Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Propuesta para la enseñanza de la integral definida

A teaching proposal for definite integral

Autor

Javier Mazo Olarte

Directora

Eva Cid Castro

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Noviembre de 2016

Índice

A. Introducción: Definición del objeto matemático

En este trabajo se presenta una propuesta didáctica orientada a la enseñanza de la integral definida en el segundo curso de Bachillerato en la asignatura de Matemáticas II (según establece el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, Boletín Oficial del Estado de 3 de enero de 2015). En la siguiente tabla (tabla 1) se resumen en términos de campos de problemas, técnicas y tecnologías los principales elementos en torno a los que se ha configurado la propuesta didáctica.

Campo de problemas	Técnicas	Tecnologías
-Cálculo de áreas limitadas por curvas -Aplicación a situaciones de la naturaleza y de la tecnología	-Aplicación de la integral de Riemann al cálculo de áreas bajo curvas -Aplicación del cálculo de primitivas y de la regla de Barrow al cálculo de áreas bajo curvas	-Integral de Riemann. Definición -Propiedades de la integral definida -Teorema fundamental del cálculo. Demostración. Regla de Barrow

Tabla 1. Resumen de los campos de problemas, técnicas generales y tecnologías asociadas a la propuesta de enseñanza de la integral definida en la asignatura de Matemáticas II de 2º de Bachillerato.

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje de la integral definida

En esta sección se presenta una breve panorámica del estado actual de la enseñanza-aprendizaje de la integral definida. Ésta se ha elaborado a partir de distintos puntos de vista. En primer lugar, se ha examinado el currículo oficial, no sólo teniendo en cuenta la delimitación de contenidos sino identificando aquellos aspectos didácticos que subyacen en dicha formulación de contenidos y criterios de evaluación. Por otro lado, se ha realizado un breve análisis de las propuestas didácticas de una pequeña muestra de libros de texto. Finalmente, se ha hecho referencia al modo en que las pruebas de acceso a la universidad, que hasta ahora se han realizado al finalizar el curso académico en que se introduce la integral definida, han podido condicionar la enseñanza y el aprendizaje de dicho objeto matemático.

En las versiones más recientes del currículo, desde el año 1992, la integral definida se asocia al problema del cálculo de áreas de regiones planas encerradas bajo funciones. Sin embargo, se han propuesto diferentes ordenaciones de los contenidos que desde el punto de vista didáctico pueden ser significativas. Tanto en la primera versión del currículo LOGSE, recogida en el Real Decreto 1179/1992 de 2 de octubre, como en el correspondiente a la legislación LOE (Real Decreto 1467/ 2007 de 2 de noviembre), se insta a introducir la integral definida a partir del concepto de área. Además, el cálculo de primitivas se sitúa después de esta introducción a la integral definida. En cambio, en la modificación del currículo LOGSE de 2001 (Real Decreto 938/2001, de 3 de agosto) y en el currículo LOMCE (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, Orden de 26 de mayo de 2016, de la Consejera de Educación, Cultura y Deporte de la Comunidad Autónoma de Aragón), se introduce en primer lugar la función primitiva y las técnicas elementales de integración y, posteriormente, la integral definida. En ambos casos, el cálculo de áreas de regiones planas se recoge en los contenidos como una aplicación; no se hace, por tanto, explícita la sugerencia de utilizar este campo de problemas como razón de ser para la introducción del objeto matemático.

Desde el punto de vista de los libros de texto, resultan interesantes los trabajos de Labraña (2001) y, por otra parte, de Contreras et al. (2010) y Ordóñez y Contreras (2011). En estos análisis se constata que, en la mayoría de casos, la integral definida se introduce después del cálculo de primitivas. De forma general, este objeto matemático se relaciona con el cálculo de áreas. Sin embargo, si se observan el tipo de ejercicios que proponen los textos, se infiere que la mayor parte del esfuerzo se dedica a la práctica de las técnicas de cálculo. Pese a que predominan los ejercicios de aplicación de la integral definida en un contexto geométrico, en la mayoría de ellos, la resolución requiere únicamente la aplicación directa de la técnica (Contreras et al. 2010).

Por otro lado, estos autores son críticos con el tratamiento que en los textos se da a otras aplicaciones de la integral. Labraña (2001) señala que, así como el uso de la integral definida para el cálculo de áreas se suele introducir con cierto grado de rigor, la extensión a otras aplicaciones (p. ej. cálculo de longitudes de curvas, problemas físicos) no queda suficientemente justificado. Por su parte, Contreras et al. (2010) reclaman una mayor presencia en los libros de texto del campo de problemas relacionados con la aplicación de la integral en la evaluación del resultado de un proceso de cambio[1]. A su juicio, esta aplicación no se justifica en los textos, de modo que implícitamente se asume que el alumno es capaz de extrapolar la utilización de la integral a otros contextos.

En la tabla 2 se recogen los principales aspectos de las propuestas didácticas relativas a la integral definida de una muestra de cinco libros de texto utilizados en el bachillerato desde el año 1999.

[1] Se ha mantenido la denominación de los autores (Contreras et al. 2010) que hace referencia al conjunto de problemas, generalmente provenientes de otros ámbitos de la ciencia, en los que se aplica la integral para analizar el cambio resultante en una magnitud resultante de un proceso del que se conoce la intensidad de la tasa de variación de dicha magnitud. Dentro de este campo de problemas, son frecuentes en los textos los relacionados con la cinemática.

Campo de problemas	Técnica	Tecnología
Cálculo de área de regiones planas (Razón de ser)		Definición formal de área (Pastor et al. 1999)
	Cálculo de integrales a partir de la fórmula del área de figuras conocidas (Colera et al. 2003, Escoredo et al. 2009) Cálculo de integrales a partir del límite de sucesiones (Colera et al. 2003, Escoredo et al. 2009)	Presentación formal de la integral de Riemann Algunas transposiciones didácticas relevantes: -particularización para funciones continuas (Pastor et al. 1999, Monteagudo y Paz 2003, Colera et al. 2003, Escoredo et al. 2009, Vizmanos et al. 2009) -sumas superiores e inferiores definidas a partir de concepto de máximo y mínimo de la función en un intervalo (Pastor et al. 1999, Colera et al. 2003, Escoredo et al. 2009) -No aparece la integrabilidad (Escoredo et al. 2009)
	Cálculo de integrales definidas de funciones continuas: -Cálculo de la función primitiva -Aplicación de la regla de Barrow Cálculo de integrales definidas de funciones discontinuas: -Descomposición del intervalo de integración en intervalos donde la función es continua -Aplicación de la técnica anterior	Condiciones suficientes para la integrabilidad (sin demostración p. ej. Pastor et al. 1999, Colera et al. 2003)
		Propiedades de la integral definida (generalmente sin demostración p. ej. Pastor et al. 1999, Monteagudo y Paz 2003, Colera et al. 2003, Escoredo et al. 2009)
		Teorema del valor medio (generalmente demostrado p. ej. Pastor et al. 1999, Colera et al. 2003, Escoredo et al. 2009)
		1er teorema fundamental del cálculo integral (generalmente demostrado p. ej. Pastor et al. 1999, Colera et al. 2003, Escoredo et al. 2009)

		Regla de Barrow (generalmente demostrada p. ej. Pastor et al. 1999, Colera et al. 2003, Escoredo et al. 2009)
Aplicación: cálculo de áreas	-Procedimiento para el cálculo de áreas de regiones definidas por curvas	
Otras aplicaciones: -Volumen cuerpos de revolución	-Fórmula dada (Pastor et al. 1999, Colera et al. 2003, Escoredo et al. 2009)	-Breve justificación (p. ej. a partir de las sumas de Riemann en Colera et al. 2003, Escoredo et al. 2009)
-Volúmenes de sólidos, longitudes de arcos (f(x) derivable)	- Fórmula dada (Vizmanos et al. 2009, Monteagudo y Paz 2003)	- Breve justificación a partir de las sumas de Riemann (Vizmanos et al. 2009)
-Problemas en el campo de la física: cinemática (Vizmanos et al. 2009, Monteagudo y Paz 2003), cálculo de fuerzas sobre superficies debidas a la presión hidrostática o cálculo de trabajo (Pastor et al. 1999)	-Fórmula dada (Pastor et al. 1999) -Formulación a partir de un elemento diferencial (Vizmanos et al. 2009)	-cinemática: a partir de sumas de Riemann (Vizmanos et al. 2009)

Tabla 2. Aspectos generales de las propuestas didácticas que presentan habitualmente los libros de texto.

En estas propuestas, es habitual que la unidad correspondiente comience con el planteamiento del problema del cálculo del área bajo una curva. En este punto, existen diferentes orientaciones en las propuestas en cuanto al tratamiento del concepto “área bajo una curva”. Según Labraña (2001) la mayoría de textos asumen que el objeto es intuitivo para los alumnos y, por tanto no proporcionan una formalización del concepto (p. ej. Colera et al. 2003, Escoredo et al. 2009, Vizmanos et al. 2009).

Una vez se ha contextualizado el problema, los textos se centran en la presentación de la integral definida. Ésta se realiza en un lenguaje formalista y se basa en una trasposición didáctica de la integral de Riemann. Ésta se define a partir de la introducción de las sumas superiores e inferiores (Pastor et al. 1999, Escoredo et al. 2009), o bien a partir de las sumas de Riemann (Vizmanos et al. 2009). Por otra parte, el desarrollo teórico se suele particularizar para funciones continuas. De esta forma, el discurso didáctico se simplifica, ya que se puede eludir la introducción de definiciones auxiliares, tales como las de supremo e ínfimo. Sin embargo, este enfoque relega, desde el punto de vista didáctico, a un segundo plano –y en ocasiones obvia– las cuestiones relacionadas con la integrabilidad de funciones. En estas propuestas, la integrabilidad de funciones continuas se afirma pero no se demuestra (p. ej. Vizmanos et al. 2009, Escoredo et al. 2009). La discusión acerca esta característica en otros tipos de funciones cuya aparición es frecuente en este nivel, tales como las funciones continuas a trozos, en los casos en que se aborda, se realiza a través de afirmaciones generales (Vizmanos et al. 2009) o por medio de la enunciación de algunas condiciones suficientes para la integrabilidad cuya demostración se omite (Pastor et al. 1999).

A partir de esta presentación de la integral definida, en algunos textos se proponen algunos ejercicios para el cálculo de integrales en los que se utilizan técnicas, o bien basadas en su identificación con el área de figuras planas conocidas y la aplicación de las propiedades de la integral, o bien en el cálculo de límites de sucesiones (p. ej. Colera et al. 2003). Sin embargo, Contreras et al. (2010) señalan que la presencia de ejercicios que refuercen la concepción de la integral definida como el límite de una sucesión que aproxima el área bajo la curva es escasa en los textos y generalmente queda reducida a la articulación del discurso formal que presenta la integral definida.

Finalmente, el discurso tecnológico concluye con la enunciación y demostración del primer teorema fundamental del cálculo integral (en cuya demostración se utiliza el teorema del valor medio integral) y de la Regla de Barrow. En este momento queda justificada la técnica principal de la unidad para el cálculo de integrales definidas de funciones continuas.

Una vez se han presentado esta técnica para el cálculo de integrales definidas, los textos retoman el problema del área y presentan distintos ejemplos. Además, se suelen incluir otras aplicaciones de la integral definida tales como el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución o en situaciones que provienen del campo de la física.

Por último, algunos investigadores como Turégano (1997) y Ordóñez y Contreras (2011) han destacado la influencia que ejercen en la enseñanza las pruebas de acceso a la universidad, ya que reconocen que, en muchas ocasiones, el último curso se convierte en una preparación para éstas. Así, Turégano (1997) reclama que los ejercicios relacionados con la integral se centran principalmente en aspectos procedimentales en lugar de conceptuales. En una línea crítica similar, Ordóñez y Contreras (2011), tras realizar un análisis cuantitativo de los tipos de ejercicios sobre integral definida que aparecen en los exámenes propuestos en Andalucía, concluyen que predominan –con más de un 80% de frecuencia relativa– aquellos en los que se solicita la aplicación directa de la integral.

Si se traslada el análisis a los exámenes propuestos en la comunidad de Aragón durante los años 2006 y 2016 se obtienen resultados similares. Aproximadamente, el 80% de los ejercicios que se relacionan con la integral definida son de aplicación directa y están planteados bien en un contexto geométrico o algebraico. En la siguiente tabla (tabla 3) se muestran dos ejemplos de ambos tipos de ejercicios. En general, los ejercicios propuestos en un entorno algebraico requieren el cálculo de la primitiva y la aplicación de la regla de Barrow y, por tanto, están únicamente centrados en la evaluación de aspectos procedimentales.

Ejemplo de ejercicio de aplicación directa planteado en un contexto geométrico
Calcule el área de la región encerrada entre las curvas $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 - x$ (junio de 2016).
Ejemplo de ejercicio de aplicación directa planteado en un contexto algebraico
Para la función $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, calcular $\int_2^3 f(x)dx$ (septiembre de 2011).

Tabla 3. Dos ejemplos de los tipos de ejercicios más frecuentes en las pruebas de acceso para la universidad celebradas en la comunidad de Aragón durante los años 2006-2016.

Así pues, se puede concluir que, de forma general, en la enseñanza actual la integral definida se introduce a partir del problema del cálculo del área de la región encerrada bajo una curva. Además, ya que este objeto se presenta una vez se han trabajado las reglas para el cálculo de primitivas, el cálculo de áreas se puede percibir como una aplicación de las técnicas previamente asimiladas. En esta adquisición de destrezas algebraicas –relacionadas con el correcto uso de las reglas para el cálculo de primitivas– se invierten gran parte de los esfuerzos (Llorens y Santoja 1997 y Ordóñez y Contreras 2011).

B.1 Efectos en el aprendizaje de la integral definida

Algunos autores han sido críticos con este método para la introducción de la integral definida en la enseñanza. El desequilibrio entre el significativo esfuerzo invertido en la asimilación de las técnicas para el cálculo de primitivas frente a la menor presencia de los aspectos conceptuales, es uno de los hechos que los investigadores han coincidido en señalar. Además, la presentación más frecuente de contenidos –cálculo de primitivas en primer lugar y, posteriormente, integral definida– se puede relacionar con algunos efectos negativos. Según Turégano (1998) y Llorens y Santoja (1997) esta introducción de contenidos, unida al énfasis en el cálculo de primitivas, puede llevar a que los alumnos consideren la integración únicamente como operación inversa a la derivación. Asimismo, la presentación formal de la integral definida particularizada para funciones continuas, puede contribuir a la configuración de esta concepción parcial acerca de la integral definida. Se pueden relacionar con estos hechos algunos errores tales como la confusión entre la integrabilidad y la existencia de primitivas, tal como señalan Labraña (2001) y Ordóñez (2011), y la aplicación errónea de la regla de Barrow. Un ejemplo de este último caso, lo ilustra la cuestión que planteó Mundy (1984, *apud.* Llorens y Santoja 1997) en la que se preguntaba qué había de incorrecto en el siguiente cálculo:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{1} x^{-2} dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$$

En la réplica del cuestionario que Llorens y Santoja (1997) realizaron a 198 alumnos universitarios cursando la asignatura de Cálculo, se obtuvo alrededor de un 20% de éxito. En este sentido, Labraña (2001) considera escaso el énfasis que se realiza en señalar las limitaciones del cálculo de primitivas.

En relación con esta presentación de la integral definida, en que la visión de la integral como el límite de una aproximación se suele introducir exclusivamente dentro de su presentación formal, algunos autores han afirmado que los alumnos no la relacionan con un proceso de convergencia. Este hecho, según Llorens y Santoja (1997) puede constituir un obstáculo didáctico en el momento de abordar el estudio posterior de las integrales impropias.

Por otro lado, pese a que los alumnos asocian la integral definida al cálculo de áreas (Ordóñez 2011), su práctica se centra casi exclusivamente en métodos algebraicos. Algunos autores han señalado (Llorens y Santoja 1997, Labraña 2001) o mostrado experimentalmente Ordóñez y Contreras (2011) que en las decisiones que los alumnos adoptan acerca del resultado de un ejercicio tienen prevalencia los cálculos que los razonamientos derivados de una interpretación gráfica. La integral definida, propuesta por Mundy (1984, *apud.* Llorens y Santoja 1997), $\int_{-3}^{3}|x+2|dx$, se puede utilizar para diagnosticar este hecho. En el experimento original el 95% de los estudiantes respondió incorrectamente a la pregunta.

Algunos autores han relacionado (p. ej. Labraña 2001, Ordóñez y Contreras 2011) algunos resultados negativos del aprendizaje actual en torno a la integral definida con la prácticamente exclusiva asociación de este objeto matemático al cálculo de áreas. De esta forma, es posible que los alumnos sólo reconozcan la aplicación de la integral definida al cálculo del área bajo la curva (Berry y Nyman 2003). Asimismo, se reconocen las dificultades, de forma inversa, para aplicar la integral definida en otros contextos (Artigue 1991, *apud.* Muñoz 2000), Tall (1991), Labraña 2001). En los trabajos más recientes de Camacho et al. (2008) y Ordóñez (2011) se muestran evidencias empíricas de la dificultad de los alumnos para utilizar e interpretar la integral definida más allá del cálculo de áreas. Ordóñez y Contreras (2011) señalan que la ausencia –o presencia residual–, tanto en los libros de texto como en las pruebas de acceso a la universidad, de campos de problemas en los que la integral se relacione con la noción de acumulación o con la evaluación de un proceso de cambio puede ser uno de los orígenes de este hecho.

C. Conocimientos previos

En esta sección se realiza una recapitulación de los conocimientos y competencias que se consideran necesarios para la implementación en el aula de la propuesta didáctica que aquí se plantea. En la tabla 4 se recogen y organizan por bloques de contenidos, haciendo referencia al lugar que ocupan en el currículo.

Bloque de contenidos	Conocimientos y competencias (Lugar en el currículo)
Funciones	-propiedades: continuidad, monotonía y acotación (1º y 2º Bach.)
	-representación gráfica de funciones elementales (1º y 2º Bach.)
	-uso de las funciones para analizar, describir, interpretar y resolver fenómenos naturales, económicos y sociales (1º y 2º Bach.)
Límites	-concepto de límite de una función (1º y 2º Bach.)
Derivada	-concepto de tasa de variación media e instantánea (1º y 2º Bach.)
	-definición de derivada de una función en un punto. Función derivada (1º y 2º Bach.)
	-significado geométrico de la derivada. Aplicación de la derivada a otros ámbitos del saber (1º y 2º Bach.)
	-derivada de funciones elementales. Dominio de las técnicas de derivación (1º y 2º Bach.)
Sucesiones	-uso del lenguaje algebraico para expresar la ley de formación de sucesiones (3º ESO) -sucesiones de números reales: monotonía y acotación (1º Bach.) -límite de sucesiones (1º Bach.)
Área	-noción de área -técnicas para el cálculo de áreas de figuras planas

Tabla 4. Relación de conocimientos previos necesarios para la introducción de la integral definida según la propuesta didáctica.

Una buena parte de los contenidos la forman los relacionados con el análisis que se imparte en los dos cursos de Bachillerato. Es preciso que los alumnos conozcan algunas propiedades como la continuidad, monotonía o acotación. Además es, por una parte, necesario que posean cierta destreza en la representación de funciones elementales y, por otra parte, deseable que sean competentes en la utilización de las funciones para abordar o analizar situaciones problemáticas.

Se considera importante que el alumno haya adquirido el concepto de límite y la forma en que se ha definido formalmente. Por último, en relación a la introducción del teorema fundamental de cálculo, es necesario cierto dominio de los conceptos de tasa de variación media e instantánea de una función y de derivada. Dado que estos contenidos del bloque de análisis se han abordado recientemente, se considera que el proceso de evaluación llevado a cabo durante el curso es suficiente para conocer el nivel general del grupo.

En lo que atañe a los contenidos del bloque de geometría, se considera suficiente que el alumno posea una noción de área y que sea capaz de aplicar las técnicas básicas para el cálculo de áreas de figuras geométricas planas básicas. Se ha asumido que estos contenidos se han trabajado en los cursos tempranos de la educación secundaria. No obstante, en la primera actividad dedicada al repaso de algunos contenidos se incluyen algunos ejercicios en los que se pueden aplicar algunas técnicas para el cálculo de áreas.

Por último, los contenidos relacionados con las sucesiones se consideran necesarios para abordar la introducción a la integral definida. Principalmente, se requiere cierta destreza en el manejo algebraico de sucesiones, así como conocer algunos conceptos como monotonía y acotación. Dado que estos contenidos se abordan en el tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria y que su presencia en el Bachillerato es escasa, se ha considerado conveniente la realización de una actividad inicial que tenga por objetivo retomar los aspectos principales de estos contenidos y poder corregir algunas concepciones erróneas.

C.1 Actividad inicial

Se propone realizar una actividad inicial que consistirá en la realización, por parejas o grupos, de los ejercicios que se muestran en la tabla 5. La sesión tiene dos principales objetivos, por un lado se pretende realizar un diagnóstico general acerca de los conocimientos de los alumnos acerca de las sucesiones y, por otro lado, revisar los conceptos y técnicas que se consideran más relevantes desde el punto de vista de esta propuesta para la enseñanza de la integral.

AI-1. Ejercicio 1

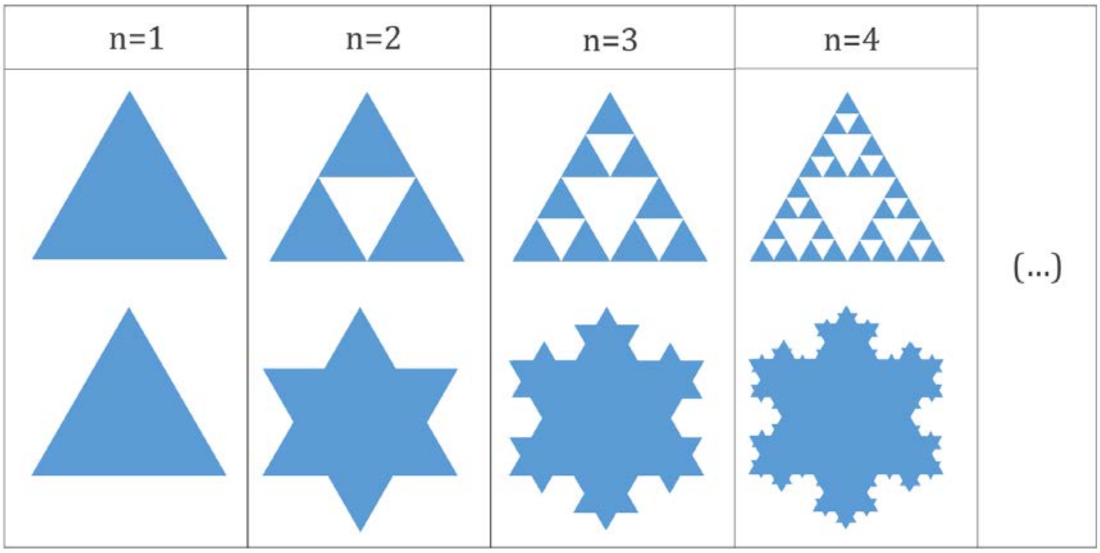
Al dejar caer –en dirección vertical– una pelota desde una altura H el rebote hace que siempre alcance una altura máxima de $H/2$.

i) Imagina ahora que esta pelota de deja caer y rebotar libremente. Calcula la distancia que recorre la pelota hasta que se produce el primer, segundo y tercer impacto con el suelo. ¿Puedes obtener una expresión algebraica que permita calcular dicha distancia en función del número n de impactos?

ii) Si se prolonga indefinidamente el proceso, ¿qué distancia recorre la pelota?, ¿cuál es el número de rebotes?

