Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Proporcionalidad aritmética: una propuesta funcional

Arithmetic proportionality: a functional proposal

Autor

Víctor Manero García

Directora

Eva Cid Castro

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Curso 2015 / 2016

INDICE

OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

El objeto matemático en el que se enfoca este trabajo es la **proporcionalidad aritmética simple**.

La proporcionalidad aritmética se centra en el estudio -siempre desde un punto de vista aritmético- de las relaciones existentes entre distintas cantidades de magnitud. Más concretamente, las relaciones que se estudian en el tópico de proporcionalidad aritmética son dos: la proporcionalidad directa y la proporcionalidad inversa.

Así, la proporcionalidad aritmética simple –tal y como viene planteada históricamente- tiene por objetivos:

- El reconocimiento de relaciones existentes entre magnitudes, centrándose exclusivamente en las relaciones de proporcionalidad directa e inversa.
- La resolución de problemas de valor desconocido entre magnitudes con relación de proporcionalidad directa o inversa. Entendiendo por estos, aquellos problemas en los que dados tres términos de la proporción se trata de averiguar el cuarto término.

Sobre la proporcionalidad aritmética se ha escrito mucho, pues es uno de los temas más importantes que aparecen en el temario de los primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria. Se ha escrito sobre la importancia de los conceptos matemáticos que encierra, sobre los procedimientos actuales de enseñanza, sobre las posibles enseñanzas alternativas, etc. En relación a los posibles motivos de la importancia de este tópico matemático (Escolano y Gairín, 2009) describen lo siguiente:

La proporcionalidad aritmética es uno de los temas más relevantes para la formación de los ciudadanos, porque pone en juego los aprendizajes aritméticos escolares (medida, fracciones, operaciones elementales, etc.), y porque resuelve muchos problemas de los adultos (beneficios del capital, trueques o cambios de moneda, mezclas o aleaciones, descuentos comerciales, trabajos conjuntos, llenado y vaciado de recipientes, etc.).

Además de la importancia de los aspectos señalados por Escolano y Gairín, desde mi punto de vista, la proporcionalidad aritmética posee otro factor importante: la introducción de la idea de relación entre cantidades de magnitud. Esto constituye el primer eslabón de lo que después será el estudio de funciones. Así mismo, el estudio de distintos tipos de proporcionalidad –directa e indirecta- supone una primera idea que nos aproxima a las diferentes clases de funciones, en este caso lineales e hiperbólicas que en los cursos siguientes será ampliado a funciones afines, cuadráticas, polinómicas en general, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc.

En este sentido, conviene decir que, históricamente, la aritmética clásica finalizaba con la teoría de la proporcionalidad que permitía tratar de manera eficaz cierto tipo de relaciones funcionales sin necesidad de utilizar el lenguaje algebraico. Según M. Bosch:

> *La proporcionalidad entre magnitudes es pues la primera experiencia sistemáticamente matematizada de la "funcionalidad". Con esta forma particular de relación funcional, la aritmética enseñada edificó todo un edificio –que llamaremos la organización clásica- que se mantuvo estable durante un largo periodo de tiempo: desde el primer tercio del siglo XIX hasta mediados del siglo XX (cuando explota la revolución de las "matemáticas modernas"). Sin embargo, los elementos que las componían nacieron de desarrollos anteriores de las matemáticas sabias que se abandonaron a finales del siglo XVIII.* (Bosch, 1994, p.166)

En el siglo XX, el desarrollo del álgebra y el análisis terminó con la organización clásica de la proporcionalidad que acabo integrándose, como caso particular (funciones lineales o hiperbólicas), en el amplio marco de las relaciones funcionales. Sin embargo, este abandono de la organización clásica de la proporcionalidad en el ámbito de la matemática sabia no ha tenido continuidad en la matemática a enseñar que la mantiene, aunque incorporando en alguna medida el lenguaje algebraico y funcional.

Actualmente, de acuerdo con la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, del departamento de Educación, Cultura y Deporte por la que se aprueba el currículo de la

Educación Secundaría Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, la proporcionalidad aritmética se enmarca en la asignatura de Matemáticas de los cursos de 1º y 2º de Educación Secundaría Obligatoria. Más concretamente, los contenidos, criterios de evaluación, estándares evaluables y competencias clave acerca de la proporcionalidad aritmética se encuentran en el Bloque 2: Números y Álgebra de ambos cursos y se describen a continuación:

1º DE E.S.O.

Acerca de los contenidos, en la Orden previamente mencionada se establecen los siguientes:

- Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
- Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa.

En relación a los criterios de evaluación se especifica:

- Crit.MA.2.1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.
- Crit.MA.2.5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.

Contribución a la adquisición de competencias clave:

- CMCT; Competencia Matemática y competencias básicas en Ciencia y Tecnología.

2º DE E.S.O.

Sobre los contenidos del 2º curso de E.S.O la Orden previamente mencionada establece:

- Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
- Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.

Lo cual es prácticamente un calco de los contenidos del primer curso, salvo por el hecho de que se incluyen los repartos proporcionales.

En relación a los criterios de evaluación se describen exactamente los mismos, pero en este caso se concretan por medio de los estándares de aprendizaje evaluables:

- Crit.MA.2.1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.
    - Est.MA.2.1.1. Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa.
    - Est.MA.2.1.2. Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.
    - Est.MA.2.1.3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando fuere necesario, los resultados obtenidos.
- Crit.MA.2.5. Utilizar diferentes estrategias (empleo de tablas, obtención y uso de la constante de proporcionalidad, reducción a la unidad, etc.) para obtener elementos desconocidos en un problema a partir de otros

conocidos en situaciones de la vida real en las que existan variaciones porcentuales y magnitudes directa o inversamente proporcionales.

- Est.MA.2.5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.
- Est.MA.2.5.2. Analiza situaciones sencillas y reconoce que intervienen magnitudes que no son directa ni inversamente proporcionales.

Contribución a la adquisición de competencias clave:

- CMCT; Competencia Matemática y competencias básicas en Ciencia y Tecnología.

ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APREDIZAJE DE LA PROPORCIONALIDAD

La enseñanza de este objeto matemático se justifica habitualmente en la escuela desde el punto de vista de su necesidad para resolver problemas de proporcionalidad directa o inversa. Además, un pilar muy importante de la introducción de la proporcionalidad aritmética en la escuela consiste en su importancia en situaciones habituales. En este sentido es posible que otros objetos matemáticos no tengan un repercusión tan directa en el día a día, pero el saber identificar magnitudes que son directamente o inversamente proporcionales nos puede resultar útil para tareas tan cotidianas como saber que si 100 gramos de pipas cuestan 1'49 €, cuanto tendré que pagar si compro 200 gramos.

Como ya hemos dicho el campo de problemas que se enseña habitualmente son los problemas de proporcionalidad directa en inversa. Más concretamente la enseñanza actual de la proporcionalidad directa e inversa se centra en la resolución de problemas de valor desconocido. En cuanto a las técnicas se enseñan dos distintas: la regla de tres bien directa o inversa y el método de reducción a la unidad.

Tal y como indican (Monterrubio y Ortega, 2009, p.38) "*el libro de texto […] en muchas ocasiones […] determina el currículo real*". Por ello, para entender bien cual es el estado de la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad actualmente es interesante analizar como se presenta este objeto matemático en diferentes libros de texto. Para ello nos valemos de las conclusiones obtenidas en distintos trabajos sobre proporcionalidad aritmética como los llevados a cabo por (Guacaneme, 2002; Gairín y Muñoz, 2005; Pino y Blanco, 2008; Oller, 2012, pp.90-115; Martínez, Muñoz y Oller, 2014). Entre estas conclusiones destacamos las siguientes recogidas en el trabajo (Martínez, Muñoz, Oller y Pecharromán, 2015):

1. Se observa una gran despreocupación en el manejo de las magnitudes.
2. La proporcionalidad entre magnitudes es algo que se da casi por supuesto, reduciéndose los problemas a decidir si la proporcionalidad es directa o inversa.

3. Existe un desequilibrio entre los conocimientos de tipo conceptual y los de tipo procedimental, a favor de estos últimos.

En relación a este último punto, debido al hincapié que se realiza actualmente en las técnicas procedimentales en detrimento de los conocimientos de tipo conceptual podemos encontrar situaciones en las que los alumnos resuelven problemas utilizando perfectamente técnicas propias de problemas de proporcionalidad aún cuando dichos problemas no son de proporcionalidad aritmética.

Mostramos a continuación las respuestas de un test realizado a alumnos reales del Grado de Magisterio de Primaria de la asignatura de Aritmética II (3er Curso) de la Facultad de Ciencias Humanas y de la Educación de Huesca. Este test consiste en dos problemas que se detallan a continuación y fue realizado por 24 alumnos.

Ejercicio 1. En una reunión cada uno de los asistentes estrecha la mano una vez a todos los demás.

A. Si hubiera 6 personas en la reunión, ¿cuántos apretones de manos deberían darse?

La respuesta correcta es 15 apretones.

Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
19	5

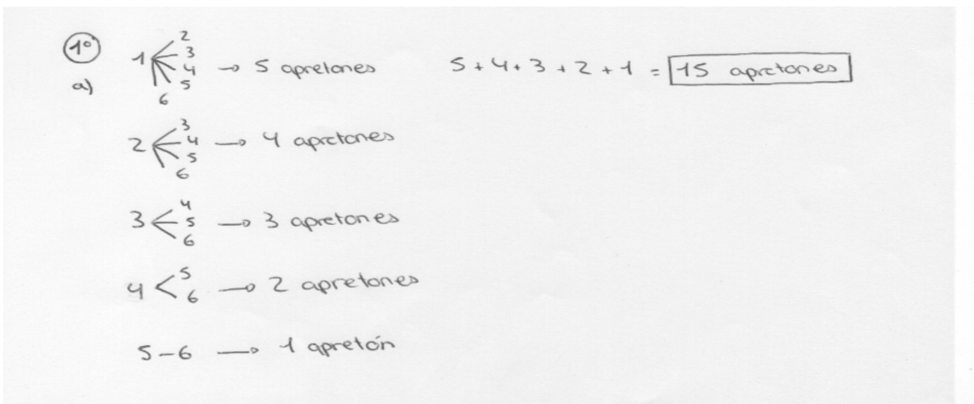


Figura 1: Respuesta del alumno número 2 (Correcta)

B. Si en total hay 55 apretones de mano, ¿cuántos han asistido a la reunión?

La respuesta correcta es 11 personas.

Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
9	15 (11 + 4)

Esta cuestión no se puede resolver por medio de una regla de 3 dado que la relación existente entre las magnitudes (número de personas y número de apretones de manos) no es de proporcionalidad directa, sin embargo los alumnos –concretamente 11 de 24- entienden que al haber más personas habrá más apretones de manos por lo que este problema les suena a proporcionalidad directa y lo intentan resolver usando una regla de tres.

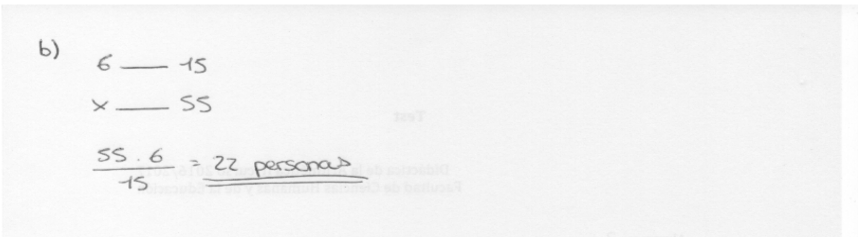


Figura 2: Respuesta del alumno número 2 (Incorrecta)

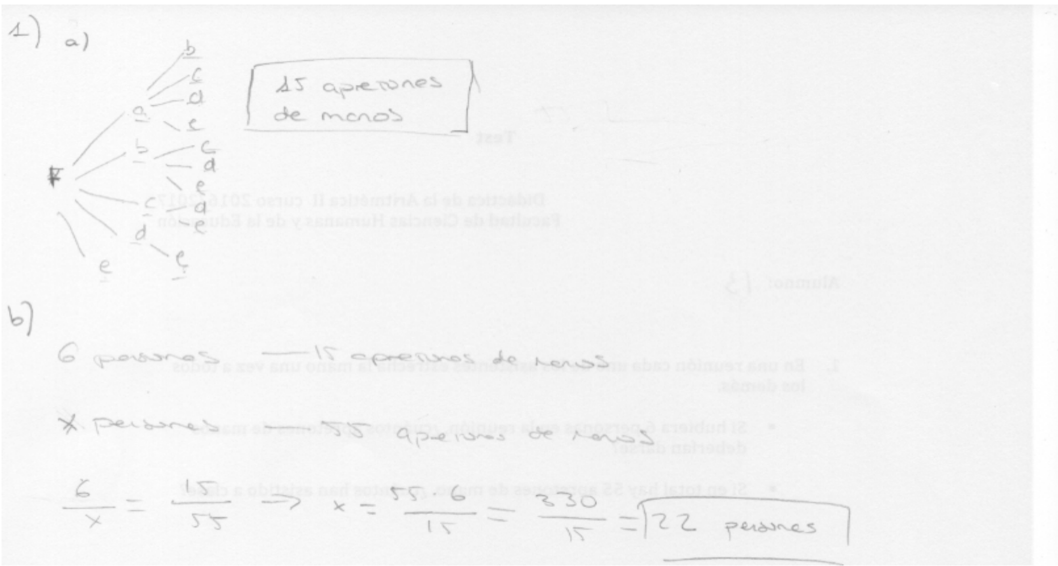


Figura 3: Respuesta del alumno número 13 (Incorrecta)

Si bien la técnica esta perfectamente ejecutada (éxito procedimental), la respuesta es incorrecta ya que no se trata de un problema de proporcionalidad directa (fracaso conceptual).

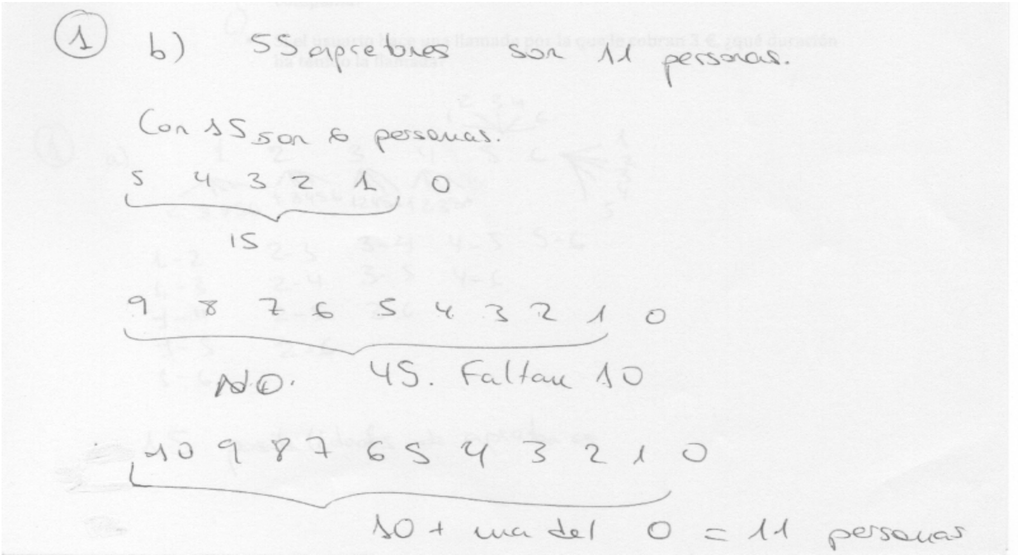


Figura 4: Respuesta del alumno número 22 (Correcta)

Ejercicio 2. Una compañía de telefonía cobra a sus clientes 0’18 € de establecimiento de llamada. Además cobra el minuto de llamada a 0’06 €.

A. Si un usuario hace una llamada de 7 minutos, ¿cuánto le cobrará la compañía?

La respuesta correcta es 0’60 €.

Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
22	2

B. Si otro usuario hace una llamada de 21 minutos, ¿cuánto le cobrará la compañía?

La respuesta correcta es 1’44 €.

Respuestas correctas	Respuestas incorrectas

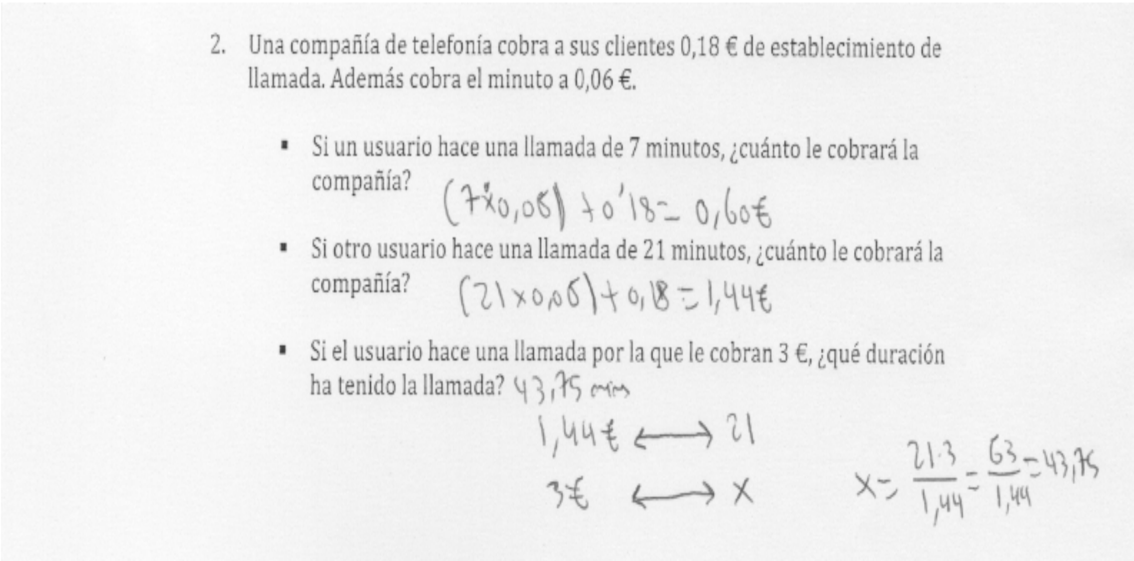
22	2 (1 + 1)

C. Si el usuario hace una llamada por la que le cobran 3 €, ¿qué duración ha tenido dicha llamada?

La respuesta correcta es 47 minutos.

Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
13	11 (10 + 1)

Esta cuestión tampoco se puede resolver por medio de una regla de 3 dado que la relación existente entre las magnitudes no es de proporcionalidad directa, sin embargo los alumnos (10 de 24) entienden que la relación entre el tiempo (en minutos) y el precio (en euros) es de proporcionalidad directa y lo intentan resolver usando una regla de tres.



2. Una compañía de telefonía cobra a sus clientes 0,18 € de establecimiento de llamada. Además cobra el minuto a 0,06 €.

- Si un usuario hace una llamada de 7 minutos, ¿cuánto le cobrará la compañía? $(7 \times 0,06) + 0'18 = 0,60€$
- Si otro usuario hace una llamada de 21 minutos, ¿cuánto le cobrará la compañía? $(21 \times 0,06) + 0,18 = 1,44€$
- Si el usuario hace una llamada por la que le cobran 3 €, ¿qué duración ha tenido la llamada? 43,75 min

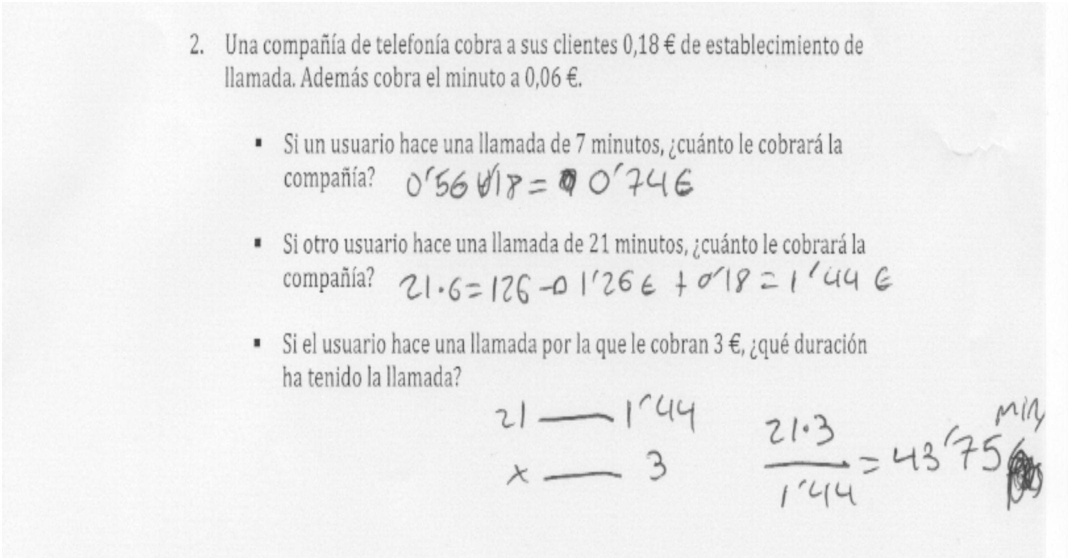
$1,44€ \longleftrightarrow 21$

$3€ \longleftrightarrow x$

$x = \frac{21 \cdot 3}{1,44} = \frac{63}{1,44} = 43,75$

Figura 5: Respuesta del alumno número 7 (Incorrecta)

Al igual que en el problema 1, si bien la técnica esta perfectamente ejecutada (éxito procedimental), la respuesta es incorrecta ya que no se trata de un problema de proporcionalidad directa (fracaso conceptual).



