores de la variable o variables, pudiendo no existir ninguno. Por ejemplo, $x^2 + 4x = 5x - 6$.

Otro significado que también interesa es el de expresión de una equivalencia, que relaciona dos representaciones distintas de un mismo objeto matemático. Se distinguen cuatro acepciones diferentes:

- Equivalencia numérica. Las expresiones aritméticas de ambos miembros de la igualdad tienen el mismo valor numérico. También denominado, significado relacional. Ejemplos, $4 + 5 = 3 + 6$, $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.
- Equivalencia simbólica (identidad simbólica). Las expresiones algebraicas de ambos miembros de la igualdad tienen el mismo valor numérico para cualquier valor que tomen las variables. Ejemplo, $x^2 + 2x = x(x - 2)$.

- Identidad estricta. Las expresiones de ambos miembros de la igualdad representan el mismo objeto matemático con el mismo representante. Por ejemplo, $3 = 3$ ó $x + 5 = x + 5$.
- Equivalencia por definición o por notación. Equivalencia de dos expresiones bien sean aritméticas o algebraicas por definición o por equivalencia de significado de la notación usada. Ejemplo, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ donde ambas expresiones son representaciones de una misma fracción.

En la página siguiente se muestra el planteamiento que seguirá esta propuesta en base a las representaciones y la clasificación de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (Imagen 2). El estudio de este objeto matemático se centra en los sistemas compatibles determinados y su resolución, como ha ido ocurriendo a lo largo de la historia del hombre, ya que, como se verá a continuación, todas las civilizaciones focalizaban su atención en la búsqueda de solución de diferentes problemas, sin preocuparse de aquellos que no tenían solución o que tenían infinitas soluciones.

2.4 Los sistemas de ecuaciones lineales a lo largo de la historia

El grupo Thales[1] indica que el álgebra tiene su origen en miles de años atrás. Respecto a las ecuaciones lineales hace un repaso de los registros que hay a este respecto en las civilizaciones egipcia, babilónica, griega, india y china.

La resolución empleada por la cultura egipcia era de manera retórica, usando las operaciones con los datos de forma análoga a como se resuelven estas ecuaciones actualmente. También habla acerca de hallar la solución a través del método de "falsa posición" o "regula falsi", que consiste en dar un valor concreto para la incógnita y probar con él si se verifica la igualdad. En caso de verificarse, ya se tiene la solución; en caso contrario, la solución exacta se obtiene mediante cálculos.

Los babilonios apenas trabajaron las ecuaciones lineales pero sí dieron gran importancia a los sistemas de ecuaciones. Los resolvían designando a las incógnitas con palabras y, para su resolución, comenzaban dándole un valor a alguna incógnita y comprobaban si podía ser solución. El procedimiento empleado era similar a la actual técnica de resolución por reducción.

[1] Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/14/historia.html

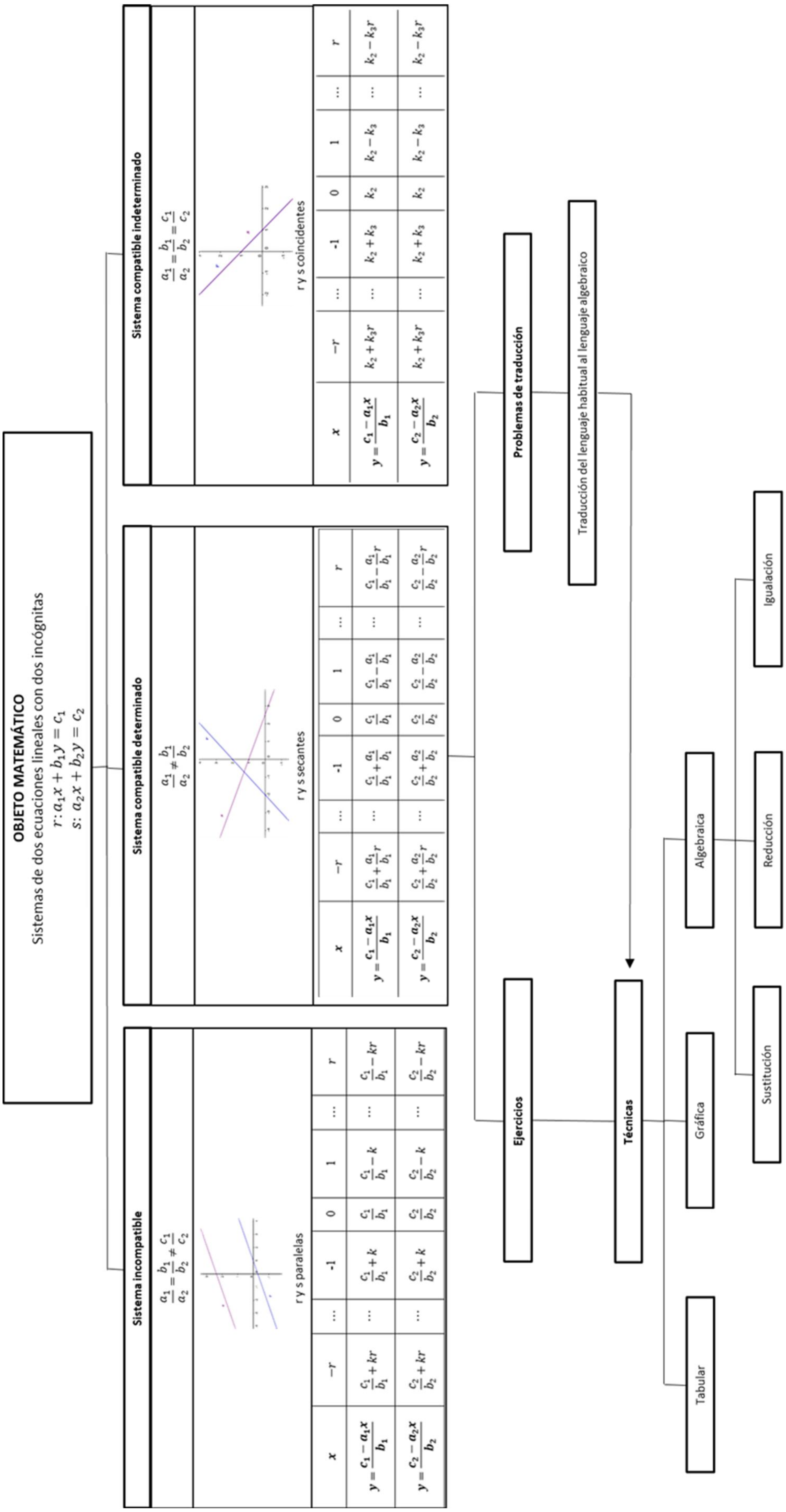


Imagen 2. Esquema del planteamiento a seguir en esta propuesta.

Por otro lado, los griegos también resolvían algunos sistemas de ecuaciones, aunque empleaban procedimientos geométricos. De hecho, Thymaridas (400 a. de C.) llegó a encontrar una fórmula para resolver un determinado sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Diophante, quien representó a los griegos en el álgebra, transformaba los sistemas de ecuaciones en una ecuación lineal para su resolución. Como su intención era resolver los problemas, tan sólo aceptaba las soluciones positivas. El principal inconveniente de los procedimientos usados por Diophante es la carencia de un procedimiento general para la resolución de ecuaciones, ya que para cada problema utilizaba un procedimiento distinto.

Los indios comenzaron utilizando el método de falsa posición empleado por los egipcios, hasta que Brahmagupta expresó cómo resolver ecuaciones lineales: dada la ecuación $ax + b = cx + d$, la solución se obtiene dividiendo la diferencia de los términos conocidos entre la diferencia de los coeficientes desconocidos, es decir, $x = \frac{d-b}{a-c}$. Llegaron a resolver tipos especiales de ecuaciones, sin embargo, no obtuvieron métodos generales de resolución de sistemas.

Gracias a los árabes se produjo la extensión de estos métodos por Europa.

También se menciona que en la cultura china resolvían problemas con ecuaciones, además de usar el método de las matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Se puede concluir, por tanto, de este repaso histórico de la evolución de las ecuaciones lineales y de los sistemas, que su presencia y trabajo ha sido notorio a lo largo de distintas civilizaciones, principalmente en la resolución de problemas reales.

3 ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

En el presente apartado se analizará la situación de la enseñanza de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas desde el punto de vista legislativo y desde las propuestas que plantean las editoriales de los libros de texto, en base a la introducción, las tecnologías, las técnicas y los campos de problemas que proponen. Para concluir, se presentarán los errores y obstáculos más comunes que produce esta enseñanza entre los alumnos.

3.1 La enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales en la ESO

Actualmente, el marco legislativo de la Educación Secundaria Obligatoria está formado dos leyes educativas distintas: la Orden de 9 de mayo de 2007[2] y el Real Decreto 1105/2014[3]. En ellas, el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales aparece en diferentes cursos de Secundaria. En las tablas 2 y 3 se presenta la situación de este objeto matemático en ambas leyes.

Tabla 2. Contenidos de matemáticas sobre los sistemas de ecuaciones en la LOE.

Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón	
3º ESO. Bloque 2. Álgebra.	
Contenidos mínimos	Criterios de evaluación
Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado. *Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas*. *Interpretación de las soluciones*. Ecuaciones de segundo grado. *Resolución de problemas* mediante la utilización de ecuaciones, *sistemas* y otros métodos personales. Valoración de la precisión, simplicidad y *utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana*.	*Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada mediante un enunciado*, […]. Se pretende comprobar la capacidad de extraer la información relevante de un fenómeno, *expresado mediante un enunciado o una tabla, para transformarla en una expresión algebraica*. *Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de […] o de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas*. Este criterio va dirigido a comprobar la capacidad para *trasladar al lenguaje algebraico enunciados de problemas, para aplicar las técnicas de manipulación de expresiones literales*, para traducir el resultado al contexto en el que se enunció el problema y para comprobar la validez de dicho resultado.

[2] Orden de 9 de mayo de 2007[2], del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.
[3] Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Tabla 3. Contenidos de matemáticas sobre los sistemas de ecuaciones en la LOMCE.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, este objeto matemático aparece en los siguientes cursos de Secundaria		
1º y 2º ESO - Bloque 2. Números y álgebra		
Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares de Evaluación
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.	*Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar y resolver problemas mediante el planteamiento de […] y sistemas de ecuaciones, aplicando para su resolución métodos algebraicos o gráficos y contrastando los resultados obtenidos.*	*Comprueba, dada* una ecuación (o *un sistema), si un número (o números) es (son)* solución de la misma. *Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante* […], y *sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.*
3º ESO - Bloque 2. Números y álgebra.		
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas		
Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares de Evaluación
Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y *sistemas de ecuaciones.*	*Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de* […] y *sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.*	*Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante* ecuaciones y *sistemas de ecuaciones, las resuelve e interpreta críticamente el resultado.*
Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas		
Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares de Evaluación
Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y *sistemas.*	*Resolver problemas de la vida cotidiana en los que se precise el planteamiento y resolución de* […], *sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, aplicando técnicas de manipulación algebraicas, gráficas o recursos tecnológicos, valorando y contrastando los resultados obtenidos.*	*Resuelve sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante procedimientos algebraicos o gráficos.* *Formula algebraicamente una situación de la vida cotidiana mediante* ecuaciones […] y *sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, las resuelve e interpreta críticamente el resultado obtenido.*
4º ESO - Bloque 2. Números y álgebra.		
Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas		
Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares de Evaluación
Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y *sistemas.*	*Representar y analizar situaciones y relaciones matemáticas utilizando* […] y *sistemas para resolver problemas matemáticos y de contextos reales.*	*Formula algebraicamente las restricciones indicadas en una situación de la vida real, lo estudia y resuelve, mediante* […] o *sistemas, e interpreta los resultados obtenidos.*
Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas		
Contenidos	Criterios de Evaluación	Estándares de Evaluación
Resolución de ecuaciones y *sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.* *Resolución de problemas cotidianos mediante* ecuaciones y *sistemas.*	Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando ecuaciones de distintos tipos para resolver problemas.	*Resuelve sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas mediante procedimientos algebraicos o gráficos.* *Formula algebraicamente una situación de la vida real mediante* ecuaciones […] y *sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, las resuelve e interpreta el resultado obtenido.*

Como se puede apreciar en la Tabla 2, en la LOE los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas tan solo se trabajan en 3º ESO. Esta ley propone que dicho contenido se trate en contextos de la vida cotidiana para alcanzar los siguientes objetivos:

- Traducir a lenguaje algebraico las situaciones dadas y las tablas de datos.
- Plantear problemas que se describan con este objeto matemático.
- Hacer uso de las técnicas de resolución algebraica.
- Interpretar las soluciones y validarlas en el contexto original del problema.

Omite, por tanto, cualquier referencia a la representación gráfica del objeto matemático.

En la Tabla 3, parece que la LOMCE otorga mayor importancia al trabajo sobre los sistemas de ecuaciones lineales ya que se trata en los cuatro cursos de la etapa. Ésta propone que este contenido se trabaje en diferentes contextos dependiendo del nivel educativo: en 1º y 2º ESO se alude a la vida real y en 3º y 4º a situaciones de la vida cotidiana aunque en el último curso también se pide trabajar este contenido enfocado a otras áreas de conocimiento (matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas) o en contextos netamente matemáticos (matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas). Los objetivos que se quieren alcanzar son:

- Traducir a lenguaje algebraico las situaciones dadas.
- Comprobar la solución numérica de un sistema de ecuaciones lineales.
- Resolver los sistemas de ecuaciones haciendo uso de:
    - Las técnicas algebraicas.
    - La técnica gráfica.
    - Los recursos tecnológicos, que se mencionan en 3º ESO.
- Interpretar las soluciones en el contexto original del problema.
- Valorar y contrastar los resultados obtenidos al hacer uso de diferentes técnicas.

A diferencia de la LOE, la LOMCE, además de apostar por las técnicas algebraicas, apuesta por el registro gráfico, pero no menciona el tabular.

Como se verá cuando se hable de las técnicas, en la norma no se hace explícito el uso de todas las técnicas que se trabajan sobre este contenido. Además, en ninguno de los dos textos anteriores se hace referencia explícita a los campos de problemas que se han a utilizar y se hace especial hincapié en hallar la solución e interpretarla, por lo que se puede entender que todos los problemas que se han de proponer a los alumnos constan de sistemas de ecuaciones lineales compatibles determinados.

Por tanto, atendiendo al análisis hecho sobre los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en esta memoria se han considerado los siguientes objetivos de aprendizaje:

- Reconocer los diferentes sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Traducir a lenguaje algebraico las situaciones dadas, las tablas de datos y las gráficas.
- Hacer uso de las técnicas de resolución algebraica, tabular y gráfica, y pasar de una representación a otra.
- Resolver los sistemas de ecuaciones usando recursos tecnológicos.
- Valorar y contrastar los resultados obtenidos al hacer uso de diferentes técnicas.
- Comprobar e interpretar las soluciones en el contexto original del problema.

Para ello se abordarán los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas desde su definición, diferenciando entre sistemas compatibles (determinados e indeterminados) e incompatibles. A partir de esta distinción, la propuesta se centrará en aquellos sistemas que poseen una única solución y en las técnicas de resolución de éstos, principalmente dentro de problemas contextualizados aunque también se propondrán algunos ejercicios en los que se practiquen las distintas técnicas.

3.2 Sistemas de ecuaciones lineales en los libros de texto

Los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas se pueden clasificar, según el número de soluciones que posean, en sistemas compatibles (determinados e indeterminados) e incompatibles. Se puede observar en los seis libros de texto analizados (tres de 2º y tres de 3º de ESO[4]), que su estudio suele limitarse a los sistemas compatibles determinados, pues todos los problemas y ejercicios constan de una única solución.

En algunos de los libros de texto no se nombra dicha clasificación (SM del 2011 y Santillana del 2008). En otros, solo se distinguen entre compatible e incompatible según tenga o no solución (SM del 2002 y Santillana del 1999). Y en otros, se presenta esta tipología a través de la representación gráfica, diciendo que los sistemas más habituales

[4] Libros de 2ºESO: SM (2011), Anaya (2001) y Santillana (2008).
Libros de 3ºESO: SM (2002), Anaya (2002) y Santillana (1999).

son aquellos que tienen una única solución y que el resto de casos son excepcionales (Anaya del 2001 y 2002).

El trabajo que se desarrolla en los libros de texto sobre el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas se centra en la resolución de aquellos que tienen una sola solución como se describe en los siguientes apartados.

3.3 Razón de ser del sistema de ecuaciones lineales

La metodología escolar seguida para presentar los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas se basa frecuentemente en el planteamiento de una ecuación con dos incógnitas para la cual se busca una solución precisa, dando lugar a que los estudiantes observen que dicha ecuación tiene infinitas soluciones y que, por lo tanto, necesitarán más información para llegar a una única solución, es decir, para encontrar los valores únicos de ambas incógnitas. Este planteamiento suele darse mediante problemas contextualizados en situaciones que los estudiantes puedan entender perfectamente, aunque habitualmente se trata de situaciones poco reales en la vida cotidiana de éstos.

Sin embargo, la introducción del tema en los libros de texto (Anexo II) no suele coincidir en todas las editoriales, ni siquiera entre libros de la misma editorial. Por ejemplo, la editorial Anaya apuesta por las balanzas, aunque con distintos enfoques. En el libro de 2º ESO se propone la traducción al lenguaje algebraico mientras que en el de 3º ESO simplemente se hace un análisis de los datos, llegando a la solución sin utilizar lenguaje algebraico.

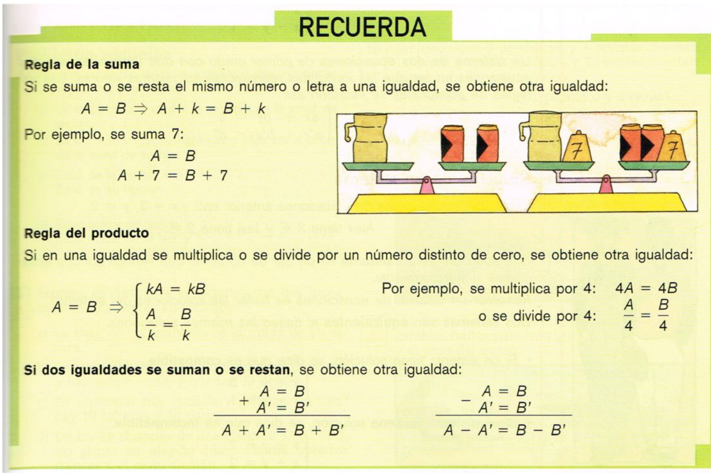
En la editorial Santillana se utilizan dos contextos muy diferentes. En 2º ESO se utiliza una historia a modo de cuento en la que se plantea un problema que puede resolverse tanto con una ecuación de una incógnita ($x + x + 1 = 55$) como con un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas ($x + y = 55, y = x + 1$). En 3º ESO se utiliza un contexto real que se propone modelizar a través de una ecuación, pero se trata de ejemplos con cantidades puntuales y resultados claros, sin dificultad. Por último, SM en su libro de 3º ESO expone una pequeña parte de la historia de los sistemas de ecuaciones como dato curioso, sin dar información del sistema de ecuaciones en dicha época. Y en el libro de 2º ESO expone una utilidad real y plantea su aplicación en la vida al hacer referencia a los superordenadores, cuya velocidad viene determinada por la máxima velocidad con la que la máquina es capaz de resolver un sistema de ecuaciones.

Por tanto, se ve que la introducción se limita, en ocasiones, a que el escrito toque el objeto matemático así sea de manera tangencial, aunque no se muestre la utilidad de éste en la sociedad.

3.4 Tecnologías, técnicas y campos de problemas que se enseñan

3.4.1 Tecnologías

Las tecnologías que justifican las técnicas son muy escasas y no suelen aparecer explícitamente. Cuando aparecen, es a modo de recordatorio de conocimientos anteriores y frecuentemente son reglas para operar con las propias ecuaciones, como la regla de la suma o la regla del producto (Imagen 3).