AI-2. Ejercicio 2

Observa las dos familias de figuras geométricas que se muestran en el dibujo. En cada una de ellas, las sucesivas figuras se crean mediante una ley de recurrencia de tal forma que se pueden ordenar según el número n como se indica en el gráfico.



Encuentra dicha ley y obtén una expresión general para el cálculo del área de la región coloreada en azul de ambas familias de figuras en función de dicho número n. ¿Qué ocurre con el área de las figuras que resultan de la aplicación de sendas leyes de formación un número infinito de veces? ¿Y con el perímetro[2]?

Tabla 5. Ejercicios propuestos para la actividad inicial previa a la introducción de la unidad didáctica acerca de la integral definida.

El primer ejercicio fue utilizado por Garbin y Azcárate (2001) para el análisis acerca de las concepciones de los alumnos acerca del infinito. En el segundo, se propone el uso de la geometría fractal para combinar la revisión de los contenidos relativos a sucesiones con la práctica de algunas técnicas para el cálculo de área. Los ejemplos que se han escogido –triángulo de Sierpinski y curva de copo de nieve de Koch– han sido ya

[2] Se debe contabilizar tanto el perímetro interior como el exterior en la primera familia de figuras.

propuestos por Figueiras et al. (2000) o Moreno-Marín (2002) para el tratamiento de los contenidos relacionados con la Geometría y las sucesiones en secundaria y bachillerato. Los objetivos de estos ejercicios son los siguientes:

- Evaluar y practicar la destreza de los alumnos en la utilización del lenguaje algebraico para expresar leyes de recurrencia
- Revisión de los conceptos monotonía de una sucesión y límite de una sucesión
- Introducción de la suma de infinitos términos. Algunos investigadores (Labraña 2001, Ordóñez y Contreras 2006) han señalado un obstáculo epistemológico en el aprendizaje de la integral definida relacionado con la suma de infinitos términos. La observación experimental realizada de Orton (1983, *apud.* Contreras et al. 2010) de que los alumnos no reconocen que a través del proceso de aproximación se pueda calcular el valor exacto del área o la integral, se puede relacionar con el mencionado obstáculo.

D. Sobre las razones de ser de la integral definida

D.1 Razones de ser históricas

Se realiza en esta sección un breve repaso acerca de los campos de problemas relacionados con el desarrollo, hasta nuestros días, de la integral definida. En la tesis doctoral de Ordóñez (2011) se puede encontrar un análisis detallado de la evolución histórica de los significados asociados a la integral definida.

En la cultura griega, la existencia de inconmensurables constituía un obstáculo para la unión entre número y geometría. Eran conscientes de que ciertas magnitudes no pueden expresarse en términos de una cantidad entera de veces una unidad básica. De este modo, el propósito principal era el de establecer razones entre longitudes, áreas y volúmenes de unos figuras y cuerpos con otros (rectificación, cuadratura y cubatura).

Eudoxo (s. IV a. C.), que había formulado la teoría griega de proporciones para razones conmensurables e inconmensurables, propuso el método de exhausción para hallar áreas y volúmenes de figuras curvilíneas. A partir de éste principio, demostró, por ejemplo, que la relación entre las áreas de dos círculos es igual al cuadrado de la relación de sus radios, que la relación entre los volúmenes de dos esferas se corresponde con el cubo de la razón de sus radios y que es un tercio la relación entre el volumen de una pirámide y el de un prisma con igual base y altura.

Arquímedes (s. III a. C.) utilizó el método de exhausción para el cálculo de áreas y volúmenes. Por ejemplo, obtuvo una aproximación del número π y calculó el volumen de esferas y paraboloides de revolución y el área bajo un segmento parabólico. En el ámbito de la mecánica, obtuvo la posición del centro de gravedad de algunas figuras.

En la baja edad media, en torno al estudio de la variación temporal de las magnitudes físicas se realizan algunos desarrollos que se pueden relacionar con el cálculo integral. Oresme (1323-1382) aplica la representación gráfica estos los problemas en los que interviene la variación temporal. Con esta metodología, aborda el problema del movimiento uniforme y uniformemente acelerado. Según su representación, la velocidad de un movimiento uniforme queda representada por un segmento horizontal cuya altura indica la intensidad de dicha magnitud. En este entorno de representación, llegó a la conclusión que el desplazamiento de un móvil que se mueve con aceleración uniforme desde el reposo hasta una cierta velocidad es equivalente al efectuado a una velocidad constante igual a la mitad de dicha velocidad máxima. Dado que la justificación de este resultado se basó en la congruencia del triángulo y rectángulo asociados a cada uno de los movimientos, se puede considerar, según Boyer (1959), la primera asociación del área bajo una curva con el resultado del cambio de una magnitud física –en este caso, el desplazamiento–. Por su parte, Suiseth y Hentisbery (s. XIV) habían demostrado de forma dialéctica este hecho, utilizando series infinitas.

En el renacimiento, la difusión de la obra traducida de Arquímedes tuvo una importante influencia. A raíz de ésta, por ejemplo, Stevin (1548-1620) utilizó el método de exhausción mediante la aproximación mediante paralelogramos inscritos para calcular el centro de gravedad de triángulos y figuras curvilíneas. Además, proporcionó una justificación al problema de la presión hidrostática media ejercida en una pared cuadrada basada en la sucesiva división, en dirección vertical, del cuadrado en rectángulos cada vez más pequeños.

En el siglo XVII, una vez que se adoptó el concepto de función, la creación y desarrollo del cálculo estuvo motivada por dar repuesta a los problemas que, si bien ya habían interesado en la cultura griega, suscitaba en ese momento la labor científica. En relación al cálculo, Kline (2012) identifica cuatro grandes familias de problemas: estudio del movimiento –interesaba tanto la determinación de velocidades y aceleraciones a partir de un desplazamiento, como el problema inverso–, determinación de tangentes de curvas, cálculo de máximos y mínimos y el relacionado con el cálculo de longitudes de curvas, áreas, volúmenes, centros de gravedad y fuerzas gravitatorias entre cuerpos.

En este periodo, la actividad matemática se caracteriza por el intento de liberar el método de exhausción mediante la utilización de distintos procedimientos intuitivos. Existe disparidad –e incluso ambigüedad– de visiones en la concepción de los infinitésimos. Cavalieri (1598-1647), en su trabajo sobre cuadraturas, y Galileo (1564-1642), en el análisis del movimiento uniformemente acelerado, utilizan los indivisibles. Desde este punto de vista, una superficie plana se considera compuesta por infinitas rectas. Roberval (1602-1675), en cambio, consideraba que la superficie está compuesta por una infinidad de superficies.

Uno de los resultados de la primera parte del siglo XVII, obtenido mediante distintos métodos por Cavalieri, Torricelli y Roberval, es el equivalente en notación actual a $\int_0^a x^n \cdot dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$, para n racional distinto de -1.

A partir del método de los infinitésimos, Fermat (1601-1665) lograr cuadrar, usando una progresión geométrica, parábolas e hipérbolas. Planteó estos problemas de cuadratura en un entorno algebraico, lo que le permitió dotar de mayor generalidad a sus resultados.

Barrow (1630-1677), siguiendo la tradición euclidiana, abordó el problema de la cuadratura en un entorno puramente geométrico. A él se atribuye el reconocimiento del carácter inverso del problema de las tangentes y la cuadratura.

Se puede considerar que este proceso de origen y primer desarrollo del cálculo culmina con los trabajos de Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716) (Kline 2012). El primero, advirtió el carácter inverso del problema de la derivación e integración. Además propuso un método general para el cálculo de áreas basado en realizar en sentido contrario las operaciones de diferenciación. Aunque había partido del uso de los infinitesimales, Newton los optó por la descripción de las figuras a partir del movimiento continuo. Así, una superficie se engendra por el movimiento continuo de una recta. Desde este punto de vista, utilizó el término fluxión para designar la razón primera de los incrementos emergentes.

Por su parte, de forma paralela, Leibniz establece que la integración es el proceso inverso a la diferenciación. Aunque el carácter inverso de los problemas del cálculo del área y determinación de la tangente había sido señalado por Barrow y Newton, Leibniz es el primero que la expresa como una relación entre sumación y diferenciación (Kline 2012).

Por último, en el siglo XIX, una de las principales preocupaciones de los matemáticos consistía en dotar de rigor a los desarrollos realizados en las distintas ramas del análisis. Hasta el momento, no habían sido rigurosamente definidas las nociones de integral y derivada. Cauchy (1789-1857) proporciona la primera definición precisa de integral definida a partir del significado otorgado por Leibniz de suma y utilizando el concepto de límite. La integral definida se asocia al límite de la suma cuando la longitud de los subintervalos tiende a cero. Pudo demostrar la existencia de dicho límite para funciones continuas. En ese momento, la integral definida se extiende a funciones continuas a trozos o con un número finito de puntos de discontinuidad. Por su parte, Riemann (1826-1866) desarrolló una teoría más amplia de integración para poder incorporar funciones con infinidad de discontinuidades.

Así pues, algunos autores (Labraña 2001, Ordóñez 2011) coinciden en señalar tres principales situaciones que dieron origen a la integral definida. En primer lugar, reconocen el cálculo de longitudes de curvas, áreas y volúmenes, en general ligado a una percepción estática. Dentro del ámbito científico, se pueden encontrar problemas de esta naturaleza en el cálculo de centros de gravedad, fuerzas gravitacionales o fuerzas hidrostáticas. Según Labraña (2001) esta problemática conecta –una vez superadas las barreras epistemológicas necesarias– con la idea de suma de pequeñas cantidades.

Por otra parte, señalan los problemas relacionados con el análisis de la variación en el tiempo de la intensidad de las magnitudes físicas. Ordóñez (2011) señala que, precisamente la idea de tiempo puede producir un acercamiento intuitivo a la noción de continuidad. Asimismo, este campo de problema, según Labraña (2001), permite conectar la idea de acumulación, o de resultado de un proceso de cambio en el tiempo, con el proceso de cálculo inverso de derivadas.

Por último, reconocen una última la motivación relacionada con la necesidad de dotar de rigor y fundamentación teórica a los desarrollos efectuados en el ámbito del cálculo.

D.2 Razón de ser en la propuesta didáctica

Los problemas que constituyen la razón de ser de la propuesta didáctica pertenecen a los dos primeros campos de problemas o situaciones que a través de la historia de las matemáticas motivaron el origen y el desarrollo de la integral definida. En primer lugar, el cálculo de áreas de figuras curvilíneas se utilizará como situación problemática que induzca la aparición de la integral definida. En segundo término, se utilizará un problema relacionado con el análisis de los procesos dinámicos que permita realizar las primeras indagaciones acerca del carácter inverso de la integración y derivación.

En la elaboración de la propuesta didáctica se han tenido en cuenta las siguientes recomendaciones realizadas por los investigadores:

- Turégano (1992) y Azcárate (1996) proponen introducir la integral definida independientemente de la derivada, previamente al cálculo de primitivas.
- Labraña (2001) sugiere ampliar a través de la variedad de campos de problemas la fenomenología de la integral en las propuestas didácticas.

> Ordóñez y Contreras (2011) reclaman una mayor presencia del campo de problemas relacionado con el análisis de los procesos de cambio en los textos actuales. La utilización y el reconocimiento en la secuencia didáctica como campos de problemas específicos de estas situaciones pueden contribuir a ampliar el significado de los alumnos del objeto matemático así como puede aumentar su nivel de competencia para aplicar la integral en distintos contextos.

Es habitual, cuando se introducen situaciones para la aplicación de la integral dentro del campo del análisis del resultado de un proceso de cambio, utilizar problemas relacionados con la cinemática. Sin embargo, algunos autores han señalado (Azcárate 1990, *apud.* Labraña 2001) o mostrado empíricamente (Ordóñez 2011) cierto obstáculo didáctico asociado a la propensión de los alumnos a utilizar las relaciones que conocen del movimiento uniforme y que han trabajado durante su instrucción anterior con cierta frecuencia. De este modo, se ha optado por introducir primero, dentro de este campo, problemas acerca del llenado de depósitos.

En el primer problema que se ha utilizado como razón de ser se propone una situación en la que se necesita calcular el área bajo una parábola (tabla 6). Se tratará de que los alumnos propongan algún método para obtener una aproximación de dicha magnitud. El ejercicio continúa con la secuencia de preguntas cuyo objetivo es hacer emerger los principales elementos que configuran la definición de la integral de Riemann. Dicha actividad posterior, se detalla en la sección dedicada a la praxeología de la propuesta.

P-RS1. En algunos edificios singulares se pueden encontrar elementos constructivos, tales como cubiertas o paños de fachada, con formas especiales. En concreto, este ejercicio se centra en fachadas con forma de parábola. En la puedes ver algunos ejemplos.

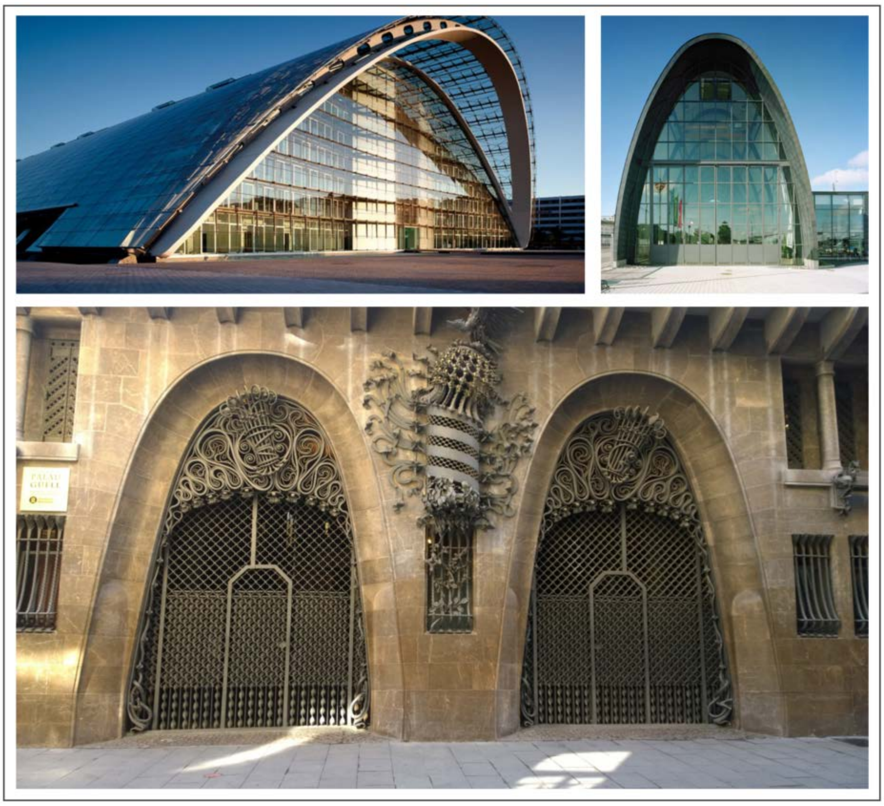


Fig. Ejemplos de edificios con fachadas con forma parabólica. a) Palacio Güell (A. Gaudí, Barcelona), b) Edificio Berliner-Bogen (A. Maul, M. Horn / BRT Architekten, Hamburgo). c) Centro de Barcos de Madera (Architects Lahdelma and Mahlamaki, Kotka, Finlandia)

Una de las medidas que desde el punto de vista práctico interesa conocer es el área de estos elementos. Con ella se pueden relacionar muchos aspectos que afectan al proceso de diseño y construcción (cantidad de material que se necesita, peso del elemento, fuerza que ejerce el viento sobre el mismo).

i) ¿Recuerdas alguna fórmula que permita hallar el área de estas figuras del plano? En el caso contrario, idea un procedimiento que, al menos, permita realizar una evaluación aproximada del área. Puedes aplicarlo al caso concreto en el que la altura de la fachada es 20 m y su anchura máxima es de 60 m.

Tabla 6. Problema-razón de ser relacionado con el cálculo de superficies de figuras planas.

El segundo problema planteado como razón de ser (tabla 7), pretende que los alumnos realicen, a través del análisis de una situación de variación en el tiempo, unas primeras indagaciones acerca del carácter inverso de la derivación e integración. Para evocar las ideas de tasa media en instantánea de cambio, así como la de acumulación, se ha optado por la selección de un sistema físico sencillo, como lo es un depósito que se llena a diferentes ritmos.

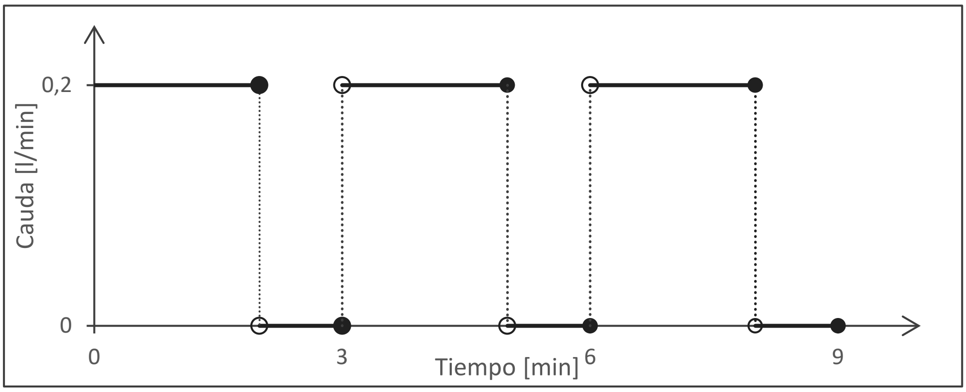
P-RS2.A. El recipiente del problema CP-1.10 se encuentra inicialmente vacío. ¿Cuál será la evolución temporal del volumen contenido si se llena de las siguientes formas? Represéntalo en forma de función. ¿En qué momento rebosará?

i) Con un caudal fijo $q = \frac{1}{5} l/min$

ii) Con un caudal variable ($q(t)$, expresado el litros por minuto) con el tiempo expresado en minutos, cuya evolución describe la siguiente función:

$$q(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{t}{20} & t < 4\,min \\ 0 & t \geq 4min \end{cases}$$

iii) Con el caudal presenta una evolución periódica que se repite cada 3 minutos



iv) Con el caudal cuya evolución temporal describe la siguiente función:

$$q(t) = \frac{1+sen(\pi \cdot t)}{8}\ l/min$$

B. En una nueva situación se desconoce el caudal que entra pero, ya que se dispone de cronómetro y el recipiente está graduado, se puede medir la evolución temporal del volumen de líquido. En este caso, la evolución del volumen de líquido con el tiempo se corresponde con la siguiente función $V(t)$.

$$V(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{10} & 0 \leq t < 2 \\ \frac{2}{5} & 2 \leq t < 4 \\ \frac{2}{5} + \frac{(t-4)^2}{10} & 4 \leq t < 6 \\ \frac{4}{5} & 6 \leq t \end{cases}$$

i) ¿Cuál es el caudal promedio de líquido que entra entre los instantes $t = 0\ min$ y $t = 2\ min$? ¿Y entre $t = 6\ min$ y $t = 8\ min$?

ii) A partir del procedimiento de cálculo que has utilizado en el apartado anterior, ¿puedes realizar una aproximación al caudal que entra en el instante $t = 1\ min$? ¿Cuán precisa puede llegar a ser? ¿Es posible, entonces, calcular el valor exacto? ¿Ocurre lo mismo en instante $t = 2\ min$? Completa la siguiente tabla y representa los valores de la derivada calculados.

t	$q(t)$
0	
a $0 \leq a < 2$	
2	
a $2 \leq a < 4$	
4	
a $4 \leq a < 6$	

iii) Compara el procedimiento de cálculo que has utilizado en el apartado anterior para evaluar el valor exacto del caudal con el empleado en la primera parte del problema. ¿Qué caracteriza a los puntos en los que no se puede calcular el caudal instantáneo?

iv) Aprovecha el resultado anterior para calcular la evolución del volumen en el caso A.iv).

Tabla 7. Problema-razón de ser relacionado con el análisis del resultado de procesos de cambio.

D.3 Metodología de implementación en el aula

La metodología de implementación en el aula persigue el objetivo de que a través de los ejercicios o problemas que se plantean surjan los elementos que componen los contenidos de la unidad. En general, los ejercicios están formulados de manera que puedan realizar la función de guía que encauce las reflexiones de los alumnos hacia dichos conceptos.

Se propone la realización de los problemas o ejercicios planteados para las distintas sesiones[3] en grupos o parejas. Las primeras actividades, destinadas al estudio del proceso de convergencia de las sumas superiores e inferiores en la integral definida, se apoyarán en el uso de la herramienta informática Geogebra.

[3] En la tabla 24, de la sección E.3, donde se recoge la planificación de las sesiones, se las actividades de este tipo.

E. Praxeología: campos de problemas, técnicas y tecnologías

En esta sección se realiza la exposición de los elementos que caracterizan la praxeología de la propuesta didáctica. Se ha optado por respetar el orden de presentación de dichos contenidos en la secuencia didáctica. De esta forma, las técnicas y tecnologías se articulan en torno a los campos de problemas con los que se proponen. Con el objetivo de clarificar estos aspectos, que al ser presentados dentro de un discurso didáctico han podido dispersarse, en la tabla 24 del final de esta sección se reúnen y resumen los principales aspectos de la secuencia didáctica.

E.1 Primer campo de problemas: cálculo de áreas y volúmenes

El primer campo de problemas está relacionado con la aplicación de la integral para el cálculo de magnitudes estáticas. Se parte del problema del cálculo del área de regiones encerradas por curvas y, posteriormente, se amplían las situaciones a otras que se pueden englobar dentro de este campo: cálculo de volúmenes y, dentro de las aplicaciones del ámbito científico, el cálculo de fuerzas resultantes de la presión hidrostática.