2. Una compañía de telefonía cobra a sus clientes 0,18 € de establecimiento de llamada. Además cobra el minuto a 0,06 €.

- Si un usuario hace una llamada de 7 minutos, ¿cuánto le cobrará la compañía? 0'56 + 0'18 = 0'74 €
- Si otro usuario hace una llamada de 21 minutos, ¿cuánto le cobrará la compañía? 21·6 = 126 → 1'26 € + 0'18 = 1'44 €
- Si el usuario hace una llamada por la que le cobran 3 €, ¿qué duración ha tenido la llamada?

21 —— 1'44

x —— 3

$\frac{21 \cdot 3}{1'44} = 43'75$ min

Figura 6: Respuesta del alumno número 10 (Incorrecta)

Para evitar que se produzcan este tipo de errores de tipo conceptual, en esta propuesta sugerimos presentar la proporcionalidad aritmética desde un punto de vista más funcional (de funciones).

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Tal y como está organizada actualmente la presentación de la proporcionalidad aritmética los alumnos necesitan tener conocimientos previos sobre distintas magnitudes como pueden ser el peso, la longitud, tiempo, velocidad,… También necesitan conocimientos sobre porcentajes sencillos (50%, 25%, 100%) y algunas ideas intuitivas sobre proporcionalidad directa que les permita resolver problemas de este tipo utilizando los conceptos de doble, mitad, triple, tercio etcétera.

En relación a estas ideas intuitivas nos referimos a que los alumnos sepan resolver problemas como el que sigue:

Si una tableta de chocolate cuesta 3 €, ¿cuanto costarán dos tabletas?

Antes de comenzar el tema no se espera que los alumnos sepan que se trata de un problema de proporcionalidad directa pero si es necesario que sean capaces de tener razonamientos del tipo siguiente: si una tableta cuesta 3 €, dos tabletas costaran el doble es decir 2 x 3 = 6 €.

Es necesario también que los alumnos posean conocimientos previos sobre números racionales así como la relación entre su expresión fraccionaria, decimal y porcentaje. Además según nuestra propuesta –lo cual difiere del currículo actual- nuestros alumnos necesitarán poseer conocimientos previos sobre funciones.

A mi parecer la enseñanza previa si que ha propiciado que los alumnos adquieran los conocimientos necesarios previos a la introducción del tema de proporcionalidad aritmética. En la Orden de 16 de Junio de 2014 donde se establece el currículo aragonés de educación primaria, concretamente en los contenidos del Bloque 2: Números de 6º de Primaria, encontramos -entre otros- los siguientes contenidos:

- Fracciones propias e impropias.
- Fracciones equivalentes.
- Relación entre fracción y número decimal, aplicación a la ordenación de fracciones.
- Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

Aumentos y disminuciones porcentuales.

- Proporcionalidad directa. La Regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad.

Además, en los criterios de evaluación encontramos las siguientes especificaciones:

- Cri.MAT.2.5. Utilizar los números enteros, decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana.
- Cri.MAT.2.7. Iniciarse en el uso de los porcentajes y la proporcionalidad directa para interpretar e intercambiar información y resolver problemas en contextos de la vida cotidiana.

En nuestra propuesta (más funcional) para que los alumnos tuvieran los conocimientos previos necesarios se requiere atrasar los temas sobre proporcionalidad aritmética –que actualmente se encuentran en el bloque 2 del currículo- al Bloque 4: Funciones.

De acuerdo con la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaría Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, la introducción a las funciones se enmarca en el curso de 1º de Educación Secundaría Obligatoria en la asignatura de Matemáticas. Más concretamente, los contenidos y criterios de evaluación, se encuentran en el Bloque 4: Funciones y se describen a continuación:

Contenidos:

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).
- Funciones de proporcionalidad directa. Representación.

Criterios:

- Crit.MA.4.1. Conocer manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas.
- Crit.MA.4.2. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.
- Crit.MA.4.3. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.
- Crit.MA.4.4. Reconocer, representar y analizar las funciones de proporcionalidad directa, utilizándolas para resolver problemas.

Como puede verse, dicho bloque recoge entre sus contenidos y criterios las funciones de proporcionalidad directa y su uso para la resolución de problemas. Es ahí donde en esta propuesta pretendemos iniciar el tema de la proporcionalidad aritmética simple, dándole desde el primer momento un punto de vista funcional.

RAZON DE SER

La proporcionalidad es un concepto matemático de gran utilidad. Al ser una herramienta matemática claramente útil de cara a resolver problemas cotidianos sus orígenes se remontan a tiempos y culturas muy antiguas. Tal y como describen (Gairin y Oller, 2013), "en el *Papiro de Rhind (s XVII a.n.e) encontramos, entre otros muchos problemas, el siguiente:*

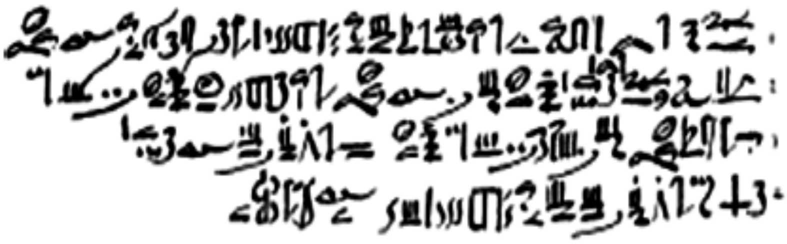


Figura 7: Problema del Papiro de Rhind

"Si 10 kehat[1] de grasa deben durar un año, ¿cuánta grasa puede usarse en un día?"

En (Gairin y Oller, 2013) los autores analizan los primeros intentos de fundamentación teórica de la proporcionalidad basándose en el estudio de dos libros:

1. Los Elementos de Euclides (s. III a.n.e)
2. El comentario de Lui Hui al *Jiu Zhang suan shu*[2] (s. III)

La parte de la obra de Euclides relacionada con la proporcionalidad se encuentra en los libros V y VII. Tal y como señalan (Gairin y Oller, 2013) el primer inconveniente del tratamiento de la proporcionalidad de Euclides reside en que el concepto de razón no esta definido de forma precisa. Este primer problema fue resuelto por Eudoxo. La solución de Eudoxo pasó, no por definir rigurosamente el concepto de razón, sino por definir cuando dos magnitudes guardan la misma razón:

[1] Unidad de volumen de aproximadamente 4.8 litros. Robins y Shute (1987, p.14).
[2] Los Nueve Capítulos sobre los Procedimientos Matemáticos, en adelante Los Nueve Capítulos.

"una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente."

Por otra parte, *Los Nueve Capítulos* constituyen una colección de problemas con sus soluciones numéricas, tal y como era la norma de los textos antiguos. Sin embargo la edición del siglo III cobra una mayor relevancia debido a los comentarios introducidos por el matemático Liu Hui. En esta edición Liu Hui introduce el concepto de *lü.* Como señalan (Gairin y Oller, 2013) "Lui Hui define *lü* como un conjunto de números correlacionados […] La interpretación de este concepto es sencilla. Se dispone de varias magnitudes directamente proporcionales y una *lü* no es más que un conjunto de valores de dichas magnitudes."

Como se puede deducir del problema del Papiro de Rhind **las razones de ser históricas** de la **proporcionalidad aritmética** son, esencialmente**, la resolución de problemas de valor desconocido**. Por el contrario, nuestra propuesta se aleja de esta concepción histórica y **nuestra razón de ser** consistirá en el estudio de **las relaciones entre magnitudes desde el estudio de las funciones** donde la proporcionalidad aritmética directa e inversa constituirán casos particulares.

Razón de ser 1:

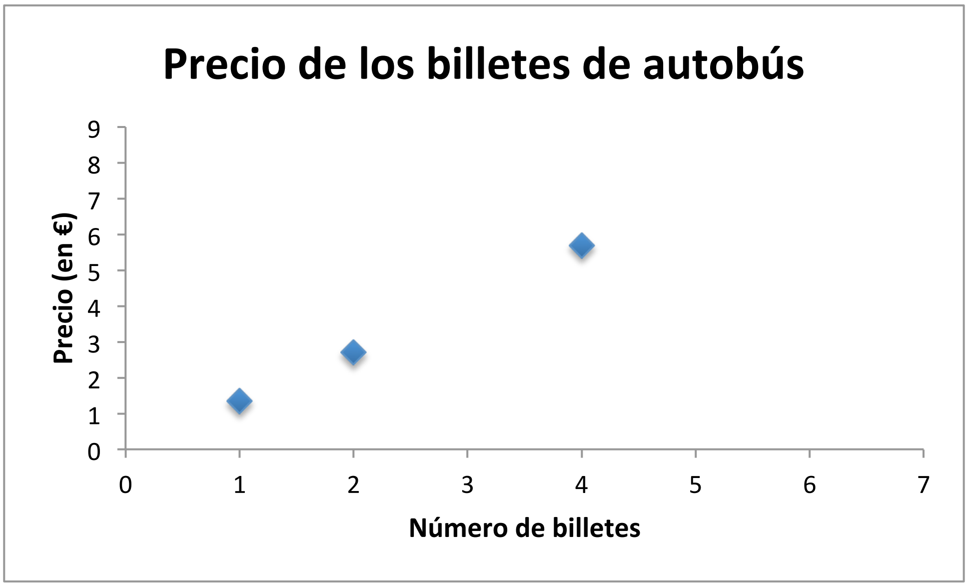
Un billete sencillo de autobús cuesta 1,35 €.

I. **Rellena la tabla siguiente:**

Número de billetes	Precio (en €)
1	1'35
2	2'70
3	
4	5'40
	8'10

10	13’50

II. Coloca los datos anteriores en la gráfica siguiente. Si quieres añade más datos válidos.



III. Completa la secuencia siguiente.

Precio de 1 billete =

Precio de 2 billetes =

Precio de 3 billetes =

P (4) =

P (5) =

P (10) =

P (b) =

IV. Responde a las preguntas siguientes

Si me monto en el autobús con unos amigos y nos cobran, entre todos, 11’40 € por los billetes, ¿cuántos nos hemos montado en el autobús?