RECUERDA

Regla de la suma

Si se suma o se resta el mismo número o letra a una igualdad, se obtiene otra igualdad:

$A = B \Rightarrow A + k = B + k$

Por ejemplo, se suma 7:

$A = B$

$A + 7 = B + 7$

Regla del producto

Si en una igualdad se multiplica o se divide por un número distinto de cero, se obtiene otra igualdad:

$A = B \Rightarrow \begin{cases} kA = kB \\ \dfrac{A}{k} = \dfrac{B}{k} \end{cases}$

Por ejemplo, se multiplica por 4: $4A = 4B$

o se divide por 4: $\dfrac{A}{4} = \dfrac{B}{4}$

Si dos igualdades se suman o se restan, se obtiene otra igualdad:

$\begin{array}{r} A = B \\ + \quad A' = B' \\ \hline A + A' = B + B' \end{array} \qquad \begin{array}{r} A = B \\ - \quad A' = B' \\ \hline A - A' = B - B' \end{array}$

Imagen 3. Ejemplo de tecnología.

Respecto a la regla del producto, los libros de 3ºESO de SM y Anaya indican que si los dos miembros de una igualdad se multiplican o dividen por un mismo número, la igualdad no varía. La editorial SM afina un poco más incluyendo el detalle de que, en el caso de dividir, dicho número debe ser distinto de cero. El libro de 3ºESO de Santillana lo expresa de manera ligeramente distinta, mencionando el término ecuación equivalente: “Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por un número distinto de cero se obtiene otra ecuación equivalente a la dada”.

En este último texto, la regla de la suma también se expresa en los mismos términos: “Si se suma una cantidad a los dos miembros de una ecuación se obtiene otra ecuación equivalente a la dada”. Mientras que la editorial SM escribe: “Si se suma o se resta el mismo número o letra a una igualdad, se obtiene otra igualdad”. Puede observarse como SM explicita en mayor medida la regla.

Una última regla que aparece en los libros de 3º ESO de SM y Anaya de igual manera, explica que si dos igualdades se suman o se restan el resultado es otra igualdad.

Las definiciones que aparecen asociadas al discurso tecnológico son:

- Ecuación lineal con dos incógnitas (en el libro de 3º ESO de SM, ecuación de primer grado con dos incógnitas). Aparece en todos los libros excepto en los de 3º ESO de Anaya y Santillana. La definen como una ecuación de la forma $ax + by = c$, donde x e y son las incógnitas y a, b y c son números conocidos. La editorial SM acota un poco más la terminología indicando que a y b son los coeficientes de las incógnitas y c es el término independiente.
- Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Aparece en todos los libros pero existen pequeñas diferencias en las definiciones. Por un lado, la editorial SM dice "un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son dos ecuaciones en las que las incógnitas representan los mismos valores". Mientras que en el resto de textos, en vez de aludir a las ecuaciones de primer grado, se habla de ecuaciones lineales y, en lugar de hablar de los mismos valores de las incógnitas se refieren a una solución común.
- Solución de un sistema. Definida como el par de números que verifica las dos ecuaciones tanto en SM como en Santillana, y como la solución común a ambas ecuaciones en Anaya.
- Sistemas equivalentes. Solo aparece en los libros destinados a 3º ESO y se dice que dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

A pesar de que las definiciones y las reglas para operar con ecuaciones son frecuentes en los libros de texto, detrás de todo ello está el significado del signo igual, al que parece no hacerle mención implícita cuando se habla de la regla de la adición y del producto, no obstante, se trata de un signo que provoca grandes dificultades a los alumnos, que pasan de un ámbito aritmético a otro algebraico y que, por tanto, adquiere un significado diferente al que están acostumbrados.

3.4.2 Técnicas

Las técnicas que se presentan en estos niveles educativos sobre los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas pueden ser dadas a partir de tres representaciones diferentes: tabular, gráfica y algebraica, haciendo uso de la resolución por sustitución, por reducción y por igualación (Tabla 4).

Tabla 4. Presencia de las técnicas en los libros de texto analizados.

TÉCNICA		SM 2ºESO	SM 3ºESO	ANAYA 2ºESO	ANAYA 3ºESO	SANTILLANA 2ºESO	SANTILLANA 3ºESO
1. Tabular		X	X	X	X	X	X
2. Algebraica	a. Por sustitución	X	X	X	X	X	X
	b. Por reducción	X	X	X	X	X	X
	c. Por igualación			X	X	X	X
3. Gráfica				X	X		

La técnica de resolución mediante tablas de datos siempre aparece al comienzo del tema. Dado un sistema de dos ecuaciones, se crea una tabla para cada una de ellas y se dan valores, casi siempre números enteros o, a lo sumo, reales con dos decimales. Se busca la solución que aparece en ambas tablas y se determina que ese par de valores es la solución del sistema. Es destacable que siempre se dan valores a la incógnita x y se calculan los de la incógnita y, pudiendo dar a entender a los estudiantes que este procedimiento siempre debe hacerse así. Además, SM (2011) advierte de que dicho método "no es práctico si la solución de un sistema no son números naturales y pequeños".

La resolución algebraica, en sus tres formas, se explica siempre a modo de receta, en la que se indican uno a uno los pasos a seguir, ya sea dentro de un problema con contexto o un mero ejercicio (Imagen 4).

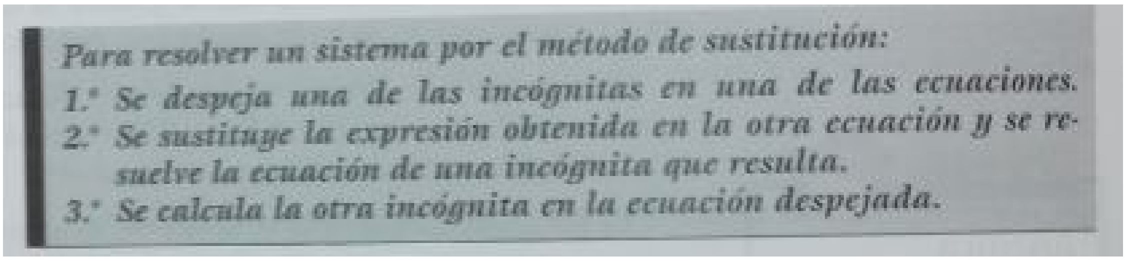

Para resolver un sistema por el método de sustitución:
1.º Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones.
2.º Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación y se resuelve la ecuación de una incógnita que resulta.
3.º Se calcula la otra incógnita en la ecuación despejada.

Imagen 4. Ejemplo de técnica.

La resolución gráfica tan solo se presenta en la editorial Anaya. En esta técnica se parte de las tablas de valores creadas previamente para un determinado sistema de ecuaciones y se representan todos los puntos en el plano. Una vez dibujados, para cada ecuación, se traza una línea recta que une todos ellos. La solución es el punto en el que ambas rectas se cortan. No se tiene en cuenta en esta forma de explicar la técnica que para trazar una recta basta con representar dos puntos en el plano.

A nivel general, las explicaciones de las técnicas suelen aparecer dentro de la resolución de algunos problemas, pero las primeras actividades que se proponen a los alumnos para ser resueltas, son ejercicios cuyo objetivo único es practicar la técnica expuesta. Una vez propuestos los ejercicios, al final se plantean algunos problemas de los campos habituales.

Respecto a las técnicas algebraicas, las editoriales dan una serie de indicaciones para saber cuándo utilizar una u otra. Las tres editoriales aconsejan utilizar el método de sustitución en el caso de que alguna de las incógnitas tenga como coeficiente 1 o -1. Para el método de reducción hay distintas recomendaciones. SM lo aconseja cuando ninguno de los coeficientes de las incógnitas es 1 o -1, y Anaya y Santillana lo acotan más, diciendo que es útil cuando una incógnita tiene el mismo coeficiente en las dos ecuaciones o bien sus coeficientes son múltiplos uno del otro. El método de igualación, según la editorial Santillana, es útil "si los coeficientes son distintos de 1 o de -1". Anaya, sin embargo, no da ninguna indicación al respecto de este último método a pesar de explicarlo.

De acuerdo con las indicaciones dadas, SM explica las técnicas sobre sistemas de ecuaciones acordes a ellas. No ocurre lo mismo con las otras dos editoriales ya que Anaya, en su libro de 2º ESO, explica todas las técnicas algebraicas en base a un mismo sistema de ecuaciones, por lo que puede deducirse que ninguna técnica es más apropiada que otra. Esto mismo ocurre con los textos de Santillana, a excepción del método de reducción en el libro de 3º ESO, que se explica sobre un sistema diferente.

Generalmente, las técnicas se trabajan lo suficiente para que los alumnos puedan llegar a encontrar la solución de un sistema, pero, al final, lo que se consigue es que los estudiantes mecanicen unos procedimientos sin pensar en lo que realmente se está haciendo.

3.4.3 Campos de problemas

Los campos de problemas esencialmente son dos: los de traducción y los que se dan en lenguaje algebraico. Los problemas de traducción son de contexto variado (Tabla 5) y, en algunos de ellos, se pide pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico y al tabular o al gráfico.

Tabla 5. Presencia de los diferentes contextos de los campos de problemas en los libros de texto analizados[5].

CONTEXTO	SM 2ºESO	SM 3ºESO	ANAYA 2ºESO	ANAYA 3ºESO	SANTILLANA 2ºESO	SANTILLANA 3ºESO
1. Productos de dos tipos / personas por género	X	X	X	X	X	X
2. Mezclas / aleaciones	X	X	X	X		
3. Edades	X	X	X	X	X	X
4. Geometría	X	X	X	X	X	X
5. Balanzas / pesas		X	X	X		X
6. Números	X	X	X	X	X	X
7.Recorridos/ distancias / móviles		X	X	X	X	X
8. Examen	X		X	X		X
9. Volumen / peso de envases	X	X		X	X	X
10. Ruedas, patas, jorobas, camas, habitaciones	X	X	X		X	
11. Precios rebajados o aumentados / Interés bancario				X	X	X
12. Dinero que pagan / tienen dos personas	X	X	X	X	X	X
13. Tipos de monedas	X	X		X	X	

Se puede observar que todos los libros de textos usan la mayoría de los contextos, sin embargo, existen algunas diferencias. Por ejemplo, la editorial Santillana olvida todos aquellos problemas relacionados con las mezclas o aleaciones y la editorial SM no menciona ninguno en los que intervengan porcentajes de rebaja o aumento de precios o intereses bancarios. El libro de 3º ESO de Anaya es el más completo en cuanto a diversidad de contextos, mientras que los libros de 2º ESO de SM y Anaya y el de 3º ESO de Santillana, son los que menos contextos presentan, utilizando 9 de los 13 que se han establecido.

Como se ha comentado anteriormente, dichos contextos no se suelen encuadrar en situaciones de la vida cotidiana (Imagen 5).

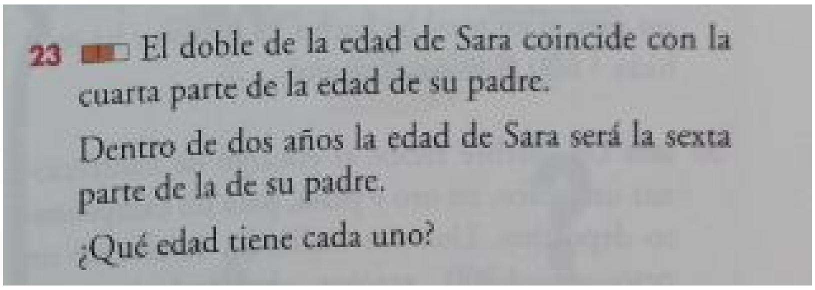

23 El doble de la edad de Sara coincide con la cuarta parte de la edad de su padre.
Dentro de dos años la edad de Sara será la sexta parte de la de su padre.
¿Qué edad tiene cada uno?

Imagen 5. Ejemplo de campo de problemas.

En la imagen anterior, se muestra un problema con contexto que no se encuadra dentro de la vida cotidiana, ya que nadie se plantea actualmente encontrar la edad de dos personas según estas condiciones.

[5] En el Anexo II se muestra una explicación aclaratoria sobre el significado de los trece contextos que se han mencionado.

En todos los problemas propuestos, el alumno debe traducir el enunciado del problema del lenguaje habitual al lenguaje algebraico y plantear dos ecuaciones para su posterior resolución mediante una de las técnicas explicadas, haciendo énfasis en el uso de técnicas algebraicas.

3.5 Efectos de la enseñanza en el aprendizaje del alumno

Este tipo de enseñanza que plantean las editoriales supone ciertos errores y obstáculos en los estudiantes.

Según Socas (1989) los principales errores que cometen los estudiantes en el álgebra, y por consiguiente en los sistemas de ecuaciones, pueden achacarse, entre otros, a:

- La naturaleza y el significado de los símbolos. El principal cambio conceptual al que se enfrentan los estudiantes cuando pasan de la aritmética al álgebra viene del significado de los símbolos, ya que deben enfrentarse a la ambigüedad notacional, lo que les provoca cierta confusión. Así, pueden cometer errores del tipo "si $x = 5$, $3x = 35$". Además, el signo que más confusión puede llegar a crear es la igualdad, ya que en aritmética sirve para unir un problema con su resultado y, sin embargo, en las ecuaciones tiene un carácter bidireccional e indicador de relación de equivalencia.
- El uso incorrecto de fórmulas o procedimientos.
  - Mal uso de la propiedad distributiva. Por ejemplo,
  $$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$
  - Errores de cancelación por generalizar procedimientos que pueden verificarse en otras situaciones. Un ejemplo es: $\frac{Ax+By}{x+y} = A + B$
  - Errores relativos al uso de recíprocos. Tomando como referencia la situación $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$, pueden concluir que de $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{7}$ se obtiene la ecuación $3 = x + 7$.
  - Falsas generalizaciones sobre números. Como ejemplo, los estudiantes afirman que
  $$(x - a)(x - b) = k \Rightarrow x - a = k \text{ ó } x - b = k$$
  generalizando erróneamente la siguiente situación:
  $$(x - a)(x - b) = 0 \Rightarrow x - a = 0 \text{ ó } x - b = 0$$

- La mala comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes. la falta de buen manejo de la aritmética que traslada esos mismos problemas al álgebra (fracciones, potencias, uso de paréntesis, etc). Así, se cometen errores tales como $-\frac{a+b}{c} = -\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

Betancourt (2009) indica que las dificultades que presenta gran parte del alumnado a la hora de efectuar operaciones donde intervienen fracciones, paréntesis, etc. condiciona el planteamiento comentado anteriormente acerca de los campos de problemas contextualizados pero no totalmente reales y de aplicación diaria.

En los libros de texto, muchos de los problemas que se presentan en estos niveles educativos están adaptados y pueden ser resueltos mediante sistemas de ecuaciones cuyos coeficientes son números enteros y, en menor medida, número racionales. Esto ayuda al estudiante a la hora de efectuar las operaciones de manera más segura y evitando en la medida de lo posible los fallos de cálculo, pero restringe enormemente la posibilidad de plantear problemas que surgen de la vida cotidiana. Desafortunadamente, estos problemas adaptados no despiertan el interés del alumno ni tienen la misma capacidad de motivación, por lo que puede haber estudiantes que no le vean el sentido al objeto matemático.

Una posible solución a este problema, como sugiere Betancourt (2009), sería la introducción de las TIC en la resolución de sistemas de ecuaciones.

También, la traducción del lenguaje habitual al lenguaje algebraico, y viceversa, ha sido motivo de muchos estudios a lo largo de los años dados los diversos errores que se cometen en torno a ella. Por ejemplo, Garriga (2011) menciona a (Clement, 1982; Mestre, 1988; Spanos, Rhodes, Dale y Crandall, 1988), quienes tratan la "traducción sintáctica" y dicen que ésta se produce cuando los errores se deben a la conversión de cada oración en una ecuación, sustituyendo las palabras clave por símbolos de forma secuencial de izquierda a derecha.

Finalmente, de Herrero (2004) cita a Panizza et al. (1995) quien afirma que no verificar la solución constituye otro de los problemas que nos encontramos en la educación matemática, produciéndose así una desarticulación entre el objeto sistemas de ecuaciones y su conjunto solución.

En efecto, las consideraciones que se acaban de citar están de acuerdo con el currículo educativo. En la legislación se apuesta por plantear problemas de la vida real o cotidiana, sin embargo, éstos pueden causar grandes dificultades a los estudiantes ya que los coeficientes dejarían de ser números enteros para pasar a ser mucho más complejos, incluyendo fracciones y números con excesivos decimales. Es por ello que las TIC, que también se mencionan en el currículo, tienen que ejercer un papel importante en la enseñanza, facilitando estas tareas. Por último, de acuerdo con el currículo, se debe verificar la solución y devolverla a su contexto inicial. Sin embargo, es otro de los problemas a los que hay que hacer frente.

4 PROPUESTA DE ENSEÑANZA

4.1 Conocimientos previos

Para que el alumno pueda enfrentarse al nuevo objeto matemático deberá poseer una serie de conocimientos y habilidades que se han trabajado en cursos anteriores.

En primer lugar, deberá ser capaz de reconocer una ecuación y resolverla. Para ello, deberá saber manipular las expresiones algebraicas así como la transposición de términos de un miembro a otro de la igualdad, entendiendo que la ecuación es una relación de equivalencia y que ambos miembros deben valer lo mismo en todo momento. Además, para resolver la ecuación, será importante que entienda el concepto de solución y sepa comprobar la veracidad de la igualdad para dicha solución.

De igual manera, en la resolución de problemas, será necesario que sepa traducir los enunciados del lenguaje habitual al lenguaje algebraico.

También debe conocer y usar correctamente las tablas de valores para asegurar que el alumno sabe pasar entre los registros algebraico, gráfico y tabular sin excesivas dificultades.

Por último, debe conocer la ecuación de la recta, en sus registros algebraico, tabular y gráfico, y el paso de un registro a otro. También es importante que el alumno conozca las distintas posiciones relativas de dos rectas dentro de un plano.

Todo esto se encuentra dentro del currículo de los cursos 1º y 2º ESO tanto de la LOE como de la LOMCE. Sin embargo, aunque estos son conocimientos previos, también son conocimientos sobre los cuales se debe incidir de manera efectiva en busca de que el alumno llegue a ser capaz de resolver y plantear problemas que se pueden modelizar a través de los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, razón por la cual se indaga por su estado inicial, y a su vez se plantean situaciones en las que el alumno se vea enfrentado a poner en uso este conocimiento, en busca de incidir de manera positiva en el aprendizaje de este tema. Por ello se propondrá realizar una prueba inicial en busca de identificar el estado de estos contenidos.

En el Anexo III se propone una prueba inicial, donde se plantean diferentes ejercicios indicando los objetivos que persiguen y describiendo los posibles errores.

4.2 Razones de ser

En cuanto a la propuesta aquí planteada, para introducir los sistemas de ecuaciones, se propondrán situaciones de la vida cotidiana de los alumnos y de temas que pueden ser de su interés, con el propósito de incrementar su motivación de cara a enfrentarse al nuevo objeto matemático. Se partirá de tres problemas que den lugar a la razón de ser. El primero de ellos (PR1), pretende dar a conocer los distintos tipos de sistemas de ecuaciones lineales en base a los registros algebraico y gráfico. En el segundo (PR2), se planteará una situación en la que el alumno tenga que usar ecuaciones donde intervienen dos incógnitas de manera que, con una sola ecuación, vea la imposibilidad de encontrar la solución que está buscando y, por consiguiente, sienta la necesidad de plantear una segunda ecuación que deberá obedecer a otra condición del problema. Finalmente, con el tercer problema (PR3) se mostrará al estudiante que la técnica tabular queda obsoleta cuando las ecuaciones se hacen más complejas y que solo será útil si se cuenta con sistemas tecnológicos que lleven los registros y que permitan visualizar en qué momento los valores se hacen iguales. Estos tres problemas se encuentran, más adelante, en el apartado de campo de problemas, donde también se indica el objetivo que persiguen. Su solución, junto con la metodología con que se presentarán en el aula y las dificultades o errores que puede presentar, se desarrollan en el Anexo IV.