No se ha incluido la aplicación del cálculo de longitudes de curvas, en cuya justificación podrían invertirse más tiempo del disponible. Asimismo, dentro de las aplicaciones de la integral en el ámbito científico, se ha evitado utilizar problemas que hagan referencia a magnitudes físicas sobre los cuales los alumnos puedan carecer de intuiciones arraigadas. Así, el problema del cálculo de centro de gravedad, que implica la comprensión de la noción de momento estático no se incluirá en el bloque de problemas principales.

La primera actividad, dentro de este campo de problemas, parte de la primera razón de ser presentada en la sección anterior. En ella se recurrirá al uso de herramientas informáticas. El principal objetivo es que a través del programa Geogebra puedan visualizar las sumas superiores, inferiores y el proceso de convergencia hasta el área. El enunciado de la actividad se recoge en la tabla 8.

P-RS.1-CP.1.1.a[4] En algunos edificios singulares se pueden encontrar elementos constructivos, tales como cubiertas o paños de fachada, con formas especiales. En concreto, este ejercicio se centra en fachadas con forma de parábola. i) Idea un procedimiento que permita realizar una evaluación aproximada del área. Puedes aplicarlo al caso concreto en el que la altura de la fachada es 20 m y su anchura máxima es de 60 m. ii) ¿Puedes de alguna forma cuantificar la calidad de tu aproximación? Una manera de obtener información acerca de la aproximación asociada a cada partición es conseguir acotar el resultado que se busca. Propón un procedimiento que permita evaluar este aspecto. En Geogebra puedes visualizar el resultado de las sumas superiores e inferiores. Contesta a las siguientes cuestiones: i) ¿Qué ocurre con las sumas superiores e inferiores cuando se añaden puntos a una partición? ¿Puedes dar un razonamiento? ii) ¿Qué relación encuentras entre la suma superior y la suma inferior asociada a dos particiones cualesquiera? ¿Qué relación existe con el área que se pretende calcular?

Tabla 8. Primera parte del problema CP-1.1.

Se procurará que los alumnos aborden el problema usando las herramientas analíticas que conocen (ecuación de la parábola, representación gráfica). Dentro de este entorno, la cuestión tiene por objetivo que surja la idea de obtener una estimación del área de la parábola a partir de la división de la región en un cierto número de partes cuya área se puede aproximar mejor a la de elementos ya conocidos. Asimismo, se les indicará que, ya que se va a trabajar con ordenador, es deseable que el método de obtener una aproximación se pueda sistematizar de tal manera que se puedan obtener aproximaciones tan precisas como se requiera. En este sentido, si los alumnos poseen cierta destreza en el uso de hojas de cálculo, se puede proponer que implementen el procedimiento con el objetivo de obtener un valor numérico de la estimación. Aunque ésta es una situación interesante, pues acerca a los alumnos al contexto de la integración numérica, no se considera prioritaria, de modo que no se invertirá mucho tiempo en esta parte de la actividad.

Así, en torno a la problemática que plantea la cuestión (i) del problema (tabla 8) puede surgir la estrategia de dividir la región de tal manera que se pueda obtener una

[4] Se ha utilizado la siguiente nomenclatura para ordenar los problemas o ejercicios. Se particulariza la aclaración para el ejemplo al que hace referencia:
P-RS1-CP.1.1.a: Problema, primero dentro de la categoría "razón de ser" (RS) y ordenado como 1.a dentro del conjunto global correspondiente al primer campo de problemas (CP.1).

aproximación sencilla de cada región. Una vez que se haya generalizado la idea, se puede institucionalizar el concepto de partición (tabla 8). Seguidamente, se introducen las sumas superiores e inferiores justificadas, en primera instancia, como una estrategia para poder estimar la calidad de la aproximación (cuestión ii, tabla 8). Su función dentro del discurso deductivo-formal, se trata de aclarar con la respuesta a las preguntas (i) y (ii) de la segunda parte del problema (tabla 10).

Las tablas en las que se refleja la institucionalización de los contenidos están enunciadas en un lenguaje formal que en clase deberá ser adaptado hasta que resulte asequible para los alumnos. En esta primera actividad, se puede utilizar una definición preliminar de las sumas superiores e inferiores a partir de los valores máximos y mínimos de la función. Más adelante, a través de algunos ejemplos de funciones discontinuas se puede justificar la necesidad de recurrir a las cotas superiores mínimas e inferiores máximas.

Definición 1. Partición

Dado el intervalo $[a, b]$ (siendo $a < b$) se denomina partición (P) a toda colección finita de puntos de los cuales uno es a y otro es b.

Así, dicha colección de puntos se puede expresar de la siguiente forma

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

De tal manera que los puntos $x_i$satisfagan las siguientes relaciones:

$$a = x_0 < x_1 \ldots x_{n-1} < x_n = b$$

Definición 2. Sumas superiores e inferiores

Supongamos que la función f está acotada en el intervalo $[a, b]$ y $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una partición de dicho intervalo. Se definen m_i y M_i, respectivamente, como la máxima cota inferior (ínfimo) y la mínima cota superior (supremo) de la función f en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ asociado a la partición P. O, expresado de otra manera:

$m_i = inf\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$

$M_i = sup\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$

La suma inferior de f para P de la siguiente forma

$$L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (\, t_i - t_{i-1})$$

Análogamente, la suma superior se define:

$$U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (\, t_i - t_{i-1})$$

Tabla 9. Institucionalizaciones asociadas a la primera parte del problema CP-1 (P-RS1-CP.1.a).

En la segunda parte del problema (tabla 10) tiene como propósito que los alumnos extraigan conclusiones acerca de las propiedades de las particiones que articulan permiten articular el discurso formal que caracteriza la integral definida.

$$M \cdot (b-a) \geq U(P,f) \geq infU(P,f) \geq Área \geq supL(P,f) \geq L(P,f) \geq m \cdot (b-a)$$

(1)

En la tabla 11 se recoge la institucionalización de estas propiedades. Se tratará de que los alumnos razonen acerca de la justificación de estas propiedades.

CP.1.1.b

En Geogebra puedes visualizar el resultado de las sumas superiores e inferiores. Contesta a las siguientes cuestiones:

i) ¿Qué ocurre con las sumas superiores e inferiores cuando se añaden puntos a una partición? ¿Puedes dar un razonamiento?

ii) ¿Qué relación encuentras entre la suma superior y la suma inferior asociada a dos particiones cualesquiera? ¿Qué relación existe con el área que se pretende calcular?

Como has observado, el comando "sumasuperior" de Geogebra calcula dicha suma asociada a una partición cuyos intervalos poseen una extensión uniforme. Dentro de este tipo de particiones, vamos a ocuparnos únicamente de las que se obtienen dividiendo en dos cada intervalo de la partición anterior ($n=2^p$, p=0,1,2,..).

$$P_0 = \{0, a\}$$

$$P_1 = \left\{0, \frac{a}{2}, a\right\}$$

$$P_2 = \left\{0, \frac{a}{4}, \frac{a}{2}, \frac{3 \cdot a}{4}, a\right\}$$

$$P_p = \left\{0, \frac{a}{2^p}, \frac{2 \cdot a}{2^p}, \dots, \frac{i \cdot a}{2^p}, \dots, \frac{(2^n-1) \cdot a}{2^p}, a\right\}$$

i) A partir de qué partición la diferencia entre las sumas superior e inferior es menor que $10m^2$.

ii) ¿Cuántas se necesitan para alcanzar un intervalo que acota el área que se desea calcular menor a $1cm^2$? ¿y para $1mm^2$? Completa la siguiente tabla en la que se relaciona la precisión del cálculo, expresada como diferencia entre la suma superior menos la inferior y el número de intervalos necesarios.

Precisión	Primera partición[5]	Número de nodos	$L(P_i,f)$ [m^2]	$U(P_i,f)$ [m^2]	ε [m^2]	Error relativo [%]
$10m^2$						
$1m^2$						
$1dm^2$						
$1cm^2$						
$1mm^2$						

[5] Dentro de la familia de particiones propuesta, aquella que tienen un menor número de nodos y satisface la condición de precisión solicitada en la primera columna.

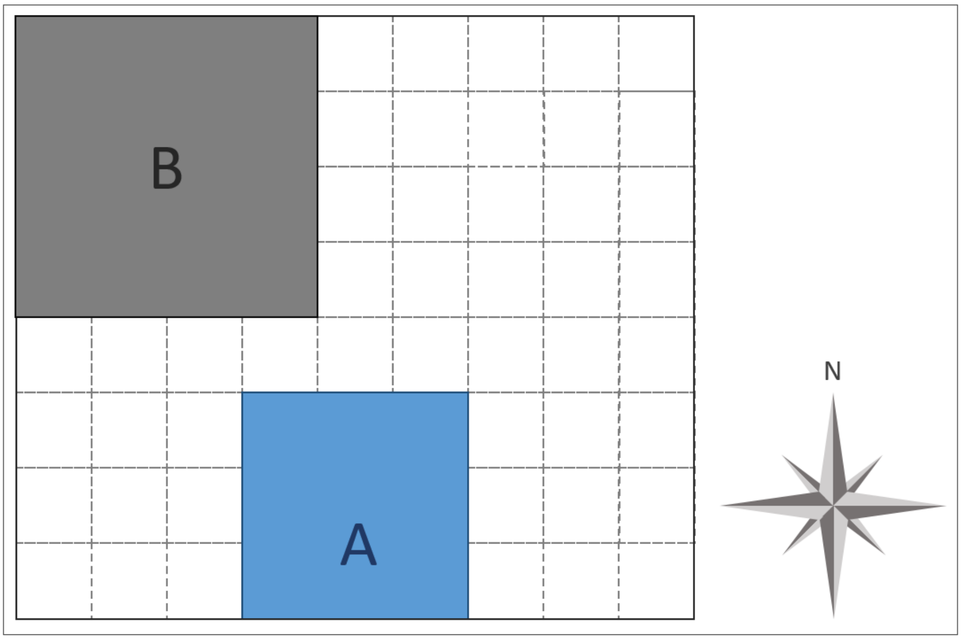
Nota: puede ayudarte a completar la tabla una expresión que relacione la diferencia entre las sumas con el número de intervalos de la partición.

(Ayuda: $\sum_{i=1}^{n} n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$)

iii) ¿En algún momento se tiene que $U(P,f) = L(P,f)$? ¿Cuál es el menor número que acota superiormente a $U(P,f)$? ¿Y el mayor que acota inferiormente a $L(P,f)$? ¿Cómo se relacionan ambos con el área que se desea calcular?

iv) Finalmente, como resultado del desarrollo anterior, proporciona una fórmula general que permita calcular de forma exacta el área de estos elementos.

v) El edificio A con la fachada parabólica que has analizado, que está orientada hacia norte, se encuentra en la plaza cuyo plano se muestra en la figura. El edificio B es una torre mucho más alta que la construcción A. Exactamente en el mediodía –solar– en verano el edificio A proyecta una sombra cuya longitud máxima es un tercio de la altura máxima de la fachada. En el mismo momento del día, en invierno, la longitud máxima de esta proyección sobre el suelo es tres veces la altura del edificio. Calcula el área de todas las regiones sombreadas en ambas situaciones.



vi) (Opcional) ¿Cuál sería el área sombreada a la misma hora del día en verano si la fachada parabólica del edificio A estuviera orientada al Noroeste?

Tabla 10. Segunda parte del problema CP-1.

Teorema 1. Sean dos particiones P y Q, tales que $P \subseteq Q$ –la partición Q, al menos, contiene todos los puntos de la partición P– entonces

$$U(P,f) \geq U(Q,f)$$

$$L(P,f) \leq L(Q,f)$$

Demostración. Es suficiente con analizar el caso concreto en el que Q contiene todos dos elementos de P más uno, por ejemplo: $Q = \{t_0, \dots, t_{i-1}, t'_i, t_i, \dots, t_n\}$, entonces la resta

$$U(P,f) - U(Q,f) = (t_i - t_{i-1}) \cdot M_i - (t_i - t'_i) \cdot M'_i - (t'_i - t_{i-1}) \cdot M'_{i-1}$$
$$= (t_i - t'_i) \cdot (M_i - M'_i) + (t'_i - t_{i-1}) \cdot (M_i - M'_{i-1})$$

Como se tiene que $M'_i \leq M_i$ y $M'_{i-1} \leq M_i$ entonces $U(P,f) - U(Q,f) \geq 0$, luego $U(P,f) \geq U(Q,f)$. A partir de este resultado, se puede generalizar para cualquier partición Q que contenga P.

Teorema 2. Sean P_1 y P_2 dos particiones del intervalo $[a,b]$ entonces

$$U(P_1,f) \geq L(P_2,f)$$

Demostración. Se puede tomar otra nueva partición P^* que contenga los puntos de las dos anteriores (P_1 y P_2).

$$P^* = P_1 \cup P_2$$

En ese caso se tiene que (teorema 1):

$$U(P_1,f) \geq U(P^*,f)$$

Y que:

$$L(P_1,f) \leq L(P^*,f)$$

Tal y como se ha definido $U(P,f)$ y $L(P,f)$ se tiene necesariamente que $L(P^*,f) \leq U(P^*,f)$, de modo que si se aplican las relaciones anteriores se obtiene que:

$$U(P_1,f) \geq U(P^*,f) \geq L(P^*,f) \geq L(P_2,f)$$

Si se utilizan el resultado del teorema anterior y además se definen (para f acotada en [a,b])

$$M = sup\{f(x): a \leq x \leq b\}$$

$$m = inf\{f(x): a \leq x \leq b\}$$

Se puede obtener la siguiente relación:

$$M \cdot (b-a) \geq U(P,f) \geq L(Q,f) \geq m \cdot (b-a)$$

Para cualquier partición P y Q de $[a,b]$. De esta forma, se concluye que $U(P,f)$ y $L(P,f)$ están acotados. El teorema 1 muestra cómo es posible reducir y aumentar el valor, respectivamente, de la suma superior y de la suma inferior a través de un refinamiento de la partición. El interés, se centra, por tanto, en el ínfimo y supremo de sendos conjuntos de valores -$U(P,f)$ y $L(P,f)$-. En principio, para una función f definida y acotada en el intervalo $[a,b]$ sólo se puede asegurar la siguiente relación:

$$M \cdot (b-a) \geq U(P,f) \geq infU(P,f) \geq supL(P,f) \geq L(P,f) \geq m \cdot (b-a)$$

Definición 3. Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$ y P cualquier partición del intervalo. Se dice que la función en Riemann-integrable si se cumple la siguiente relación:

$$infU(P, f) = supL(P, f)$$

A este valor se denomina integral definida de f en $[a, b]$ y se representa de la siguiente forma.

$$\int_a^b f dx = infU(P, f) = supL(P, f)$$

En el caso de que $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$ el valor de la integral coincide con el área de la región comprendida entre las rectas $x = a$, $x = b$, la función $f(x)$ y el eje de abscisas.

Criterio de integrabilidad de Riemann

Teorema 3. Una función es Riemann integrable en $[a, b]$ si y sólo si se cumple que para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P del intervalo tal que

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

(2)

Demostración. Si se cumple (2) se tiene que $inf[U(P, f) - L(P, f)] = 0$, lo cual implica que:

$$infU(P, f) - supL(P, f) \leq inf[U(P, f) - L(P, f)] = 0$$

Y por tanto, dado que $infU(P, f) \geq supL(P, f)$ (teorema 1), se tiene que $infU(P, f) = supL(P, f)$, que es precisamente la forma en que se define la integral definida.

Por otra parte, si f es integrable en $[a, b]$ es posible encontrar P_1 y P_2 que cumplan

$$U(P_1, f) - \int_a^b f dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b f dx - L(P_2, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para todo $\varepsilon > 0$. Si ahora se toma la partición P que contiene los puntos de P_1 y P_1 ($P = P_1 \cup P_2$) se tiene que

$$U(P, f) - \int_a^b f dx \leq U(P_1, f) - \int_a^b f dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b f dx - L(P_2, f) \leq \int_a^b f dx - L(P_2, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

Se verifica, entonces la condición (2).

Tabla 11. Institucionalización asociada al desarrollo de la segunda parte del problema CP-1 (CP-1.b, tabla 10).

Una vez institucionalizadas las sumas superiores e inferiores, se pide que los alumnos realicen averiguaciones acerca del proceso de convergencia. Mediante el programa Geogebra podrán realizar ciertas manipulaciones mediante las que se aprecia el efecto del refinamiento en las particiones en las sumas correspondientes. Sin embargo, para evitar que la resolución de la tabla del apartado (ii) se resuelva mediante el método de prueba y error, se propone que los alumnos hagan uso de las sucesiones para obtener una expresión algebraica general que facilite el proceso.

La cuestión (iii) tiene por objetivo que los alumnos apliquen el concepto de límite a las sucesiones de sumas superiores e inferiores asociadas a la familia propuesta de particiones. Dado que ambos límites coinciden, si se tiene en cuenta las relaciones definidas en la expresión (1), necesariamente, el valor exacto área de la región debe ser igual al de dichos límites. Éstos son, respectivamente, la cota superior mínima e inferior mínima de las correspondientes sumas. Es en este momento cuando se institucionaliza la definición de integral definida (definición 3, tabla 11).

En el contexto de la pregunta (iv), que tiene un carácter generalizador, se puede aprovechar para reflexionar sobre algunas propiedades de la integral definida relevantes que pueden resultar útiles para la resolución de ejercicios. En primer lugar, se puede el hecho de haber optado por el cálculo de la aproximación en una de las mitades de la parábola, es interesante comprobar su validez para la integral definida. Por otro lado, en la resolución del ejercicio a partir del uso de sucesiones se ha podido intuir la propiedad de linealidad de las sumas superiores e inferiores, de modo que se puede cuestionar si dicha propiedad también se verifica en la integral definida. En una línea similar, en la pregunta (v) pueden surgir las propiedades de la integral que se institucionalizan en la tabla 12 (teoremas 4, 5 y 6).

Propiedades de la integral definida

Teorema 4. Si la función $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ y sea c un número real perteneciente al intervalo (a, b), entonces $f(x)$ es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. De forma recíproca, si $f(x)$ es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$ entonces es integrable en $[a, b]$. Además se cumple la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

<u>Demostración:</u> Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ es posible encontrar una partición P que, conteniendo a c, haga cumplir:

$$U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$$

A su vez, con los elementos de P se pueden construir dos particiones P' y P'' de los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente, entonces:

$$U(P,f) = U(P',f) + U(P'',f)$$
$$L(P,f) = L(P',f) + L(P'',f)$$

Entonces

$$U(P,f) - L(P,f) = [U(P',f) - L(P',f)] + [U(P'',f) - L(P'',f)] < \varepsilon$$

Dado que, según el teorema 2, el valor de las expresiones entre corchetes son mayores o iguales a cero, se tiene, a partir de la condición de integrabilidad del teorema 4, que $f(x)$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. A partir de esta relación se puede probar la afirmación recíproca.

Por otro lado, para cualesquiera particiones P' y P'' se tiene que:

$$L(P',f) \leq \int_a^c f dx \leq U(P',f)$$
$$L(P'',f) \leq \int_c^b f dx \leq U(P'',f)$$

Y, por tanto:

$$L(P,f) \leq \int_a^c f dx + \int_c^b f dx \leq U(P',f)$$

Como esta relación se cumple para cualquier partición, se tiene que:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

En este punto, se completa la definición de integral definida con los siguientes casos, que no se había contemplado en la presentación anterior:

$$\int_a^b f dx = -\int_b^a f dx$$
$$\int_a^a f dx = 0$$

Teorema 5. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son integrables en $[a,b]$, entonces la función $f(x) + g(x)$ es integrable en $[a,b]$ y se cumple que:

$$\int_a^b (f+g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

<u>Demostración.</u> Si f y g son integrables, por el resultado del teorema 4, se pueden tomar sendas particiones P_1 y P_2 que hagan cumplir las siguientes relaciones:

$$U(P_1,f) - L(P_1,f) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$U(P_2,g) - L(P_2,g) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Para cualquier $\varepsilon > 0$ (tan pequeño como se requiera).

Ambas condiciones se cumplen si se toma la partición $P^* = P_1 \cup P_2$, como prueba el teorema 1.

Por otra parte, dadas las definiciones de las sumas superiores e inferiores, se tienen las siguientes desigualdades:

$$L(P, f+g) \geq L(P, f) + L(P, g)$$

$$U(P, f+g) \leq U(P, f) + U(P, g)$$

De modo, que se satisface la siguiente desigualdad

$$U(P^*, f+g) - L(P^*, f+g) < \varepsilon$$

que demuestra que $f + g$ es integrable.

Por otra parte se cumple que

$$U(P^*, f+g) \geq \; U(P^*, f) + U(P^*, g) \geq \int_a^b (f+g)dx \geq \; L(P^*, f) + L(P^*, g) \geq L(P^*, f+g)$$

y que

$$U(P^*, f) + U(P^*, g) \geq \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \geq \; L(P^*, f) + L(P^*, g)$$

Como las relaciones se tienen que cumplir para cualquier valor de $\varepsilon > 0$, tan pequeño como se requiera, se tiene que:

$$\int_a^b (f+g)dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

Teorema 6. Si las función $f(x)$ es integrables en $[a, b]$, entonces la función $c \cdot f(x)$, siendo c un número real, es integrable en $[a, b]$ y se cumple que:

$$\int_a^b c \cdot f dx = c \cdot \int_a^b f dx$$

<u>Demostración.</u> Si se analiza el caso $c > 0$ se tiene que:

$$U(P, c \cdot f) = c \cdot U(P, f)$$

$$L(P, c \cdot f) = c \cdot L(P, f)$$

de modo que si f es integrable, y por tanto, $supL(P, f) = infU(P, f)$, la relación análoga se debe cumplir para la función $c \cdot f$.

$$c \cdot supU(P, f) = supL(P, c \cdot f) = \int_a^b c \cdot f dx = infU(P, c \cdot f) = c \cdot infU(P, f)$$

En el caso opuesto, cuando $c < 0$, se tiene que:

$$L(P, c \cdot f) = c \cdot U(P, f)$$

$$U(P, c \cdot f) = c \cdot L(P, f)$$

así que, de nuevo, si f es integrable, se cumple:

$$c \cdot supL(P, f) = infU(P, c \cdot f) = \int_a^b c \cdot f dx = supL(P, c \cdot f) = c \cdot infU(P, f)$$

El caso c=0, es trivial, ya que para cualquier partición se tiene que $L(P, c \cdot f) = U(P, c \cdot f) = 0$.

Tabla 12. Institucionalización de las propiedades de la integral.