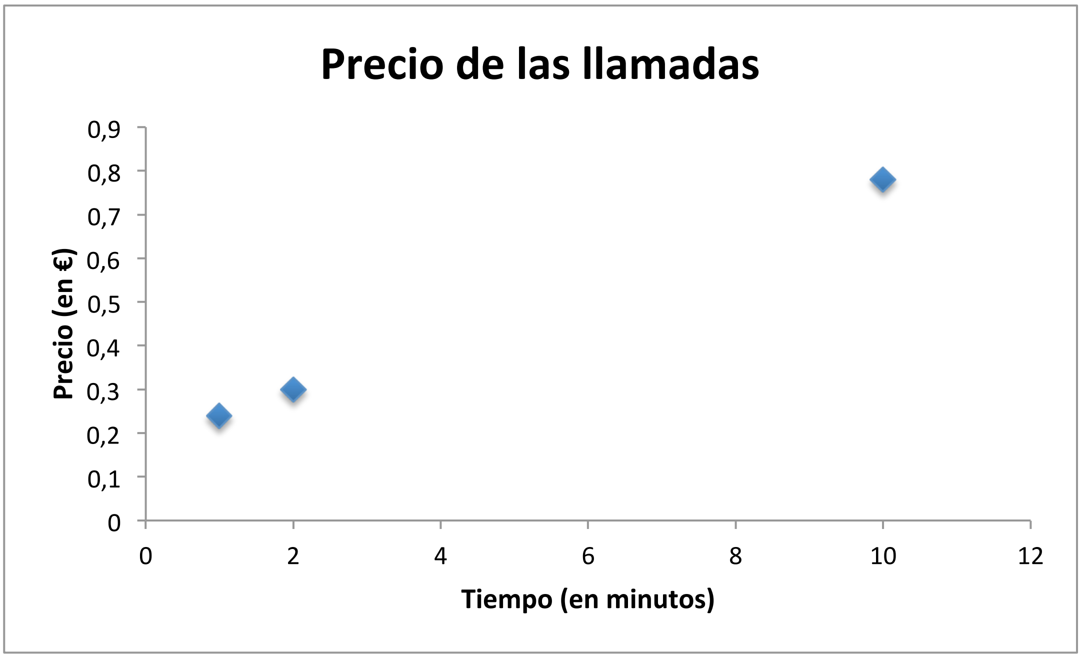
Razón de ser 2:

Una compañía de telefonía cobra a sus clientes 0'18 € de establecimiento de llamada. Además, cobra el minuto de llamada a 0'06 €.

I. Rellena la tabla siguiente:

Tiempo (en minutos)	Precio (en €)
1	0'24
2	0'30
3	
4	
	0'48
	0'78

II. Coloca los datos anteriores en la gráfica siguiente. Si quieres añade más.



III. Completa la secuencia siguiente.

Precio de la llamada de 1 minuto =

Precio de la llamada de 2 minutos =

Precio de la llamada de 3 minutos =

P (4) =

P (5) =

P (10) =

P (m) =

IV. Responde a las preguntas siguientes

Si un usuario hace una llamada de 21 minutos, ¿cuánto le cobrará la compañía?

Si el usuario hace una llamada por la que le cobran 3 €, ¿qué duración ha tenido dicha llamada?

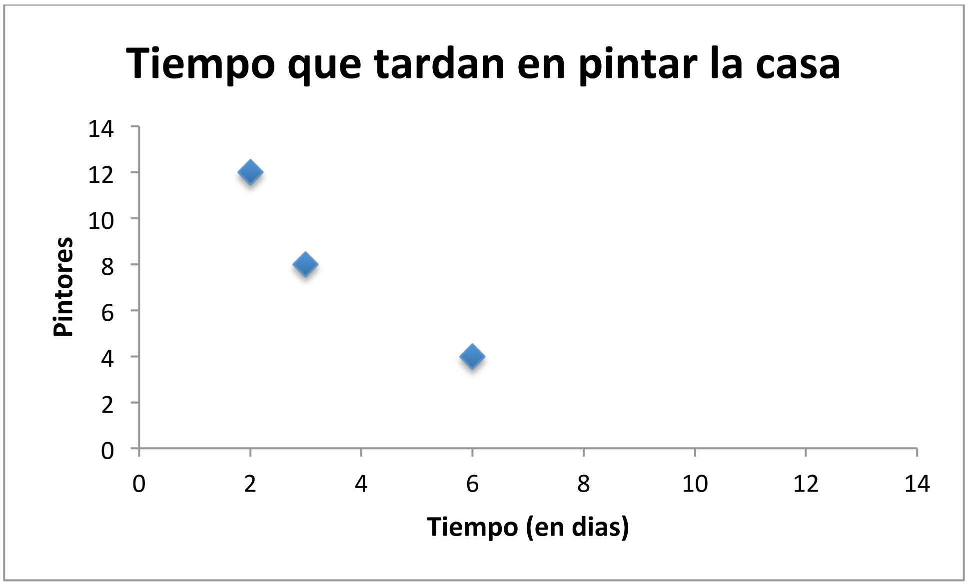
Razón de ser 3:

Sabemos que 6 pintores tardan en pintar una casa 4 días. Sabiendo esto realiza estas actividades:

I. Rellena la tabla siguiente:

Pintores	Tiempo que tardan (en días)
6	4
3	8
1	
2	12
12	

II. Coloca los datos anteriores en la gráfica siguiente. Si quieres añade más.



III. **Completa la secuencia siguiente.**

Tiempo que tarda 1 pintor =

Tiempo que tardan 2 pintores =

Tiempo que tardan 3 pintores =

T (4) =

T (6) =

T (p) =

IV. **Responde a las preguntas siguientes**

Si sabemos que han tardado 6 días en pintar la casa, ¿cuántos pintores estaban trabajando?

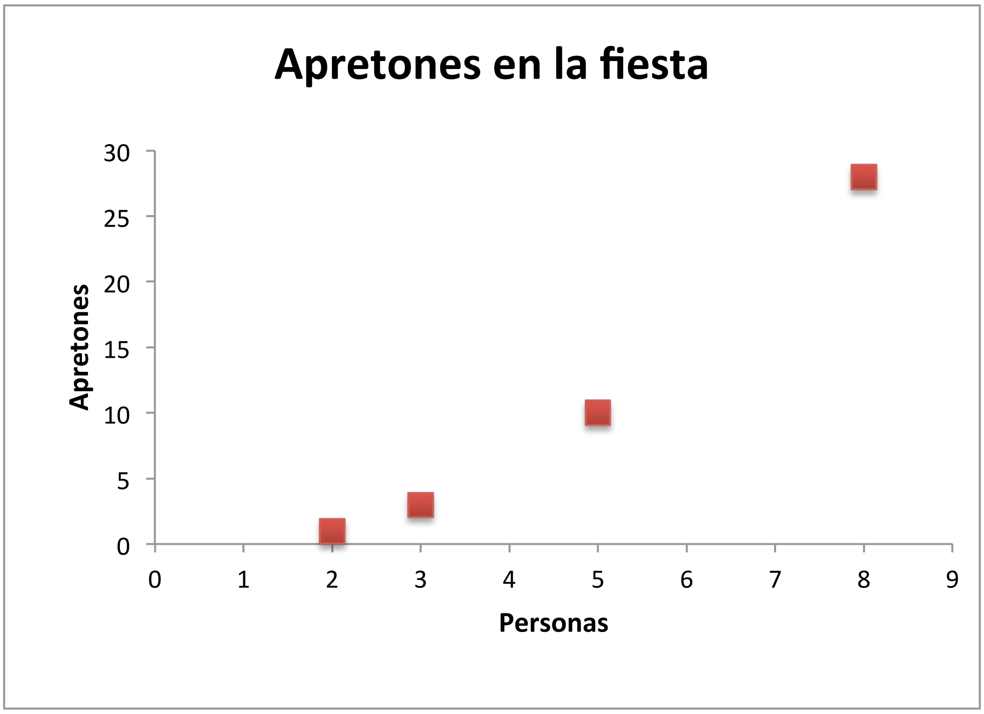
Razón de ser 4:

En una reunión cada uno de los asistentes estrecha la mano una vez a todos los demás:

I. **Rellena la tabla siguiente:**

Numero de personas	Apretones de manos
2	1
3	3
4	
5	10
	28

II. Coloca los datos anteriores en la gráfica siguiente. Si quieres añade más.



III. Completa la secuencia siguiente.

Apretones si hay 1 persona =

Apretones si hay 2 personas =

Apretones si hay 4 personas =

A (5) =

A (6) =

A (P) =

IV. Responde a las preguntas siguientes

Si hubiera 7 personas en la reunión, ¿cuántos apretones de manos deberían darse?
Si en total hay 55 apretones de mano, ¿cuántos han asistido a la reunión?

En cuanto a la metodología, plantearemos estos problemas y les dejaremos que los trabajen primero individualmente, donde deberán crear sus propias estrategias para tratar de resolverlo y después de un tiempo prudencial de unos 5-10 minutos les haremos trabajarlo en grupo. Este grupo deberá entregarnos lo que haya hecho.

CAMPO DE PROBLEMAS

1. Problemas introductorios. Problemas de valor desconocido sencillos.

Problema 1: Si una garrafa contiene 5 litros de agua, ¿cuántos litros hay en 6 garrafas?

Problema 2: Un bote lleno, contiene 200 caramelos, ¿cuántos caramelos contiene un bote que esta lleno hasta la mitad?

Problema 3: Si dos billetes de autobús cuestan 2'70 €, ¿cuánto cuestan cuatro billetes? ¿y seis? ¿y diez?

Problema 4: Un pintor pinta una casa en 6 días, ¿cuánto tardará si lo hacen entre dos pintores?

2. Problemas pensados para introducir las relaciones de proporcionalidad.

Problema 5: Señala de estos pares de magnitudes las que, según tu opinión, guardan algún tipo de relación:

- La edad de una persona y su altura.
- La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en hacer un recorrido.
- La velocidad de un coche y la distancia que recorre en una hora.
- El número de alumnos en clase y el número de pizarras de la clase.
- El número de lápices que llevo en el estuche y mi número de zapato.
- El número de personas que hacen una mudanza y el tiempo que se necesita para acabarla.

Problema 6: Señala de estos pares de magnitudes las que, según tu opinión, guardan algún tipo de relación:

- Las entradas vendidas para un concierto y el dinero recaudado.