4.3 Técnicas

Esta propuesta, de la misma manera que ha ocurrido a lo largo de la historia, presta mayor atención a los sistemas de ecuaciones compatibles determinados. Es por ello que, las técnicas (T) que se presentarán en el aula, están enfocadas a la resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

(T1) Resolución por tablas:

- Dar valores a una de las dos incógnitas.
- Despejar la otra incógnita en ambas ecuaciones generando dos expresiones nuevas.
- Calcular los valores correspondientes a ambas expresiones, según los valores que se dan a la otra incógnita.

La solución del sistema se obtendrá cuando para un mismo valor de la primera incógnita se obtenga en ambas expresiones de la segunda incógnita el mismo resultado. Entonces, la solución será el par de valores que verifican este proceso.

(T2) Resolución algebraica:

a) Resolución por sustitución:
   - Despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones.
   - Sustituir la expresión hallada en la otra ecuación.
   - Resolver la ecuación que resulta.
   - Calcular la otra incógnita mediante la ecuación despejada.

b) Resolución por reducción:
   - Multiplicar cada ecuación por un número de manera que una de las incógnitas quede con el mismo coeficiente que el de la otra ecuación, salvo el signo.
   - Sumar las ecuaciones para obtener una ecuación con una sola incógnita.
   - Resolver esta ecuación resultante.
   - Calcular la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema.

c) Resolución por igualación:
   - Despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones.
   - Igualar las expresiones, de tal forma que quede una ecuación con una sola incógnita.
   - Resolver la ecuación resultante.
   - Sustituir el valor obtenido en una de las dos expresiones donde aparecía despejada la otra incógnita.

(T3) Resolución gráfica:

- Dar un par de valores a una de las incógnitas en una ecuación y calcular el valor de la otra incógnita para cada uno de los dos valores dados a la primera. Los dos pares de valores obtenidos representan dos puntos en el plano. Trazar la recta que pasa por ambos. Ésta será la recta que viene dada por la primera ecuación
- Repetir este proceso con la segunda ecuación y dibujar la segunda recta en el plano.
- La solución del sistema será el punto de corte de ambas rectas. En el caso de que las rectas sean paralelas, el sistema no tendrá solución. Por último, si las rectas coinciden, el sistema tendrá infinitas soluciones.

Estas técnicas se presentarán dentro del contexto de algunos de los problemas que se expondrán en el siguiente apartado, para pasar a ejercitarlas, una vez vistas y comprendidas, mediante los ejercicios que se mostrarán más adelante.

Todas ellas están adecuadas al campo de problemas planteado en esta propuesta. El punto más importante para poder aplicar estas técnicas a los problemas es la comprensión del enunciado, ya que será la base para un buen planteamiento de las ecuaciones y su posterior resolución. Además, comprender el enunciado permite devolver la solución a su contexto original y verificar si tiene sentido dentro de éste.

4.4 Campos de problemas

Los campos de problemas que se presentarán en el aula se pueden clasificar en tres tipos: los ejercicios dados en lenguaje algebraico (E), los problemas de traducción (P) y los problemas a resolver con el software Geogebra (G).

En el caso de los primeros, su misión es la de practicar las técnicas presentadas. Por ello, los ejercicios ponen en práctica cada una de las técnicas de resolución, ya sean algebraicas, gráfica o tabular, y el paso de unos registros a otros.

Los problemas de traducción tendrán dos objetivos fundamentales: el paso del lenguaje habitual al matemático y, posteriormente, su resolución mediante las técnicas disponibles; y la comprobación e interpretación de las soluciones en su contexto original. Dentro de estos problemas de traducción se encuentran los problemas de razón de ser (PR).

Todos los problemas pueden resolverse mediante cualquiera de los tres tipos de resolución (algebraica, tabular y gráfica) puesto que se trata de tres tipos de representaciones de un mismo objeto matemático. Sin embargo, en todos los problemas es más conveniente utilizar una técnica u otra ya que la complejidad o sencillez de los cálculos depende de esta elección en gran parte de los casos.

Además, algunos de estos problemas no exigen un sistema de ecuaciones para su resolución. En estos casos, no se trata de ver la razón de ser del sistema de ecuaciones, sino que se pretende dotar al estudiante de más recursos para que sea capaz de determinar por sí mismo qué le conviene en cada situación.

En el caso de los problemas a resolver con Geogebra, es claro que el objetivo fundamental es el uso de los recursos tecnológicos tanto en el reconocimiento de los distintos tipos de sistemas, como en su representación y resolución.

4.4.1 Problemas de traducción

A continuación, se listan los problemas de traducción (P) de sistemas de ecuaciones lineales. En primer lugar aparecen los tres problemas de razón de ser y seguidamente el resto, entre los que algunos están destinados únicamente a la traducción del lenguaje habitual al matemático y en otros se busca la solución, por lo que hay que aplicar las técnicas y devolver la solución al contexto original del enunciado.

(PR1) En una competición participan cuatro barcos: España, Portugal, Grecia y Francia. Han partido de diferentes lugares y todos están equipados con planos y radio, por la que se les van informando de la situación en cada momento. En este momento de la competición el único requisito que tienen que cumplir es que pasen por la boya y luego continúen su camino. Todos quieren llegar en el menor tiempo posible, por lo que tienen que recorrer la mínima distancia entre la boya y el punto en que se encuentran, siguiendo una línea recta. La situación actual de cada barco es la siguiente:

- España: Actualmente se encuentra en las coordenadas $(1,-1)$ y continúa con la misma trayectoria, manteniendo la misma dirección de 45º al noreste (pendiente $m = 1$).
- Grecia: Está trazando una trayectoria que viene la dada por la ecuación de la recta $-x + y = -4$.
- Portugal: Está en el punto $(0,3)$ y le informan de que no debe cambiar la trayectoria, así pasará por la boya.
- Francia: Está en el punto de coordenadas $(-5,2)$ y le informan de que si sigue así pasará por el punto en el que se encuentra actualmente Portugal.

Contesta a las siguientes preguntas y dibuja todas las trayectorias en el mismo plano:

a) Si las trayectorias de España y Francia se cruzan en la boya, ¿en qué punto se encuentra ésta? Representa gráficamente ambas trayectorias y después compruébalo algebraicamente. ¿Cuál es la posición relativa de ambas rectas?

b) ¿Cuál es la ecuación de la recta que determina la trayectoria que está siguiendo Portugal?

c) ¿Tienen algo en común las trayectorias de Francia y de Portugal? Compruébalo gráficamente.

d) ¿El barco de España se cruzará con todos los demás barcos? En caso de que no se cruce con algún barco, compara las dos ecuaciones, ¿qué tienen en común? ¿en qué se diferencian?

e) ¿Pasará Grecia por la boya? Compruébalo gráfica y algebraicamente.

(PR2) En una discusión sobre fútbol entre dos amigos, cada uno tiene una opinión acerca de cuántos partidos ha ganado el Real Zaragoza. En la radio acaban de decir que ha puntuado en 7 partidos pero siguen sin ponerse de acuerdo. Cuando consiguen un periódico, miran la clasificación donde tan solo vienen los puntos totales de cada equipo y ven que el Real Zaragoza lleva 15 puntos a esas alturas de la competición. ¿Sabrías decir cuántos partidos ha ganado? ¿Y cuántos ha empatado?

(PR3) El fabricante de neumáticos Michelín está preparando los próximos campeonatos del mundo de Fórmula 1 y Moto GP. En los test de pretemporada tiene que equipar a 10 vehículos con 32 neumáticos. ¿Cuántos vehículos de cada tipo hay?
Para la temporada tendrá que dar servicio a 1031 vehículos proporcionándoles 3548 neumáticos. En este caso, ¿a cuántos vehículos de cada tipo tiene que dar servicio?

(P1) En un laboratorio están realizando experimentos con un número desconocido x de ratones e y de arañas con 8 ojos.

a) ¿Cuántas arañas hay?

b) ¿Cuántos ratones hay?

c) ¿Cuántas cabezas hay?

d) Si se quitan 100 arañas, ¿cuántas cabezas hay?

e) ¿Cuántas patas hay?

f) Para una prueba muy concreta, se necesitarán 10 ratones y 25 arañas más. ¿Cuántas patas habrá?

g) ¿Cuántos ojos hay?

h) Si se quitan 100 arañas, ¿cuántas cabezas hay?

(P2) Expresa mediante ecuaciones lineales con dos incógnitas las siguientes situaciones e indica qué representan las incógnitas.

a) Ana tiene el doble de años que Pedro.

b) María tiene 3 años menos que Ana.

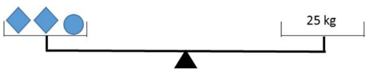
c) Dentro de 4 años, Diego tendrá el triple de edad que la que tiene ahora Cristina (considera x como los años actuales de Diego).

d) La diferencia entre las edades de un padre y un hijo es de 28 años.

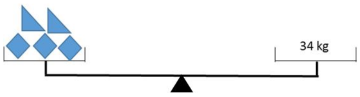
e) Tengo una tercera parte de los años de mi abuela.

(P3) Escribe en lenguaje algebraico las situaciones representadas en cada balanza, indica qué representan las incógnitas y establece relaciones entre los pesos de cada figura:

a)

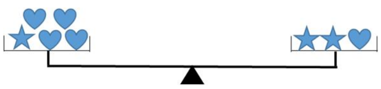


b)



c)

d)



(P4) En una tienda venden botellas de agua de 1 y 2 litros. En el almacén todavía quedan sin vender 24 botellas, que corresponden a 38 litros de agua. ¿Cuántas botellas de cada tipo hay?.

(P5) ¿Qué cantidades de oro a 6 €/g, y de plata, a 1,2 €/g, hay que utilizar para conseguir 1 g de mezcla a 2,40 €/g?.

(P6) Una tienda de deportes vende balones de fútbol y de baloncesto. Raúl compra 3 de fútbol y 2 de baloncesto por 18,50€ y Luis compra 4 de fútbol y 3 de baloncesto por 26€. ¿Cuánto vale un balón de fútbol? ¿Y uno de baloncesto?.

(P7) Un rectángulo de perímetro 124 cm pasa a tener 328 cm de perímetro si sus lados mayores triplican su longitud y sus lados menores la doblan. ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo inicial?

(P8) Encuentra dos números cuya suma sea 10 y la diferencia entre el primero y el doble del segundo sea 1.

(P9) Un motorista sale del pueblo A hacia B con una velocidad de 80 km/h mientras que un ciclista empieza el recorrido en sentido contrario a la vez que el motorista pero a una velocidad de 20 km/h. Si la distancia entre los pueblos A y B es de 150 km, ¿a qué distancia del pueblo A se encontrarán y cuánto tiempo les costará encontrarse?.

(P10) Un examen está formado por problemas de probabilidad y estadística. Beatriz resuelve bien 4 problemas de probabilidad y 3 de estadística, obteniendo una calificación de 9 puntos. Luis contesta bien 3 problemas de probabilidad y 5 de estadística, obteniendo una calificación de 9,5 puntos. Si los problemas de un mismo tipo tienen la misma puntuación, ¿cuántos puntos vale cada problema?

(P11) Se tienen 0,53 € en 16 monedas de 2 y 5 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase hay?

(P12) En una fábrica de tejidos tienen tela roja y gris que envían a las sastrerías en paquetes de dos tipos distintos que se forman como indica la tabla.

	Tela roja	Tela gris
Paquete A	30 m	25 m
Paquete B	20 m	35 m

Si tienen que enviar 550 m de tela roja y 825 m de la gris. ¿Cuántos paquetes de cada tipo deben llenar?

(P13) En el bar de la plaza, la semana pasada, el bocadillo de tortilla valía 1 € más que el refresco. Esa semana, dos refrescos y un bocadillo nos costaron 4 €. Esta semana han subido los precios y nos han cobrado 7,70 € por tres refrescos y dos bocadillos. ¿En qué tanto por ciento se han incrementado los precios?

Estos problemas no son únicos ya que podrán proponerse otros similares siempre que se considere necesario. Su resolución puede encontrarse en el Anexo IV.

4.4.2 Ejercicios

Como ocurre con los problemas de traducción, a continuación, se muestran los ejercicios[6] destinados a practicar las técnicas. En caso de necesitar más ejercicios, se pueden utilizar otros similares a éstos.

(E1) Determina si los siguientes sistemas de ecuaciones tienen solución única, infinitas soluciones o son incompatibles:

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 19 \\ 2x + 5y = 23 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ 9x - 6y = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x - 3y = 9 \\ -3x + 9y = -27 \end{cases}$

[6] La solución de los ejercicios (E) no se explicita por ser aplicación directa de las técnicas que ya se han utilizado en la resolución de los problemas de traducción.

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 1 \\ -\dfrac{5}{3}x - y = -\dfrac{3}{9} \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x - y = 9 \\ -2x + 3y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}y = -\dfrac{2}{10} \end{cases}$

(E2) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones gráficamente:

a) $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 11 \\ -2x - 4y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -8x + 4y = -24 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ -5x + 10y = 30 \end{cases}$

(E3) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones mediante tablas:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 5y = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 3x + 4y = 28 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 3y = 7 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$

(E4) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones mediante el método de sustitución:

a) $\begin{cases} -x + 6y = 7 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 8y = 19 \\ 4x - 7y = -2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -5x - 3y = -2 \\ 8x + y = 26 \end{cases}$

(E5) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones mediante el método de reducción:

a) $\begin{cases} -2x - 5y = 40 \\ 4x + 7y = -56 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 3y = 18 \\ 5x + 2y = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -6x + 7y = -5 \\ 8x - 9y = 7 \end{cases}$

(E6) Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones mediante el método de igualación:

a) $\begin{cases} x - 6y = 5 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 11 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - 4y = 9 \\ -x + y = -3 \end{cases}$

4.4.3 Geogebra

Mediante los siguientes recursos se resolverán ejercicios similares a E1, donde se podrán visualizar las representaciones de los diferentes tipos de sistemas y hallar su solución en caso de tenerla.

(G1) Primer recurso[7], donde los estudiantes pueden ir modificando las ecuaciones en cualquiera de sus tres representaciones (Imagen 6). A la vez que se modifica una representación, el programa cambia los otros dos registros para que continuamente los tres estén representando el mismo objeto matemático. Los alumnos pueden ir modificando las representaciones y ver las características de cada tipo de sistema según los registros.

[7] https://www.geogebra.org/m/XHy57QhT

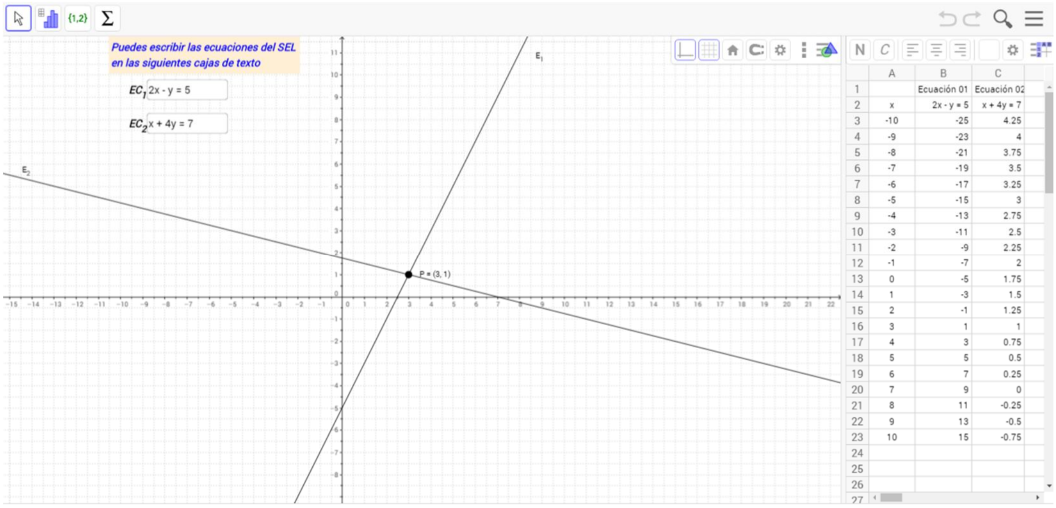


Imagen 6. Primer recurso de Geogebra.

(G2) Segundo recurso[8], donde se pueden modificar los coeficientes y los términos independientes de las ecuaciones (Imagen 7). El recurso tecnológico va modificando la representación gráfica simultáneamente y calculando dos puntos de cada recta. En este ejercicio se aprecia claramente que para representar una recta en el plano basta con tener dos puntos.

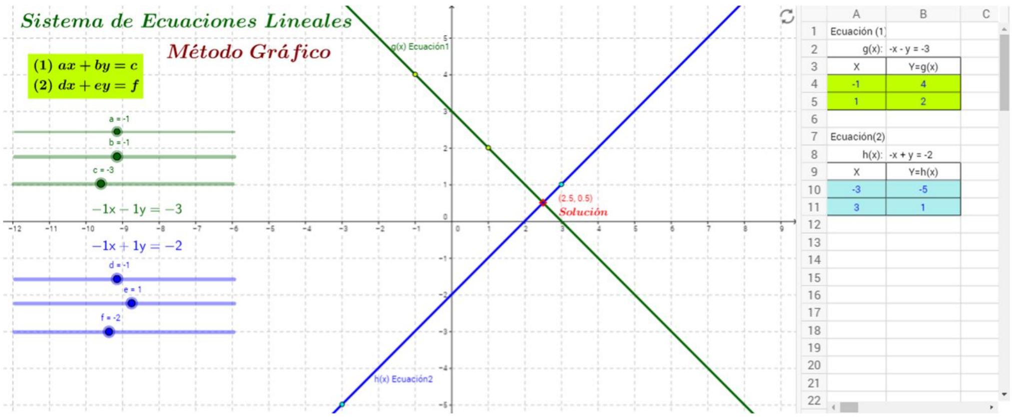


Imagen 7. Segundo recurso de Geogebra.

(G3) Resolución de sistemas con Geogebra. Dentro de la ventana “Cálculo Simbólico (CAS)” de Geogebra, se puede escribir el sistema de ecuaciones como se aprecia en la Imagen 8:

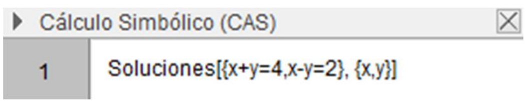


Imagen 8. Resolución de sistemas con Geogebra (1).

Basta con darle a Intro y el programa calcula la solución del sistema (Imagen 9):

[8] https://www.geogebra.org/m/nCdXe4Sz

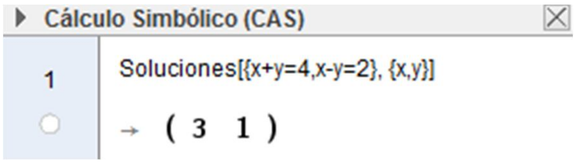


Imagen 9. Resolución de sistemas con Geogebra (2).

Para los alumnos más aventajados, como medida de atención a la diversidad, se les propondrá que investiguen acerca de los sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas. En Geogebra podrán realizar los mismos pasos incluyendo una ecuación y una incógnita más. A continuación, deberán comprobar que la solución que calcula el software es realmente solución del sistema planteado.

En el siguiente apartado se explicará el orden en que estos ejercicios y problemas irán apareciendo en el aula.