La última cuestión del ejercicio (v) busca que los alumnos apliquen las propiedades que se han institucionalizado de la integral definida y que, finalmente, extraigan como resultado una expresión para el cálculo de la integral de las funciones que han surgido: cuadrática y constante. Asimismo, la descomposición suma de funciones de la expresión correspondiente a la curva que delimita la región, permite analizar el caso $\int_a^b f dx$ con $f(x) \leq 0$ cuando $a \leq x \leq b$. A partir de este análisis se puede presentar la relación entre el área y la integral definida (tabla 13).

• Si $f(x) \leq 0$ cuando $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f dx$ es el área encerrada entre la curva $f(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje OX. • Si $f(x) \leq 0$ cuando $a \leq x \leq b$, entonces $\int_a^b f dx$ es el área encerrada entre la curva $f(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje OX.

Tabla 13. Institucionalización de la relación entre el área y la integral definida.

Una vez concluida la actividad relacionada con el problema RS-1/CP-1, se proponen los ejercicios que se muestran en la tabla 14. Los ejercicios CP-1.2 y CP-1.3 se han diseñado en torno identificación entre área e integral definida. A partir de esta relación y de la aplicación de las propiedades de la integral definida pueden los alumnos completar las cuestiones que se plantean. Los ejercicios CP-1.4 y CP-1.5 acercan a los alumnos a la problemática de la integración numérica. Dentro de la secuencia didáctica, el principal objetivo es suscitar de nuevo la reflexión acerca del proceso de convergencia al valor de la integral definida.

CP-1.2. A partir de las técnicas que conoces para el cálculo de áreas de figuras planas y de las propiedades de la integral definida, representa las funciones y resuelve las siguientes cuestiones:

i) $\int_0^2 x\,dx$	ii)$-\int_0^b x\,dx$	iii) $\int_{-2}^2 \lvert x\rvert\,dx$
iv) $\int_0^2 -(3+2\cdot x)\,dx$	v) $\int_{-6}^2 \lvert 3+2\cdot x\rvert\,dx$	vi) $\int_a^b k\cdot x\,dx$
vii) $\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx$	viii) $2\cdot\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$	ix) $\int_{-1}^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$
x) $\int_{-R}^b \sqrt{R^2-x^2}\,dx$ $b\in[-R,R]$	xi) $k\cdot\int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$	xii) $\int_0^a \big(x-E(x)\big)\,dx$[6]

A partir de los resultados anteriores ¿Sabrías obtener una fórmula general para calcular el área de la elipse?

[6] $E(x)$: función parte entera de x.

CP-1.3. Calcular el área de las siguientes regiones:

i) la que encierran la parábola $y = 9 - x^2$ y la recta $y = 6 - 2x$.

ii) la que encierran la parábola $y = x^2 - 4$ y la recta $y = x + 2$.

iii) si $\int_0^\pi sen(x)\,dx = 2$, calcular el área de la región encerrada por la función $f(x) = sen(x)$ y el eje OX dentro del intervalo $[-\pi, \pi]$.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a, b]$, tal que $f(x) \geq g(x)$ ¿qué significado geométrico tiene las siguientes integrales definidas?

- $\int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot dx$
- $\int_a^b |f(x)| \cdot dx$

CP-1.4 (Opcional). En ocasiones sólo se calculan valores numéricos aproximados a los integrales definidas mediante procedimientos numéricos basados en técnicas similares a la utilizada en el problema RS-CP1.1. En estos casos es importante la eficiencia del procedimiento numérico, interesa alcanzar un resultado preciso con un número lo más reducido posible de cálculos aritméticos. ¿Puedes proponer alguna modificación del procedimiento basado en sumas superiores e inferiores que permita acelerar el proceso de convergencia al valor exacto de la integral que ejemplifica la tabla que has construido?

CP-1.5 (Entrega)[7]. A partir del resultado de la integral CP-1.2.viii, utiliza un procedimiento para aproximar el número π con un error menor a 0,01, ¿Cuántas veces necesitas evaluar la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$?. i) (opcional) si aplicas el procedimiento que has propuesto en el ejercicio anterior, ¿se reduce el número de evaluaciones? Representa en un gráfico la relación precisión-número de evaluaciones

Nota: es conveniente que utilices una herramienta informática Geogebra o una hoja de cálculo para resolución.

Tabla 14. Conjunto de ejercicios relacionados con la utilización de la integral definida para el cálculo de áreas.

Una vez realizada la práctica de los ejercicios CP-1.2 y CP-1.3, se retomará en clase la cuestión de la integrabilidad. Hasta ahora, sólo se ha presentado la definición de integral definida (Riemann) y la condición de integrabilidad. En este momento, se puede recordar a los alumnos que mientras se ha trabajado con funciones continuas no ha habido problemas en el momento de integrar. En estos casos, la identificación área-integral era sencilla. No se plantea en esta propuesta la demostración de la integrabilidad para funciones continuas ya que requiere del concepto de continuidad uniforme. Así, el ejercicio CP-1.6 (tabla 15) propone realizar algunas averiguaciones acerca de la integrabilidad de algunas funciones. Como conclusión de este trabajo se enuncian, sin demostrar, algunas condiciones suficientes de integrabilidad (tabla 16).

[7] Redondo y Haro (2002) proponen una actividad similar para la aproximación del número π.

CP-1.6. Conocida la definición formal de integral definida, razonar si las siguientes funciones son integrables o no en el intervalo que se indica:

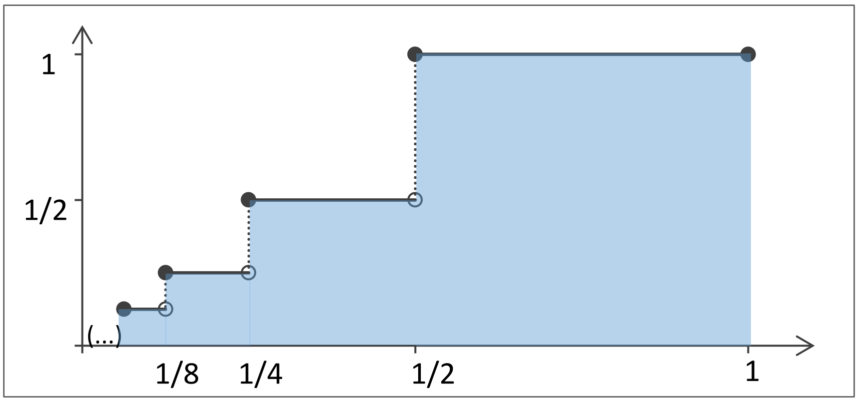
i) $f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, \quad [-2,2]$

ii) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, \quad [0,1]$

iii) $f(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}, \quad [-2,2]$

iv) una función acotada y estrictamente creciente en $[a, b]$

CP-1.7. (Opcional) Sea la función f(x) que se representa gráficamente en la siguiente figura:



Calcular el área de las siguientes regiones:

i) Calcular el área de la región sombreada.

ii) ¿Es posible encontrar una partición del dominio de la función que permita reducir la diferencia entre las sumas superior e inferior asociadas –$U(P, f)$ y $L(P, f)$- hasta un cierto nivel ε dado? En ese caso, trata de proponer una regla para la formación para dicha familia de particiones. ¿Qué condiciones debe cumplir? ¿Cuántos elementos se necesitan en P?

Nota: no es necesario utilizar una partición con intervalos de longitud uniforme. Puedes probar con particiones que se adapten a las características específicas de la función.

iii) A partir de los resultados anteriores ¿se puede concluir algo acerca de la integrabilidad de $f(x)$ en el intervalo [0,1]? ¿Cuál es el valor de dicha integral?

Tabla 15. Ejercicios relacionados con la integrabilidad de las funciones.

- Si $f(x)$ es monótona en $[a, b]$ entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.
- Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$.
- Si $f(x)$ es acotada y tiene un número finito de discontinuidades en $[a, b]$ entonces $f(x)$ es integrable en $[a, b]$

Tabla 16. Condiciones suficientes de integrabilidad.

Los siguientes ejercicios (CP-1.8 y 1.9, tabla 17) tienen el objetivo de ampliar el campo de aplicaciones de la integral, dentro del significado general de la cuantificación de magnitudes estáticas. En primer lugar, se proponen dos ejercicios relacionados con la aplicación de la integral para el cálculo de fuerzas hidrostáticas. Se asume que el alumno está familiarizado con el concepto presión. El problema CP-1.9 sólo se planteará en el caso de que los alumnos estén familiarizados con la noción de momento estático y con la idea de equilibrio asociada a dicha magnitud. En todo caso, se plantea como ejercicio opcional.

CP-1.8. Un recipiente con forma de prisma de base cuadrada de lado A y altura H contiene agua hasta un nivel h (h<H). Se desea conocer la fuerza que ejerce el líquido sobre la basa y sobre cada una de las paredes laterales. La presión hidrostática del agua en cada punto depende únicamente de la profundidad de dicho punto (z).

$$p(z) = \rho_a \cdot g \cdot z$$

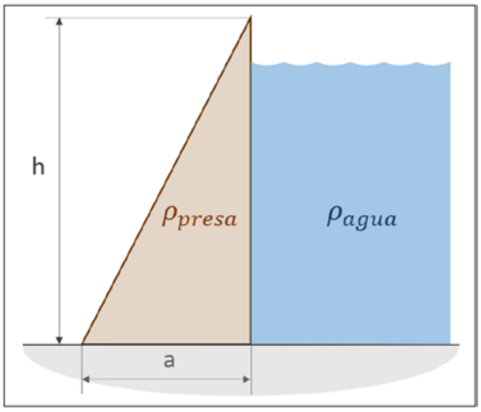
Donde ρ_a es la densidad del agua y g la constante de gravitación terrestre.

i) Representa la función $p(z)$.

ii) Plantea un procedimiento para aproximar el cálculo de la fuerza resultante. ¿Se puede alcanzar el valor exacto.

iii) Si el aire del depósito p_a se encuentra a una presión barométrica negativa $p_a = -p$, tal que $p \geq \rho_a \cdot g \cdot h$. ¿Cuál es el signo del resultado de la integral? ¿Cómo interpretas el resultado?

CP-1.9 (Opcional) Cuando se diseña una presa como la que muestra la figura, una condición de diseño frecuentemente utilizada se basa en asegurar que la fuerza que ejerce el agua sobre la presa no hace volcar a dicho elemento de contención. ¿Qué condición deben cumplir las dimensiones de la presa para impedir esta situación?



Ayuda:

- se puede asumir que cualquier sección de la presa por el plano perpendicular al dibujo es rectangular de anchura A.
- se debe analizar el momento que generan, respectivamente, la fuerza de la gravedad y la hidrostática sobre el eje perpendicular al plano del dibujo. Recuerda que el momento que genera un conjunto de n fuerzas ($\vec{f_i}$) aplicadas en P_i referido al punto O se calcula mediante la siguiente fórmula.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP_i} \wedge \vec{f_i}$$

Tabla 17. Ejercicios relacionados con la integrabilidad de las funciones.

Finalmente, se presenta la aplicación de la integral definida para el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución (tabla 18). La idea es que los alumnos reconozcan la manera en que se puede utilizar la integral para este propósito. Por otra parte, el ejercicio CP-10 prepara la aparición de la función integral (tabla 20). Pese a que no es necesario su uso, el hecho de que se solicite un cálculo repetitivo (apartados ii y iii) que implique conocer la relación nivel de líquido-volumen contenido, puede suscitar la idea de recurrir a una función. Por último, la pregunta sobre la precisión en la medida pretende que los alumnos reflexionen acerca de la influencia que tiene la función nivel de líquido-volumen –concretamente, su tasa de crecimiento– en esta cuestión.

CP-1.10

Se dispone de un recipiente con forma de paraboloide de revolución. Es decir, la superficie interior se engendra a girar en torno al eje OY la parábola $y = a \cdot x^2$. Si la altura del recipiente es 8 cm y el radio máximo 10 cm,

i) ¿qué volumen máximo de líquido se puede contener en el recipiente?

Se desea inscribir en la pared del recipiente cierto número de señales que permitan medir distintos volúmenes de líquido. Determinar la altura de las mismas en los siguientes casos:

ii) 1/4, 1/2, 3/4 y 1 l de líquido. Proporcionar la cota más aproximada a la solución exacta medida en milímetros.

iii) 5, 10, 15,.., 95, 100 cl líquido.[8]

iv) ¿Qué distancia –en vertical– separa dos marcas consecutivas? ¿Puedes obtener una expresión general? ¿En qué zona crees que se puede medir volúmenes con más precisión?

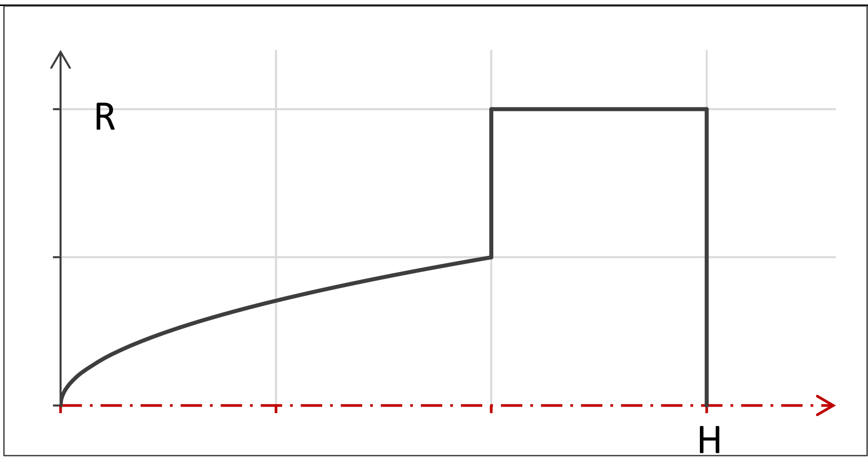
CP-1.11

¿Hasta qué profundidad se sumerge en el agua un sólido de densidad $\rho_s < \rho_{agua}$ con forma de cono de altura H[9]? ¿y una esfera de radio R?

Propón un procedimiento gráfico para calcular la profundidad a la que se sumerge el sólido engendrado al rotar la curva que se muestra en la figura. ¿Observas alguna característica significativa de la función volumen desalojado-profundidad sumergida?

[8] No es necesario presentar la lista de los veinte datos. Es suficiente con presentar un procedimiento que permita obtener la cota de cada uno de los mencionados puntos.

[9] Asúmase en el ejercicio CP-1.11 que en las figuras con simetría de revolución, dicho eje se sitúa en posición vertical.



Nota: Recuerda el principio de Arquímedes: todo cuerpo sólido, al ser sumergido en un líquido, experimenta una fuerza de flotación que es igual al peso del líquido que desaloja.

Tabla 18. Ejercicios relacionados con el cálculo de volúmenes de revolución.

Cálculo del volumen de cuerpos de revolución

Sea $f(x)$ una función integrable en $[a,b]$ el volumen V del cuerpo delimitado por la superficie que resulta de revolucionar la curva $f(x)$ en torno al eje OX y los planos $x = a$ y $x = b$ se puede calcular mediante la siguiente integral definida:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \cdot dx$$

Justificación: si se utiliza una partición P del intervalo $[a,b]$, se puede acotar el volumen del cuerpo mediante las siguientes sumas, que corresponden al volumen de los cilindros:

$$U(P,V) = \pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot sup\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}^2$$

$$L(P,V) = \pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot inf\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}^2$$

En este momento, se puede dividir el dominio en las zonas donde $f(x) \geq 0$ y donde $f(x) < 0$. En el primer caso se tiene que;

$$U(P',V) = \pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot sup\{f(x)^2: x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$L(P',V) = \pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot inf\{f(x)^2: x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

Mientras que en el segundo:

$$U(P'',V) = \pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot inf\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}^2 =$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot sup\{f(x)^2: x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$L(P'',V) = \pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot sup\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\}^2 =$$

$$= \pi \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot inf\{f(x)^2: x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

De modo que:

$$U(P,V) = U(P',V) + U(P'',V) \geq V \geq L(P',V) + L(P'',V) = U(P,V)$$

Con lo que se tiene que:

$$V = infU(P,V) = supL(P,V) = \pi \int_a^b f(x)^2 \cdot dx$$

Tabla 19. Institucionalización: cálculo del volumen de cuerpos de revolución.

Función integral

Definición 4: Sea $f(x)$ una función integrable en $[a,b]$. Se define en el intervalo $[a,b]$ la función integral $F(x)$ de la siguiente forma:

$$F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$$

Teorema 8. La función integral $F(x)$, tal y como se ha definido (def. 4), es continua en el intervalo $[a,b]$.

Tabla 20. Institucionalización: función integral.

E.2 Segundo campo de problemas: análisis del resultado de procesos de cambio y teorema fundamental del cálculo

Este bloque de ejercicios tiene por objetivo acercar a los alumnos, a través de unas primeras indagaciones sobre la relación entre integral y derivada, al primer teorema fundamental del cálculo. En este contexto de análisis de procesos de cambio en el tiempo, a partir de los conceptos de tasa instantánea y variación acumulada, los alumnos pueden alcanzar ciertas ideas intuitivas sobre el carácter inverso de la derivada e integral.

El problema CP-2.1 (tabla 21) plantea, en la primera parte, la aplicación de la integral para calcular el resultado al final de un proceso de cambio en el tiempo a partir de una función de tasa instantánea de variación. En la segunda sección, se presenta el caso inverso, con el objetivo de que se aprecie el carácter inverso de las operaciones de derivación e integración. Se ha utilizado una función $V(t)$ no derivable con el propósito de se pueda observar la influencia de la continuidad de la función tasa instantánea de variación en la mencionada relación inversa entre las dos operaciones. Por último, se introduce la necesidad de integrar una función senoidal (apartado iv) de tal manera que se aprecie la utilidad del resultado del primer teorema fundamental del cálculo y de la regla de Barrow. Se propone institucionalizar dicho teorema (tabla 22) una vez los alumnos hayan analizado los resultados correspondientes a las cuestiones (i), (ii) y (iii) de segunda parte (B) del ejercicio.

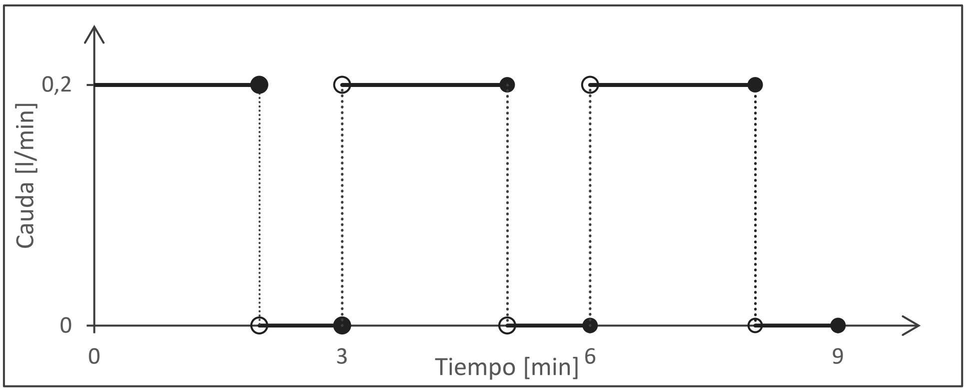
P-RS.2/CP-2.1

A. El recipiente del problema CP-1.10 se encuentra inicialmente vacío. ¿Cuál será la evolución temporal del volumen contenido si se llena de las siguientes formas? Represéntalo en forma de función. ¿En qué momento rebosará?

i) A un caudal fijo $q = \frac{1}{5} l/min$

ii) A un caudal variable con el tiempo (t [min]) $q_2(t) \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{t}{20}\ l/min & t < 4\ min \\ 0 & t \geq 4min \end{cases}$

iii) El caudal presenta una evolución periódica que se repite cada 3 minutos



iv) $q(t) = \frac{1+sen(\pi \cdot t)}{8}\ l/min$

B. En una nueva situación se desconoce el caudal que entra pero, ya que se dispone de cronómetro y el recipiente está graduado, se puede medir la evolución temporal del volumen de líquido. En este caso, la evolución del volumen de líquido con el tiempo se corresponde con la siguiente función $V(t)$.

$$V(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{10} & 0 \leq t < 2 \\ \frac{2}{5} & 2 \leq t < 4 \\ \frac{2}{5} + \frac{(t-4)^2}{10} & 4 \leq t < 6 \\ \frac{4}{5} & 6 \leq t \end{cases}$$

i) ¿Cuál es el caudal promedio de líquido que entra entre los instantes $t = 0\ min$ y $t = 2\ min$? ¿Y entre $t = 6\ min$ y $t = 8\ min$?

ii) A partir del procedimiento de cálculo que has utilizado en el apartado anterior, ¿puedes realizar una aproximación al caudal que entra en el instante $t = 1\ min$? ¿Cuán precisa puede llegar a ser? ¿Es posible, entonces, calcular el valor exacto? ¿Ocurre lo mismo en instante $t = 2\ min$? Completa la siguiente tabla y representa los valores de la derivada calculados.

t	$q(t)$
0	
a $\quad 0 \leq a < 2$	
2	
a $\quad 2 \leq a < 4$	
4	
a $\quad 4 \leq a < 6$	

iii) Compara el procedimiento de cálculo que has utilizado en el apartado anterior para evaluar el valor exacto del caudal con el empleado en la primera parte del problema. ¿Qué caracteriza a los puntos en los que no se puede calcular el caudal instantáneo?

iv) Aprovecha el resultado anterior para calcular la evolución del volumen en el caso A.iv.

Tabla 21. Problema CP-2.1 con el análisis del resultado de procesos de cambio.

Teorema fundamental del cálculo integral

Teorema 9. Sea $f(x)$ una función integrable en $[a, b]$ y c un punto del intervalo (a, b) en que la función $f(x)$ es continua. Entonces se tiene que:

$$F'(c) = f(c)$$

Siendo $F'(c)$ la derivada en el punto c de la función integral $F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$.