- El tiempo que dejamos la luz encendida y lo que nos cobran en la factura de la luz.
- La velocidad de un coche y la distancia que recorre en una hora.
- El tiempo que se tarda en llegar a un sitio y la velocidad que se lleva.
- El número de años de una persona y su talla de pie.
- Los litros de gasolina consumidos por un coche y la distancia recorrida.

3. Problemas diseñados para la obtención de representaciones de funciones.

Para la elaboración de estos problemas hemos tenido en cuenta la clasificación de (Sierra, González y López, 1998) de los cuatro sistemas de representación de funciones, (expresión verbal, tabla de datos, gráfica y fórmula algebraica)

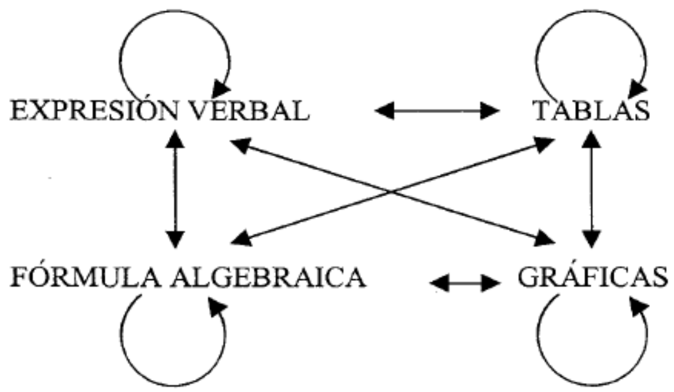


Figura 8: Sistemas de representación de funciones

3.1 Obtención de la representación en forma de tabla de valores

Problema 7: Sabiendo que 1 kilo de naranjas cuesta 1,5 € rellena la tabla siguiente:

Masa de naranjas (en kilos)	Precio (en €)
1	1,5
2	
	6
5	

Problema 8: La siguiente gráfica representa lo que tardan en consumirse 6 litros de leche en una casa según el número de personas que viven en ella.

Observando la gráfica anterior rellena la tabla siguiente:

Número de personas que viven en la casa	Tiempo que tardan en consumir la leche (en días)
1	24
2	
	6
8	

Problema 9: Sabemos que el coste de una llamada de teléfono viene dado por la función:

$$C(m) = 0'18 + (0'06)m,$$

donde C es el coste de la llamada –en €- y m es la duración –en minutos- de dicha llamada. Conocido esto, rellena la tabla siguiente:

Tiempo de llamada (en minutos)	Coste de la llamada (en €)
1	0’24
2	
	0’40
6	

3.2 Obtención de la representación en forma gráfica

Problema 10: En la siguiente tabla se muestra la relación entre el peso de manzanas y su precio:

Masa de manzanas (en kilos)	Precio (en €)
1	2’1
2	4’2
3	6’2
5	10’5
6	16’8

a. Represente los datos de la tabla en la gráfica siguiente e intenta unir -de manera coherente- los puntos obtenidos.

b. Completa la siguiente secuencia:

Precio total de 1 kilo de manzanas =

Precio total de 2 kilos de manzanas =

Precio total de 3 kilos de manzanas =

P(5) =

P(6) =

P(10) =

P(m) =

Problema 11: Sabemos que el tiempo que se tarda en arar un campo dependerá del número de tractores que se usen. Además, sabemos que la relación entre ambas magnitudes esta dada por la función:

$$T(n) = \frac{12}{n}$$

donde *T* es el tiempo que se tarda (en horas) y *n* es el número de tractores.

a. Utilizando la fórmula anteriormente descrita rellena la tabla siguiente:

Número de tractores, *n*	Tiempo, *T* (en horas)
1	
	6
	4
4	3
6	

b. Representa los datos de la tabla en la gráfica siguiente e intenta unir de manera coherente los puntos obtenidos.

3.3 Obtención de la representación en forma algebraica

Problema 12: A Juan le gusta mucho jugar al tenis. Ha ido a unas instalaciones deportivas en las que le cobran una matrícula de 30 €. Además, por cada día que vaya a jugar a tenis le cobran 2 € más.

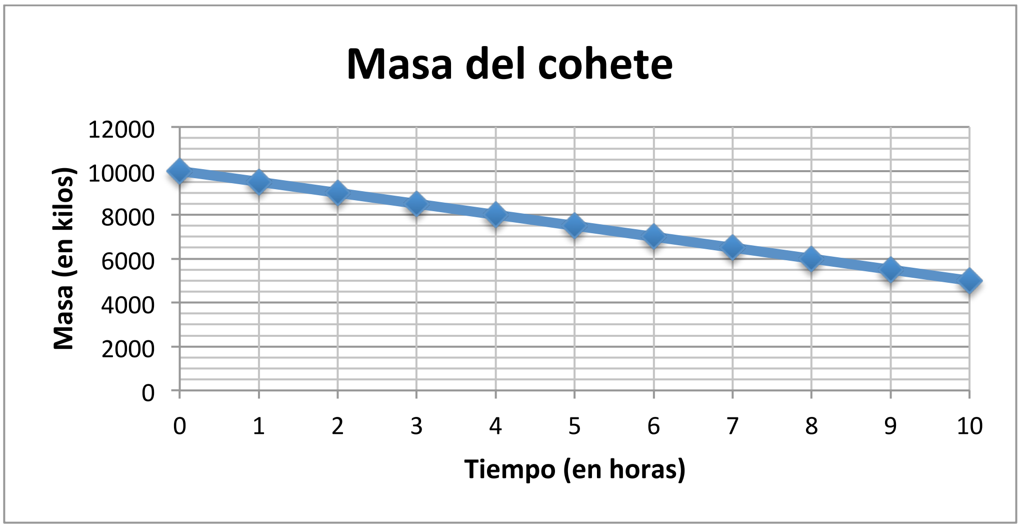
a. Rellena la tabla siguiente con la relación entre los días que va a jugar Juan a tenis y lo que va a pagar.

Tiempo (en días)	Precio a pagar (en €)
1	
2	34
	40
	50
25	

b. Completa la siguiente secuencia:
Precio total que pagará si va 1 día =
Precio total que pagará si va 2 días =
Precio total que pagará si va 3 días =
P(5) =
P(6) =
P(10) =

P(d) =

Problema 13: Cuando se lanza un cohete al espacio la masa del cohete disminuye a medida que va consumiendo su combustible. Sabemos que la relación entre la masa del cohete y el tiempo viene dada por la gráfica siguiente:



Fijándote en el gráfico anterior completa la secuencia siguiente:

Masa del cohete a tras 0 horas =

Masa del cohete a tras 1 hora =

Masa del cohete a tras 2 horas =

Masa del cohete a tras 3 horas =

M(4) =

M(5) =

M(10) =

M(h) =

4. Problemas diseñados para la resolución de problemas de valor desconocido.

Problema 14: Sabemos que 6 metros de cuerda cuestan 15 €. Conocido esto, responde a las preguntas siguientes:

a) ¿Qué magnitudes están involucradas? ¿Cuáles son sus unidades?

b) ¿Qué relación existe entre estas magnitudes? Rodea la respuesta correcta:

- Lineal (proporcionalidad directa)
- Afín
- Hiperbólica (proporcionalidad inversa)

c) Rellena la tabla siguiente: (1 punto)

6	15
2	
1	
	10

d) Dibuja los datos anteriores en una gráfica.

e) ¿Cuánto costarán 9 metros de cuerda?

Problema 15: Sabemos que 6 camareros preparan las mesas de una cena en 15 minutos. Conocido esto, responde a las preguntas siguientes:

a) ¿Qué magnitudes están involucradas? ¿Cuáles son sus unidades?

b) ¿Qué relación existe entre estas magnitudes? Rodea la respuesta correcta:

- Lineal (proporcionalidad directa)
- Afín
- Hiperbólica (proporcionalidad inversa)

c) Expresa de forma algebraica la relación que hay entre las dos magnitudes. Para ello rellena la secuencia siguiente:

Tiempo que tardan 6 camareros = 15 minutos

Tiempo que tardan 3 camareros =

T(2) =

T(1) =

T(c) =

d) ¿Cuanto tiempo tardarán 9 camareros en preparar las mesas?

TÉCNICAS Y TECNOLOGÍAS

Como ya hemos descrito con anterioridad, el objetivo de esta propuesta didáctica es abordar la proporcionalidad aritmética entre magnitudes como un caso particular de relación funcional. En particular la proporcionalidad directa (resp. inversa) entre magnitudes no es otra cosa sino dos magnitudes relacionadas por medio de una función lineal (resp. hiperbólica). Por todo esto las técnicas empleadas así como las tecnologías que las justifican van a estar orientadas en las siguientes dos direcciones:

- Reconocer los distintos tipos de relaciones funcionales véase, lineales, afines, hiperbólicas,…
- Desarrollar los distintos sistemas de representación funcional: tablas de valores, gráficos y formas algebraicas.
- Resolver problemas de valor desconocido.

Puesto que nuestra propuesta está orientada al primer curso de E.S.O. nos centraremos únicamente en funciones lineales, afines e hiperbólicas.

1. Funciones lineales

Técnica 1.1: Reconocimiento de una función lineal desde su expresión verbal.

Para reconocer una relación entre magnitudes que venga dada por la expresión verbal de una función lineal podemos utilizar las técnicas empleadas en las propuestas actuales, es decir, podemos preguntarnos si al doble (resp. mitad, triple, …) de una de las magnitudes la otra sufre una transformación similar: se dobla (resp. divide por dos, triplica, …). Por ejemplo ante un problema como el problema 7:

Problema 7: Sabiendo que 1 kilo de naranjas cuesta 1’5 € rellena …

Nos planteamos que le ocurre al precio cuando doblamos los kilos de naranjas, obteniendo así que el precio también se duplica o que si triplicamos los kilos el precio se triplica. Esto nos permitirá determinar que la relación entre la magnitud masa (en kilos) de naranjas y precio (en €) viene dada por una función lineal.

Técnica 1.2: Reconocimiento de una función lineal desde su expresión algebraica.

La **expresión general de una función lineal** es:

$$\boldsymbol{f(x) = kx},$$

donde *x* representa una magnitud, *f(x)* representa a la otra magnitud y *k* es una constante. Toda relación entre magnitudes que venga dada por una función con esta expresión corresponderá a una función lineal.

Técnica 1.3: Construcción de su expresión en forma de tabla de valores.