5 SECUENCIA DIDÁCTICA

A continuación se explican las sesiones que se desarrollarán para enseñar los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en tercero de Educación Secundaria. Como deberes para casa se dejarán aquellas actividades que no haya dado tiempo a realizar en clase y además se mandarán problemas similares a los aquí planteados. Todos ellos se corregirán al comienzo de la sesión posterior.

Sesión 1:

Prueba inicial	
Objetivos	Conocer la situación con la que los alumnos se disponen a enfrentarse al nuevo objeto matemático.
Técnicas	Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.
Campos de problemas	Ejercicios sobre ecuaciones de primer grado con una incógnita. Problemas de traducción.

Sesión 2:

Razón de ser	
Objetivos	Razón de ser 1: Conocer los diferentes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas: sistema compatible (determinado e indeterminado) y sistema incompatible. Razón de ser 2: Ver la necesidad de los sistemas de ecuaciones para hallar la solución de algunas situaciones. Concepto de solución de un sistema. Razón de ser 3: Ver la necesidad de las técnicas de resolución de tipo algebraico ya que la técnica de resolución tabular queda obsoleta.
Técnicas	(T1) Resolución tabular. (T2) Resolución algebraica. (T3) Resolución gráfica.
Campos de problemas	Problemas de traducción PR1, PR2 y PR3.

Sesión 3:

Revisión de los problemas de razón de ser. Solución con Geogebra. Tipos de sistemas de ecuaciones lineales. Traducción.	
Objetivos	Revisar los problemas de la sesión anterior y solucionarlos mediante recursos tecnológicos. Conocer los tipos de sistemas de ecuaciones lineales. Traducción del lenguaje habitual al matemático.
Técnicas	Resolución con Geogebra.
Campos de problemas	Problemas de traducción: - Problema similar a PR1 para diferenciar los tipos de sistemas. - Problemas P1, P2 y P3. Ejercicio E1.

Sesión 4:

Manejo de Geogebra. Estudio de representaciones.	
Objetivos	Conocer las representaciones algebraica, gráfica y tabular de los sistemas de ecuaciones y el paso de unas a otras.
Técnicas	Resolución con Geogebra.
Campos de problemas	Problemas similares a PR1 y E1 a resolver con los recursos de Geogebra G1, G2 y G3.

Sesión 5:

Sistemas compatibles determinados: resolución gráfica y tabular.	
Objetivos	Conocer los procedimientos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas gráfico y tabular. Comprobación de la solución y verificación dentro de su contexto original, en el caso de los problemas de traducción.
Técnicas	(T1) Resolución tabular. (T3) Resolución gráfica.

Campos de problemas	Problema de traducción P8. Ejercicios E2 y E3.

Sesión 6:

Sistemas compatibles determinados: resolución algebraica por sustitución.	
Objetivos	Conocer el procedimiento de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas algebraico por sustitución. Comprobación de la solución y verificación dentro de su contexto original, en el caso de los problemas de traducción.
Técnicas	(T2a) Resolución algebraica por sustitución.
Campos de problemas	Problemas de traducción: - Segunda parte del problema de razón de ser PR3. - Problemas P4 y P11. Ejercicio E4.

Sesión 7:

Sistemas compatibles determinados: resolución algebraica por reducción.	
Objetivos	Conocer el procedimiento de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas algebraico por reducción. Comprobación de la solución y verificación dentro de su contexto original, en el caso de los problemas de traducción.
Técnicas	(T2b) Resolución algebraica por reducción.
Campos de problemas	Problemas de traducción P6, P7 y P10. Ejercicio E5.

Sesión 8:

Sistemas compatibles determinados: resolución algebraica por igualación.	
Objetivos	Conocer el procedimiento de resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas algebraico por igualación. Comprobación de la solución y verificación dentro de su contexto original, en el caso de los problemas de traducción.

Técnicas	(T2c) Resolución algebraica por igualación.
Campos de problemas	Problemas de traducción: - Similares a P4 y P8. - Problema P9. Ejercicio E6.

<u>Sesiones 9 y 10</u>:

Resolución de problemas. Dudas y repaso.	
Objetivos	Resolver problemas de traducción de mayor complejidad. Comprobación de la solución y verificación dentro de su contexto original. Resolver las dudas de los alumnos. Repaso.
Técnicas	(T1) Resolución tabular. (T2) Resolución algebraica. (T3) Resolución gráfica.
Campos de problemas	Problemas de traducción. - Hoja adicional (Anexo 6). - Problemas P5, P12 y P13.

<u>Sesión 11</u>:

Examen.	
Objetivos	Evaluar los conocimientos adquiridos por los alumnos.
Técnicas	(T1) Resolución tabular. (T2) Resolución algebraica. (T3) Resolución gráfica.
Campos de problemas	Problemas de traducción. Ejercicios.

6 EVALUACIÓN

La calificación de esta unidad se obtendrá realizando la media ponderada de las calificaciones de las siguientes actividades de evaluación, teniendo en cuenta que la prueba inicial de conocimientos previos no tendrá valor en la calificación final:

- Prueba escrita: supondrá un 65% de la nota final y será necesario obtener una nota de, al menos, 4,5 puntos sobre 10 para poder ponderar con el resto de calificaciones.
- Actitud y comportamiento: se valorará con el 10% de la calificación final de esta unidad.
- Cuaderno, deberes y/o actividades adicionales propuestas para entregar: tendrá un valor de hasta el 25% de la nota final.

A continuación se muestra la prueba escrita sobre sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas para evaluar el aprendizaje realizado por los alumnos. La puntuación total de esta prueba será de 10 puntos, que se repartirán como se indica en cada ejercicio.

6.1 Examen 3º ESO

Ejercicio 1. Para cada uno de los siguientes apartados, escribe una situación de la vida cotidiana que se pueda interpretar matemáticamente como (puedes ayudarte escribiéndolo primero en lenguaje algebraico) [1,5 puntos]:

a) Una ecuación lineal con dos incógnitas que pueda tener como solución el par (3,8).

b) Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

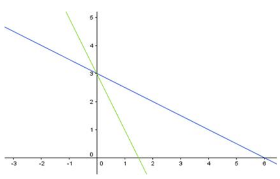
c) Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que no tenga solución.

d)

x	0	1	2	3	4	5	...
y	7	9	11	13	15	17	...

Ejercicio 2. Determina de qué tipo de sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se tratan en los siguientes casos y justifica la respuesta [1,5 puntos]:

a)



b) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 8x - y = -2 \\ -4x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$

d)

$\boldsymbol{x}$	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$\boldsymbol{y = f(x)}$	…	-7	-4	-1	2	5	8	11	…
$\boldsymbol{y = g(x)}$	…	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{15}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{33}{2}$	…

Ejercicio 3. Resuelve cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones por el procedimiento algebraico que consideres más oportuno (debes utilizar los tres procedimientos, uno en cada apartado) [1.5 puntos]:

a) $\begin{cases} -\frac{1}{3}x + 2y = -\frac{1}{6} \\ 5x - 7y = \frac{33}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -2x + 4 = y \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + 4y = -10 \\ x + 2y = -3 \end{cases}$

Ejercicio 4. Al viaje de fin de curso acuden 19 alumnos que deben repartirse en 6 habitaciones dobles y cuádruples.

Esta situación puede modelizarse mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 4y = 19 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

¿Es $(x, y) = (2.5,3.5)$ solución del sistema? ¿Es $(x, y) = (2.5,3.5)$ solución del problema? [1.5 puntos]

Ejercicio 5. Una planta embotelladora dispone de botellas de 1,5 y 2 litros. Han recibido un pedido de 4350 litros y actualmente solo disponen de 2682 botellas. ¿Cuántas botellas de cada tipo tienen en la planta? [2 puntos]

Ejercicio 6. En una fábrica se producen dos tipos de lámparas: tipo 1 y tipo 2. Para producirlas son necesarias dos máquinas A y B. El número de horas que se necesitan para producir una lámpara está indicado en la siguiente tabla:

	Máquina A	Máquina B
Tipo 1	2	1
Tipo 2	2	3

Si cada máquina puede utilizarse 24 horas por día, ¿cuántas lámparas de cada modelo se producen al día? [2 puntos]

6.2 Aspectos a evaluar

Los aspectos a evaluar en cada uno de los seis ejercicios son diferentes y responden a los objetivos marcados en el apartado 3 de este trabajo.

Destacar que el cuarto objetivo (resolver los sistemas de ecuaciones usando recursos tecnológicos) será parte de las sesiones de clase y no se evaluará en el examen final, sino que su seguimiento se realizará en el aula mediante observación directa de la actuación del alumno.

En el primer ejercicio se pretende evaluar la capacidad de plantear problemas en los que intervienen conceptos propios de las matemáticas como el de ecuación lineal con dos incógnitas, sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y solución tanto de una ecuación como de un sistema.

El segundo ejercicio corresponde al primer objetivo marcado, pues se trata de identificar el tipo de sistema de ecuaciones que se presenta en cada apartado y que viene representado ya sea de manera algebraica, tabular o gráfica.

El tercer ejercicio consiste en resolver sistemas mediante procedimientos algebraicos, por lo que puede evaluarse el cumplimiento del objetivo número 3. Además, se pide comprobar la solución hallada en relación con el objetivo 5.

El ejercicio 4 pretende evaluar el cumplimiento de los dos últimos objetivos, ya que se trata de comprobar la solución del sistema y validarla dentro de un contexto dado.

Los ejercicios 5 y 6 son los más completos en cuanto a objetivos que se quieren evaluar. En primer lugar, interviene la traducción del lenguaje habitual al algebraico y la interpretación de una tabla de datos. A continuación, se debe hacer uso de una de las técnicas de resolución de sistemas para poder hallar la solución del problema y, finalmente, se deben comprobar e interpretar las soluciones dentro del contexto del problema. Por ello, la evaluación de estos dos ejercicios dependerá de varios objetivos que tendrán diferentes pesos asignados en cuanto a relevancia.

6.3 Catalogación de tareas y valoración

A continuación se señalan las tareas principales, las tareas auxiliares específicas y las tareas auxiliares generales de cada ejercicio, de acuerdo con los objetivos marcados y los aspectos que se quieren evaluar.

Ejercicio 1.

- Tareas principales:
    - Estructurar relaciones de tipo algebraico que describan el concepto matemático. [0,6 puntos]
    - Identificar situaciones en las que tengan sentido dichas relaciones. [0,3 puntos]
- Tarea auxiliar específica: Determinar los datos variables y los que serán constantes. [0,4 puntos]
- Tareas auxiliares generales: Utilizar correctamente el lenguaje algebraico evitando cometer errores de sintaxis. [0,2 puntos]

Ejercicio 2.

- Tareas principales:
    - Reconocer las características propias de cada sistema: posición relativa de las rectas, relación entre los coeficientes de las expresiones algebraicas o variación entre los datos de la tabla. [0,6 puntos]
    - Justificación de la respuesta: describir en términos de (x, y) la solución que se ve en la gráfica, encontrar ecuaciones equivalentes o comparar los datos de las dos ecuaciones de la tabla. [0,5 puntos]
- Tareas auxiliares específicas: Manipulación de expresiones algebraicas conservando la relación de equivalencia, en el caso de utilizar el registro algebraico. [0,3 puntos]
- Tarea auxiliar general: Operaciones de carácter aritmético, en el caso de utilizar el registro algebraico. [0,1 puntos]

Ejercicio 3.

- Tareas principales:
    - Aplicación de las técnicas de resolución algebraica de manera correcta. [0,7 puntos]
    - Dar la solución indicando el valor de ambas incógnitas. [0,3 puntos]
- Tarea auxiliar específica: Manipulación correcta de las expresiones algebraicas para obtener ecuaciones equivalentes. [0,4 puntos]
- Tarea auxiliar general: Operaciones de carácter aritmético. [0,1 puntos]

Ejercicio 4.

- Tareas principales:
  - Determinar si es solución del sistema. [0,5 puntos]
  - Determinar si es solución del problema. [0,5 puntos]
- Tarea auxiliar específica: Aplicar correctamente el concepto de solución sustituyendo las incógnitas por los valores dados en la solución. [0,3 puntos]
- Tarea auxiliar general: Operaciones de carácter aritmético. [0,2 puntos]

Ejercicios 5 y 6.

- Tareas principales:
  - Planteamiento del sistema de ecuaciones mediante la traducción del lenguaje habitual al algebraico. [0,7 puntos]
  - Devolver la solución al contexto original del enunciado. [0,3 puntos]
- Tareas auxiliares específicas:
  - Resolución del sistema mediante una de las técnicas aprendidas. [0,5 puntos]
  - Encontrar la solución precisa, dando los valores de ambas incógnitas. [0.25 puntos]
- Tarea auxiliar general: Cálculos intermedios con expresiones algebraicas y/o de tipo aritmético. [0.25 puntos]

6.4 Respuestas esperadas

Ejercicio 1.

En este primer ejercicio es previsible que los alumnos planteen primero la solución en términos algebraicos para después inventar una situación que se pueda modelizar con ella. Las posibles respuestas de los alumnos son:

a) Un ejemplo puede ser la ecuación $2x + 5y = 46$
Situación que se puede interpretar como tal: En una excursión participamos 46 personas ocupando todas las plazas de las motos y los coches que estaban disponibles.
En este caso, x sería el número de motos e y el número de coches que había disponibles para la excursión. Se comprueba que 3 motos y 8 coches es una posible solución de la ecuación planteada: $2 \cdot 3 + 5 \cdot 8 = 46$.

b) Una solución sencilla puede venir dada por $\begin{cases} x + y = 28 \\ 2x + y = 38 \end{cases}$.

Situación: Carla se compró una camiseta y un bolso por 28€ y María se compró dos camisetas iguales y el mismo bolso por 38€.

Así, las incógnitas serían $x = "precio\ de\ una\ camiseta"$ e $y = "precio\ de\ un\ bolso"$.

c) Un sistema de ecuaciones que no tiene solución puede ser $\begin{cases} x + y = 28 \\ 3x + 3y = 76 \end{cases}$.

Situación: Siguiendo el ejemplo del apartado anterior, Carla se compró una camiseta y un bolso por 28€. Cuando María los vio, decidió que quería regalarles lo mismo a tres amigas sin saber lo que costaba cada producto y solo contaba con 76€.

d) Esta tabla se puede representar algebraicamente mediante, por ejemplo, la ecuación lineal con dos incógnitas $-2x + y = 7$.

Situación: En un examen muy exigente, Luis sacó un 7 de nota final. Cada respuesta incorrecta restaba dos puntos y se sumaba un punto por cada respuesta correcta. Por lo que, en caso de duda, era recomendable dejar la respuesta en blanco.

En este ejemplo se considera que x es el número de respuestas fallidas e y el número de correctas.

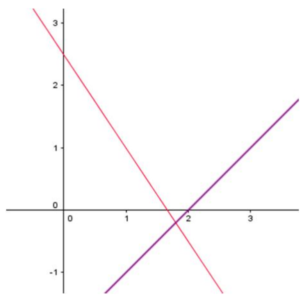
Ejercicio 2.

Como cada apartado aparece en un registro diferente, los alumnos deberían actuar en consecuencia con dicho registro.

a) A simple vista, como las rectas se cortan, se trata de un sistema de ecuaciones compatible determinado. Existe un único punto que pertenece a ambas rectas, que se corresponde con el punto de corte (0,3).

b) Es posible que recurran al registro gráfico para distinguir el tipo de sistema.

Representarán las dos ecuaciones en el plano, dando valores a una de las incógnitas y calculando el valor de la otra. Así, obtendrán que

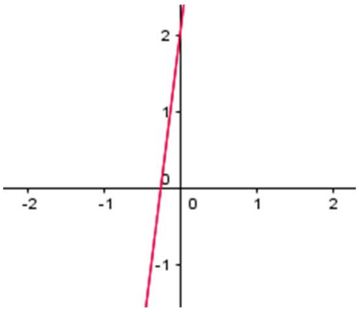


se trata de un sistema compatible determinado justificándolo de igual manera que en el apartado anterior.

Otra forma distinta de proceder que pueden emplear los alumnos para contestar a este apartado, es comparando los coeficientes de las incógnitas y, en caso de ser necesario, los términos independientes de ambas ecuaciones: $\frac{3}{1} \neq \frac{2}{-1}$

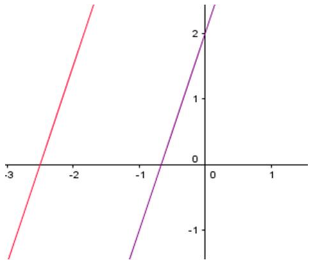
Como los coeficientes no guardan la misma razón de proporcionalidad, se trata de un sistema compatible determinado.

c) De igual manera que en el apartado anterior, mediante la representación gráfica



se observa que se trata de un sistema compatible indeterminado, pues son dos rectas coincidentes y todos los puntos de una recta pertenecen a la otra. Además, algebraicamente se observa que $\frac{8}{-4} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = \frac{-2}{1}$ y, por tanto, ambas ecuaciones son equivalentes.

d) De nuevo, representando ambas rectas en un plano se obtiene que



ambas ecuaciones son paralelas y, por tanto, es un sistema incompatible ya que no tienen ningún punto en común.

Sin embargo, en esta ocasión, es previsible que los alumnos se den cuenta de que la tabla del enunciado muestra que ambas expresiones de la incógnita y van aumentando de tres en tres, por lo que nunca coincidirán. Es decir, no tiene solución y, por consiguiente, es un sistema incompatible.

Ejercicio 3.

El enunciado especifica que se deben utilizar los tres métodos de resolución algebraicos, luego se prevé que los alumnos elijan el método más apropiado para cada sistema. A continuación, se muestran los procesos de resolución que previsiblemente han empleado los alumnos:

a) Por reducción.

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x + 2y = -\frac{1}{6} \\ 5x - 7y = \frac{33}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 6y = -\frac{3}{6} \\ 5x - 7y = \frac{33}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 30y = -\frac{15}{6} \\ 5x - 7y = \frac{33}{4} \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$23y = -\frac{15}{6} + \frac{33}{4} = -\frac{30}{12} + \frac{99}{12} = \frac{69}{12} = \frac{23}{4}$$

$$23y = \frac{23}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

$$5x - 7y = \frac{33}{4};\ 5x - 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{33}{4}\ ; 5x = \frac{33}{4} + \frac{7}{4} = \frac{40}{4} = 10$$

$$5x = 10 \Rightarrow x = 2$$

Luego, la solución es el par $(x, y) = (2, \frac{1}{4})$.

b) Por igualación.

$$\begin{cases} 5x - y = 3 \\ -2x + 4 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x - 3 = y \\ -2x + 4 = y \end{cases}$$

Se igualan ambas expresiones: $5x - 3 = -2x + 4$

Se despeja la incógnita: $5x + 2x = 4 + 3; 7x = 7$

Luego $x = 1$.

Se sustituye x por su valor en alguna de las expresiones que se han igualado:

$$y = 5\text{x} - 3\text{:}\, \text{y} = 5 \cdot 1 - 3 = 2$$

Luego, la solución es el par $(x, y) = (1, 2)$.

c) Por sustitución.

$$\begin{cases} 3x + 4y = -10 \\ x + 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = -10 \\ x = -3 - 2y \end{cases}$$

Sustituyendo la expresión despejada en la otra ecuación:

$$3x + 4y = -10\text{:}\, 3(-3 - 2y) + 4y = -10;\ -9 - 6y + 4y = -10$$

$$-9 - 2y = -10; -2y = -10 + 9; -2y = -1$$

Luego $y = \frac{1}{2}$.

Se sustituye y por su valor en la expresión que da lugar a x:

$$x = -3 - 2y\text{:}\, x = -3 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -3 - 1 = -4$$

Luego, la solución es el par $(x, y) = (-4, \frac{1}{2})$.

Ejercicio 4.

El par $(x, y) = (2.5{,}3.5)$ será solución del sistema si al sustituir cada incógnita por su valor, las dos ecuaciones se cumplen.