<u>Demostración:</u> Se puede realizar el análisis de la tasa de variación media de la función integral entre c y $c + h$.

$$\frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

Si se aplican las propiedades de la integral definida se tiene la siguiente relación (1):

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t) \cdot dt$$

Si en (1) se aplica la siguiente manipulación algebraica $f(t) = f(x) + \big(f(t) - f(x)\big)$, queda la siguiente expresión (2).

$$F(c+h) - F(c) = f(c) \cdot h + \int_c^{c+h} \big(f(t) - f(c)\big) \cdot dt$$

Si utilizamos esta última expresión (2) en la correspondiente a la tasa de variación media se obtiene: $$\frac{F(c+h)-\ F(c)}{h}=f(x)+\frac{1}{h}\cdot\int_{c}^{c+h}\big(f(t)-f(c)\big)\cdot dt$$ Con lo que la demostración del teorema es equivalente a demostrar que $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_{c}^{c+h}\big(f(t)-f(c)\big)\cdot dt=0 \qquad (1)$$ si $f(x)$ es continua en c. Si se aplica, entonces, la definición de continuidad, es decir que para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que $$\vert f(t)-f(c)\vert<\varepsilon$$ Con $-\delta<t<\delta$. Si se escoge un h de manera que $0<h<\delta$ de tal forma que $\vert f(t)-f(c)\vert<\frac{\varepsilon}{2}$, se tiene que: $$-\varepsilon\cdot h<-\frac{\varepsilon}{2}\cdot h=-\int_{c}^{c+h}\frac{\varepsilon}{2}\cdot dt\leq\int_{c}^{c+h}\big(f(t)-f(c)\big)\cdot dt\leq\int_{c}^{c+h}\frac{\varepsilon}{2}\cdot dt=\frac{\varepsilon}{2}\cdot h<\varepsilon\cdot h$$ Si se divide entre h, se obtiene que $\left\vert\int_{c}^{c+h}\big(f(t)-f(c)\big)\cdot dt\right\vert$ se puede hacer tan pequeño como se quiera, con lo que queda demostrado (1) y, en consecuencia, el teorema 9. **Regla de Barrow:** Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y G(x) una función que cumple G'(x)=f(x) en $[a,b]$. Entonces se tienen que para todo $x\in[a,b]$: $$\int_{a}^{x}f(t)\cdot dt=G(x)-G(a)$$

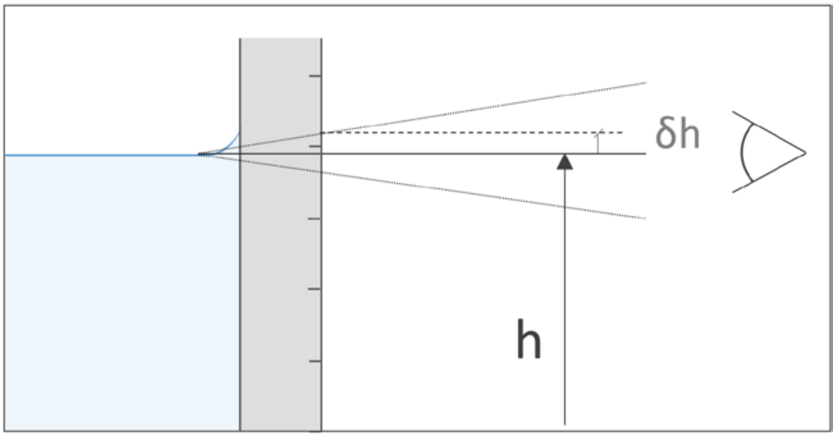
Tabla 22. Institucionalización relacionada con el primer teorema fundamental del cálculo.

El problema CP-2.2 (tabla 23), que se plantea como tarea voluntaria, es una continuación de la pregunta (iv) del problema CP-1.10. En él la relación inversa entre la integral y derivada surge en un entorno geométrico. En el problema CP-2.3 aparece, por primera vez en la propuesta, la integral definida de una función exponencial. En el problema CP-2.4 ya introduce una situación propia de la cinemática. Se hace referencia expresa a que los alumnos abandonen el uso de las fórmulas del movimiento uniformemente acelerado y que lo resuelvan a partir de las nuevas herramientas analíticas adquiridas. En el enunciado se realiza la distinción entre posición y desplazamiento, de tal forma que los alumnos puedan relacionarlo con las correspondientes formulaciones integrales. En los experiencia de Camacho et al. (2008) algunos mostraron cierta confusión en el momento de para distinguir y relacionar con funciones integrales ambas magnitudes cinemáticas.

CP-2.2 (Opcional)

Cuando se miden magnitudes físicas es interesante realizar un análisis crítico de la influencia que poseen los diferentes errores que se producen en el proceso de medición en el resultado global. Se suele denominar a este efecto sensibilidad de la medida con respecto a un determinado tipo de error.

En el caso del recipiente para medir volúmenes de líquido del problema CP1.10, se considera que, si éste se ha graduado bien, el principal error de medida es el asociado a la lectura del nivel de líquido (p. ej. error de paralaje o interpretación del menisco, ver figura inferior).



i) ¿Se te ocurre alguna forma de obtener una cuantificación de la sensibilidad de la medida de volumen de líquido?

ii) Ya que se desconoce el error de lectura que se comete pero se puede, en cualquier caso, asumir que es muy pequeño en términos relativos, ¿se podría obtener una cuantificación de la sensibilidad eliminando la dependencia con el nivel de error?

iii) ¿Qué relación observas entre la sensibilidad y la geometría del recipiente?

iv) ¿En qué zonas del recipiente crees que se obtiene una medida de peor calidad? ¿Es igual la conclusión si se tiene en cuenta la sensibilidad expresada en términos absolutos y relativos?

En el diseño de instrumentos de medida se trata en ocasiones de obtener medidas cuya sensibilidad se uniforme en todo el rango de medida.

vi) ¿Qué cuerpo de revolución produce una lectura cuya sensibilidad, expresada en términos absolutos, es uniforme? ¿Y en términos relativos?

CP-2.3 Se dispone del recipiente del problema C-1.10 completamente lleno de líquido. En cierto instante, por efecto de una fuga en su base comienza con un caudal que se puede aproximar por la siguiente función exponencial:

$$q(t) = \frac{8\pi}{250} \cdot e^{-\frac{t}{10}} \ {}^{l}/_{min}$$

donde la variable t está expresada en minutos. Aproximadamente, ¿cuánto tiempo le cuesta vaciarse hasta la mitad de su contenido original? ¿Y vaciarse completamente?

CP-2.4 Un objeto se lanza hacia arriba en dirección vertical a una velocidad de v_0. ¿Cuánto tiempo le costará caer de nuevo hasta su posición original? Representa las funciones aceleración, velocidad, distancia recorrida y posición (puedes particularizar para el caso $v_0 = 50\, m/s$ y $v_0 = 10\, m/s^2$. ¿Qué altura alcanza? (Opcional: utiliza este resultado para calcular el tiempo que ocupa el proceso que describe el problema AI.1. ¿Es éste de duración temporal finita?)

Nota: Puedes suponer únicamente el efecto de la gravedad (asumiendo, de esta forma, que no existe rozamiento con el aire), constante y de valor g. Ya que dominas algunas aplicaciones de la integral definida, evita el uso de las fórmulas que recuerdes de física para el movimiento uniformemente acelerado.

CP-2.5 Como ya has comprobado, el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow proporcionan una potente técnica para resolver integrales definidas. En aquellos casos en los que puede aplicarse dicha regla, el principal esfuerzo consiste en encontrar una función cuya derivada sea la función que se necesita integrar. Así pues, completar la siguiente tabla puede resultar una ayuda útil para la resolución de estos problemas.

Encuentra la función $F(x)$ tal que se cumpla $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ en el intervalo dado para cada una de las funciones que se indican en la tabla. Indica los puntos donde, desde el punto de vista de la integración, esta relación inversa puede presentar problemas.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
k		$k \cdot e^{-b \cdot x}$	
$k \cdot (b \cdot x)^m \;\; m \neq -1$		$k \cdot sen(b \cdot x)$	
$\frac{1}{b \cdot x + a}$		$k \cdot cos(b \cdot x)$	

Tabla 23. Problemas y ejercicios relacionados con el teorema fundamental del cálculo.

E.3 Resumen de la propuesta didáctica: recopilación de técnicas y tecnologías

La tabla 24 resume los principales elementos de la propuesta didáctica. En ella, los elementos de las columnas –problemas, técnicas y tecnología– se ordenan según la secuencia de la propuesta. Así, cada problema o conjunto de problemas se relaciona con el conjunto de técnicas y tecnologías que, o bien, propicia que emerjan o bien se utilizan, a modo de práctica, en su resolución. Las técnicas (Tc.) y tecnologías (Tclg.) se numeran en la tabla, a fin de aligerar la notación en sus respectivas referencias. Del mismo modo, se han utilizado abreviaturas para caracterizar el contenido o contexto de los problemas, el modo de presentación y su función dentro de la propuesta.

Dentro del discurso tecnológico, se ha optado por la introducción formal de la integral de Riemann y la justificación analítica de sus propiedades más útiles para la resolución de los ejercicios que se introducen en este nivel. Asimismo, se ha introducido el criterio de integrabilidad de Riemann. Se ha estimado relevante hacer énfasis en esta característica de las funciones, ya que algunos autores evidencian cierta confusión en los alumnos entre integrabilidad y existencia de primitiva (Labraña 2001, Ordóñez 2011). A partir del mismo, los alumnos pueden justificar la integrabilidad de funciones sencillas (ejercicio CP-1.6). Para cerrar la cuestión que atañe a la integrabilidad, se proporcionan las condiciones suficientes (tabla 13), en este caso sin demostrar, que cubren todo el conjunto de funciones que aparecen en la propuesta. Finalmente, se presentan el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow, con sus respectivas demostraciones, después de que los alumnos hayan realizado algunas indagaciones dentro del contexto del análisis de un proceso de cambio de en tiempo.

Es preciso señalar que no se ha realizado en la propuesta una formalización del concepto de área. Se asume que la idea de los alumnos que subyace del conjunto de técnicas que conocen para el cálculo de áreas de figuras planas elementales y de la aceptación de las nuevas –aplicación del principio de exhausción en el problema RS.1 y, en cierto modo, en el problema AI-2– es suficiente para articular la propuesta.

Aunque en algunos casos la justificación que aporten los alumnos pueda acercarse a la demostración formal (por ejemplo, las propiedades de las sumas superiores e inferiores en el problema RS-1/CP-1.1), es más habitual que se requiera una formalización propuesta por el profesor (p. ej. propiedades de la integral, tabla 11). Se considera interesante que los alumnos aprecien la necesidad de ordenar y justificar, en torno a un discurso lógico-deductivo formal, el conjunto de experiencias e intuiciones que surgen de su práctica relacionada con esta unidad didáctica.

Dentro de los ejercicios y problemas propuestos, según la forma en que se presentan, se pueden distinguir varios tipos. En primer lugar, aquellos que constituyen la actividad programada para cada sesión. Durante su desarrollo, los alumnos abordarán la resolución y a partir de las indagaciones y conclusiones que se obtengan se podrán consolidar los elementos del discurso técnico-tecnológico asociado. Por otro lado, se presentan tareas de trabajo personal que, en la mayor parte de los casos tiene por objeto que el alumno afiance las técnicas y reflexione sobre las tecnologías que han surgido en las sesiones. Por último, se han señalado una serie de cuestiones “opcionales” que los alumnos pueden, si les interesa resolver. Se les ha otorgado este carácter libre ya que, o bien constituyen una profundización más allá de los contenidos fijados en la propuesta o su resolución se considera más difícil. La entrega de dos de estos ejercicios será valorada en la evaluación con medio punto extra.

Problemas / ejercicios / actividades[10]	**Técnicas**	**Tecnologías**
P-RS1-CP.1.1.a (Geo. áreas) (Int. técn.) (act. clase)	-Aproximación al valor del área mediante sumas superiores e inferiores (Tc. 1)	- Partición (Def. 1), sumas superiores e inferiores (Def. 2) -Propiedades sumas superiores e inferiores (Teor. 1 y 2) (dem.[11]) (Tclg. 1)
P-RS1-CP.1.1.b (Geo. áreas) (Int. técn.) (act. clase)	-Cálculo exacto del área a partir del límite de las sumas de una familia de particiones (Tc. 2)	-Definición de la integral definida (Def. 3) -Criterio de integrabilidad de Riemann (Teor. 3) (dem.) (Tclg. 2)
	-Identificación área-integral (Tc. 3)	-Propiedades integral definida (Teor. 4-6) (dem.) (Tclg. 3)
	-Integral función constante y cuadrática (Tc. 4)	-Relación entre el área y la integral definida (Tabla 11) (Tclg. 4)
CP-1.2, CP-1.3 (Geo. áreas) (práct. técnicas) (act. clase/ trabajo personal)	(Tc. 3, 4) -Aplicación de las propiedades de la integral definida (Tc. 5) -Integral función lineal (Tc. 6)	(Tclg. 1-4)

[10] Se han utilizado las siguientes abreviaturas para caracterizar los problemas. Según su contenido o contexto: geométrico-áreas (Geo. áreas), numérico (Num.), intramatemático (Mat.), cálculo de volúmenes (Vol.), magnitudes físicas estáticas (Mag. estát.), análisis del resultado de un proceso de cambio (RPC). Según su función dentro de la propuesta didáctica: contexto propicio para que emerjan o se introduzcan técnicas y tecnologías (int. técn.), práctica de las técnicas (práct. técnicas). Según su forma de presentación: actividad de clase (act. clase).

[11] La aparición de la abreviatura (dem.) en los teoremas o resultados indica que se aparecen demostrados en la secuencia didáctica.

CP-1.4, (Num.) (trabajo personal opcional) CP-1.5, (Geo. Áreas, Num.) (trabajo personal)	(Tc. 1, 3)	
CP-1.6 (Mat.) (Int. técn.) (act. clase)	(Tclg. 2)	-Condiciones suficientes de integrabilidad (Tclg. 5)
CP-1.7 (Mat.) (Ejerc. práct. técnicas) (trabajo personal opcional)	(Tclg. 4)	
CP-1.8 (Mag. estát.) (Int. técn.) (act. clase)	-Aplicación de la integral definida al cálculo de magnitudes estáticas (Tc. 7)	(Tclg. 2)
CP-1.9 (Mag. estát.) (Ejerc. práct. técnicas) (trabajo personal opcional)	(Tc. 7)	
CP-1.10 (Vol.) (Int. técn.) (act. clase)	-Aplicación de la integral definida para el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución (Tc. 8)	-Formulación integral del volumen de un cuerpo de revolución (tabla 15) (Tclg. 6) -Función integral (Def. 4) (Tclg. 7)
CP-1.11 (Vol.) (Ejerc. práct. técnicas/ Int. técn.) (act. clase/ trabajo personal)		-Continuidad de la función integral (Teor. 8) (Tclg. 7)
P-RS2/CP-2.1 (RPC) (Int. técn.) (act. clase)	-Aplicación de la integral definida para el análisis de resultados de procesos de cambio (Tc. 9) -Regla de Barrow, relación inversa integración-derivación (Tc. 10)	-Teorema fundamental del cálculo integral y regla de Barrow (Teor. 10) (Tclg. 8)
CP-2.2 (Vol.) (Ejerc. práct. técnicas) (trabajo personal opcional)	(Tc. 8-10)	

CP-2.3 (RPC) (Ejerc. práct. técnicas) (trabajo personal)		
CP-2.4 (RPC) (Int. técn.) (trabajo personal)		
CP-2.5 (RPC) (Int. técn.) (trabajo personal/actividad de clase)	-Tabla de primitivas de funciones elementales (Tc. 11)	(Tclg. 8)

Tabla 24. Resumen de la praxeología de la propuesta didáctica.

F. Cronograma

En la tabla 25 se resume la secuencia de actividades de la propuesta didáctica y su distribución a lo largo de trece sesiones. Se propone dedicar una última hora para la corrección del examen y revisión de las calificaciones.

Sesión	**Contenidos**	**Actividades**
1	-Sucesiones -Cálculo de áreas	Actividad inicial
2-3	-Cálculo aproximado del área: sumas superiores e inferiores -Integral de Riemann	P-RS1-CP.1.1.a-b
4	-Propiedades de la integral definida	P-RS1-CP.1.1.a-b
5-6	-Cálculo de áreas -Integrabilidad	CP-1.2, CP-1.3 CP-1.6
7-8	-Ampliación aplicación integral: volúmenes y magnitudes estáticas -Función integral	CP-1.8 CP-1.9
9-10-11	-Aplicación de la integral al análisis de resultados de procesos de cambio -Teorema fundamental del cálculo y regla de Barrow	P-RS2/CP-2.1 (RPC) (Int. técn.) (act. clase)
12		Evaluación
13		Corrección

Tabla 25. Secuencia y planificación de las actividades que componen la propuesta didáctica.

G. Evaluación

Se presenta a continuación la prueba para la evaluación del aprendizaje asociado de la propuesta didáctica presentada.

G.1 Diseño de la prueba escrita

En la siguiente tabla (tabla 26) se recoge la prueba escrita. Ya que dos los ejercicios 2 y 3 poseen enunciados extensos y en algunos ejercicios se plantear ciertas situaciones problemáticas que requieren la reflexión del alumno (2.ii y 3), se estima una duración aproximada de dos horas.

Ejercicio 1. (2,5+0,5 puntos)

Un automóvil circula a una velocidad v_0. En el instante t_1, el motor deja de impulsar coche por lo que, si no se acciona el freno, es la fuerza del rozamiento equivalente el único efecto que provoca una reducción en la velocidad.

En esta situación, la evolución de la velocidad con el tiempo $v(t)$ se puede modelizar mediante la siguiente función[12].

$$v(t) = \begin{cases} 25 & 0 \leq t \leq 20 \\ 25 \cdot e^{-\frac{(t-20)}{60}} & 20 < t \end{cases}$$

En ella, la velocidad se expresa en metros por segundo y el tiempo en segundos.

i) Representa dicha evolución temporal de la velocidad y calcula el área bajo la función $v(t)$ en los intervalos $[0,20]$ y $[0,80]$. ¿Cuál es su significado físico? ¿Puedes generalizar la expresión para cualquier intervalo $[0, t]$ $t \in [0, \infty)$? (2 puntos)

ii) Si en el instante $t = 20s$ se encuentra el coche a 1 km de un área de servicio, ¿podrá alcanzarla sin que los ocupantes se bajen a empujarlo? ¿y si estuviera a 1,5 km? (0,5 puntos + 0,5 puntos de bonificación)

Ejercicio 2. (3,5 puntos)

i) Hallar el área de la región comprendida entre la parábola $p: y = 1 - x^2$ y las siguientes rectas (r y s) (2,5 puntos):

$$r: y = -3 - 3 \cdot x$$

$$s: y = -3$$

ii) Determinar la recta que pasa por el vértice de la parábola y divide la región en otras dos de igual área (1 punto).

[12] En la elaboración del modelo matemático que representa la dinámica del coche se ha asumido que la fuerza de rozamiento equivalente es de tipo viscoso $F_r = \mu \cdot v$. Se obtiene, por tanto, al resolver la ecuación diferencial $m \cdot \frac{dv}{dt} = -\mu \cdot v$.

Problema 3. (5 puntos)

Cuando se hace girar a un vaso de agua cilíndrico por su eje de simetría axial a una velocidad angular constante (ω [rad/s]), la superficie del líquido en contacto con el aire adopta la forma de un paraboloide de revolución. Esta forma geométrica hace que se equilibren los efectos, por un lado, el de la fuerza centrífuga, y, por otro lado, de la presión hidrostática (altura de la columna de líquido) y de la presión atmosférica en dicha superficie[13].

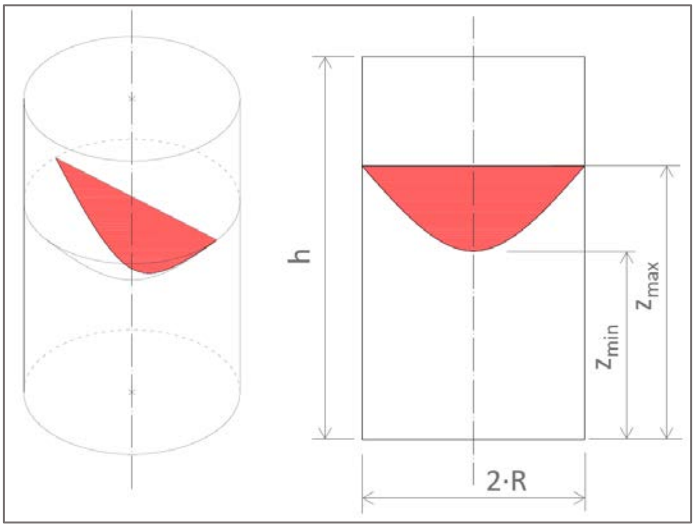
La siguiente expresión general relaciona el radio (r) de cada punto de la superficie del paraboloide de revolución con la coordenada axial (z):

$$r(z) = \sqrt{k \cdot z} \quad z \geq 0$$

Donde, en este caso, el origen de z, la coordenada correspondiente al eje vertical de giro, se ha situado en el vértice del paraboloide y el parámetro k se relaciona con la velocidad angular de giro ω [rad/s] y la constante de gravitación universal g [m/s^2] mediante la siguiente expresión:

$$k = \frac{2g}{\omega^2}$$

La figura muestra una representación de sistema físico.



i) En la situación que describe la figura 1, a partir de la cual se puede conocer el nivel máximo (z_{max}) y mínimo del líquido (z_{min}) en el cilindro de radio R,

> i.1) ¿a qué velocidad angular está girando? (Sugerencia: prueba a expresar el parámetro k en función de las cotas z_{max} y z_{min})
>
> i.2) hallar el volumen de líquido que contiene el vaso. ¿Qué nivel tendría el vaso en reposo (z_0)?

ii) Si se mantiene el mismo volumen de líquido, ¿A qué velocidad angular comenzaría a escapar el fluido del vaso? ¿Cuáles serían en dicha situación los niveles máximo y mínimo de líquido? Exprésalas en función del nivel en reposo (z_0) y de la altura del vaso (h).

[13] Se obtiene al resolver, en primer lugar, la ecuación en derivadas parciales que surge de la aplicación de la ley física asociada al equilibrio de fuerzas para la partícula fluida (White 2009):
$\vec{\nabla} \cdot p(r,z) = (\omega^2 \cdot r, 0, -g)$
Posteriormente, se debe imponer $p(r,z)|_{superficie} = p_{atmosférica}$

iii) Si analizas las relaciones obtenidas en el apartado anterior, ¿se pueden alcanzar valores negativos del nivel mínimo de líquido (z_{min})? ¿Tiene algún significado físico? iv.a) En ese caso, analiza la nueva situación para obtener la velocidad angular que hace que el líquido comience a escapar. iv.b) Si el nivel de líquido no alcanzara valores negativos, resolver la siguiente integral definida, ¿se te ocurre alguna situación análoga a la del problema que se pueda modelizar mediante dicha integral?[14] $$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ 2 \cdot \sqrt{(x-3)} & x \geq 3 \end{cases}$$ $$g(x) = \frac{x}{4} + 1$$ $$\int_{x=0}^{x=4} \pi(g(x)^2 - f(x)^2) \cdot dx$$

Tabla 26. Prueba para la evaluación del aprendizaje de la unidad didáctica dedicada a la integral definida.