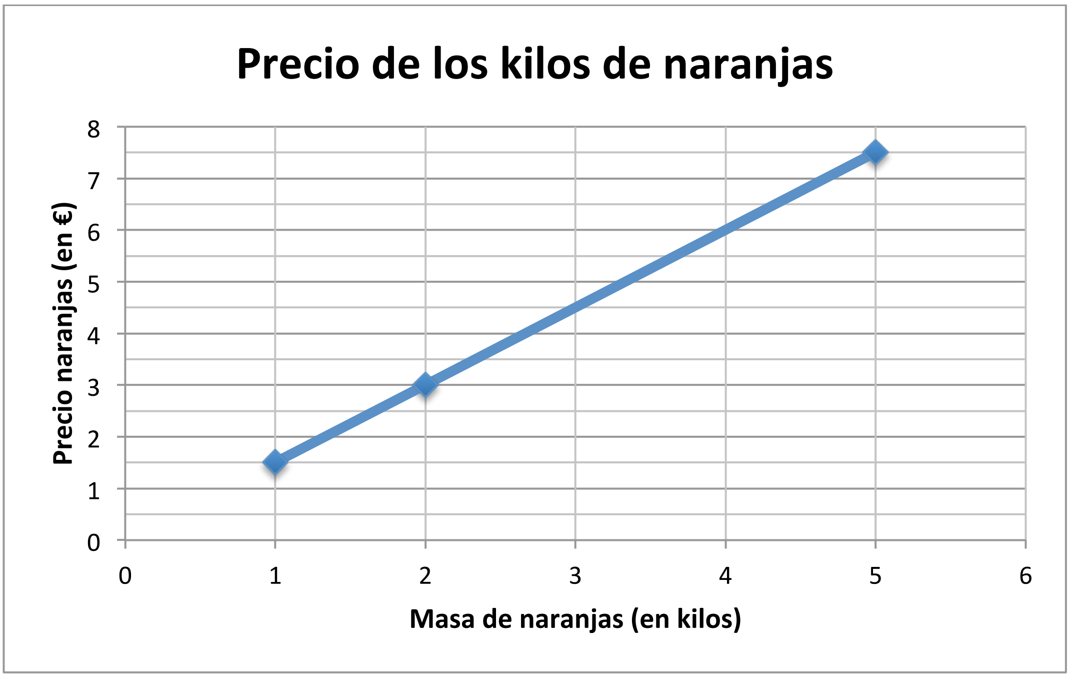
Para pasar de cualquiera de los sistemas de representación funcional al sistema de representación en forma de tabla de valores la técnica es siempre la misma, independientemente del tipo de función. Escribimos una tabla con dos columnas en cuya primera fila aparecen las dos magnitudes junto con sus unidades y en las filas siguientes vamos escogiendo valores para la primera magnitud –los cuales colocamos en la primera columna- y después rellenamos la segunda columna con sus correspondientes valores. Por ejemplo ante un problema como el problema 7:
Problema 7: Sabiendo que 1 kilo de naranjas cuesta 1,5 € rellena …

escribimos lo siguiente:

Masa de naranjas (en kg)	Precio (en €)
1	1’5
2	3
3	…

Técnica 1.4: Construcción de su expresión gráfica.

La expresión gráfica de una función lineal corresponde con una recta que pasa por el origen. Por ello, puesto que su gráfica es una recta bastará dibujar dos puntos de su expresión en forma de tabla de valores y pintar la línea recta que pasa por ellos. Por ejemplo ante un problema como el previamente mencionado, problema 7, obtenemos la expresión gráfica tal que así:



Técnica 1.5: Construcción de su expresión algebraica.

De la *Técnica 1.2* sabemos perfectamente cual es la expresión general de una función lineal. Por ello para describir una tal función únicamente necesitamos conocer el valor de la constante *k*. Este valor lo podemos obtener de múltiples formas pero todas ellas se resumen en que la constante *k* es el valor de la segunda magnitud cuando la primera tiene el valor 1. Por ejemplo, si seguimos pensando en el problema 7, es claro que bien sea de la expresión verbal, de la tabla de valores o de la forma gráfica –previamente descritas- se obtiene que cuando la magnitud masa (en kg) tiene el valor 1 el precio (en €) alcanza el valor 1’5, es decir k = 1’5. Por lo tanto la expresión algebraica es:

$$P(m) = 1'5\ m,$$

donde P es el precio en € y m es la masa de naranjas en kilos.

Técnica 1.6: Resolución de problemas de valor desconocido.

Recuperamos ahora la razón de ser histórica de la proporcionalidad aritmética simple, que recordamos que era la resolución de problemas de valor desconocido.

Por medio de todas las técnicas anteriores somos capaces de obtener los distintos sistemas de representación de una función. Conocido esto para obtener el valor desconocido de un problema cuantitativo de proporcionalidad directa -independientemente del sistema de representación en el que venga dada la relación funcional entre las magnitudes- lo que haremos será obtener a que valor corresponde en la representación funcional el valor conocido. Por ejemplo, continuando con el problema 7, hemos obtenido que la expresión algebraica que relaciona las magnitudes precio y masa es:

$$P(m) = 1'5\ m,$$

donde P es el precio en € y m es la masa de naranjas en kilos. Por lo tanto si ahora nos preguntan ¿cuánto costarán 11 kilos de naranjas? Tenemos que obtener el valor P(11), es decir

$$P(11) = 1'5 \times 11,$$

concluyendo que P(11) = 16’5 € es el precio de 11 kilos de naranjas.

2. Funciones afines

Primero de todo debemos destacar que una función lineal no es más que una caso particular de función afín. Por lo tanto, todo que digamos para funciones afines puede ser particularizado para funciones lineales.

Técnica 2.1: Reconocimiento de una función afín desde su expresión verbal.

Para reconocer una relación entre magnitudes que venga dada por la expresión verbal de una función afín no podemos utilizar las técnicas mencionadas para el reconocimiento de funciones lineales. Para reconocer una función afín debemos plantearnos si una variación constante en una de las magnitudes produce una variación constante en la otra. Por ejemplo ante un problema como la razón de ser número 2:

Razón de ser 2: Una compañía de telefonía cobra a sus clientes 0’18 € de establecimiento de llamada. Además, cobra el minuto de llamada a 0’06 €.

Nos planteamos si al variar la duración de la llamada un número constante de minutos, el coste varia un número constante de €, es decir si la diferencia de precio de dos llamadas de 2 y 3 minutos (1 minuto de diferencia) es igual a la diferencia de precio de dos llamadas de duración 8 y 9 minutos (también de 1 minuto de diferencia). Si la respuesta es afirmativa podremos asegurar que la relación entre ambas magnitudes viene dada por una función afín.

Notar que si bien esta *Técnica 2.1* también puede servir para detectar funciones lineales, al contrario esto no se da, es decir, la *Técnica 1.1* no nos sirve para detectar funciones afines en general.

Técnica 2.2: Reconocimiento de una función afín desde su expresión algebraica.

La **expresión general de una función afín** es:

$$\boldsymbol{f(x) = ax + b},$$

donde *x* representa una magnitud, *f(x)* representa a la otra magnitud, *a* y *b* son dos constantes. De esta expresión se ve claramente como una función lineal no es más que una función afín en la que la constante *b* –conocida como ordenada en el origen- toma el valor 0. Toda relación entre magnitudes que venga dada por una función con esta expresión corresponderá a una función afín.

Técnica 2.3: Construcción de su expresión en forma de tabla de valores.

Para pasar de cualquiera de los sistemas de representación funcional al sistema de representación en forma de tabla de valores la técnica es siempre la misma, independientemente del tipo de función. Escribimos una tabla con dos columnas en cuya primera fila aparecen las dos magnitudes junto con sus unidades y en las filas siguientes vamos escogiendo valores para la primera magnitud –los cuales colocamos en la primera columna- y después rellenamos la segunda columna con sus correspondientes valores. Por ejemplo ante un problema como la razón de ser 2:

Razón de ser 2: Una compañía de telefonía cobra a sus clientes 0’18 € de establecimiento de llamada. Además, cobra el minuto de llamada a 0’06 €.

Tiempo de llamada (en minutos)	Precio (en €)

1	0’24
2	0’30
3	…

Técnica 2.4: Construcción de su expresión gráfica.

La expresión gráfica de una función afín es una recta. Por ello, puesto que su gráfica es una recta bastará dibujar dos puntos de su expresión en forma de tabla de valores y obtener la línea recta que pasa por ellos. Por ejemplo, ante un problema como el previamente mencionado, razón de ser 2, obtenemos la expresión gráfica tal que así:

Técnica 2.5: Construcción de su expresión algebraica.

De la *Técnica 2.2* sabemos perfectamente cual es la expresión general de una función afín. Por ello para describir una tal función únicamente necesitamos conocer el valor de las constantes *a* y *b*. El valor de *a* lo podemos obtener del hecho de que es lo que varia la segunda magnitud cuando la primera varia una unidad. Por ejemplo, si seguimos pensando en la razón de ser número 2, es claro que bien sea de la expresión verbal, de la tabla de valores o de la forma gráfica –previamente descritas- se obtiene que cuando la magnitud tiempo (en minutos) varia en una unidad, el precio de la llamada (en €) varia en 0’06, es decir *a* = 0’06. Por otra parte el valor de *b* lo podemos conseguir teniendo en cuenta que es el valor que alcanza la segunda magnitud cuando la primera tiene el valor 0. Equivalentemente es el valor que alcanza la función cuando corta al eje de las Y's (eje vertical ó de ordenadas). Si continuamos pensando en la razón de ser 2, es claro que de la forma gráfica se obtiene que cuando la magnitud tiempo (en minutos) vale 0 el precio de la llamada (en €) es de 0'18, es decir b = 0'18.

Por lo tanto la expresión algebraica que describe la relación entre el coste de la llamada y la duración es:

$$C(m) = 0'06\ m + 0'18,$$

donde C es el coste en € de la llamada y m son los minutos de duración de la llamada.

Técnica 2.6: Resolución de problemas de valor desconocido.

Todas las técnicas anteriores nos permiten obtener los distintos sistemas de representación de una función. Conocido esto, para obtener el valor desconocido de un problema cuyas magnitudes están relacionadas por medio de una función afín -independientemente del sistema de representación en el que venga dada la relación funcional entre las magnitudes- lo que haremos será obtener a que valor corresponde en la representación funcional el valor conocido. Por ejemplo, continuando con la razón de ser 2, hemos obtenido que la expresión algebraica que relaciona las magnitudes precio y tiempo es:

$$C(m) = 0'06\ m + 0{,}18,$$

donde C es el coste en € y m es el tiempo de la llamada en minutos. Por lo tanto si ahora nos preguntan ¿cual será la duración de una llamada cuyo coste ha sido de 0'60 €? Tenemos que obtener el valor m, tal que C(m) = 0'60 , es decir

$$0'60 = 0'06\ m + 0'18,$$

ó equivalentemente

$$0'42 = 0'06\ m,$$

es decir,

$$0'42/0'06 = m$$

concluyendo que m = 7 minutos es la duración de una llamada de coste 0'60 €.