- ✓ $2x + 4y = 19{:}\ 2 \cdot 2{,}5 + 4 \cdot 3{,}5 = 5 + 14 = 19$
- ✓ $x + y = 6{:}\ 2{,}5 + 3{,}5 = 6$

Luego, efectivamente, el par $(x, y) = (2.5{,}3.5)$ es solución del sistema.

Este par de valores será solución del problema siempre y cuando tenga sentido dentro del contexto original del problema. En este caso, x e y representan el número de habitaciones dobles y cuádruples, respectivamente, luego no podrá ser solución del problema ya que no se puede media habitación.

Ejercicio 5.

Denotando como $x =$ "$número\ de\ botellas\ de\ 1{,}5\ litros$" e $y =$ "$número\ de\ botellas\ de\ 2\ litros$", se obtienen las siguientes ecuaciones:

Han recibido un pedido de 4350 litros: $1{,}5x + 2y = 4350$

Solo disponen de 2682 botellas: $x + y = 2682$

Luego, el sistema de ecuaciones es $\begin{cases} 1{,}5x + 2y = 4350 \\ x + y = 2682 \end{cases}$

Mediante la resolución algebraica por sustitución, se tiene:

$$\begin{cases} 1{,}5x + 2y = 4350 \\ x + y = 2682 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}5x + 2y = 4350 \\ x = 2682 - y \end{cases} \Rightarrow$$

$$1{,}5x + 2y = 4350;\ 1{,}5 \cdot (2682 - y) + 2y = 4350; 4023 - 1{,}5y + 2y = 4350;$$

$$4023 + 0{,}5y = 4350; 0{,}5y = 327; y = 654$$

Para hallar el valor de x:

$$x = 2682 - y; x = 2682 - 654 = 2028$$

Luego en la planta hay 2028 botellas de 1,5 litros y 654 de 2 litros.

Ejercicio 6.

Denotando como $x =$ "$número\ de\ lámparas\ de\ tipo\ 1$" e $y =$ "$número\ de\ lámparas\ de\ tipo\ 2$", se obtienen las siguientes ecuaciones:

Máquina A: $2x + 2y = 24$ Máquina B: $x + 3y = 24$

ya que cada máquina puede utilizarse 24 horas al día.

Luego, el sistema de ecuaciones es $\begin{cases} 2x + 2y = 24 \\ x + 3y = 24 \end{cases}$

Por sustitución,

$$\begin{cases} 2x + 2y = 24 \\ x + 3y = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 24 \\ x = 24 - 3y \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x + 2y = 24; 2 \cdot (24 - 3y) + 2y = 24; 48 - 6y + 2y = 24; 48 - 4y = 24;$$

$$4y = 48 - 24 = 24 \Rightarrow y = 6$$

Para hallar el valor de x:

$$x = 24 - 3y; x = 24 - 3 \cdot 6 = 24 - 18 = 6$$

Por tanto, se producen 12 lámparas al día, 6 de cada tipo.

6.5 Posibles errores

Ejercicio 1.

Cabe destacar que este ejercicio tiene múltiples soluciones en cada uno de los apartados. Debido a esto, los errores cometidos se deberán principalmente a la complejidad de la respuesta buscada, en lugar de utilizar respuestas más sencillas.

Es previsible que donde más problemas encuentren los alumnos sea en el planteamiento de una situación donde intervenga un sistema sin solución, pues en las últimas sesiones, la propuesta está más centrada en los sistemas que tienen solución única.

También cabe esperar que, en el caso de que se proponga una situación que se puede modelizar con una ecuación lineal en el apartado a, ésta no respete la condición de que el par indicado sea solución.

Ejercicio 2. Además de errores de concepto, en los que los alumnos no sepan la diferenciación entre tipos de sistemas, los errores pueden ser debidos al paso de un registro a otro, en caso de que se opte por pasar al registro gráfico para clasificarlos según la posición relativa de las dos rectas en el plano.

En el caso de que los alumnos opten por trabajar en el registro dado por el enunciado en cada apartado, los errores se deberán principalmente, en el registro algebraico, a la comparación errónea de los coeficientes, pudiendo confundirse entre coeficientes de incógnitas y términos independientes. Por ejemplo, en el apartado b, en lugar de compararse la razón de proporcionalidad entre los coeficientes de x y de y, podrían haber comparado la razón de proporcionalidad de los coeficientes de x y los términos independientes diciendo $\frac{3}{1} \neq \frac{5}{2}$.

Ejercicio 3. Uno de los errores esperados es la solución dada por una única incógnita, en lugar de dar el par de valores que solucionan el sistema. Además, probablemente el error más común aparezca en el trabajo con las expresiones algebraicas, donde se suma mal, se transpone mal, etc.

Ejercicio 4. Los errores que pueden cometerse, además de no conocer el concepto de solución, serán de tipo aritmético. También pueden confundirse las incógnitas x e y y sustituirlas por sus valores intercambiados. Por último, habrá alumnos que no se den cuenta de que el problema no puede tener solución decimal.

Ejercicios 5 y 6. El primer problema puede surgir a la hora de designar las incógnitas. Seguidamente, escribir mal las ecuaciones dará lugar a no resolver correctamente el problema. En la aplicación de la técnica para su resolución los errores cometidos serán los mismos que los indicados en el ejercicio 3 y, por último, no devolver la solución a su contexto original.

En el ejercicio 6 se suma la interpretación de la tabla de datos, donde tienen que compaginar el lenguaje habitual con una tabla de datos que les permite escribir las ecuaciones que dan lugar al sistema.

7 REFERENCIAS

Betancourt, Y. (2009). *Ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior.* (Tesis). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. Recuperado de

http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/recherche/approche_documentaire/master-betancourt

BOA. *ORDEN de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte*.

BOE. *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre.*

de Herrero, S. M. S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 7*(1), 49-78.

Garriga, J. J. (2011). *El lenguaje algebraico: un estudio con alumnos de tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria.* (Tesis). Universidad de Zaragoza. Recuperado de https://invenio2.unizar.es/record/7480/files/TESIS-2012-071.pdf

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis de doctorado, Universidad de Granada. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1210

Real Academia Española. (2014). *Diccionario de la lengua española* (23.a ed.). Consultado en http://www.rae.es/

Socas, M. M. (1989). *Iniciación al álgebra*. Síntesis.

Webgrafía:

Aguilera Abarca, A. (2014). Sistemas de Ecuaciones Lineales por Método Gráfico, GeoGebra. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/nCdXe4Sz

Caro Quintero, J.P. (2014). Sistemas de ecuaciones lineales 2x2, GeoGebra. Recuperado de https://www.geogebra.org/m/XHy57QhT

ANEXO I. TECNOLOGÍAS

Los once significados diferentes del signo igual que Molina (2006) identifica dentro del ámbito de la aritmética y del álgebra escolar son:

1. Propuesta de actividad de cálculo. Aparece en expresiones incompletas consistentes en una cadena operacional de números y/o símbolos seguida del signo igual. Por ejemplo, $x(x+1) - 3x(x+5) =$.
2. Operador. Indica la respuesta a un cálculo o simplificación de una cadena de operaciones situada a su izquierda y cuyo resultado está colocado a su derecha. Por ejemplo, $x(x-2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$.
3. Separador. Los alumnos lo usan en el ámbito algebraico para separar los pasos realizados en una resolución. Puede relacionar expresiones algebraicas que no tienen ninguna relación en el contexto que se mueven. Por ejemplo, $f(x) = x^2 = f^2(x) = x^4$.
4. Expresión de una acción. Símbolo operador o separador de una cadena de operaciones y su resultado con sentido bidireccional. Interpreta la sentencia numérica como la expresión de una acción. Por ejemplo, $24 = 12 + 12$ y $12 + 12 = 24$.
5. Expresión de una equivalencia condicional (ecuación). Dentro del álgebra, expresa una equivalencia que solo es cierta para algún o algunos valores de la variable o variables, pudiendo no existir ninguno. Por ejemplo, $x^2 + 4x = 5x - 6$.
6. Expresión de una equivalencia. Relaciona dos representaciones distintas de un mismo objeto matemático. Se distinguen cuatro acepciones diferentes:
   - Equivalencia numérica. Las expresiones aritméticas de ambos miembros de la igualdad tienen el mismo valor numérico. También denominado, significado relacional. Ejemplos, $4 + 5 = 3 + 6$, $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.
   - Equivalencia simbólica (identidad simbólica). Las expresiones algebraicas de ambos miembros de la igualdad tienen el mismo valor numérico para cualquier valor que tomen las variables. Ejemplo, $x^2 + 2x = x(x-2)$.
   - Identidad estricta. Las expresiones de ambos miembros de la igualdad representan el mismo objeto matemático con el mismo representante. Por ejemplo, $3 = 3$ ó $x + 5 = x + 5$.

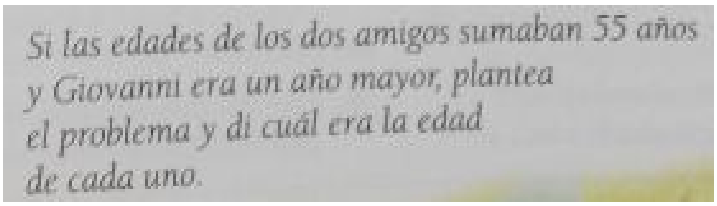
- Equivalencia por definición o por notación. Equivalencia de dos expresiones bien sean aritméticas o algebraicas por definición o por equivalencia de significado de la notación usada. Ejemplo, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ considerando ambas expresiones como representaciones de una misma fracción.

7. Definición de un objeto matemático. Se utiliza para definir o asignar un nombre a un objeto matemático. Por ejemplo, $a^0 = 1$.
8. Expresión de una relación funcional o dependencia. Indica cierta relación de dependencia entre variables o parámetros. Ejemplos, $l = 2\pi r$ ó $y = 3x + 2$.
9. Indicador de cierta conexión o correspondencia. Uso entre objetos no matemáticos o de distinta naturaleza. Ejemplo, $Precio\ bici = 3x + 5$, donde x es el precio de un balón de baloncesto.
10. Aproximación. Relaciona una expresión aritmética y una aproximación de su valor numérico. Por ejemplo, $\frac{1}{3} = 0.33$.
11. Asignación de un valor numérico. Asigna un valor numérico a un símbolo. Por ejemplo, en la resolución de ecuaciones se utiliza para indicar el valor de la incógnita ($a = 30\ cm^2$).

ANEXO II. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LOS LIBROS DE TEXTO

La introducción del objeto matemático que presentan las distintas editoriales en sus libros de texto es:

- Libro de texto de 2º ESO de la editorial SM (2011): presenta el tema mediante un fragmento acerca de los superordenadores, cuya velocidad viene determinada por la máxima velocidad con la que la máquina es capaz de resolver un sistema de ecuaciones.
- Libro de texto de 3º ESO de la editorial SM (2002): la introducción se basa en un pequeño escrito sobre el libro "El arte matemático", deduciendo que ya en el siglo III a.C. se resolvían problemas de sistemas de ecuaciones y que posiblemente los chinos fueran los primeros en encontrar un procedimiento general de resolución de sistemas de ecuaciones.
- Libro de texto de 2º ESO de la editorial ANAYA (2001): parte del dibujo de una balanza equilibrada en la que no se conoce el peso de algunos componentes. Seguidamente, se anima al alumno a pensar en cuánto pueden pesar, diciendo que ya saben trabajar con ecuaciones de una sola incógnita.
- Libro de texto de 3º ESO de la editorial ANAYA (2002): muestra dos balanzas equilibradas con distintos componentes en cada brazo, y hace uso de una tercera balanza para determinar los pesos desconocidos.
- Libro de texto de 2º ESO de la editorial Santillana (2008): utiliza una pequeña historia cuyos personajes son Gabriel Cramer y Giovanni Calandrini en la que se produce una reflexión de Cramer *Porque pienso que cualquier problema tiene su solución, aunque lamentablemente no somos capaces de plantear las ecuaciones adecuadas* que da lugar a pensar en los sistemas de ecuaciones. Por último, plantea el problema (Imagen 10):



Si las edades de los dos amigos sumaban 55 años y Giovanni era un año mayor, plantea el problema y di cuál era la edad de cada uno.

Imagen 10. Introducción del tema. Ed. Santillana (2008)

- Libro de texto de 3º ESO de la editorial Santillana (1999): dedica un tema a las ecuaciones y a los sistemas de ecuaciones conjuntamente. Utiliza las calorías de los alimentos para su introducción, y mediante las unidades de medida gramos y calorías conduce al alumno a plantear determinadas ecuaciones. Por ejemplo, "expresa mediante una ecuación con dos incógnitas el valor energético de x gramos de pollo e y gramos de pan".

Respecto a los campos de problemas, a continuación se muestran algunas aclaraciones y ejemplos que permiten entender las diferencias entre los diferentes contextos que aparecen en los libros de texto analizados.

1. Productos de dos tipos / personas por género o lugar en el que se encuentran.

   Consiste en hallar el número de productos o personas que hay en una determinada situación diferenciados por tipos, género o lugar en el que se encuentran respectivamente.

   Ejemplos:

   a) En el patio del instituto hay el doble de estudiantes que en el gimnasio, pero 9 de estos últimos han salido al patio, y ahora en el patio hay cinco veces el número de alumnos de los que permanecen en el gimnasio. ¿Cuántos estudiantes había al principio en cada sitio? (SM, 2002).

   b) En un avión vuelan 192 pasajeros entre hombres y mujeres. El número de mujeres es $\frac{3}{5}$ del número de hombres. ¿Cuántos hombres hay en el avión? ¿Y mujeres? (Santillana, 2008).

   c) Una empresa fabrica dos tipos de bicicletas, A y B. Para fabricar una del modelo A, se necesitan 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para una del modelo B, 2 kg de cada uno de esos materiales. Si la empresa dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio, ¿cuántas bicicletas de cada tipo puede fabricar? (Anaya, 2002).

2. Mezclas / aleaciones.

   Problemas donde se quiere obtener la mezcla o aleación de dos productos como son la mezcla de aceite de girasol y de oliva o la aleación de oro y cobre.

   Ejemplo: Se tiene aceite de oliva de 3 euros el litro y aceite de girasol de 2 euros el litro. Se desea obtener 1200 litros de mezcla de 2,60 euros el litro. ¿Cuántos litros de cada tipo de aceite hay que mezclar? (SM, 2011).

3. Edades.

   Se trata de determinar la edad o edades de una o varias personas según la relación existente entre ellas.

Ejemplo: El doble de la edad de Sara coincide con la cuarta parte de la edad de su padre. Dentro de dos años la edad de Sara será la sexta parte de la de su padre. ¿Qué edad tiene cada uno? (Anaya, 2001).

4. Geometría.

   Pensados para hallar las dimensiones de una figura geométrica.

   Ejemplo: Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 60 y cuya altura es 2 unidades mayor que la base (SM, 2002).

5. Balanzas / pesas.

   Problemas en los que aparecen balanzas o pesas donde se busca el equilibrio.

   Ejemplo: Las dos balanzas están en equilibrio. ¿Cuánto vasos se necesitan para equilibrar una jarra? ¿Cuántos vasos se necesitan para equilibrar un plato? (SM, 2002)

6. Números.

   Consistentes en hallar uno o varios números que cumplen determinadas condiciones.

   Ejemplo: Calcula dos números sabiendo que el primero supera en 6 unidades a la quinta parte del segundo y, a su vez, el segundo supera en 6 unidades al doble del primero (Anaya, 2001).

7. Recorridos / distancias / móviles.

   Problemas donde intervienen magnitudes como la distancia y la velocidad.

   Ejemplo: Un tren parte de la estación A a las 9 horas con una velocidad de 30 km por hora, y otro parte de dos horas más tarde de la misma estación recorriendo su mismo itinerario con una velocidad de 40 km por hora. Halla la hora del encuentro y la distancia de A a la que se produce (SM, 2002).

8. Examen.

   Se establecen relaciones entre la nota final de un examen o test y el número de aciertos y fallos.

Ejemplo: En un test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 puntos por cada error. Si mi nota ha sido de 10,5, ¿cuántos aciertos y cuántos errores he tenido? (Anaya, 2002).

9. Volumen / peso de envases.

   Problemas en los que intervienen magnitudes de envases o recipientes como el volumen o el peso.

   Ejemplo: Una cooperativa ha envasado 5000 litros de vino en botellas de 1 y 2 litros utilizando un total de 4500 botellas. ¿Cuántas botellas de cada clase ha utilizado la cooperativa? (Santillana, 1999).

10. Ruedas, patas, jorobas, camas, habitaciones.

    Problemas de distribución como, por ejemplo, un número total de ruedas en coches y motos, un número total de jorobas entre camellos y dromedarios, etc.

    Ejemplos:

    a) En un campamento de verano hay tiendas de campaña dobles y triples. Si en total hay 20 tiendas y 52 sacos de dormir, ¿cuántas tiendas hay de cada clase? (SM, 2002).
    b) En una granja, entre gallinas y conejos hay 100 cabezas y 252 patas. ¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en la granja? (Anaya, 2001).

11. Precios rebajados o aumentados / Interés bancario.

    Problemas donde se ha aplica cierto porcentaje de descuento o aumento en el precio de algún producto. Por similitud, se ha englobado también en este contexto aquellos en los que interviene un interés bancario.

    Ejemplos:

    a) Mari Carmen ha pagado 7375 ptas. por una camisa y un jersey que costaban 8500 ptas. Halla el precio original de cada prenda sabiendo que en la camisa le han hecho un 10% de rebaja y en el jersey un 15% (Santillana, 1999).
    b) Un capital, colocado en el banco durante un año, ha producido un beneficio de 800€. El beneficio habría sido el mismo si el capital se hubiera aumentado en 2000€ y el interés anual se hubiera disminuido en un punto (en un 1%). ¿A cuánto asciende el capital y a qué tanto por ciento ha estado colocado? (Anaya, 2002).

12. Dinero que pagan / tienen dos personas.

    Se trata de identificar el precio de algún producto en función del dinero que pagan dos personas por ello o de conocer el dinero que poseen dos personas en una determinada situación.

Ejemplos:

a) Entre Ana y Sergio tienen 600 euros, pero Sergio tiene el doble que Ana. ¿Cuánto dinero tiene cada uno? (Santillana, 1999).

b) En una frutería, Fernando ha comprado 2 kilogramos de manzanas y 3 de naranjas por 8 euros, mientras que Teresa ha comprado 6 kilogramos de manzanas y 5 de naranjas por 18 euros. ¿Cuánto cuestan el kilogramo de manzanas y el de naranjas? (SM, 2011).

13. Tipos de monedas.

Problemas en los que se habla de dos tipos de monedas diferentes, en función de su valor.

Ejemplo: Tenemos 53 céntimos de euro repartidos en 16 monedas de dos céntimos y de cinco céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase tenemos? (Anaya, 2002).

ANEXO III. PRUEBA INICIAL

Ejercicio 1. ¿Qué es una ecuación de primer grado? ¿Y una función lineal? Inventa un problema que se pueda resolver con una ecuación de primer grado.

Solución: Una ecuación de primer grado es una igualdad que contiene una o más incógnitas cuyo exponente es 1.

Una función lineal es una correspondencia entre los elementos de un conjunto inicial y los elementos de un conjunto de llegada de manera que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde uno y sólo un elemento del conjunto de llegada y cuya expresión viene dada por $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n la ordenada en el origen.

Un ejemplo de problema que puede resolverse mediante una ecuación de primer grado es: ¿Cuánto miden los lados de un campo rectangular de perímetro 42 metros si su lado largo mide el doble que el corto?

Objetivo: Se pretende conocer si el alumno es capaz de relacionar una situación de la vida real con una ecuación de este tipo pasando de un lenguaje matemático al lenguaje habitual y verificar si conoce los conceptos y la caracterización de ecuación de primer grado y función lineal.