G.2 Análisis de la prueba

Esta sección se ha estructurado de tal forma que en los tres principales apartados se analizan los principales aspectos de cada uno de los ejercicios planteados. En la tabla 27 se caracterizan estos ejercicios en términos de los aspectos que evalúan, a partir de las técnicas que evalúan, las tecnologías que las justifican y el campo de problemas asociado. Asimismo, se recogen en la tabla los estándares de evaluación según el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre (Boletín Oficial de Estado, 3 de enero de 2015).

Ejercicio 1
<u>Campo de problemas:</u> cálculo de áreas bajo curva, ampliación de la aplicación de la integral definida. <u>Técnicas que evalúa:</u> • Cálculo de áreas bajo curvas a través de la integral definida • Uso de la noción de área para el cálculo de integrales definidas de funciones sencillas (opcional) • Aplicación de la regla de Barrow • Integración de funciones sencillas • Cálculo de límites (pregunta adicional ii)

[14] Se proporciona la opción de resolver el apartado iv.b en lugar del iv.a en el caso de que no se hayan abordado, o resuelto con garantías, los apartados ii y/o iii.

Tecnologías involucradas:

- Teorema fundamental del cálculo
- Propiedades de la integral definida
- Noción de área y sus propiedades
- Definición de límite (pregunta adicional ii)

Estándares de aprendizaje:

- Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas (Bloque 3, 3.1)
- Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad (Bloque 3, 1.1)
- Aplica el concepto de límite a la resolución de problemas (Bloque 3, 3.2)
- Analiza y comprende el enunciado (Bloque 1, 2.1)
- Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad (Bloque 1, 8.4)

Ejercicio 2

Campo de problemas: cálculo de áreas bajo curvas

Técnicas que evalúa:

- Cálculo de áreas bajo curvas a través de la integral definida
- Uso de la noción de área para el cálculo de integrales definidas de funciones sencillas (opcional)
- Aplicación de la regla de Barrow
- Integración de funciones sencillas
- Uso de expresiones algebraicas para transcribir la situación problemática que se plantea

Tecnologías involucradas:

- Teorema fundamental del cálculo
- Propiedades de la integral definida
- Noción de área y sus propiedades

Estándares de aprendizaje:

- Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas (Bloque 3, 3.1)
- Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad (Bloque 3, 1.1)
- Analiza y comprende el enunciado (Bloque 1, 2.1)

Problema 3
Campo de problemas: cálculo de áreas bajo curvas, ampliación de la aplicación de la integral definida para el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución Técnicas que evalúa: • Cálculo de volúmenes de revolución a partir de la integral definida • Uso de la noción de volumen para el cálculo de integrales definidas de funciones sencillas (opcional) • Aplicación de la regla de Barrow • Integración de funciones sencillas • Uso de la visión espacial para comprender las situaciones que el problema plantea • Uso de expresiones algebraicas para transcribir la situación problemática que se plantea Tecnologías involucradas: • Teorema fundamental del cálculo • Propiedades de la integral definida • Noción de área y sus propiedades Estándares de aprendizaje: • Calcula el área de recintos limitados por rectas y curvas sencillas o por dos curvas (Bloque 3, 3.1) • Conoce las propiedades de las funciones continuas, y representa la función en un entorno de los puntos de discontinuidad (Bloque 3, 1.1) • Analiza y comprende el enunciado (Bloque 1, 2.1) • Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad (Bloque 1, 8.4)

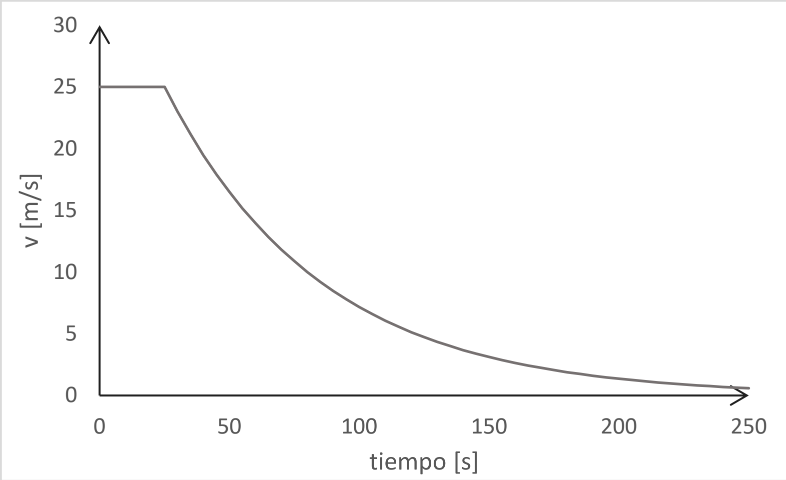
Tabla 27. Resumen de los aspectos que se evalúan en la prueba.

G.2.1 Ejercicio 1

G.2.1.a Solución

En la tabla 28 se propone una solución para el primer ejercicio. Como criterio general, pese a que existan en algunos casos otras técnicas para la resolución de los ejercicios/problemas, se ha optado por la utilización de aquellas específicas de la unidad didáctica dedicada a la integral definida. No obstante, el hecho de que los estudiantes utilicen cualquier técnica válida en sus resoluciones (p.ej. uso de la fórmula para el cálculo de área de un triángulo), no penaliza la nota numérica.

i) Representación gráfica:



ii) El área bajo la curva corresponde a los metros que ha recorrido el coche a partir del instante t=0, ya que elemento diferencial de área coincide con el elemento diferencial de espacio.

En primer lugar, se solicita el cálculo de la integral definida en dos intervalos. El principal objetivo de este cálculo repetitivo es evitar que los alumnos caigan en algún error en la aplicación de la regla de Barrow al resolver la siguiente cuestión.

$A_1 = \int_{t=0}^{t=20} v(t) \cdot dt = \int_{t=0}^{t=20} 25 \cdot dt = 500m$, espacio que recorre desde el instante $t = 0$ a $t = 20$.

$A_2 = \int_{t=0}^{t=20} v(t) \cdot dt + \int_{t=20}^{t=80} v(t) \cdot dt = A_1 + \int_{t=0}^{t=20} 25 \cdot e^{-\frac{(t-20)}{60}} \cdot dt = 500 + 1500 \cdot \left(\frac{e-1}{e}\right) m$, espacio que recorre desde el instante $t = 20$ a $t = 80$.

Se ha asociado dicha expresión general del espacio recorrido a la función s(t) que queda definida a trozos:

$$s(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{t=0}^{t} 25 \cdot dt & 0 \leq t \leq 20 \\ \displaystyle\int_{t=0}^{t=20} 25 \cdot dt + \int_{t=20}^{t} 25 \cdot e^{-\frac{(t-20)}{60}} \cdot dt & 20 < t \end{cases}$$

$$s(t) = \begin{cases} 25 \cdot t & 0 \leq t \leq 20 \\ 500 + 1500 \cdot \left(1 - e^{-\frac{(t-20)}{60}}\right) & 20 < t \end{cases}$$

Posibles respuestas correctas:

- En la representación gráfica se considera válida cualquier representación aproximada de la exponencial. Los aspectos que se consideran esenciales son: el recorrido de la función, la asíntota horizontal y la concavidad/convexidad. No es necesario que el tiempo de decaimiento (60s) quede fielmente reflejado en la gráfica.
- Cálculo del área de la primera región a partir de la fórmula del rectángulo
- No es necesario que los alumnos presenten el resultado del espacio recorrido en función del tiempo como función definida a trozos, es suficiente que tengan en cuenta los dos casos, $t \in [0, 20]$ y $t \in (20, \infty)$

Posibles errores:

- Error en la aplicación de la regla de Barrow, por ejemplo:

$$A_2 = \int_{t=0}^{t=80} v(t) \cdot dt = 1500 \cdot \left(1 - e^{-\cdot\frac{(80-20)}{60}}\right) - 25 \cdot 0$$

ii) Es suficiente con analizar si la función $s'(t) = s(t) - s(20)$ o la integral

$$s'^{(t)} = \int_{t=20}^{t} 25 \cdot e^{-\cdot\frac{(t-20)}{60}} \cdot dt = 1500 \cdot \left(1 - e^{-\cdot\frac{(t-20)}{60}}\right)$$

Se pueden igualan en algún momento a las distancias que se solicitan.

<u>Caso 1:</u>

$$1500 \cdot \left(1 - e^{-\cdot\frac{(t-20)}{60}}\right) = 1000$$

Dado que $0 < 1000/1500 < 1$, existe un valor de $t \in [0, \infty)$ que cumple la ecuación. En ese instante el coche habrá alcanzado el área de servicio.

<u>Caso 2:</u>

$$1500 \cdot \left(1 - e^{-\cdot\frac{(t-20)}{60}}\right) = 1500$$

No existe un valor de que haga que se verifique la ecuación, pero ya que

$$\lim_{t\to\infty} 1500 \cdot \left(1 - e^{-\cdot\frac{(t-20)}{60}}\right) = 1500$$

Es posible, si se espera lo suficiente, acercarse tanto como se quiera al área de servicio.

Posibles errores:

- Error al situar el origen en el desplazamiento o en el tiempo
- Error en la utilización del concepto de límite

Tabla 28. Solución del primer ejercicio.

G.2.1.b Clasificación de las tareas

En la tabla 29 se recogen y clasifican las tareas asociadas a la resolución del primer ejercicio de la prueba. En esta recopilación de tareas y en las siguientes, se han omitido las tareas auxiliares generales (T.A.G.) más frecuentes en este tipo de ejercicios:

- Cálculos aritméticos
- Simplificación de expresiones algebraicas

Se han hecho explícitas en aquellos casos en los que se ha considerado oportuno para aclarar los criterios de corrección.

<u>Apartado i)</u> 1. Representación gráfica de la función (T.A.E.[15]) 2. Aplicación de la integral definida para el cálculo de áreas (T.P.[16]) 3. Identificación del área bajo la curva con la magnitud física del problema que se modeliza (T.P.) 4. Utilización de la integral definida para proporcionar una expresión general que proporciona el cálculo del área bajo la curva en el intervalo $[0, t]$ $t \in [0, \infty)$ (T.P.) 5. Integración (T.A.E.)
<u>Apartado ii)</u> 1. Utilización de la expresión general para analizar los aspectos que se solicitan (T.A.E.) 2. Caso 1: conocer el recorrido de una función exponencial (T.A.E.) 3. Caso 2: aplicación del concepto de límite (T.P.)[17]

Tabla 29. Clasificación de las tareas del ejercicio 1.

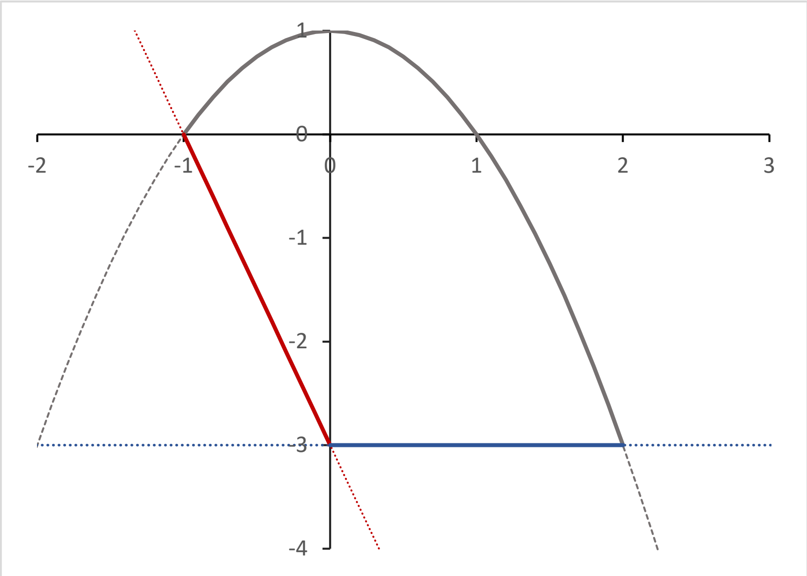
[15] T.A.E.: Tarea auxiliar específica.
[16] T.P.: Tarea principal.
[17] La utilización del concepto de límite para analizar e interpretar la asíntota se considera una tarea principal asociada al medio punto de bonificación.

G.2.2 Ejercicio 2

G.2.2.a Solución

La solución propuesta para el segundo ejercicio se recoge en la tabla 30.

i) En primer lugar, es conveniente hacer una representación de la región propuesta.



Los puntos de intersección son los siguientes:

$$p \cap r: (-1,0)$$

$$p \cap s: (2,-3)$$

$$r \cap s: (0,-3)$$

Una vez caracterizada la región, se puede calcular el área a partir de la siguiente suma de integrales definidas.

$$A = \int_{x=-1}^{0} [1 - x^2 - (-3 - 3x)]dx + \int_{x=0}^{2} [1 - x^2 - (-3)]dx = \frac{13}{6} + \frac{16}{3} = \frac{15}{2}$$

Posibles respuestas correctas:

- Ya que no se ha solicitado, no se exige la representación gráfica de las funciones
- Cualquier división de la región alternativa válida para el cálculo del área se evaluará con la máxima calificación
- El cálculo del área de regiones triangulares a través de la fórmula se considera válido

Posibles errores:

- Errores en la visualización de la región o en el cálculo de intersecciones. En el caso de los haya, se deberá valorar la coherencia en los siguientes pasos.
- Error en la división de la región para realizar el cálculo del área mediante integrales definidas.

ii) A partir de la representación gráfica de las funciones, se ve de forma intuitiva que la coordenada horizontal del punto de intersección entre la nueva recta t, que divide la región en dos de igual área, y se debe encontrar en el intervalo (0,2]. Se puede utilizar cómo incógnita dicha coordenada $P\ (x_0, -3)$.

La recta t tendrá la siguiente ecuación:

$$y = 1 - 4 \cdot \frac{x}{x_0}$$

El área de la región 1 (izquierda) se puede calcular con mediante las siguientes integrales.

$$A_1 = \int_{x=-1}^{0} [1 - x^2 - (-3 - 3x)]dx + \int_{x=0}^{x_0} \left[1 - 4 \cdot \frac{x}{x_0} - (-3)\right] dx = \frac{13}{6} + 2 \cdot x_0 = \frac{15}{2}$$

Por último, se debe imponer la condición que se exigía para la nueva región: $2 \cdot A_1 = A$

$$\frac{13}{3} + 4 \cdot x_0 = \frac{15}{2}$$

$$x_0 = \frac{19}{24}$$

La recta t es la que pasa por los puntos $(0,1)$ y $\left(\frac{19}{24}, -3\right)$.

$$t: y = -\frac{96}{19}x + 1$$

Posibles respuestas correctas:

- Cualquier división de la región alternativa válida para el cálculo del área se evaluará con la máxima calificación
- El cálculo del área de regiones triangulares a través de la fórmula se considera válido
- Ya que no se especifica la forma en la que debe definirse la recta t, se acepta cualquier forma de especificar dicha recta entre el conjunto de las rectas plano (p. ej. ecuación en cualquiera de sus formas, dos puntos, punto y una dirección)

Posibles errores:

- Errores derivados de la dificultad en la visualización o transcripción a lenguaje algebraico de la condición que expone el enunciado

Tabla 30. Solución del ejercicio 2.

G.2.2.b Clasificación de tareas

En la tabla 31 se desglosan y clasifican, siguiendo la secuencia para la realización del ejercicio de la solución propuesta, las tareas de la segunda pregunta de la prueba.

Apartado i) 1. Representación de la región delimitada por las curvas (T.A.E.) 2. Fraccionamiento de la región en intervalos en los que se pueda aplicar la regla de Barrow (T.P.) o cuya área se pueda calcular mediante fórmulas 3. Uso de la integral definida o de fórmulas para el cálculo de áreas (T.P.) 4. Integración (T.A.E.)
Apartado ii) 1. Representación geométrica de la situación que se plantea y algebrización (T.P.) 2. Evaluación del área de la región aplicando las propiedades del cálculo de áreas o de la integral definida (T.P.) 3. Resolución de la ecuación algebraica (T.A.G.) 4. Definir la recta que se solicita (T.A.E.)

Tabla 31. Clasificación de las tareas del ejercicio 2.

G.2.3 Problema 3

G.2.3.a Solución

La solución propuesta para el problema 3 se muestra en la tabla 32.

En primer lugar, resulta cómodo expresar el parámetro k en función de z_{max} y z_{min}. Si se mantiene el origen en el vértice del paraboloide, se tiene la siguiente relación:

$$R = \sqrt{k \cdot (z_{max} - z_{min})}$$

$$k = \frac{R^2}{z_{max} - z_{min}}$$

A partir de esta expresión se puede calcular la velocidad angular

$$\frac{2g}{\omega^2} = \frac{R^2}{z_{max} - z_{min}}$$

$$\omega = \sqrt{2g \cdot \frac{z_{max} - z_{min}}{R^2}}$$

De tal manera que el radio de cada punto de la superficie del líquido se puede expresar como:

$$r(z) = R \cdot \sqrt{\frac{z}{z_{max} - z_{min}}} \quad z \in [z_{min}, z_{max}]$$

El volumen de líquido se puede calcular entonces mediante a partir de la suma de dos integrales definidas:

$$V = \int_{z=-z_{min}}^{z=0} \pi \cdot R^2 \cdot dz + \int_{z=0}^{z=z_{max}-z_{min}} \pi \cdot \left(R^2 - R^2 \cdot \frac{z}{z_{max} - z_{min}}\right) \cdot dz$$
$$= \pi \cdot R^2 \cdot \frac{z_{max} - z_{min}}{2}$$

Si se iguala la expresión anterior a la correspondiente al volumen en reposo, se pude obtener la expresión para calcular el nivel en dicha situación.

$$\pi \cdot R^2 \cdot z_0 = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{z_{max} + z_{min}}{2}$$

$$z_0 = \frac{z_{max} + z_{min}}{2}$$

ii) La condición para que escape el líquido se corresponde al momento en el que su nivel máximo alcanza el borde del recipiente:

$$h = z_{max}$$

En ese caso el nivel líquido de líquido se puede expresar de la siguiente manera:

$$z_{min} = 2 \cdot z_0 - h$$

En este caso la velocidad angular se calcularía

$$\omega = \sqrt{4 \cdot g \cdot \frac{h - z_0}{R^2}}$$

iii) En la expresión obtenida, z_{min} alcanza valores negativos si $z_0 < \frac{h}{2}$. Se corresponden a los casos en los que la superficie del paraboloide interseca con la base del recipiente. En este caso, se utilizará la denominación z_v (cota del vértice de la parábola), ya que z_{min}, si se define como la cota mínima del líquido en este caso es igual a cero. En esta nueva situación, el volumen de líquido se puede calcular con la siguiente integral.

$$V = \int_{z=0}^{z=h} \pi \cdot \left(R^2 - R^2 \cdot \frac{z - z_v}{h - z_v}\right) \cdot dz = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{h^2}{2 \cdot (h - z_v)}$$

El objetivo principal de esta pregunta es guiar a los alumnos en la resolución del problema, de manera que se llame su atención sobre esta situación, que a partir de la representación gráfica que del enunciado podría pasar desapercibida. De este modo, se considera válido cualquier razonamiento por el cual el alumno en cuenta las dos situaciones que se dan en el problema.

De nuevo, se aplica la condición para que se produzca el escape de líquido:

$$\pi \cdot R^2 \cdot z_0 = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{h^2}{2 \cdot (h - z_v)}$$

$$z_v = \frac{h}{z_0} \cdot (2 \cdot z_0 - h)$$

De esta forma, la velocidad angular quedaría:

$$\omega = \sqrt{2g \cdot \frac{z_{max} - z_v}{R^2}} = \sqrt{2g \cdot \frac{h - \frac{h}{z_0} \cdot (2 \cdot z_0 - h)}{R^2}} = \sqrt{2g \cdot \frac{h}{R^2 \cdot z_0} \cdot (h - z_0)}$$

Posibles respuestas correctas:

- Si se utiliza la relación entre el volumen del paraboloide de revolución y el del cilindro que lo contiene, el problema se simplifica al planteamiento de las ecuaciones algebraicas equivalentes
- Si el alumno tiene en cuenta los dos posibles casos del problema, dependiendo de si el paraboloide de revolución interseca a la base del recipiente o no, sin necesidad de hacer el apartado iii se evaluará con la máxima calificación

Posibles errores:

- Derivados del uso del lenguaje algebraico
- Errores en la ubicación de los sistemas de referencia
- Derivados de dificultades para la visualización o para la transcripción a lenguaje algebraico de las condiciones que se plantean

Tabla 32. Solución del problema 3.

G.2.3.b Clasificación de las tareas

Las tareas que implica la resolución de los distintos apartados del problema tres se listan y clasifican en la tabla 33.

<u>Apartado i)</u> 1. Manipulación algebraica para expresar el parámetro k en función de los datos conocidos del problema (T.A.G.) 2. Aplicación de la integral definida para el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución (T.P.) 3. (Opcional) Aplicación correcta de las propiedades en el cálculo de volúmenes así como el cálculo de volúmenes de cuerpos cuya fórmula sea conocida. (T.A.E.) 4. Integración (T.A.E.) 5. Algebrización: planteamiento de las ecuaciones que permiten obtener la expresión de las magnitudes que el problema solicita (z_0 y ω) (T.A.E.)
<u>Apartado ii)</u> 1. Visualización (o representación) de la situación que se plantea (T.P.) 2. Transcripción de dicha situación al lenguaje algebraico (T.P.) 3. Resolución de la ecuación (T.A.G.)
<u>Apartado iii)</u> 1. Interpretación del lenguaje algebraico y/o visualización de la nueva situación que se plantea (T.P.)
<u>Apartado iv.a)</u> 1. Algebrización de la nueva situación (T.A.E.) 2. Aplicación de la integral definida para el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución (T.P.) 3. (Opcional) Aplicación correcta de las propiedades en el cálculo de volúmenes así como el cálculo de volúmenes de cuerpos cuya fórmula sea conocida. (T.A.E.) 4. Integración (T.A.E.)
<u>Apartado iv.b)</u> 1. Aplicación de las propiedades de la integral definida y de la regla de Barrow para el cálculo de la integral (T.P.) 2. Integración (T.A.E.) 3. Interpretación de la integral definida (T.P.)

Tabla 33. Clasificación de las tareas del ejercicio 3.