3. Funciones hiperbólicas

Técnica 3.1: Reconocimiento de una función hiperbólica desde su expresión verbal.

Para reconocer una relación entre magnitudes que venga dada por la expresión verbal de una función hiperbólica podemos utilizar las técnicas empleadas en las propuestas actuales, es decir, podemos preguntarnos si al doble (resp. mitad, triple, …) de una de las magnitudes, la otra sufre una transformación opuesta: se divide por dos (resp. duplica, divide por tres, …). Por ejemplo ante un problema como el problema 8:

Problema 8: La siguiente gráfica representa lo que tardan en consumirse 6 litros de leche en una casa según el número de personas que viven en ella.

Nos planteamos que le ocurre al tiempo en que se consumen 6 litros cuando doblamos las personas de la casa, obteniendo así que se reduce a la mitad o que si triplicamos la gente, el tiempo que duran los 6 litros de leche se divide por tres. Esto nos permitirá determinar que la relación entre las magnitudes número de personas y tiempo que duran los 6 litros de leche viene dada por una función hiperbólica.

Técnica 3.2: Reconocimiento de una función hiperbólica desde su expresión algebraica.

La **expresión general de una función hiperbólica** es:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{k}{x}},$$

donde *x* representa una magnitud, *f(x)* representa a la otra magnitud y *k* es una constante. Por lo tanto, toda relación entre magnitudes que venga dada por una función con esta expresión corresponderá a una función hiperbólica.

Técnica 3.3: Construcción de su expresión en forma de tabla de valores.

Como ya hemos dicho anteriormente esta técnica es la misma para cualquier tipo de función, por lo que es exactamente igual a las *Técnicas 1.3 y 2.3* previamente descritas. Por ejemplo ante un problema como el problema 8:

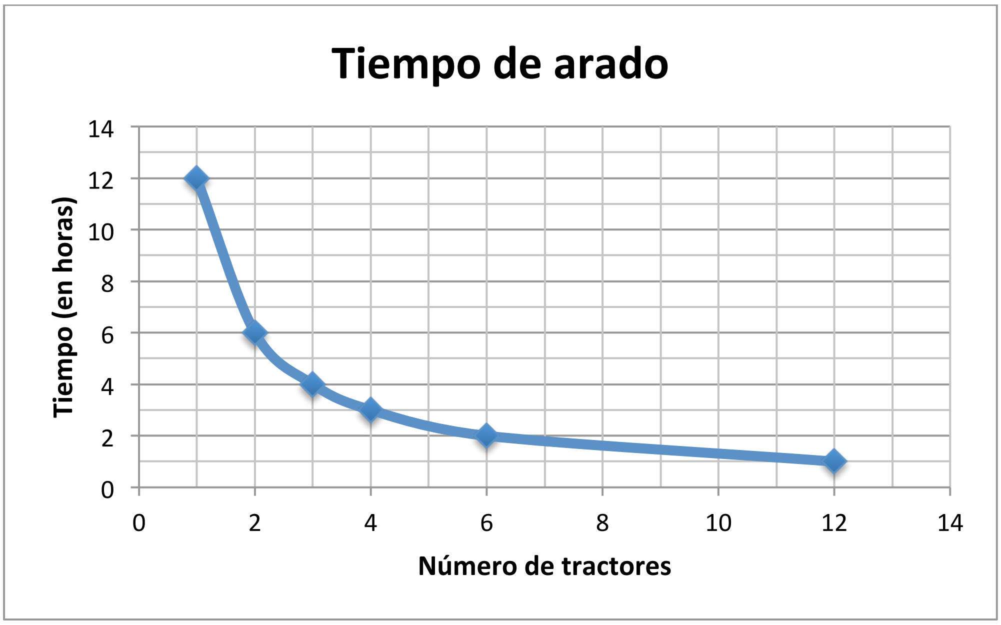
Problema 8: La siguiente gráfica representa lo que tardan en consumirse 6 litros de leche en una casa según el número de personas que viven en ella …

escribimos lo siguiente:

Número de personas	Tiempo que duran 6 litros de leche (en días)
1	24
2	12
3	…

Técnica 3.4: Construcción de su expresión gráfica.

La expresión gráfica de una función hiperbólica es una hipérbola. Por ello, puesto que su gráfica no va ser una recta lo mejor es dibujar muchos puntos (no sólo dos como ocurría para la funciones lineales y afines). Por ejemplo para un problema como el problema 11 –descrito en la sección campos de problemas- obtenemos la expresión gráfica tal que así:



donde se puede observar que hemos dado muchos valores, no sólo dos.

Técnica 3.5: Construcción de su expresión algebraica.

En la *Técnica 3.2* hemos descrito la expresión general de una función hiperbólica. De dicha expresión se obtiene que para detallar una tal función, únicamente necesitamos conocer el valor de la constante *k*. Este valor lo podemos obtener de múltiples formas pero todas ellas se resumen en que la constante *k* es el valor de la segunda magnitud cuando la primera tiene el valor 1. Por ejemplo, si seguimos pensando en el problema 11, es claro que bien sea de la expresión verbal, de la tabla de valores o de la forma gráfica –previamente descritas- se obtiene que cuando el número de tractores tiene el valor 1 el tiempo en horas alcanza el valor 12, es decir *k* = 12. Por lo tanto la expresión algebraica de dicha función es:

$$\boldsymbol{T(n) = \frac{12}{n}},$$

donde T es el tiempo en horas y n es el número de tractores.

Técnica 3.6: Resolución de problemas de valor desconocido.

Por todas las técnicas anteriores somos capaces de obtener los distintos sistemas de representación de una función. Conocido esto para obtener el valor desconocido de un problema cuantitativo de proporcionalidad inversa -independientemente del sistema de representación en el que venga dada la relación funcional entre las magnitudes- lo que haremos será obtener a que valor corresponde en la representación funcional el valor conocido. Por ejemplo, continuando con el problema 11, en la descripción de la Técnica 3.4 hemos obtenido que la expresión gráfica que relaciona las magnitudes tiempo y número de tractores. Por lo tanto si ahora nos preguntan ¿cuánto tractores harán falta para arar el campo en 3 horas? Observaremos la gráfica y veremos a que número de tractores corresponde el valor Tiempo = 3 horas.

De un modo equivalente podríamos resolver este problema utilizando la expresión en forma de tabla de valores.

SECUENCIA DIDÁCTICA

La secuencia didáctica que hemos preparado requiere de 11 sesiones y se estructura como sigue:

Sesión 1: Evaluación de conocimientos previos

Para comenzar el tema preguntamos a los alumnos por distintas magnitudes que conozcan así como por las unidades en las que se miden y tratamos de hacer hincapié en la distinción entre magnitud y unidad. Tras esto, comenzamos a describir oralmente ejemplos de proporcionalidad aritmética para que comiencen a pensar. Para esto empezamos con ejercicios sencillos de valor desconocido.

Ejemplo: Si en un depósito de gasolina lleno hay 100 litros, ¿cuantos litros habrá en el depósito cuando este por la mitad? ¿cuántos litros cabrán en tres depósitos?

Ejemplo: Si a un perro 10 kilos de comida le duran 15 días, ¿cuánto tiempo les durará la misma comida a 3 perros?

Después de comentar estos ejemplos les hacemos hacer algunos los problemas introductorios descritos en la sección campos de problemas y los corregimos:

Problema 1: Si una garrafa contiene 5 litros de agua, ¿cuántos litros hay en 6 garrafas?

Problema 4: Un pintor pinta una casa en 6 días, ¿cuánto tardará si lo hacen entre dos pintores?

Después describimos diferentes tipos de relaciones entre magnitudes. Planteamos distintos ejemplos y les vamos preguntando si existe relación entre las magnitudes y en caso afirmativo les preguntamos que tipo de relación. Hacemos el problema 5.

Sesión 2: Funciones lineales

Iniciamos la segunda sesión planteándoles de manera individual la razón de ser número 1. Tras darles unos 10-15 minutos de trabajo individual les ponemos a trabajar en grupos de 3-4 personas para que sigan trabajando la razón de ser 1. Les damos otros 10 minutos para que rellenen una hoja con lo que han sabido resolver de la razón de ser 1 y les pedimos que nos la entreguen.

El resto de la clase lo dedicamos a describir los métodos para identificar cuando una relación entre dos magnitudes viene dada por medio de una función lineal véase *Técnicas 1.1 y 1.2*.

Sesión 3: Funciones lineales

Dedicaremos esta clase al estudio de los diferentes sistemas de representación de funciones lineales. Comenzamos describiendo la *Técnica 1.3* acerca de la construcción de la expresión de una función en forma de tabla de valores. Después les mandamos hacer el **Problema 7**.

Seguimos la clase describiendo las *Técnicas 1.4 y 1.5* sobre las representación gráfica y algebraica de una función lineal. Concluimos la sesión con el **Problema 10**.

Sesión 4: Funciones afines

Iniciamos la cuarta sesión planteándoles de manera individual la razón de ser número 2. Tras darles unos 10-15 minutos de trabajo individual les ponemos a trabajar en grupos de 3-4 personas para que sigan trabajando la razón de ser 1. Les damos otros 10 minutos para que rellenen una hoja con lo que han sabido resolver de la razón de ser 2 y les pedimos que nos la entreguen.

El resto de la clase lo dedicamos a describir los métodos para identificar cuando una relación entre dos magnitudes viene dada por medio de una función afín véase *Técnicas 2.1 y 2.2*.

Sesión 5: Funciones afines

Dedicaremos esta clase al estudio de los diferentes sistemas de representación de funciones afines. Comenzamos describiendo la *Técnica 2.3* acerca de la construcción de la expresión de una función en forma de tabla de valores. Después les mandamos hacer el **Problema 9**.

Seguimos la clase describiendo las *Técnicas 2.4 y 2.5* sobre las representación gráfica y algebraica de una función afín. Concluimos la sesión con el **Problema 12**.

Sesión 6: Funciones hiperbólicas

Iniciamos la segunda sesión planteándoles de manera individual la razón de ser número 3. Tras darles unos 10-15 minutos de trabajo individual les ponemos a trabajar en grupos de 3-4 personas para que sigan trabajando la razón de ser 1. Les damos otros 10 minutos para que rellenen una hoja con lo que han sabido resolver de la razón de ser 1 y les pedimos que nos la entreguen.