Dificultades o errores: Es posible que el estudiante no encuentre un enunciado adecuado por buscar situaciones complejas en lugar de sencillas.

Ejercicio 2. Escribe una ecuación que tenga como solución:

a) $\boldsymbol{x = 3}$
b) $\boldsymbol{x = -4}$
c) $\boldsymbol{x = \frac{5}{6}}$

Solución: Algunos ejemplos de posibles soluciones a cada apartado son:

a) $x + 2 = 5, 4 - x = 1, 2x = 6$, etc.
b) $4 + x = 0, 5 - 3x = 17, x - 1 = -5$, etc.
c) $1 + x = \frac{11}{6}, -2 - x = -\frac{17}{6}, 3x = \frac{5}{2}$, etc.

Objetivo: Este ejercicio tiene como finalidad conocer si los alumnos son capaces de plantear una ecuación dada su solución, demostrando de esta manera si tienen claro el concepto de solución.

Dificultades o errores:

- No tener claro el concepto de solución.

- Dificultades al operar con números enteros y fracciones.

- Buscar ecuaciones demasiado complicadas en lugar de escribir algunas sencillas.

- No comprobar la solución para verificar que la ecuación escrita tiene como solución el valor de x correspondiente.

Ejercicio 3. Escribe la ecuación correspondiente a cada una de las siguientes situaciones:

a) El perímetro de un cuadrado es de 36 cm.

b) La suma de tres números enteros consecutivos es igual al doble del mayor más 1.

c) En una clase de 30 alumnos hay el doble de chicos que de chicas.

Solución:

a) El lado del cuadrado mide x cm y el perímetro de un cuadrado es la suma de las medidas de todos sus lados. Luego,

$$4x = 36.$$

b) Llamando al primer número x, los dos siguientes números serán $x + 1$ y $x + 2$. El número $x + 2$ será el mayor de los tres. Por tanto,

$$x + (x + 1) + (x + 2) = 2(x + 2) + 1.$$

c) Llamar x al número de chicas, entonces $2x$ será el número de chicos. Por consiguiente,

$$x + 2x = 30.$$

Objetivo: Se pretende verificar si los alumnos son capaces de traducir situaciones cotidianas a lenguaje matemático ya que, como se ha comentado con anterioridad, la traducción supone uno de los pasos más importantes en la resolución de problemas. Por ello, es interesante conocer los errores más frecuentes que cometen los alumnos.

Dificultades o errores: A nivel general, pueden darse errores de interpretación del enunciado como no saber qué es el perímetro o percatarse de que tres números consecutivos pueden escribirse como x, $x + 1$ y $x + 2$. Además, también pueden plantearse ecuaciones alternativas a las que se han mostrado aquí dependiendo del significado que se dé a la incógnita en cada caso. Por ejemplo, en el apartado c puede considerarse como x tanto el número de chicos como de chicas. Las ecuaciones variarán y podrán tener distintos aspectos pero siempre deberán ser equivalentes unas con otras, dentro de un mismo apartado.

Otros errores que pueden cometerse son:

- No escribir los paréntesis al poner $2(x + 2)$ en el apartado b.

- Mala interpretación de “el doble”. Este error será especialmente frecuente en el apartado c si se toma como x el número de chicos, ya que aparecerán fracciones que pueden inducirlos más fácilmente a error. En ese caso, la ecuación quedaría $x + \frac{x}{2} = 30$.

Ejercicio 4. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\mathbf{2x + 6 = 16}$

b) $\mathbf{5x + 10 = -3x + 2}$

c) $\mathbf{\frac{1}{4}x - 3 = -\frac{1}{8}\, x}$

d) $\mathbf{-6x + 4 = 9x - 6}$

Solución:

a) $2x + 6 - 6 = 16 - 6$

$2x = 10$

$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$

$x = 5$

b) $5x + 10 - 10 = -3x + 2$

$5x = -3x - 8$

$5x + 3x = -3x - 8 + 3x$

$8x = -8$

$\frac{8x}{8} = -\frac{8}{8}$

$x = -1$

c) $\frac{1}{4}x - 3 + 3 = -\frac{1}{8}x + 3$

$\frac{1}{4}x = -\frac{1}{8}x + 3$

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x = -\frac{1}{8}x + 3 + \frac{1}{8}x$

$\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x = 3$

$$\frac{2}{8}x + \frac{1}{8}x = 3$$

$$\frac{3}{8}x = 3$$

$$8 \cdot \frac{3}{8}x = 3 \cdot 8$$

$$3x = 24$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{24}{3}$$

$$x = 8$$

d) $-6x + 4 + 6x = 9x - 6 + 6x$

$$4 = 15x - 6$$

$$4 + 6 = 15x - 6 + 6$$

$$10 = 15x$$

$$\frac{10}{15} = x$$

$$\frac{2}{3} = x$$

Objetivo: Conocer el grado de manejo y manipulación de ecuaciones que poseen los alumnos. Por ello, se proponen apartados con distinto grado de dificultad en los que aparecen, no solo coeficientes y soluciones naturales, sino que también pueden aparecer números enteros y racionales.

Dificultades o errores:

- Errores al trasponer términos de un miembro a otro de la ecuación.

- Dificultades al operar con expresiones algebraicas.

- No conocer cómo se halla la solución, es decir, dada una ecuación no sabe qué calcular.

- Soluciones erróneas por no comprobar la solución.

- Presenta dudas al observar que aparecen soluciones negativas o fraccionarias. Observa que la ecuación tiene todos los coeficientes enteros y, sin embargo, la solución es fraccionaria, por lo que no termina de solucionar la ecuación al considerar que ese resultado no es posible.

- Opera mal con fracciones y no simplifica.

Ejercicio 5. Crea una tabla de valores para cada una de las siguientes rectas y después represéntalas gráficamente.

a) $\boldsymbol{y = 3x + 2}$

b) $\boldsymbol{5y = 3x - 1}$

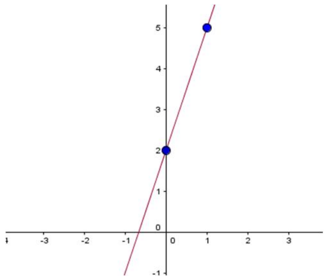
c) $\boldsymbol{x + 4y = 6}$

<u>Solución:</u>

a) La tabla de valores es:

x	0	1	2	3	4	5
$y = 3x + 2$	2	5	8	11	14	17

Y su representación gráfica:



Para dibujar la recta, basta con representar dos de los puntos hallados en la tabla y trazar la recta que los une. Se puede comprobar, gráficamente, que todos los pares de valores que aparecen en la tabla, son puntos que pertenecen a la recta.

b) Para completar fácilmente la tabla de valores, es recomendable despejar primero una de las incógnitas. Por ejemplo, se despeja y:

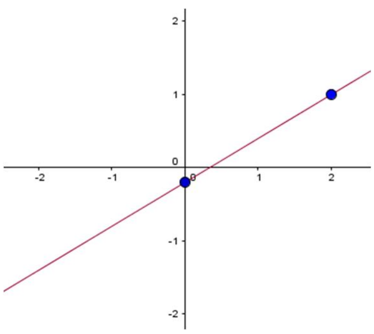
$$\frac{5y}{5} = \frac{3x - 1}{5}$$

$$y = \frac{3x - 1}{5}$$

La tabla de valores es:

x	0	1	2	3	4	5
$y = \frac{3x - 1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{14}{5}$

Y su representación gráfica:



c) En este caso, es más sencillo despejar la incógnita x:

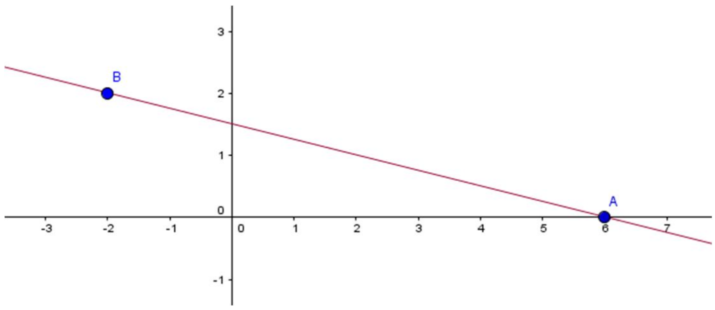
$$x + 4y - 4y = 6 - 4y$$

$$x = 6 - 4y$$

La tabla de valores es:

y	0	1	2	3	4	5
$x = 6 - 4y$	6	2	−2	−6	−10	−14

Y su representación gráfica:



Objetivo: Con este ejercicio se pretende saber si los alumnos dominan el paso del registro algebraico al tabular y al gráfico.

Dificultades o errores:

- Errores de cálculo. Por ejemplo, para un valor de x calcular mal el de y.

- No saber cómo colocar los puntos en el plano.

- Representar más de dos puntos para trazar la recta.

- Presentar dificultades para representar valores fraccionarios en el plano.

- En el tercer apartado, será frecuente dar valores a x para hallar después y, en lugar de hacerlo al revés. No se trata de un fallo pero puede deberse a que tengan interiorizado que siempre deben dar valores a x.

- Presentar cierta confusión al aparecer una recta decreciente, pues pueden estar acostumbrados a ver más frecuentemente aquellas que son crecientes.

Ejercicio 6. Halla la ecuación de la recta en los siguientes casos:

a) Recta que pasa por los puntos $P(0, 5)$ y $Q(3, 4)$.

b) Recta que corta al eje Y en 2 y al eje X en 7.

c) Recta cuya pendiente es $m = -2$ y pasa por $P(1, 6)$.

Solución:

a) Ecuación de la recta que pasa por dos puntos: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

Se sustituyen los valores conocidos: $\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-5}{4-5}$

$$\frac{x}{3} = \frac{y-5}{-1};\ -x = 3(y-5);\ -x = 3y-15$$

Luego la ecuación de la recta es: $x + 3y = 15$

b) Corta al eje Y en 2, luego pasa por el punto $P(0{,}2)$.

Corta al eje X en 7, luego pasa por el punto $Q(7{,}0)$.

De la ecuación de la recta que pasa por dos puntos se obtiene: $\frac{x-0}{7-0} = \frac{y-2}{0-2}$

$$\frac{x}{7} = \frac{y-2}{-2};\ -2x = 7(y-2);\ -2x = 7y-14$$

Luego la ecuación de la recta es: $2x + 7y = 14$

c) Ecuación de la recta: $y = mx + n$

Se sustituyen los valores conocidos: $6 = (-2) \cdot 1 + n$

Se halla el valor de la ordenada en el origen n: $6 = -2 + n; n = 8$

Luego la ecuación de la recta es: $y = -2x + 8$

Objetivo: Conocer el grado de conocimiento que los alumnos tienen acerca de las rectas y las ecuaciones que las definen.

Dificultades o errores:

- Errores debidos al desconocimiento de las distintas ecuaciones de la recta.

- Fallos en la manipulación de expresiones algebraicas.

Ejercicio 7. Un padre tiene el doble de edad que su hijo y, entre los dos, suman 57 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

Solución:

Llamando $x =$ "$años\ que\ tiene\ el\ hijo$", se tiene que el padre tiene $2x$. Por tanto,

$$x + 2x = 57.$$

Se resuelve la ecuación:

$$3x = 57$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{57}{3}$$

$$x = 19$$

Como $x = 19$, entonces $2x = 2 \cdot 19 = 38$.

Se comprueba que se ha resuelto bien la ecuación:

- ✓ $2 \cdot 19 = 38$
- ✓ $19 + 38 = 57$

Luego el hijo tiene 19 años y el padre 38 años.

NOTA: Este problema también se puede resolver designando la incógnita x como los años que tiene el padre. El procedimiento es el mismo, con la única diferencia de la ecuación que debe resolverse. Ésta sería: $x + \frac{x}{2} = 57$.

<u>Objetivo</u>: Valorar si los alumnos saben traducir el lenguaje habitual al algebraico y si, una vez resuelto, son capaces de devolver la solución a su contexto original valorando si la solución es factible dentro del contexto en el que se plantea.

<u>Dificultades o errores</u>:

- Traducción errónea del enunciado al lenguaje algebraico.

- Fallo en la resolución de la ecuación.

- Hallar la edad de uno de ellos, pero olvidar la del otro. Esto puede deberse a que los alumnos consideren que hallar el valor de la incógnita es el final del problema, como ocurre en los ejercicios que se platean únicamente para practicar alguna técnica.

- No comprobar la solución puede originar malos resultados que podrían haber sido corregidos previamente.

- No expresar la solución en su contexto original.

- Pueden encontrar dificultades añadidas si consideran $x =$ "$años\ que\ tiene\ el\ padre$" ya que la ecuación resultante tendrá coeficientes racionales con los que deberá operar el alumno.

ANEXO IV. CAMPOS DE PROBLEMAS

A continuación, se presenta la solución, la metodología y las dificultades que presentan los problemas de razón de ser (PR):

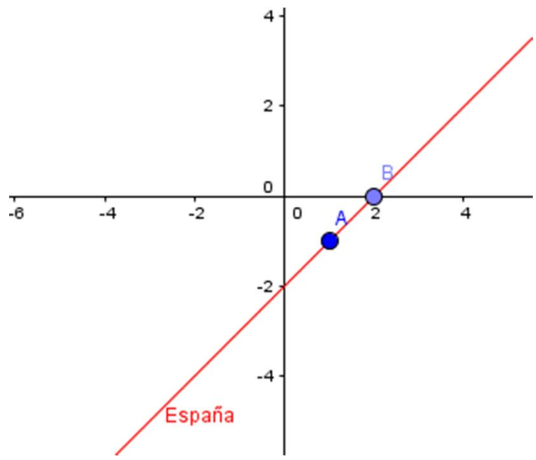
(PR 1)

Solución:

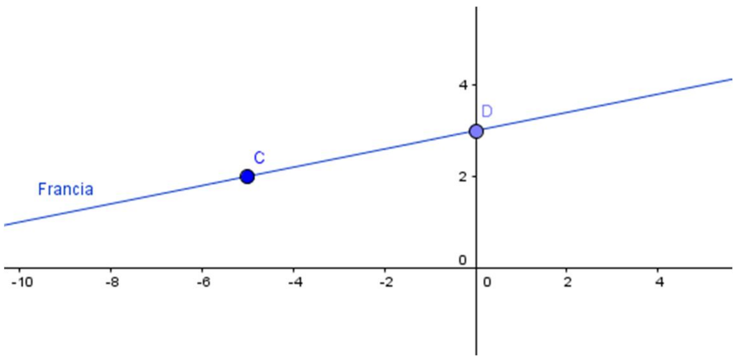
a) Para dibujar la trayectoria de España se debe colocar el punto $A(1,-1)$ en el plano y, a continuación, interpretar el significado de la pendiente. Esto es, $m = a$ significa que por cada unidad que se avanza horizontalmente se avanzan a unidades verticalmente.

En este caso, $m = 1$, luego por cada unidad avanzada horizontalmente, se avanza también una verticalmente.

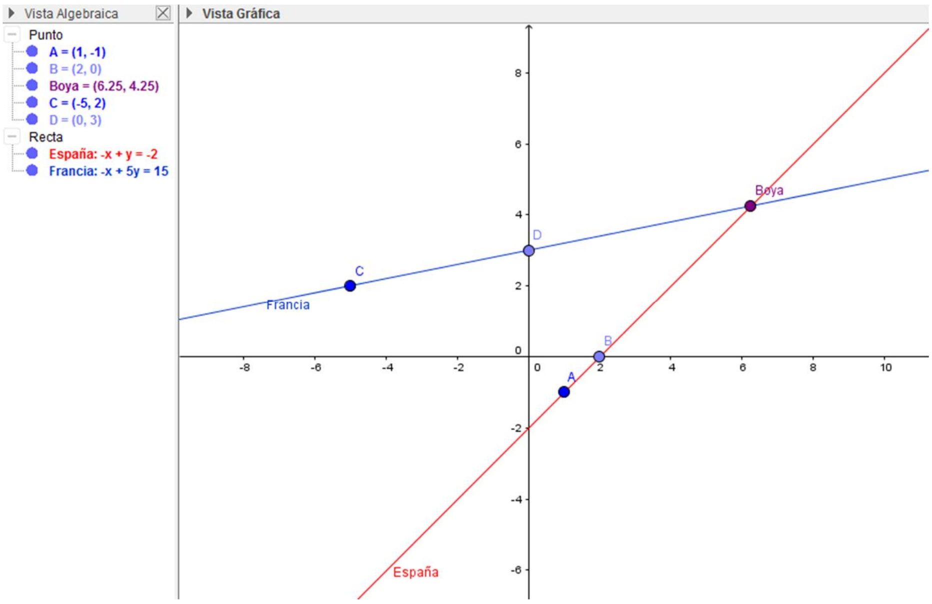
Así, se debe colocar también en el plano el punto $B(0,2)$ y trazar la recta que une ambos puntos. Ésta será la recta que describe la trayectoria que sigue el barco español.



Para dibujar la trayectoria de Francia se deben colocar en el plano los dos puntos por los que dice el enunciado que pasa: $C(-5,2)$ y $D(0,3)$. Se traza la recta que pasa por ambos puntos, hallando así la trayectoria del barco francés.



Observando la gráfica se ve el punto de corte de ambas rectas que, como indica el enunciado, es el lugar donde está situada la boya. De la gráfica, se obtienen las coordenadas precisas $Boya(6.25{,}4.25)$.



Como se pide que se compruebe dicha solución algebraicamente, se deberán hallar las ecuaciones de las rectas. Para ello:

- Trayectoria de España:

Datos que se conocen: Pasa por $A(1, -1)$ y tiene pendiente $m = 1$.

Ecuación de la recta: $y = mx + n$

Se sustituyen los valores conocidos: $-1 = 1 \cdot 1 + n$

Hallar el valor de n: $-1 = 1 + n;\ -1 - 1 = 1 + n - 1;\ -2 = n$

Finalmente se escribe la ecuación de la recta: $y = x - 2$

- Trayectoria de Francia:

Datos que se conocen: Pasa por los puntos $C(-5{,}2)$ y $D(0{,}3)$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

Se sustituyen los valores conocidos: $\frac{x-(-5)}{0-(-5)} = \frac{y-2}{3-2}$

$$\frac{x+5}{5} = \frac{y-2}{1};\ x + 5 = 5(y-2);\ x + 5 = 5y - 10;$$

$$x + 5 - 5 = 5y - 10 - 5;\ x = 5y - 15;$$

$$x - 5y = 5y - 15 - 5y;\ x - 5y = -15$$

Ecuación de la recta: $x - 5y = -15$

Para comprobar algebraicamente que tanto España como Francia pasan por la boya, basta con verificar que para dicho punto se cumplen ambas ecuaciones:

$Boya(6.25{,}4.25)$

- ✓ $y = x - 2$: $4.25 = 6.25 - 2$
- ✓ $x - 5y = -15$; $6.25 - 5 \cdot 4.25 = -15$

Efectivamente, ambas ecuaciones se cumplen.