G.3 Criterios y guía para la calificación

En primer lugar, se ha realizado un reparto de puntos con el objetivo de ajustar la calificación numérica a unos determinados grados de desarrollos del aprendizaje. De este modo, se pueden diferenciar dos niveles principales:

- El alumno es capaz de aplicar la integral definida al cálculo de áreas bajo curvas y, en general, extender este uso a un conjunto limitado de contextos. Con este grado de desarrollo la nota máxima que se puede alcanzar se sitúa en torno al siete (apartados: 1.i, 2.i, 3.i, 3.iv.b)
- Si además, el alumno es competente para utilizar la integral definida en ciertas situaciones problemáticas (apartados 2.ii, 3.ii, 3.iii y 3.iv.b) optará a la máxima calificación en la prueba
- Por último, se ha concedido medio punto adicional para la calificación a la aplicación del concepto de límite en el primer ejercicio (1.ii)

.Los criterios se alinean con los siguientes que se indican en la Orden de 1 de julio de 2008 (Boletín Oficial de Aragón de 17 de julio)[18]:

- Calcular áreas de regiones limitadas por rectas y curvas sencillas fácilmente representables, y aplicar este cálculo a situaciones de la naturaleza o la tecnología.
- Transcribir problemas reales a un lenguaje algebraico, utilizar las técnicas matemáticas apropiadas en cada caso para resolverlos e interpretar las soluciones de acuerdo con el enunciado.

La metodología adoptada para otorgar la calificación numérica a cada ejercicio sigue el modelo de penalización de errores propuesto por Gairín et al. (2012). La penalización asociada a cada error está condicionada por el tipo de tarea en la que ha surgido. Así pues, en la guía para la calificación elaborada (tabla 34), se ha señalado la penalización máxima atribuible a los errores vinculados a cada una de las tareas.

[18] Estos criterios se recogen, a su vez, en la programación de la asignatura de Matemáticas para la prueba de acceso a la universidad elaborada por la Universidad de Zaragoza.

Ejercicio 1. Apartado i) (2 puntos)	
Tarea	Penalización
T.A.E. Representación gráfica de la función	≤1/3
T.P. Aplicación de la integral definida para el cálculo de áreas	≤1
T.P. Identificación del área bajo la curva con la magnitud física del problema que se modeliza[19]	≤1/3
T.P. Utilización de la integral definida para proporcionar una expresión general que proporciona el cálculo del área bajo la curva en el intervalo $[0, t]$ $t \in [0, \infty)$	≤1/3
T.A.E. Integración	≤1/3
T.A.G. Simplificaciones algebraicas	≤1/
Apartado i) (0,5+0,5 puntos)	
Tarea	Penalización
T.A.E. Utilización de la expresión general para analizar los aspectos que se solicitan (T.A.E.)	≤1/3
T.A.E. conocer y aplicar el recorrido de una función exponencial (T.A.E.)	≤1/3
T.P. aplicación del concepto de límite (T.P.)	1
T.A.G. Simplificaciones algebraicas, cálculos aritméticos	≤1/6
Ejercicio 2 Apartado i) (2,5 puntos)	
Tarea	Penalización
T.A.E. Tareas relacionadas con la determinación o visualización de la región[20]	≤1/3
T.P. Fraccionamiento de la región en intervalos en los que se pueda aplicar la regla de Barrow o cuya área se pueda calcular mediante fórmulas	≤1/5
T.P. Uso de la integral definida o de fórmulas para el cálculo de áreas	≤1/5

[19] Se rebaja la repercusión de la falta de identificación de la integral definida con el espacio recorrido ya que se considera que una dificultad de este tipo acarrea necesariamente una penalización significativa en el siguiente apartado del ejercicio.
[20] Se penalizará los fallos derivados de una delimitación errónea de la región, en ningún caso la ausencia de representación gráfica, pues el enunciado no lo pide.

T.A.E. Integración	≤1/3
T.A.G. Simplificaciones algebraicas, cálculos aritméticos	≤1/6
Apartado ii) (1 punto)	
Tarea	Penalización
T.P. Representación geométrica de la situación que se plantea y algebrización (T.P.)	≤1/5
T.P. Evaluación del área de la región aplicando las propiedades del cálculo de áreas o de la integral definida (T.P.)	≤1/5
T.A.E. Definición de la recta que se solicita	≤1/3
T.A.G. Resolución de la ecuación de primer grado, cálculos aritméticos y simplificaciones algebraicas	≤1/6
Problema 3 Apartado i) (1,5 puntos)	
Tarea	Penalización
T.A.G. Ajuste de la expresión general del paraboloide presentada a las condiciones que especifica el enunciado	≤1/6
T.P. Aplicación de la integral definida para el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución	≤1
T.A.E. Aplicación correcta de las propiedades en el cálculo de volúmenes así como el cálculo de volúmenes de cuerpos cuya fórmula sea conocida	≤1/3
T.A.E. Integración	≤1/3
T.A.E. Algebrización: planteamiento de las ecuaciones que permiten obtener la expresión de las magnitudes que el problema solicita (z_0 y ω)	≤1/6[21]
T.A.G. Simplificación de expresiones algebraicas (T.A.G.)	≤1/6
Apartado ii) (1 punto)	
T.P. Visualización (o representación) de la situación que se plantea (T.P.)	≤1/5
T.P. Transcripción de dicha situación al lenguaje algebraico (T.P.)	≤1/5
T.A.G. Resolución de la ecuación de primer grado, simplificación de expresiones algebraicas (T.A.G.)	≤1/6

[21] Se rebaja la penalización de esta T.A.E al considerar que acarrea suficiente penalización en los siguientes apartados.

Apartado iii) (0,5 puntos)	
T.P. Interpretación del lenguaje algebraico y/o visualización de la nueva situación que se plantea	≤1
Apartado iv.a) (1 punto)	
T.A.E. Algebrización de la nueva situación	≤1/3
T.P. Aplicación de la integral definida para el cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución	≤1
T.A.E. (Opcional) Aplicación correcta de las propiedades en el cálculo de volúmenes así como el cálculo de volúmenes de cuerpos cuya fórmula sea conocida	≤1/3
T.A.E. Integración	≤1/3
T.A.G. Simplificación de expresiones algebraicas (T.A.G.)	≤1/6
Apartado iv.b) (1 punto)	
T.P. Aplicación de las propiedades de la integral definida y de la regla de Barrow para el cálculo de la integral	≤1
T.A.E. Integración	≤1/3
T.A.G. Cálculos aritméticos	≤1/6

Tabla 34. Guía para la calificación de la prueba de aprendizaje.

Por último, para finalizar el proceso de evaluación, se dedicaría una sesión a la resolución de las cuestiones que hayan generado mayores dificultades a los estudiantes. Asimismo, con el objetivo de que los alumnos puedan mejorar su calificación, o para aquellos interesados, se puede plantear la actividad voluntaria de continuar el estudio del problema tres del examen. Podría ésta consistir en el análisis de cómo variaría el problema si el recipiente tuviera forma de cono o de tronco de cono. En este nuevo caso surgen situaciones en las que se integran los contenidos relacionados con interpretación geométrica de la derivada. Además, proporciona la oportunidad a los alumnos de abordar una actividad cercana a la resolución de problemas en un contexto más cómodo que el de una prueba escrita.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover, Nueva York.

Camacho, M., Depool, R. y Garbín, S. (2008). Integral definida en diversos contextos. Un estudio de casos. *Educación Matemática*, 20 (3), 33-57.

Colera, J., Oliveira, M. J. y García, R. (2003). *Matemáticas II Bachillerato*. Anaya.

Berry, J. S. y Nyman, M. A. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 481-497.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Whilemi, M. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 28 (3), 367-384.

Escoredo, A., Gómez, M. D., Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., del Río, J. y Sánchez, D. (2009). *Matemáticas II. 2º de Bachillerato*. Santillana, Madrid.

Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti, N. (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *Suma*, 35, 45-54.

Gairín, J. M., Muñoz, J. M., y Oller, A. M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVI*, SEIEM.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. *Suma*, 38, 53-67.

Geogebra. www.geogebra.org, último acceso 8/11/2016.

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático. De la antigüedad a nuestros días*. Alianza Editorial, Madrid.

Labraña, A. (2001). *Avaliación das concepcións dos alumnos de COU e bacharelato acerca do significado do cálculo integral*, Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela.

Llorens, J. L. y Santoja, F. J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, 5 (1), 61-67.

Monteagudo, M. F. y Paz, J. (2003). *Matemáticas. Ciencias de la naturaleza, tecnología.* Edelvives, Madrid.

Moreno-Marín, J. C. (2002). Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales. *Suma*, 40, 91-104.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral. *Relime*, 3 (2), 131-170.

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Relime*, 9 (1), 65-84.

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2011). La integral definida en Bachillerato. Restricciones institucionales de las pruebas de acceso a la universidad. *Investigación en Educación Matemática XV*, 461-470.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de Bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. Tesis Doctoral, Universidad de Jaén.

Pastor, A., Arranz, F., Baños, J. J., Asensio, M. I., Rufo, M. J. y Sanz, M. J. (1999). *Matemáticas 2º Bachillerato Ciencias y Tecnología*. Editorial Everest, Madrid.

Primo, A. (1989). *Matemáticas. Curso de Orientación Universitaria*. Ediciones S. M., Madrid.

Redondo, A. y Haro M. J. (2002). Experiencias sobre la aproximación intuitiva en Geometría. Una aproximación del número π en la ESO. *Suma*, 41, 69-75.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *Journal of Mathematical Behaviour*, 33, 230-245.

Tall, D. (1991). Intuition and rigor: the role of visalization in the calculus. *Visualization in Mathematics*, 19, 105-119.

Tipler, P. A. (1985). *Física*. Editorial Reverté, Barcelona.

Turégano, P. (1992). Una alternativa a la integral de Riemann. *Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 6, 227-235.

Turégano, P. (1997). El aprendizaje del concepto de integral. *Suma*, 26, 39-52.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 1998, 16 (2), 233-249.

Vizmanos, J. R., Hernández, J. y Alcaide F. (2009). *Matemáticas 2*. Ediciones SM, Madrid.

White, F. M. (2009). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, Nueva York.

Anexo. Resolución de ejercicios

I.1 Actividad inicial

Ejercicio AI-1

Los alumnos pueden comenzar analizando la recurrencia para los primeros casos:

$$d(1) = 1 \cdot H = H$$

$$d(2) = \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot H = 2 \cdot H$$

$$d(3) = \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot H = \frac{5}{2} \cdot H$$

$$d(4) = \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot H = \frac{11}{4} \cdot H$$

El término general se puede expresar de la siguiente forma:

$$d(n) = \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \cdots + 2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdot H$$

O, más formalmente:

$$d(n) = \left(2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} - 1\right) \cdot H$$

En este momento, si los alumnos no recuerdan, se puede mostrar que la distancia recorrida en cada rebote sigue una progresión geométrica de razón $1/2$ y se les proporciona por tanto la ayuda.

$$\sum_{i=1}^{n} a_1 \cdot r^{i-1} = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

En este caso, si este resultado se aplica al ejercicio se obtiene:

$$d(n) = \left(2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} - 1\right) \cdot H = \left[4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 1\right] \cdot H = \left[3 - \frac{1}{2^{n-2}}\right] \cdot H$$

En clase se mostrará que, pese a que la sucesión $d(n)$ es creciente, pues la distancia entre dos rebotes es siempre mayor que cero, dicha sucesión es convergente ya que:

$$\lim_{n\to\infty} d(n) = 3 \cdot H$$

Por lo tanto, si el proceso se prolonga indefinidamente, aunque la pelota realiza infinitos rebotes recorre una distancia $3 \cdot H$.

Ejercicio AI-2

La primera de familia de figuras –triángulo de Sierpinski[22]– se construye, de forma recurrente, eliminando en cada uno triángulo equilátero otro cuya área es la cuarta parte. Puede ayudar a construir las expresiones algebraicas correspondientes al perímetro y el área la siguiente tabla I.1. Para abreviar la notación, se utilizan P_1 y A_1 para designar el perímetro y el área de la primera figura.

$$P_1 = 3 \cdot l$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot l^2$$

Figura	Triáng. (*)	Perímetro, $P(n)$	Área, $A(n)$
1	0	P_1	A_1
2	1	$P_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot P_1$	$A_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \cdot A_1$
3	3	$P_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2}\right) = \frac{9}{4} \cdot P_1$	$A_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4^2}\right) = \frac{9}{16} \cdot A_1$
4	3^2	$P_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3^2}{2^3}\right) = \frac{27}{8} \cdot P_1$	$A_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4^2} - \frac{3^2}{4^3}\right) = \frac{27}{64} \cdot A_1$
n	3^{n-2}	$P_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{3^{i-1}}{2^{i-1}}\right) = \left(\frac{3^{n-1}}{2^{n-1}}\right) P_1$	$A_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4^2} - \frac{3^2}{4^3}\right) = \left(\frac{3^{n-1}}{4^{n-1}}\right) \cdot A_1$

Tabla I.1. Construcción de una tabla para la obtención de los términos generales correspondientes al perímetro y área de la primera figura. (*) Triángulos que se eliminan para la construcción de cada figura.

Se puede observar que tanto cada incremento en el perímetro como el decremento en el área siguen sendas sucesiones geométricas. Ambas sucesiones son monótonas y, sin embargo, mientras la correspondiente al perímetro no está acotada la correspondiente al área converge a cero.

[22] Durante la sesión se puede hacer una breve referencia a la geometría fractal ya que puede suscitar el interés de los alumnos.

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} A(n) = 0$$

En el caso de la segunda figura –copo de nieve de Koch–, se forma por añadir en cada lado un triángulo equilátero cuyo lado es la tercera parte aquél en el que se integra. De forma análoga se puede elaborar una tabla (tabla I.2) para observar la recurrencia en el término general.

Figura	Lados	Perímetro, $P(n)$	Área, $A(n)$
1	3	$3 \cdot l$	A_1
2	$3 \cdot 4$	$4 \cdot l$	$A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{9}\right) = \frac{4}{3} \cdot A_1$
3	$3 \cdot 4^2$	$\frac{4^2}{3} \cdot l$	$A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2}\right) = \frac{2^2 \cdot 5}{3^3} \cdot A_1$
4	$3 \cdot 4^3$	$\frac{4^3}{3^2} \cdot l$	$A_1 \cdot \left(1 + \frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3}\right) = \frac{2^3 \cdot 47}{3^5} \cdot A_1$
n	3^{n-2}	$\left(\frac{4^{n-1}}{3^{n-1}}\right) \cdot 3l$	$A_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right) = \frac{1}{5} \cdot \left(8 - 3 \cdot \frac{4^{n-1}}{9^{n-1}}\right) \cdot A_1$

Tabla I.2. Construcción de una tabla para la obtención de los términos generales correspondientes al perímetro y área de la segunda figura.

En este caso se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} A(n) = \frac{8}{5} \cdot A_1 = \frac{2\sqrt{3}}{5} \cdot l^2$$

Por tanto, el área de la figura coloreada resultante de un proceso infinito es un número real finito.

I.2 Ejercicios del primer campo de problemas

Ejercicio RS-CP-1.1

En primer lugar, se tratará de que los alumnos utilicen las herramientas que poseen de geometría analítica. Así, la curva que delimita superiormente la fachada parabólica puede expresarse mediante la función.

$$f(x) = \frac{h}{a^2} \cdot (a^2 - x^2)$$

Donde h es la altura máxima de la fachada y a la mitad de la su anchura máxima[23].

Dado que la función es simétrica, si se aplican las propiedades que los alumnos conocen del área, el problema se puede reducir al cálculo del área en la región donde $0 \leq x \leq a$. En términos de integral definida, que todavía no ha sido introducida, este paso implicaría la aceptación de la propiedad por la que $\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$ con $a < c < b$. Más adelante, se puede aprovechar este paso para justificar, en base a su utilidad en la resolución de los ejercicios, la institucionalización de esta propiedad.

La familia de particiones propuesta P_p divide el intervalo en $n = 2^p$ subintervalos de igual amplitud $x_i - x_{i-1} = \frac{a}{n}$.

$$P_p = \left\{0, \frac{a}{n}, \frac{2 \cdot a}{n}, \dots, \frac{i \cdot a}{n}, \dots, \frac{(n-1) \cdot a}{n}, a\right\}$$

Así, la suma inferior se puede expresar de la siguiente forma:

$$L(P_p, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot \frac{h}{a^2} \cdot \left(a^2 - \left(\frac{i \cdot a}{n}\right)^2\right) = \frac{a}{n} \cdot h \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{a}{n^2} \cdot h \sum_{i=1}^{n} \cdot i^2$$

Si se aplica la fórmula para la suma de los elementos de la sucesión $\sum_{i=1}^{n} \cdot i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$, las sumas inferiores asociadas a la familia de particiones propuestas se pueden expresar mediante la siguiente fórmula general.

$$L(P_p, f) = h \cdot a \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot n} - \frac{1}{6 \cdot n^2}\right)$$

[2323] En la resolución que se presenta del ejercicio se ha optado por mantener los parámetros h y a sin sustituir por los datos del problema. En la resolución de clase, dependiendo de la destreza de los alumnos para el manejo de expresiones algebraicas, se puede utilizar desde el principio dichos valores numéricos.

De la misma forma, si se aplican análogas operaciones algebraicas a la suma superior, se puede obtener la siguiente expresión:

$$U(P_p, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot \frac{h}{a^2} \cdot \left(a^2 - \left[\frac{(i-1) \cdot a}{n}\right]^2\right) = h \cdot a \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot n} - \frac{1}{6 \cdot n^2}\right)$$

La diferencia entre ambas aproximaciones proporciona información acerca de la calidad de la estimación del área.

$$\varepsilon = 2 \cdot \left[U(P_p, f) - L(P_p, f)\right] = 2 \cdot \frac{h \cdot a}{n}$$

A partir de este desarrollo se puede completar la tabla I.3:

Precisión	Partición	Número de nodos	$L(P_i,f)$ [m^2]	$U(P_i,f)$ [m^2]	ε [m^2]	Error relativo [%]
$10m^2$	P_7	128	795,300	804,675	9,375	1,17189%
$1m^2$	P_{11}	2048	799,707	800,293	0,586	0,07324%
$1dm^2$	P_{17}	2^{17}	799,995	800,005	$9{,}16 \cdot 10^{-3}$	0,00114%
$1cm^2$	P_{24}	2^{24}	800,000	800,000	$7{,}15 \cdot 10^{-5}$	0,00001%
$1mm^2$	P_{31}	2^{31}	800,000	800,000	$5{,}59 \cdot 10^{-7}$	0,00000%

Tabla I.3. Proceso de convergencia asociado a la familia de particiones P_p.

Una vez que los alumnos han avanzado hasta este punto, pueden observar que no existe ninguna partición finita de elementos que verifique $U(P,f) = L(P,f)$. Sin embargo se puede comprobar que el límite de las sucesiones asociadas a cada suma coincide.

$$\lim_{n\to\infty} h \cdot a \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot n} - \frac{1}{6 \cdot n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} h \cdot a \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot n} - \frac{1}{6 \cdot n^2}\right) = \frac{2 \cdot h \cdot a}{3}$$

Y dado, que, a partir del desarrollo deductivo, se había establecido que:

$$U(P,f) \geq \frac{Área}{2} \geq L(P,f)$$

Se tiene que el valor exacto del área coincide con dicho límite.

$$Área = \frac{4}{3} \cdot h \cdot a = \frac{2}{3} \cdot h \cdot A$$

En la resolución del apartado (v), los alumnos pueden comprobar que la proyección de la figura sobre el suelo produce una transformación de la siguiente forma en la curva.

$$g(x) = k \cdot f(x)$$

Es un buen momento para reflexionar acerca de la linealidad de la integral, que facilitaría el proceso de resolución. En efecto (teorema 6, tabla 10), el área sombreada en el suelo en verano es igual a:

$$Área\ sombra = \frac{1}{3} \cdot \int_{-30}^{30} 20 \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{30}\right)^2\right] \cdot dx = \frac{800}{3} m^2$$

En invierno, el problema se complica, ya que aparecen proyecciones sobre el edificio B (fig. I.1). Los alumnos pueden empezar por la superficie más sencilla: la correspondiente a la fachada este del edificio B. La altura (h) del triángulo se puede calcular aplicando el teorema de tales:

$$h = \frac{40}{60} \cdot f(x = -10) = \frac{320}{27} m$$

La base (b) se puede calcular mediante la siguiente relación:

$$b = g(x = -10) - 20 = \frac{100}{3} m$$

Luego el área sombreada sobre esta superficie es:

$$Área_{B/E} = \frac{h \cdot b}{2} = \frac{2^4}{3^3} \cdot 1000 m^2$$

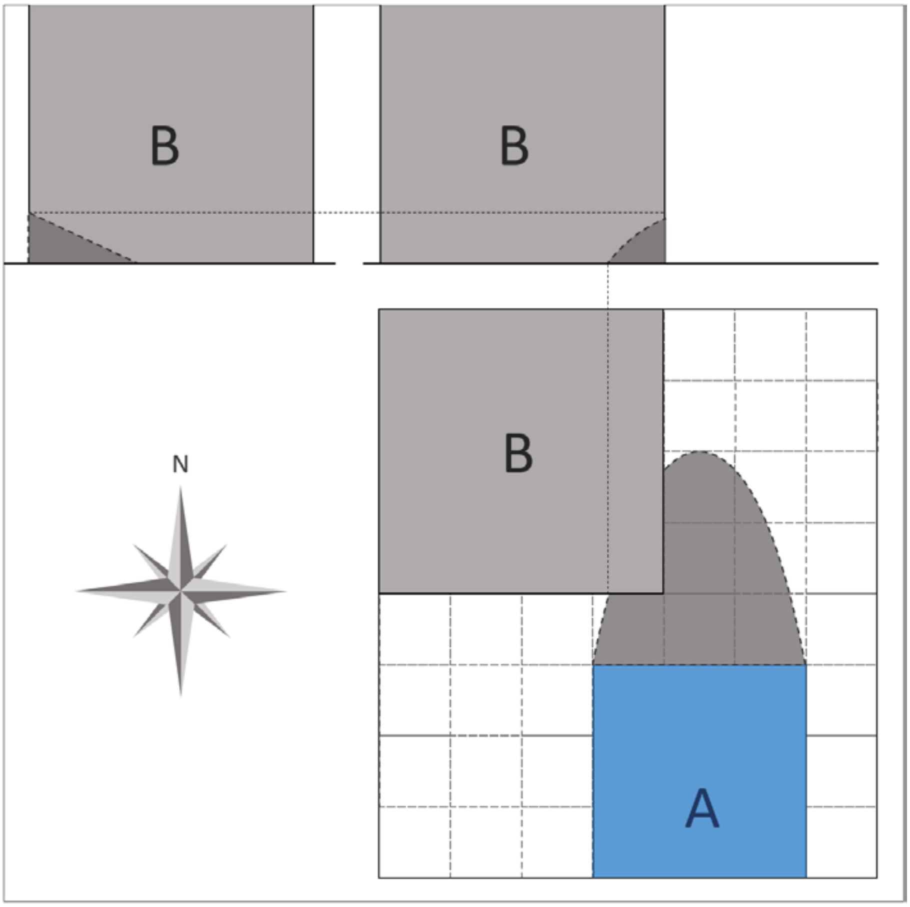


Fig. I.1. Representación de la proyección de la sombra del edificio A sobre las distintas superficies en el mediodía del día estival.