El resto de la clase lo dedicamos a describir los métodos para identificar cuando una relación entre dos magnitudes viene dada por medio de una función lineal véase *Técnicas 3.1 y 3.2*.

Sesión 7: Funciones hiperbólicas

Dedicaremos esta clase al estudio de los diferentes sistemas de representación de funciones lineales. Comenzamos describiendo la *Técnica 3.3* acerca de la construcción de la expresión de una función hiperbólica en forma de tabla de valores. Después les mandamos hacer el **Problema 8**.

Seguimos la clase describiendo las *Técnicas 3.4 y 3.5* sobre las representación gráfica y algebraica de una función. Concluimos la sesión con el **Problema 11**.

Sesión 8: Problemas de valor desconocido

Esta sesión estará dedicada a la descripción de las *Técnicas 1.6, 2.6 y 3.6* por medio de las cuales profundizaremos en la resolución de problemas de valor desconocido.

Realizaremos el **Problema 14** y **el Problema 15** incidiendo en el último apartado de ambos.

Sesión 9: Repaso

Sesión de repaso. Dedicamos esta sesión a repasar lo descrito en el tema profundizando en los aspectos que consideremos que no se han entendido bien. Podemos hacer los problemas que no hayamos hecho hasta el momento o incluso volver a plantear las razones de ser.

Sesión 10: Evaluación

Sesión de evaluación.

Sesión 11: Corrección

Corrección de la evaluación.

EVALUACIÓN

1. Prueba escrita

1. Describe la forma general f(x) de una función lineal, de una función afín y de una función hiperbólica. Pon un ejemplo de magnitudes relacionadas por medio de una función lineal y otro de magnitudes relacionadas por medio de una función hiperbólica. **(2 puntos)**

2. Resuelve las ecuaciones siguientes: **(2 puntos)**

   a) $x - 2 = 3$

   b) $3x - 5 = 4$

3. Sabemos que 4 kilos de manzanas cuestan 6 €. Conocido esto, responde a las preguntas siguientes: **(3 puntos)**

   a) ¿Qué magnitudes están involucradas? ¿Cuáles son sus unidades? (0,5 puntos)

   b) ¿Qué relación existe entre estas magnitudes? Rodea la respuesta correcta: (0,5 puntos)

      - Lineal
      - Afín
      - Hiperbólica

   c) Rellena la tabla siguiente: (1 punto)

4	6
8	

2	
	9

d) Dibuja los datos anteriores en una gráfica. (1 punto)

4. Sabemos que 8 caballos se acaban la comida de un establo en 9 días. Conocido esto, responde a las preguntas siguientes: **(3 puntos)**

e) ¿Qué magnitudes están involucradas? ¿Cuáles son sus unidades? (0,5 puntos)

f) ¿Qué relación existe entre estas magnitudes? Rodea la respuesta correcta: (0,5 puntos)

- Lineal
- Afín
- Hiperbólica

g) Expresa de forma algebraica la relación que hay entre las dos magnitudes. Para ello rellena la secuencia siguiente: (1 punto)

Tiempo que tardan 8 caballos = 9 días

Tiempo que tardan 4 caballos =

T(2) =

T(1) =

T(c) =

h) ¿Cuanto tiempo tardarán 6 caballos en comerse la comida del establo? (1 punto)

2. Aspectos del conocimiento que pretendemos evaluar

En esta sección nos centraremos en analizar una a una las preguntas de la prueba escrita describiendo el campo de problemas al que pertenece así como las técnicas y tecnologías que pretende evaluar. Señalaremos también cuales son las tareas principales y las auxiliares ara finalizar describiendo cuales son los estándares de aprendizaje de la LOMCE con los que se relaciona cada pregunta.

- *Pregunta 1*

Campo de problemas

Se trata de una cuestión acerca de las ideas de funciones lineales, afines e hiperbólicas.

Técnicas

Técnica 1.2, técnica 2.2 y técnica 3.2.

Tarea principal

Reconocimiento de la forma general de las funciones lineales, afines e hiperbólicas.

Tarea auxiliar

Saber crear ejemplos de pares de magnitudes relacionadas por medio de funciones lineales e hiperbólicas.

- *Pregunta 2*

Campo de problemas

Se trata de un problema de resolución de ecuaciones de primer grado.

Técnicas

Las técnicas que hasta ese momento se hayan visto acerca de la resolución de ecuaciones de primer grado.

Tecnologías

Justificación de que si hacemos lo mismo en ambos miembros de la ecuación la igualdad se sigue manteniendo.

Tarea principal

Resolución de ecuaciones de primer grado.

Tarea auxiliar

Manejo de operaciones elementales con números enteros, en particular, y con números racionales en general.

- *Pregunta 3*

Campo de problemas

Se trata de un problema con muchos apartados entre los cuales se trabaja el reconocimiento de magnitudes y unidades, las relaciones existentes entre las magnitudes y finalmente las representaciones en forma de tabla y gráfica de las funciones.

Técnicas

Técnicas 1.1, 1.3 y 1.4

Tarea principal

a) Reconocimiento de magnitudes.

b) Resolución de relaciones existentes entre magnitudes.

c) Representación de una función en forma de tabla de valores.

d) Representación de una función en forma gráfica.

Tarea auxiliar

Manejo de operaciones elementales con números racionales.

- *Pregunta 4*

Campo de problemas

Se trata de un problema con muchos apartados entre los cuales se trabaja el reconocimiento de magnitudes y unidades, las relaciones existentes entre las magnitudes y finalmente las representaciones en forma de tabla y gráfica de las funciones.

Técnicas

Técnicas 3.1 y 3.5.

Tarea principal

a) Reconocimiento de magnitudes.

b) Resolución de relaciones existentes entre magnitudes.

c) Representación de una función en forma algebraica.

d) Manejo de la forma algebraica de una función.

Tarea auxiliar

Manejo de operaciones elementales con números racionales.

Puesto que ya hemos clasificado los distintos ejercicios de la prueba identificando cuales eran las tares principales así como las auxiliares –ahora distinguiremos también entre específicas y generales- vamos a utilizar el modelo de los tercios descrito por Gairín, Muñoz y Oller (2012). En este modelo los autores determinan el valor que podemos restar a cada pregunta en función del tipo de error cometido.

Modelo de calificación

A continuación se presenta una rúbrica detallada para cada una de las preguntas de la prueba escrita utilizando el modelo de los tercios.

Notación: denotamos por TP a las tareas principales y por TAE y TAG a las tareas auxiliares, específicas y generales respectivamente.

Ejercicio 1 (2 puntos)	Penalización	Finaliza corrección
TP: Conocimiento claro de la forma general de las funciones lineales y afines	2/3	No
TAE: Conocimiento de ejemplos de funciones lineales	1/2	

Ejercicio 2 (2 puntos; 1 cada apartado)	Penalización	Finaliza corrección
TP: Resolución de ecuaciones	Total	No
TAG: Correcto manejo de las		

operaciones con números naturales y racionales	1/2	

Ejercicio 3 a) (0,5 puntos)	Penalización	Finaliza corrección
TP: Identificación de magnitudes y unidades	Total	Si

Ejercicio 3 b) (0,5 puntos)	Penalización	Finaliza corrección
TP: Identificación la relación existente entre dos magnitudes	Total	Si

Ejercicio 3 c) (1 punto)	Penalización	Finaliza corrección
TP: Manejo de la representación en forma de tabla de valores de una función	2/3	No
TAG: Realizar correctamente operaciones con números enteros y racionales	1/2	

Ejercicio 3 d) (1 punto)	Penalización	Finaliza corrección
TP: Manejo de la representación en forma de gráfica de una función	2/3	No
TAG: Conocimiento del sistema de coordenadas cartesianas	1/2	

Ejercicio 4 a) (0,5 puntos)	Penalización	Finaliza corrección
TP: Identificación de magnitudes y unidades	Total	Si

Ejercicio 4 b) (0,5 puntos)	Penalización	Finaliza corrección
TP: Identificación la relación existente entre dos magnitudes	Total	Si

Ejercicio 4 c) (1 punto)	Penalización	Finaliza corrección
TP: Manejo de la representación en forma algebraica de una función	2/3	No
TAG: Realizar correctamente operaciones con números enteros y racionales	1/2	

Ejercicio 4 d) (1 punto)	Penalización	Finaliza corrección
TP: Manejo de la representación en algebraica de una función	2/3	No
TAG: Realizar correctamente operaciones con números enteros y racionales	1/2	

REFERENCIAS

BOSCH, M. (1994). La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.

ESCOLANO, R. Y GARÍN, J. M. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. Revista SUMA 62 (pp. 35-48).

GAIRÍN, J. M. y MUÑOZ, J. M. (2005). El número racional en la práctica educativa: estudio de una propuesta editorial. Comunicación en grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico. *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática 2011, pp. 179-189.* Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

GAIRÍN J. M., MUÑOZ J. M., OLLER A. M. (2012). *Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas*. Investigación en Educación Matemática XVI. Jaén: SEIEM, pp. 261-274.

GAIRÍN J. M., y OLLER A. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 16(3), 317-338.

GARRIJO L. (2016). *Proporcionalidad aritmética directa: una propuesta didáctica para 1º de ESO*. Trabajo Fin de Máster; Máster Universitario en Profesorado de Matemáticas para E.S.O. y Bachillerato.

GUACANEME, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA*, 7(1), 3-42.

de MARCOS M. J. (2015). *Evaluación e innovación docente e investigación educativa en Matemáticas*. Máster Universitario en Profesorado de Matemáticas para E.S.O. y Bachillerato.

MARTÍNEZ, S., MUÑOZ, J. M. y OLLER, A. M. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVIII,* pp. 435-444. Salamanca: SEIEM.

MARTÍNEZ, S., MUÑOZ, J. M., OLLER, A. M. y PECHARROMÁN, C. (2015). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de la ESO. En consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (Ed.), Congreso: "Las nuevas metodologías de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas". (pp.459-470). Lugar: Academia de artillería de Segovia.

MONTERRUBIO, M. C. y ORTEGA, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M.J. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII,* pp. 37-53. Santander: SEIEM.

OLLER, A. M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid.

OTAL N. (2015). *Evaluación e innovación docente e investigación educativa en Matemáticas*. Máster Universitario en Profesorado de Matemáticas para E.S.O. y Bachillerato.

PINO, J. Y BLANCO, L. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63-88.

SOLANAS M. (2016). *Funciones: una propuesta didáctica para 4º de ESO – Enseñanzas académicas*. Trabajo Fin de Máster; Máster Universitario en Profesorado de Matemáticas para E.S.O. y Bachillerato.