Como las dos rectas se cortan, se dicen que son secantes.

b) Trayectoria de Portugal: Está en el punto $D(0{,}3)$ y pasará por $Boya(6.25{,}4.25)$, luego según la ecuación de la recta que pasa por dos puntos: $\frac{x-0}{6.25-0} = \frac{y-3}{4.25-3}$

$$\frac{x}{6.25} = \frac{y-3}{1.25};\ 1.25x = 6.25(y-3);$$

$$1.25x = 6.25y - 18.75;\ 1.25x - 6.25y = 6.25y - 18.75 - 6.25y;$$

$$1.25x - 6.25y = -18.75$$

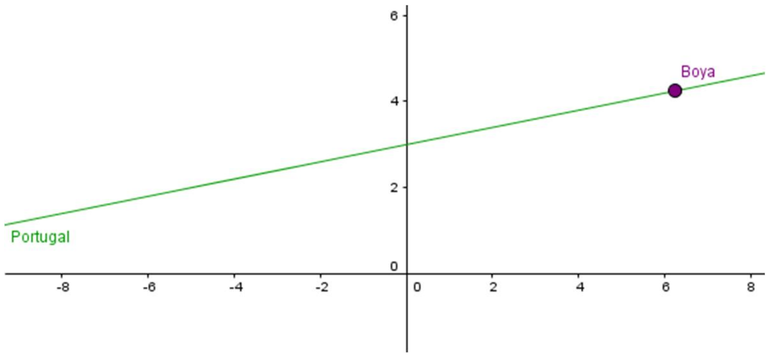
Ecuación de la recta que describe la trayectoria de Portugal:

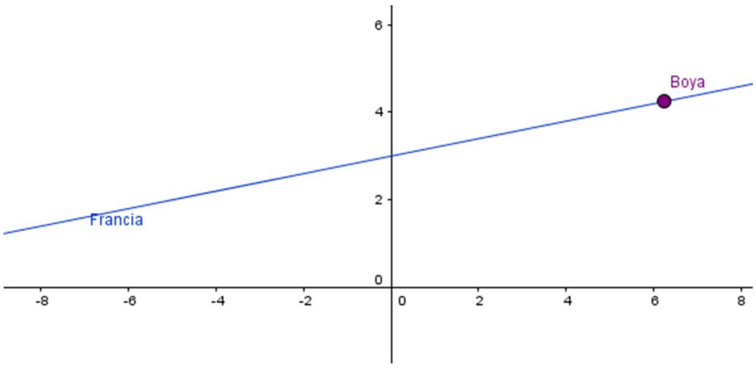
$$1.25x - 6.25y = -18.75$$

c) Francia: $x - 5y = -15$

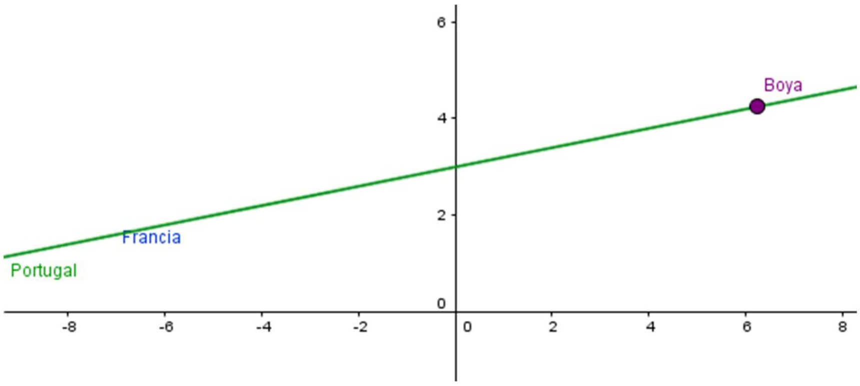
Portugal: $1.25x - 6.25y = -18.75$

Las dos ecuaciones son equivalentes ya que se puede pasar de una a otra multiplicando o dividiendo los dos miembros de la ecuación por un mismo número. Ambas tendrán las mismas soluciones y describen la misma recta en el plano, como se observa a continuación:





Y ambas rectas dibujadas a la vez:



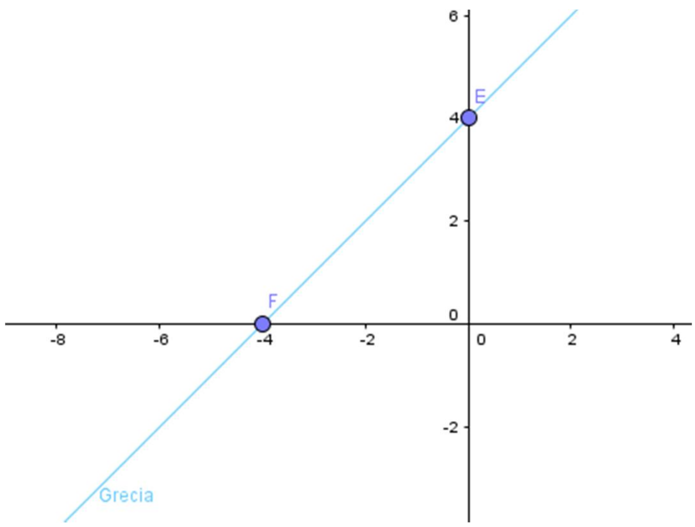
d) Anteriormente se ha comprobado que los barcos español y francés se cruzaban y, como Portugal sigue el mismo recorrido que Francia, entonces también se cruzará con el barco español. Falta por comprobar qué ocurre con Grecia.

Su trayectoria viene dada por la ecuación $-x + y = 4$. Para representarla en el plano, se calculan dos puntos que cumplan esa ecuación. Por ejemplo,

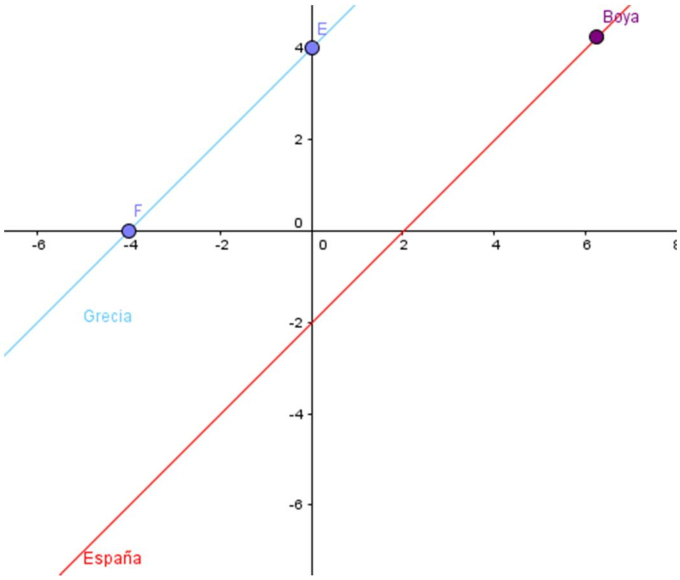
Si $x = 0, y = 4$. Por tanto, $E(0,4)$.

Si $y = 0, x = -4$. Entonces $F(-4,0)$.

Se representan en el plano y se traza la recta que los une:



Si se observan las dos rectas representadas en el plano se comprueba que no llegan a cruzarse nunca, pues son paralelas.



Comparando las ecuaciones de las trayectorias de España ($y = x - 2$) y Grecia ($-x + y = 4$) se observa que situando las dos incógnitas en un lado de las ecuaciones quedan: $-x + y = -2$ y $-x + y = 4$.

Luego en ambas ecuaciones las incógnitas x e y van acompañadas por el mismo coeficiente pero se distinguen en el término independiente.

e) Gráficamente se observa que no pasa por el punto donde se encuentra la boya. Para comprobarlo algebraicamente, basta con comprobar si dichos valores de las incógnitas x e y hacen verdadera la igualdad:

$$-x + y = 4:\ -6.25 + 4.25 = 10.50 \neq 4$$

Luego, efectivamente, el barco griego no pasará por la boya.

<u>Metodología</u>:

Se trabajará individualmente desde el principio, a modo de debate en el que participan todos los alumnos, y será el profesor el encargado de conducirlo.

En el apartado a, los alumnos deberán, en primer lugar, dibujar ambas rectas en el plano cartesiano. Es posible que se sientan cómodos dibujando la gráfica de la trayectoria que describe el barco francés desde el primer momento, ya que disponen de dos puntos para representar. Sin embargo, no ocurre lo mismo con la trayectoria que sigue el barco español, pues tan sólo cuentan con un punto y la pendiente. Los alumnos no suelen estar acostumbrados a graficar directamente las rectas que vienen dadas de esta manera, sino que primero hallan la ecuación de la recta y después la representan en el plano cartesiano. Llegados a este punto, el profesor deberá hacerles ver cómo interpretar la pendiente a la hora de representar una recta gráficamente. Una vez se haya puesto en común la imagen final de ambas rectas en el plano, el profesor les animará para que escriban las coordenadas del punto de corte de ambas rectas. Como habrá alumnos que no sean capaces de identificar las coordenadas exactas por no tratarse de números enteros, el profesor deberá guiarles hasta poner en común la solución final. A continuación, serán los alumnos los encargados de verificar la solución algebraicamente. Serán ellos los que propongan las ecuaciones (es probable que el profesor tenga que recordarles las distintas maneras de calcular la ecuación de una recta, según los datos que se poseen de ella) y comprueben que dicho punto está en las dos rectas. Como gráficamente habrán observado que tan sólo hay un punto en común, éste será el único punto que cumpla las dos ecuaciones. Al final, se hará en la pizarra para que los alumnos que hayan quedado rezagados puedan saber cómo proceder. Por último se recordará la posición relativa de ambas rectas.

El resto de apartados no deben causar grandes problemas a los alumnos y les permitirá darse cuenta de las distintas posiciones relativas de dos rectas. Como en el primer apartado, el profesor será el encargado de poner en común todas las respuestas de los alumnos y hacer ver, a aquellos que no han dado con la solución correcta, cómo llegar a ella. Es decir, en caso de que los alumnos hayan cometido algún error, los tendrá que guiar para que sean ellos mismos quienes se den cuenta de la incoherencia que han plasmado. Por ejemplo, para un alumno que en el apartado b haya escrito una ecuación errónea de la trayectoria del barco portugués, el profesor le preguntará si esa trayectoria pasa por el punto (0,3) y por la boya. Así, el alumno tendrá que comprobar que dichos puntos cumplen la ecuación y, por sí mismo, dará cuenta de su error. De esta manera, se reforzarán las estrategias de comprobación de resultados y se inculcará a los alumnos el hábito de comprobar la solución para evitar caer en errores que pueden haber sido corregidos.

Cuando se hayan calculado todas las trayectorias, con el problema terminado, el profesor las escribirá en la pizarra haciendo ver las relaciones de proporcionalidad, en caso de haberlas, entre los coeficientes de las distintas rectas, a la par que se muestran en su representación gráfica. El objetivo es explicar qué son los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y los distintos tipos: sistemas compatibles (determinados e indeterminados) e incompatibles y cómo pueden identificarlos. Además, para hacer esta diferenciación, previamente, deberá introducirse el concepto de solución de un sistema, como los valores de las incógnitas x e y que cumplen todas las ecuaciones a la vez.

Cuando se hayan diferenciado los distintos sistemas, el profesor animará a los estudiantes a que elaboren una tabla de valores para cada una de las ecuaciones de las trayectorias que describen los barcos. Se compararán las tablas de las rectas en busca de identificar las relaciones entre ellas según los sistemas formados.

Dificultades o errores:

La primera gran dificultad con la que se encuentran los alumnos es la interpretación del término pendiente a la hora de traducirlo al lenguaje gráfico. Algunos alumnos optarán por hallar en primer lugar la ecuación de la recta para saber dibujarla, sin embargo, la pregunta está planteada para que se pase directamente del lenguaje habitual al gráfico. Además, es de esperar que los estudiantes hallen más de dos puntos para representar una recta en el plano, sin pensar que dos puntos son suficientes.

Otra de las dificultades que encuentran en este apartado viene por el uso de números no enteros en las coordenadas de la boya. Habrá alumnos que crean haberse equivocado ya que no esperan una respuesta de tal calibre, ya que en el enunciado se utilizan siempre valores enteros.

Esto mismo les creará dificultades a la hora de hallar la trayectoria de Portugal, aunque al haber tomado como punto el de la boya (cuyas coordenadas no son enteras), no se verán tan sorprendidos.

En el apartado c es posible que no se den cuenta de que pueden pasar de una ecuación a otra multiplicando o dividiendo por un mismo número los dos miembros de la ecuación.

Además de todas estas dificultades, se espera que se comentan errores debidos al desconocimiento de las distintas ecuaciones de la recta y a fallos en la manipulación de expresiones algebraicas y en la resolución de ecuaciones.

(PR2)

Solución:

En el fútbol cada partido ganado vale 3 puntos, cuando se empata se consigue un punto y, al perder, no se obtiene ninguno.

La primera condición que indica el enunciado es: “En la radio acaban de decir que ha puntuado en 7 partidos pero siguen sin ponerse de acuerdo”.

Denotando $x =$ ”$Número\ de\ partidos\ ganados$” e $y =$ ”$Número\ de\ partidos\ empatados$”, se tiene la ecuación $x + y = 7$.

El problema continúa: “Cuando consiguen un periódico, miran la clasificación donde tan solo vienen los puntos totales de cada equipo y ven que el Real Zaragoza lleva 15 puntos a esas alturas de la competición”.

Como los partidos perdidos no suman puntos, solo han de tenerse en cuenta las variables x e y. Entonces, $3x + y = 15$.

Para hallar el número de partidos ganados y el de empatados, basta con hallar la solución del sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ 3x + y = 15 \end{cases}$.

Por medio de la representación tabular, se irán dando valores hasta encontrar aquellos pares de números que verifiquen ambas ecuaciones.

Primero se despeja la incógnita y en ambas ecuaciones: $\begin{cases} y = 7 - x \\ y = 15 - 3x \end{cases}$.

Se construye la tabla dando valores a x y calculando los correspondientes de la incógnita y:

$\boldsymbol{x}$	0	1	2	3	4	5	6	…
$\boldsymbol{y = 7 - x}$	7	6	5	4	3	2	1	
$\boldsymbol{y = 15 - 3x}$	15	12	9	6	3	0	-3	

Como se puede observar, el valor de $x = 4$ hace que las dos expresiones de y valgan lo mismo, luego la solución del sistema es $x = 4$ e $y = 3$.

Para verificar la solución, basta con sustituir las incógnitas por los valores obtenidos en las dos ecuaciones y comprobar que se cumplen ambas igualdades:

- ✓ $x + y = 7: 4 + 3 = 7$
- ✓ $3x + y = 15: 3 \cdot 4 + 3 = 15$

Es decir, el Real Zaragoza ha ganado 4 partidos y ha empatado 3.

Metodología:

La metodología a seguir en el planteamiento de este problema sería comenzar informando de la noticia que acaba de dar la radio (“En la radio acaban de decir que ha puntuado en 7 partidos pero siguen sin ponerse de acuerdo”) y dejar a los alumnos trabajar en grupos de 4-5 personas (formados por el profesor de tal manera que los componentes tengan distintos niveles académicos) intentando averiguar realmente cuántos partidos ha ganado y cuántos ha empatado. El profesor podrá intervenir en cualquiera de los grupos siempre que considere necesario y teniendo en cuenta que el objetivo es que se den cuenta, por sí solos, de que no pueden saber la solución exacta, que necesitan más datos. Una vez, haya dado lugar el debate en todos los grupos, se expondrán las opiniones de cada uno en general y se escribirán las soluciones que cada grupo haya dado en la pizarra de modo que todos los alumnos puedan verlos.

Llegados a este punto, podrán darse varias situaciones en los grupos: algunos habrán conseguido plantear la ecuación (por sí solos o con ayuda del docente) pero no sabrán llegar a una solución, mientras que otros habrán encontrado distintas soluciones. Aquellos que hayan encontrado una solución, pueden haberse conformado con esa o seguir buscando más. En cualquier caso, el profesor tendrá que recopilar todas las opiniones y guiarles hasta que perciban que puede haber más de una solución.

A continuación, se expondrá: “Cuando consiguen un periódico, miran la clasificación donde tan solo vienen los puntos totales de cada equipo y ven que el Real Zaragoza lleva 15 puntos a esas alturas de la competición” y se volverá a dejar trabajar en grupos durante un tiempo. El propósito es que los alumnos sean capaces de escribir la segunda ecuación y empezar a buscar la solución mediante tanteo. Algunos de ellos, llegarán a la solución correcta, otros solo encontrarán una solución que satisfaga una de las dos ecuaciones. Por ello, se volverán a poner en común las ideas grupales y juntos se pondrán de acuerdo en cuál es la solución real.

Es importante ir revisando el proceso de resolución de cada grupo para detectar las posibles dificultades que se van encontrando los alumnos. Además, habrá que hacerles ver los siguientes puntos:

Una vez escrita y resuelta la primera ecuación, seguramente aparezcan distintas soluciones en los grupos. Hay que animarlos a que verifiquen que todas esas soluciones son correctas.

Con la primera ecuación se pueden encontrar varias soluciones (en este caso no son infinitas puesto que los partidos de fútbol se cuentan como números naturales) y, por lo tanto, tienen que ver la necesidad de conocer más información para llegar a una solución concreta.

La solución final del problema tiene que verificar ambas ecuaciones.

Dificultades o errores:

Fuera del contexto puramente matemático, puede ocurrir que haya alumnos que no sepan la puntuación que se da en el fútbol según el resultado del partido, por lo que, en caso de que sea necesario, se darán los datos oportunos para poder realizar el ejercicio.

Dentro del contexto algebraico, habrá alumnos que no identifiquen correctamente las incógnitas y se encontrarán errores de confusión entre el número de partidos y el número de puntos. Por ejemplo, si identifican x=”ganados” e y=”empatados” no sabrán si están haciendo referencia a los partidos o a los puntos, lo que puede llevarles a plantear mal las ecuaciones.

Una vez escrito el sistema, es previsible que los alumnos intenten resolverlo mediante tanteo ya que todavía no disponen de las herramientas necesarias para poder resolverlo mediante el lenguaje algebraico. Llegados a este punto, puede darse el caso de que haya estudiantes que encuentren una solución para una ecuación, pero no verifiquen que ese par de valores cumple la otra ecuación.

Por otro lado, también se dará el caso de que se llegue a la solución pero no se devuelva a su contexto original para validarla.

(PR3)

Solución:

Como se trata de los campeonatos de Fórmula 1 (coches) y de Moto GP (motos), los vehículos utilizados tendrán 4 y 2 ruedas, respectivamente.

Denotando $x = \text{"}número\ de\ coches\text{"}$ e $y = \text{"}número\ de\ motos\text{"}$, el sistema de ecuaciones quedará:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 4x + 2y = 32 \end{cases}$$

Mediante la técnica tabular se resuelve el sistema:

$$\begin{cases} y = 10 - x \\ y = \dfrac{32 - 4x}{2} = 16 - 2x \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}$	0	1	2	3	4	5	6	7	…
$\boldsymbol{y = 10 - x}$	10	9	8	7	6	5	4	3	
$\boldsymbol{y = 16 - 2x}$	16	14	12	10	8	6	4	2	

Luego la solución del sistema es $x = 6, y = 4$. Es decir, hay 6 coches y 4 motos en pretemporada.

En el caso de la temporada entera, el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{cases} x + y = 1031 \\ 4x + 2y = 3548 \end{cases}$$

En este caso, la técnica tabular queda obsoleta, por lo que habrá que resolverlo mediante una de las técnicas algebraicas. Se va a resolver, por ejemplo, por sustitución. Para ello:

i) Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones. En este caso, se despeja y en la primera ecuación.

$$x + y = 1031 \Rightarrow y = 1031 - x$$

ii) Se sustituye la incógnita despejada en la segunda ecuación por la expresión que se acaba de obtener.

$$4x + 2y = 3548 \Rightarrow 4x + 2(1031 - x) = 3548$$

iii) Se resuelve la ecuación de una incógnita resultante.

$$4x + 2(1031 - x) = 3548;\ 4x + 2062 - 2x = 3548;$$

$$2x = 1486 \Rightarrow x = 743$$

iv) Con el valor obtenido de una de las incógnitas, se halla el valor de la otra.

$$y = 1031 - x \Rightarrow y = 1031 - 743 = 288$$

v) Se comprueba la solución.

- ✓ $x + y = 1031$: $743 + 288 = 1031$
- ✓ $4x + 2y = 3548$: $4 \cdot 743 + 2 \cdot 288 = 3548$

Luego, a lo largo de la temporada, tendrá que dar servicio a 743 coches y 288 motos.

<u>Metodología</u>:

Se presentará, en su primer caso, el de pretemporada, donde los coeficientes y los términos independientes son números pequeños. Los alumnos deberán traducir el enunciado a lenguaje matemático y resolverlo mediante la técnica expuesta previamente. A pesar de que puedan aparecer algunos errores, presumiblemente de tipo aritmético o de trasposición de términos, la mayoría de los alumnos llegarán a la solución. El problema se corregirá en la pizarra cuando los alumnos hayan llegado a una solución.

Más adelante, se les propondrá este mismo problema pero en el caso de la temporada completa, donde los términos independientes de la ecuación son mucho más grandes, dando lugar a la introducción de las técnicas de resolución algebraicas.

Dificultades o errores:

De manera similar al problema anterior, puede darse la casuística de que no se identifiquen bien las incógnitas y se produzca el mismo tipo de confusión entre el número de coches (o motos) y el número de neumáticos de coches (o motos).

Además, el paso de la pretemporada a la temporada implica un gran aumento de los términos independientes de las ecuaciones por lo que encontrarán grandes dificultades al resolverlo ya que no disponen todavía de herramientas más sofisticadas como la resolución algebraica.

En las siguientes líneas se resuelven el resto de los problemas de traducción (P) planteados en clase de la manera en que deberían ser resueltos por los alumnos, en base a la técnica que se está explicando.

(P1) En un laboratorio están realizando experimentos con un número desconocido de ratones x y de arañas y.

a) ¿Cuántas arañas hay? Hay y arañas.

b) ¿Cuántos ratones hay? Hay x ratones.

c) ¿Cuántas cabezas hay? Hay x cabezas de ratones e y cabezas de arañas, luego en total hay $x + y$ cabezas

d) Si se quitan 100 arañas, ¿cuántas cabezas hay? Si quitan 100 arañas quedarán $y - 100$ arañas, luego habrá $x + (y - 100)$ cabezas

e) ¿Cuántas patas hay? Los ratones tienen 4 patas luego habrá $4x$ patas de ratón. Las arañas tienen 8 patas, luego habrá $8y$ patas de araña. Por tanto, en total hay $4x + 8y$ patas.

f) Para una prueba muy concreta, se necesitarán 10 ratones más y 25 arañas menos. ¿Cuántas patas habrá? Si hay 10 ratones más, entonces habrá $x + 10$ ratones y, por consiguiente, $4(x + 10)$ patas de ratón. Si quitamos 25 arañas quedarán $y - 25$ arañas, luego habrá $8(y - 25)$ patas de araña. Por tanto, en total, se tendrán $4(x + 10) + 8(y - 25)$ patas.

$$4(x + 10) + 8(y - 25) = 4x + 40 + 8y - 200 = 4x + 8y - 160$$

Es decir, habrá $4x + 8y - 160$ patas en total.

g) ¿Cuántos ojos hay? Los ratones tienen 2 ojos y estas arañas tienen 8 ojos. Luego habrá $2x + 8y$ ojos en total.

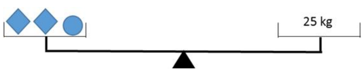
h) Si se quitan 100 arañas, ¿cuántas cabezas hay? Al quitar 100 arañas, quedarán $y - 100$ arañas. Luego habrá $x + (y - 100)$ cabezas en total.

(P2) Expresa mediante ecuaciones lineales con dos incógnitas las siguientes situaciones e indica qué representan las incógnitas.

a) **Ana tiene el doble de años que Pedro.**
   Si x es la edad de Ana e y la de Pedro, $x = 2y$.
b) **María tiene 3 años menos que Ana.**
   Si x es la edad de María e y la de Ana, $x = y - 3$
c) **Dentro de 4 años, Diego tendrá el triple de edad que la que tiene ahora Cristina (considera x como los años actuales de Diego).**
   Si x es la edad actual de Diego e y la de Cristina, $x + 4 = 3y$.
d) **La diferencia entre las edades de un padre y un hijo es de 28 años.**
   Si x es la edad del padre e y la edad del hijo, $x - y = 28$.
e) **Tengo una tercera parte de los años de mi abuela.**
   Si x son los años que tengo e y los que tiene mi abuelo, $x = \frac{y}{3}$.

(P3) Escribe en lenguaje algebraico las situaciones representadas en cada balanza, indica qué representan las incógnitas y establece relaciones entre los pesos de cada figura:

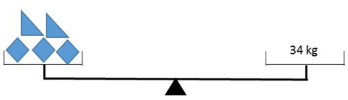
a)



$x = "peso\ del\ rombo\ en\ kg", y = "peso\ del\ círculo\ en\ kg"$

$2x + y = 25 \Rightarrow y = 25 - 2x$

b)



$x = "peso\ del\ rombo\ en\ kg", y = "peso\ del\ triángulo\ en\ kg"$

$$3x + 2y = 34 \Rightarrow y = 17 - \frac{3}{2}x$$

c)

$x = "peso\ del\ hexágono", y = "peso\ del\ trapecio"$

$3x = x + 2y \Rightarrow x = y$

d)

$x = "peso\ de\ la\ estrella", y = "peso\ del\ corazón"$

$x + 4y = 2x + y \Rightarrow 3y = x$

(P4) En una tienda venden botellas de agua de 1 y 2 litros. En el almacén todavía quedan sin vender 24 botellas, que corresponden a 38 litros de agua. ¿Cuántas botellas de cada tipo hay?

Si designamos a las incógnitas como $x = "número\ de\ botellas\ de\ 1\ litro"$ e $y = "número\ de\ botellas\ de\ 2\ litros"$, se tiene:

Quedan sin vender 24 botellas: $x + y = 24$

Corresponden a 38 litros de agua: $x + 2y = 38$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 2y = 38 \end{cases}$

Resolución por sustitución:

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 2y = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 24 \\ x = 38 - 2y \end{cases} \Rightarrow$$

$$x + y = 24: 38 - 2y + y = 24;\ 38 - y = 24;\ -y = -14; y = 14$$

$$x = 38 - 2y: x = 38 - 2 \cdot 14 = 38 - 28 = 10$$

Luego hay 10 botellas de 1 litro y 14 de 2 litros.

Resolución por igualación:

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ x + 2y = 38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 - y \\ x = 38 - 2y \end{cases}$$

Igualando ambas expresiones:

$$24 - y = 38 - 2y; 2y - y = 38 - 24; y = 14$$

Sustituyendo el valor de y en una de las expresiones anteriores:

$$x = 24 - y: x = 24 - 14 = 10$$

Luego hay 10 botellas de 1 litro y 14 de 2 litros.

(P5) ¿Qué cantidades de oro a 6 €/g, y de plata, a 1,2 €/g, hay que utilizar para conseguir 1 g de mezcla a 2,40 €/g?

Incógnitas: $x = \text{"}número\ de\ gramos\ de\ oro\text{"}$

$y = \text{"}número\ de\ gramos\ de\ plata\text{"}$

Se quiere conseguir $1\ kg = 1000\ g$ de mezcla: $x + y = 1000$

Precio final $2{,}40\ €/g$: $6x + 1{,}2y = 2{,}40 \cdot 1000$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x + y = 1000 \\ 6x + 1{,}2y = 2400 \end{cases}$

<u>Resolución por sustitución</u>:

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ 6x + 1{,}2y = 2400 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1000 - y \\ 6x + 1{,}2y = 2400 \end{cases} \Rightarrow$$

$$6x + 1{,}2y = 2400: 6(1000 - y) + 1{,}2y = 2400; 6000 - 6y + 1{,}2y = 2400;$$

$$-4{,}8y = -3600; y = 750$$

$$x = 1000 - y: x = 1000 - 750 = 2500$$

Luego se necesitan 250 gramos de oro y 750 gramos de plata.

(P6) Una tienda de deportes vende balones de fútbol y de baloncesto. Raúl compra 3 de fútbol y 2 de baloncesto por 18,50€ y Luis compra 4 de fútbol y 3 de baloncesto por 26€. ¿Cuánto vale un balón de fútbol? ¿Y uno de baloncesto?

Incógnitas: $x = \text{"}precio\ del\ balón\ de\ fútbol\ en\ €\text{"}$

$y = \text{"}precio\ del\ balón\ de\ baloncesto\ en\ €\text{"}$

Raúl compra 3 de fútbol y 2 de baloncesto por 18,50€: $3x + 2y = 18{,}50$

Luis compra 4 de fútbol y 3 de baloncesto por 26€: $4x + 3y = 26$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} 3x + 2y = 18{,}50 \\ 4x + 3y = 26 \end{cases}$

<u>Resolución por reducción</u>:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 18{,}50 \\ 4x + 3y = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x - 8y = -74 \\ 12x + 9y = 78 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones se obtiene:

$$y = 4$$

Sustituyendo el valor de y en una de las ecuaciones del sistema se obtiene x:

$$4x + 3y = 26: 4x + 3 \cdot 4 = 26; 4x + 12 = 26; 4x = 14; x = 3{,}50$$

Luego, el balón de fútbol vale 3,50 € y el de baloncesto 4 €.

(P7) Un rectángulo de perímetro 124 cm pasa a tener 328 cm de perímetro si sus lados mayores triplican su longitud y sus lados menores la doblan. ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo inicial?

Incógnitas: $x = \text{"}longitud\ en\ cm\ que\ mide\ el\ lado\ pequeño\text{"}$

$y = \text{"}longitud\ en\ cm\ que\ mide\ el\ lado\ grande\text{"}$

Un rectángulo de perímetro 124 cm: $2x + 2y = 124$

328 cm de perímetro si sus lados menores triplican su longitud y sus lados mayores la doblan: $2 \cdot 2x + 3 \cdot 2y = 328$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} 2x + 2y = 124 \\ 4x + 6y = 328 \end{cases}$

<u>Resolución por reducción</u>:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 124 \\ 4x + 6y = 328 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 124 \\ -2x - 3y = -164 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$-y = -40; y = 40$$

Sustituyendo el valor de y en una de las ecuaciones del sistema se obtiene x:

$$2x + 2y = 124: 2x + 2 \cdot 40 = 124; 2x + 80 = 124; 2x = 44; x = 22$$

Luego el lado pequeño del rectángulo mide 22 cm y el grande mide 40 cm.

(P8) Encuentra dos números cuya suma sea 10 y la diferencia entre el primero y el doble del segundo sea 1.

Sean x e y los dos números desconocidos.

Dos números cuya suma sea 10: $x + y = 10$

La diferencia entre el primero y el doble del segundo sea 1: $x - 2y = 1$

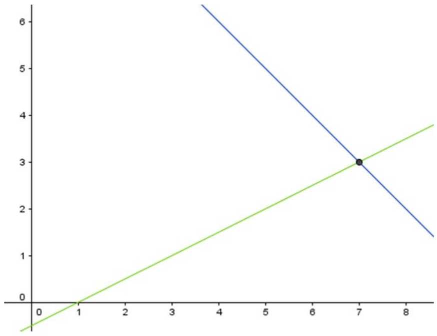
El sistema a resolver es: $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

Por tablas:

y	0	1	2	3	4	5
$x = 10 - y$	10	9	8	7	6	5
$x = 1 + 2y$	1	3	5	7	9	11

Como las dos expresiones de x valen lo mismo para $y = 3$, entonces la solución es que los números buscados son 7 y 3.

Gráficamente:



Por igualación:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 - y \\ x = 1 + 2y \end{cases} \Rightarrow 10 - y = 1 + 2\mathrm{y} \Rightarrow 9 = 3\mathrm{y} \Rightarrow \mathrm{y} = 3$$

$$x = 10 - y \colon x = 10 - 3 = 7$$

Luego los números buscados son 7 y 3.

(P9) Un motorista sale del pueblo A hacia B con una velocidad de 80 km/h mientras que un ciclista empieza el recorrido en sentido contrario a la vez que el motorista pero a una velocidad de 20 km/h. Si la distancia entre los pueblos A y B es de 150 km, ¿a qué distancia del pueblo A se encontrarán y cuánto tiempo les costará encontrarse?

Hay que tener en cuenta que $espacio = velocidad \times tiempo$.

Sean x los km recorridos por el motorista y t el tiempo que pasa hasta que ambos se juntan. De acuerdo con lo anterior, se organizan los datos en una tabla:

	Distancia / espacio	Velocidad	Tiempo
Motorista	x	80	t
Ciclista	$150 - x$	20	t

Luego el sistema a resolver es $\begin{cases} x = 80t \\ 150 - x = 20t \end{cases}$

Por igualación:

$$\begin{cases} x = 80t \\ 150 - x = 20t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 80t \\ x = 150 - 20t \end{cases} \Rightarrow 80t = 150 - 20t \Rightarrow 100t = 150 \Rightarrow t = 1{,}5$$

$$x = 80t: x = 80 \cdot 1{,}5 = 120$$

Luego se encontrarán a 120 km del pueblo A y tardarán en encontrarse una hora y media.

(P10) Un examen está formado por problemas de probabilidad y estadística. Beatriz resuelve bien 4 problemas de probabilidad y 3 de estadística, obteniendo una calificación de 9 puntos. Luis contesta bien 3 problemas de probabilidad y 5 de estadística, obteniendo una calificación de 9,5 puntos. Si los problemas de un mismo tipo tienen la misma puntuación, ¿cuántos puntos vale cada problema?

Incógnitas: $x =$ "$puntuación\ de\ un\ problema\ de\ probabilidad$"

$y =$ "$puntuación\ de\ un\ problema\ de\ estadística$"

Beatriz resuelve bien 4 problemas de probabilidad y 3 de estadística, obteniendo una calificación de 9 puntos: $4x + 3y = 9$

Luis contesta bien 3 problemas de probabilidad y 5 de estadística, obteniendo una calificación de 9,5 puntos: $3x + 5y = 9{,}5$

Luego el sistema a resolver es $\begin{cases} 4x + 3y = 9 \\ 3x + 5y = 9{,}5 \end{cases}$

Por reducción:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 9 \\ 3x + 5y = 9{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x - 9y = -27 \\ 12x + 20y = 38 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$11y = 11 \Rightarrow y = 1$$

Sustituyendo el valor de y en una de las ecuaciones del sistema se obtiene x:

$$4x + 3y = 9; 4x + 3 \cdot 1 = 9; 4x + 3 = 9; 4x = 6; x = 1{,}5$$

Luego los problemas de probabilidad valen 1,5 puntos y los de estadística valen 1 punto.

(P11) Se tienen 0,53 € en 16 monedas de 2 y 5 céntimos. ¿Cuántas monedas de cada clase hay?

Incógnitas: x = "*número de monedas de dos céntimos*"

y = "*número de monedas de cinco céntimos*"

Se tienen 0,53 €: $0{,}02x + 0{,}05y = 0{,}53$

En 16 monedas: $x + y = 16$

Luego el sistema a resolver es $\begin{cases} 0{,}02x + 0{,}05y = 0{,}53 \\ x + y = 16 \end{cases}$

<u>Por sustitución</u>:

$$\begin{cases} 0{,}02x + 0{,}05y = 0{,}53 \\ x + y = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}02x + 0{,}05y = 0{,}53 \\ x = 16 - y \end{cases}$$

$$0{,}02x + 0{,}05y = 0{,}53: 0{,}02(16 - y) + 0{,}05y = 0{,}53; 0{,}32 - 0{,}02y + 0{,}05y = 0{,}53;$$

$$0{,}03y = 0{,}21 \Rightarrow y = 7$$

$$x = 16 - y; x = 16 - 7 = 9$$

Luego hay 9 monedas de 2 céntimos y 7 monedas de 5 céntimos.

(P12) En una fábrica de tejidos tienen tela roja y gris que envían a las sastrerías en paquetes de dos tipos distintos que se forman como indica la tabla.

	Tela roja	**Tela gris**
Paquete A	**30 m**	**25 m**
Paquete B	**20 m**	**35 m**

Si tienen que enviar 550 m de tela roja y 825 m de la gris. ¿Cuántos paquetes de cada tipo deben llenar?

Incógnitas: x = "*número de paquetes A necesarios*"

y = "*número de paquetes B necesarios*"

Si tienen que enviar 550 m de tela roja: $30x + 20y = 550$

Y 825 m de la gris: $25x + 35y = 825$

Luego el sistema a resolver es $\begin{cases} 30x + 20y = 550 \\ 25x + 35y = 825 \end{cases}$

<u>Por reducción</u>:

$$\begin{cases} 30x + 20y = 550 \\ 25x + 35y = 825 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x + 20y = 550 \\ 5x + 7y = 165 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 30x + 20y = 550 \\ -30x - 42y = -990 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$-22y = -440 \Rightarrow y = 20$$

Sustituyendo el valor de y en una de las ecuaciones del sistema se obtiene x:

$$30x + 20y = 550: 30x + 20 \cdot 20 = 550; 30x + 400 = 550; 30x = 150; x = 5$$

Luego se deben llenar 5 paquetes del tipo A y 20 del tipo B.

(P13) En el bar de la plaza, la semana pasada, el bocadillo de tortilla valía 1 € más que el refresco. Esa semana, dos refrescos y un bocadillo nos costaron 4 €. Esta semana han subido todos los precios el mismo porcentaje y nos han cobrado 7,70 € por tres refrescos y dos bocadillos. ¿En qué tanto por ciento se han incrementado los precios?

Incógnitas: $x = \text{"}precio\ del\ bocadillo\text{"}$

$y = \text{"}precio\ del\ refresco\text{"}$

Semana pasada:

El bocadillo de tortilla valía 1 € más que el refresco: $x = y + 1$

Dos refrescos y un bocadillo nos costaron 4 €: $x + 2y = 4$

Luego el sistema a resolver es $\begin{cases} x = y + 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

<u>Por sustitución</u>:

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow y + 1 + 2y = 4 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$$

$$x = y + 1: x = 1 + 1 = 2$$

Luego la semana pasada el bocadillo valía dos euros y el refresco uno.

Esta semana han subido todos los precios el mismo porcentaje y nos han cobrado 7,70 € por tres refrescos y dos bocadillos: Si la semana anterior costaba el 100% ahora costará cada producto un $(100 + z)$%, entonces nos queda que

$$2 \cdot 2 \cdot \frac{100 + z}{100} + 3 \cdot 1 \cdot \frac{100 + z}{100} = 7{,}70.$$

$$4\frac{100 + z}{100} + 3\frac{100 + z}{100} = 7{,}70; 7\frac{100 + z}{100} = 7{,}70; 100 + z = 110; z = 10$$

Por lo tanto, los precios se han incrementado en un 10%.

ANEXO V. HOJA ADICIONAL DE PROBLEMAS

1) Un equipo de balonmano tiene que desplazarse a otra ciudad para jugar un campeonato. El hotel que van a ocupar solo dispone de 13 habitaciones, que pueden ser dobles o triples. Como se ha desplazado todo el equipo, necesitan 27 camas pero no saben cómo distribuirse. ¿Cuántas habitaciones dobles necesitan? ¿Y triples?
2) Halla las edades de Lara y de su hija sabiendo que hace 3 años la edad de Lara era cinco veces la de su hija y dentro de 4 años será el triple.
3) Encuentra dos números tales que el triple del primero aumentado en 4 sea igual al segundo, mientras que el doble del segundo disminuido en 2 sea ocho veces el primero.
4) En un triángulo rectángulo uno de sus ángulos agudos es 12º mayor que el otro. ¿Cuánto miden sus tres ángulos?
5) Con 74€ puedo comprar exactamente, o bien 12 entradas de cine y 2 de teatro, o bien 5 entradas de cine y 7 de teatro. ¿Cuánto cuesta cada entrada?
6) En la clase de Alicia hay 21 alumnos, siendo 7 chicos más que chicas. ¿Cuántos alumnos y alumnas hay en clase?