La resolución puede seguir por la región sombreada en el suelo. Pueden aprovechar la técnica de descomposición de la figura para calcularla. Más adelante, podremos aprovechar este procedimiento para cuestionar su validez en términos de integrales (que establecerá el teorema 4, tabla 10). Es necesario, primero, calcular la intersección de la curva $g(x)$ con la recta $y = 20$, $\left(-20\sqrt{3}, 20\right)$. Utilizando la nueva herramienta que supone la integral definida, los alumnos podrían expresar el área de la siguiente forma.

$$Área_S = \int_{-30}^{-20\sqrt{3}} g(x) \cdot dx + g\left(-20\sqrt{3}\right) \cdot \left(20\sqrt{3} - 10\right) + \int_{-10}^{30} g(x) \cdot dx$$

El hecho de que aparezcan nuevos intervalos de integración puede ser motivo para que se realicen indagaciones para obtener una fórmula general de integración de la función. Así, se puede completar el trabajo relativo a las propiedades de la integral (tabla 12), así como extraer sendas fórmulas generales para la integración de la función cuadrática y constante. Por ejemplo, para el caso de la función cuadrática se puede plantear el procedimiento similar al aplicado en la primera parte del ejercicio.

$$L(P_p, x^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{i \cdot b}{n}\right)^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{i=1}^{n} \cdot i^2 = b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot n} + \frac{1}{6 \cdot n^2}\right)$$

$$\int_0^b x^2 dx = \lim_{n\to\infty} b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot n} + \frac{1}{6 \cdot n^2}\right) = \frac{b^3}{3}$$

Por último, el área de la región sombreada en la superficie sur del edificio B se puede calcular de la siguiente forma. Una manera sencilla de representar la zona sombreada, aunque intuitivamente pueda no ser inmediata para los alumnos, es proyectar la arista horizontal inferior del edificio B sobre la fachada del edificio A. De nuevo, es necesario haber calculado la intersección entre la curva $f(x)$ y la recta horizontal $y = \frac{20}{3}$, $\left(-\frac{20}{3}\sqrt{3}, \frac{20}{3}\right)$.

$$Área_{B/S} = \int_{-\frac{20}{3}\sqrt{3}}^{-10} f(x) \cdot dx - f\left(-\frac{20}{3}\sqrt{3}\right) \cdot \left(20\sqrt{3} - 10\right)$$

El apartado que se plantea como resolución opcional requiere un análisis más detallado de la proyección de la sobra del edificio. En principio, en los laterales del edificio se puede proyectar sombra. Se plantea comenzar por el análisis de esta región (en la figura I.2 se representa una proyección de la sombra en el lateral).

Así pues, es necesario primero determinar el punto de tangencia entre la recta correspondiente a la dirección de los rayos del sol proyectada sobre el plano de la fachada y la parábola.

$$f'(x) = -\frac{4}{3} \cdot x = 3\sqrt{2}$$

Sin embargo la solución $x = -\frac{9\sqrt{2}}{4} < -3$ no se corresponde con ningún punto de la fachada, de modo que no se proyecta sombra. La fachada noroeste es, por tanto, la única que proyecta sombra sobre el suelo. En la figura I.3 se muestra la proyección de esta fachada. Asimismo, en ella se representa la relación entre las sumas superiores e inferiores para una partición dada asociadas al área de la fachada y de su sombra. De esta manera se tiene que:

$$Área_{A,NO/S} = \int_{-30}^{-30} \frac{\sqrt{2}}{6} f(x) \cdot dx = \frac{\sqrt{2}}{6} \int_{-30}^{-30} f(x) \cdot dx = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot Área_{A,NO} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 400m^2$$

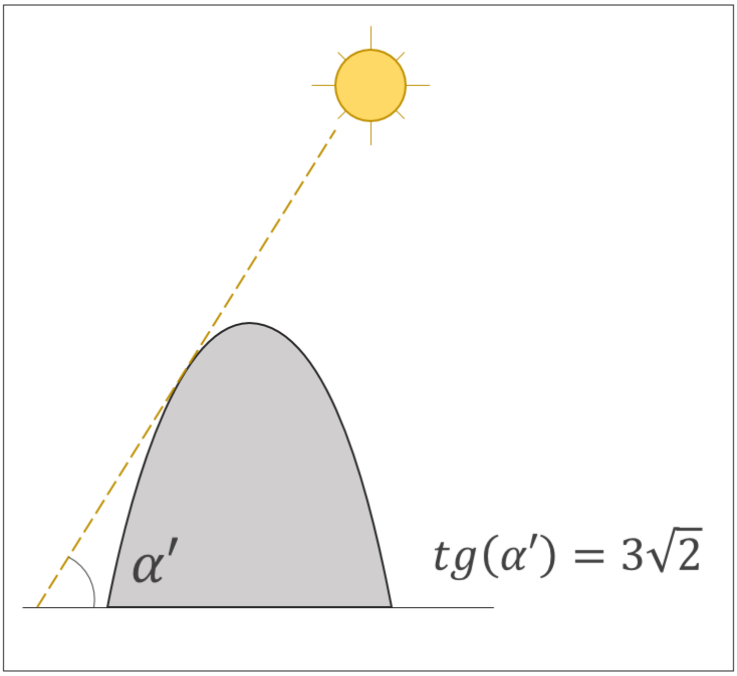


Figura I.2. Proyección de la sombra en la zona lateral del edificio.

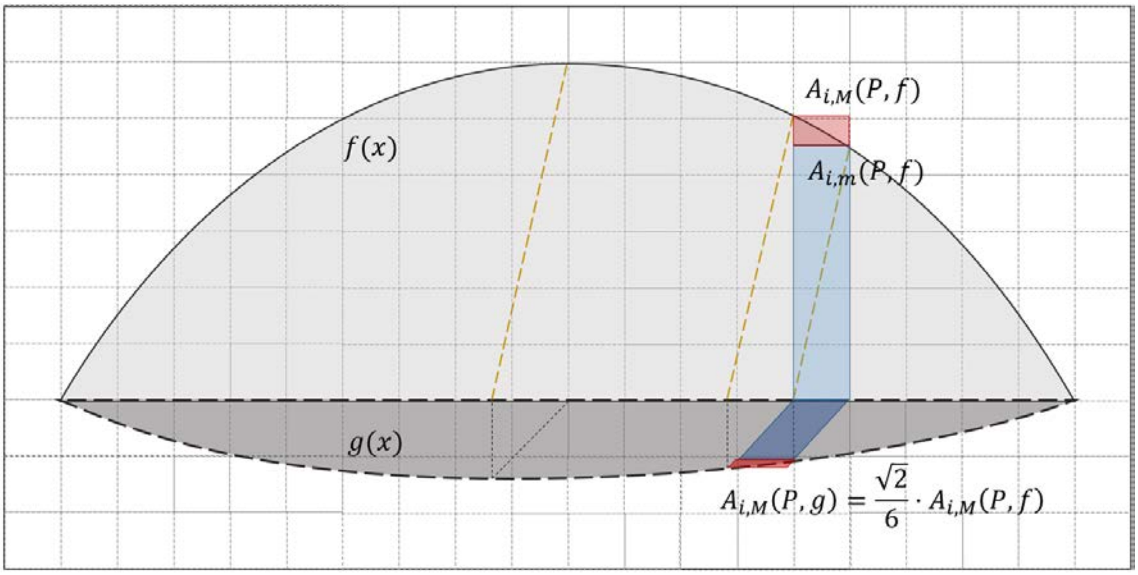


Figura I.3. Proyección de la sombra de la fachada noroeste.

Ejercicio CP-1.6

A continuación se presenta una tabla (tabla I.4) con las soluciones al ejercicio CP-1.6. En ella se indican las propiedades de la integral definida que los alumnos pueden utilizar, en este momento del desarrollo de la unidad, para resolverlas.

i) $\int_0^2 x\,dx = \frac{2\cdot 2}{2} = 2$ • Identificación integral-área (tabla 13)	ii) $-\int_0^b x\,dx = -\frac{b^2}{2}$ • Propiedad linealidad integral (tabla 12, teor. 6)
iii) $\int_{-2}^2 \lvert x\rvert\,dx = \frac{2\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 2}{2} = 4$ • Propiedad aditividad en el intervalo de integración (tabla 12, teor. 4)	iv) $\int_0^2 -(3 + 2\cdot x)\,dx = -3\cdot 2 - \frac{2\cdot 4}{2} = -10$ • Propiedad linealidad integral (tabla 12, teor. 5)
v) $\int_{-6}^2 \lvert 3 + 2\cdot x\rvert\,dx = \frac{7}{2}\cdot\left(2 + \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{2}\cdot\left(6 - \frac{3}{2}\right) =$ $= 63$	vi) $\int_a^b k\cdot x\,dx = k\cdot(b^2 - a^2)$
vii) $\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx = 0$ • $sen(x) = -sen(x+\pi)$	viii) $2\cdot\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi$
ix) $\int_{-1}^{\sqrt{2}/2} \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi\cdot\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$ $= \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}$	x) $\int_{-R}^b \sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{arccos\left(\frac{-b}{R}\right)}{2}\cdot R^2 + \frac{b\cdot\sqrt{R^2-b^2}}{2}$
xi) $k\cdot\int_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx = \frac{k}{2}\cdot\pi\cdot R^2$	xii) $\int_0^a [x - E(x)]\,dx = \frac{E(a)}{2} + \frac{[x-E(x)]^2}{2}$

Tabla I.4. Solución del ejercicio CP-1.2.

A partir de estos resultados se puede obtener el área de una elipse con diámetros a y b. Una expresión analítica explícita de dicha figura es la siguiente:

$$y = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}$$

El área de la figura se puede calcular a partir de la siguiente integral:

$$2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}dx$$

Si se aplican las propiedades de la integral definida y la identificación de esta operación con el área, se obtienen que:

$$2\int_{-a}^{a}\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}dx =\cdot\frac{b}{a}\cdot\int_{-a}^{a}2\cdot\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{b}{a}\cdot\pi\cdot a^2 = \pi\cdot a\cdot b$$

Ejercicio CP-1.3

i) y ii) En primer lugar, conviene representar la región delimitada por sendas parejas de funciones. En la siguiente figura (fig. I.4) se muestra la región correspondiente al primer caso (i):

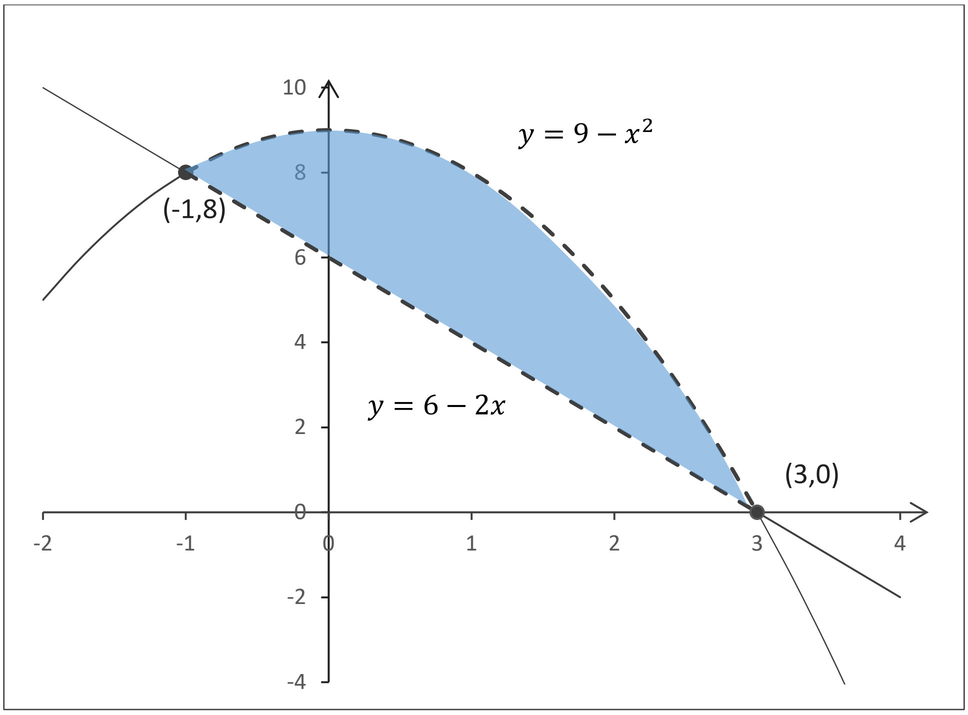


Figura I.4. Representación de la región.

Los puntos de corte entre las dos curvas se pueden calcular mediante la resolución de los siguientes sistemas de ecuaciones de dos incógnitas:

i) $\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = 6 - 2x \end{cases} \quad (-1{,}8) \quad (3{,}0)$

ii) $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad (-2{,}0) \quad (3{,}5)$

El área de ambas regiones se puede calcular mediante la sustracción del área bajo cada par de curvas. En este momento, se puede aprovechar las propiedades conocidas de la integral definida (teor. 5, tabla 12) para simplificar las operaciones algebraicas:

i) $A_{(i)} = \int_{-1}^{3}(9 - x^2)dx - \int_{-1}^{3}(6 - 2x)dx = \int_{-1}^{3}(3 + 2x - x^2)dx = \frac{32}{3}u^2$

ii) $A_{(i)} = \int_{-2}^{3}(x + 2)dx - \int_{-2}^{3}(x^2 - 4)dx = \int_{-2}^{3}(6 + x - x^2)dx = \frac{125}{6}u^2$

iii) En primer lugar, hay que observar que la función cumple las siguientes relaciones:

$$sen(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$sen(x) \leq 0, \quad -\pi \leq x \leq 0$$

Una vez que se ha analizado el signo de la función y conocida la relación entre la integral y el área (tabla 13), se puede calcular la integral por medio de la siguiente suma de integrales definidas:

$$A_{(iii)} = -\int_{-\pi}^{0} sen(x)dx + \int_{0}^{\pi} sen(x)dx$$

Por otra parte se tiene que $sen(x+\pi) = -sen(x)$, de modo que el área de la región comprendida entre $x = -\pi$ y $x = 0$ es igual a la de la región comprendida entre $x = 0$ y $x = \pi$.

$$A_{(iii)} = 2 \cdot \int_{0}^{\pi} sen(x)dx = 4$$

Tras la realización del ejercicio se pueden extraer las siguientes conclusiones (tabla I.5):

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[a,b]$, tal que $f(x) \geq g(x)$, entonces: • El valor de la integral definida $\int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot dx$ se corresponde con el área de la región delimitada por las funciones $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$. • El valor de la integral $\int_a^b \lvert f(x) \rvert \cdot dx$ se corresponde con el área de la región delimitada por la función $f(x)$, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje OX.

Tabla I.5. Relaciones entre el área y la integral definida obtenidas a partir de los resultados del ejercicio CP-1.3.

Ejercicio CP-1.4

El ejercicio tiene como objetivo acercar a los alumnos a la problemática de la integración numérica. Aunque el enunciado no acota el tipo de fórmula de integración que puede analizar en el ejercicio, los resultados del problema CP-1.1 orientan a la utilización de la regla del trapecio. Como se ha visto, las sumas superiores e inferiores aplicadas a la función del problema anterior se podían expresar de la siguiente forma:

$$U(P_p, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot \frac{h}{a^2} \cdot \left(a^2 - \left[\frac{(i-1) \cdot a}{n}\right]^2\right) = h \cdot a \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot n} - \frac{1}{6 \cdot n^2}\right)$$

$$L(P_p, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot \frac{h}{a^2} \cdot \left(a^2 - \left[\frac{(i-1) \cdot a}{n}\right]^2\right) = h \cdot a \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot n} - \frac{1}{6 \cdot n^2}\right)$$

Se puede ver, por tanto, que si se hace la media entre ambos valores aproximativos de la integral definida se elimina el término inversamente proporcional a n –número de subintervalos de la partición– del error asociado.

$$U(P_p,f)+L(P_p,f)=\frac{a}{n}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot f(0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}\cdot f(a)\right]$$

$$\frac{a}{n}\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot f(0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}\cdot f(a)\right]=h\cdot a\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6\cdot n^2}\right)$$

A continuación se completa la tabla I.3 con la nueva fórmula de integración (tabla I.6).

Precisión	P_i	n	$L(P_i,f)$ [m^2]	$U(P_i,f)$ [m^2]	ε	P_i	n	Trapecio	ε
$10m^2$	P_7	128	795,300	804,675	$9{,}4m^2$	P_3	8	796,8750	$3{,}1\ m^2$
$1m^2$	P_{11}	2048	799,707	800,293	$0{,}59m^2$	P_4	16	799,2188	$0{,}78\ m^2$
$1dm^2$	P_{17}	2^{17}	799,995	800,005	$0{,}92dm^2$	P_8	256	799,9969	$0{,}31\ dm^2$
$1cm^2$	P_{24}	2^{24}	800,000	800,000	$0{,}71cm^2$	P_{11}	2048	800,0000	$0{,}48\ cm^2$
$1mm^2$	P_{31}	2^{31}	800,000	800,000	$0{,}56mm^2$	P_{14}	16384	800,0000	$0{,}75\ mm^2$

Tabla I.6. Proceso de convergencia asociado a la familia de particiones P_p.

Ejercicio CP-1.5

El número π se puede aproximar a partir de siguiente integral definida:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{4}$$

Si se utiliza una partición uniforme P, las sumas superior e inferior proporcionan una aproximación a dicho número ($4\cdot U(P,f)$, $4\cdot L(P,f)$). En la siguiente figura (fig. I.5) se muestra la evolución del valor absoluto del error asociado a la estimación del número π que producen dichas sumas. En esta representación se ha añadido la aproximación que se obtiene de aplicar la regla del trapecio que se ha analizado en el ejercicio anterior (CP-1.4). Son necesarias unas particiones de 24, 192 y 209 subintervalos para obtener una aproximación con un error menor a la centésima del número π en el caso de aplicar, respectivamente, la regla de trapecio, la suma superior y la suma inferior.

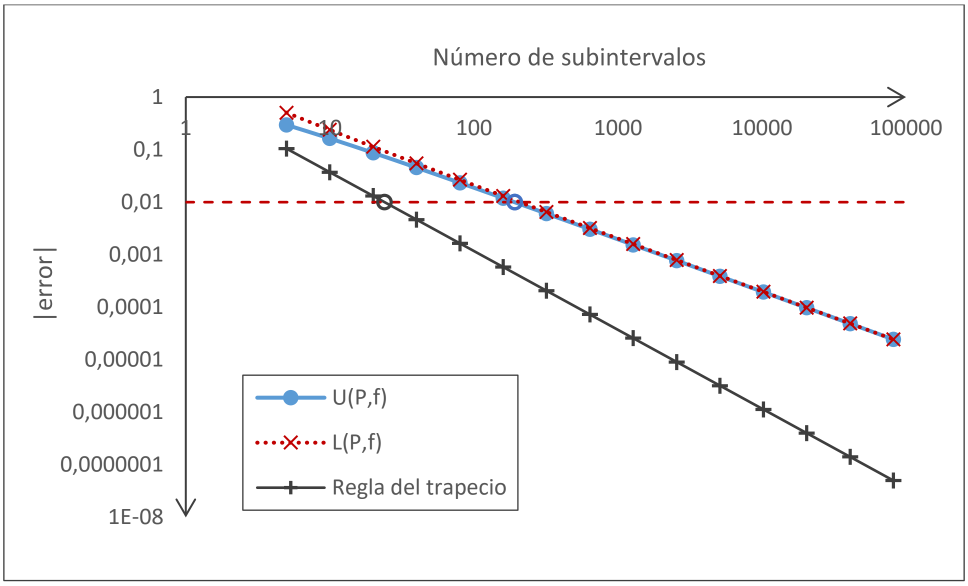


Fig. I.5. Evolución del error asociado a la estimación del número pi de las distintas sumas aproximativas.

Ejercicio CP-1.6

i) y iii) Para ambas funciones se puede tomar la siguiente partición:

$$P = \left\{-2, -\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}, 2\right\}$$

Donde el número δ verifica que $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$.

A continuación se calculan las sumas superiores e inferiores asociadas:

$$U(P, f_{(i)}) = 0 \cdot \left(2 - \frac{\delta}{2}\right) + 2 \cdot \delta + 2 \cdot \left(2 - \frac{\delta}{2}\right)$$

$$L(P, f_{(i)}) = 0 \cdot \left(2 - \frac{\delta}{2}\right) + 0 \cdot \delta + 2 \cdot \left(2 - \frac{\delta}{2}\right)$$

$$U(P, f_{(iii)}) = 2 \cdot \left(2 - \frac{\delta}{2}\right) + 2 \cdot \delta + 2 \cdot \left(2 - \frac{\delta}{2}\right)$$

$$L(P, f_{(iii)}) = 2 \cdot \left(2 - \frac{\delta}{2}\right) + 0 \cdot \delta + 2 \cdot \left(2 - \frac{\delta}{2}\right)$$

Ambas parejas de sumas, verifican que:

$$U(P, f) - L(P, f) = 2 \cdot \delta < \varepsilon$$

De modo que ambas funciones son integrables.

$$\int_{-2}^{2} f_{(i)} \cdot dx = 4$$

$$\int_{-2}^{2} f_{(iii)} \cdot dx = 8$$

ii) Se puede ver que en cualquier intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de cualquier partición se cumple que:

$$m_i = inf\{f_{(ii)}(x)/\ x\epsilon[x_i, x_{i+1}]\} = 0$$

$$M_i = sup\{f_{(ii)}(x)/\ x\epsilon[x_i, x_{i+1}]\} = 1$$

De modo que, necesariamente, se tiene que:

$$infU\left(P, f_{(ii)}\right) = 1$$

$$supL\left(P, f_{(ii)}\right) = 0$$

Por lo que la función no es integrable en el sentido Riemann.

iv) En primer lugar, se puede observar la siguiente relación útil asociada a las sumas superiores e inferiores de la función iv).

$$m_i = inf\{f_{(iv)}(x)/\ x\epsilon[x_{i-1}, x_i]\} = f_{(iv)}(x_{i-1})$$

$$M_i = sup\{f_{(iv)}(x)/\ x\epsilon[x_{i-1}, x_i]\} = f_{(iv)}(x_i)$$

De modo que se tiene que: $m_i = M_{i-1}$. Si se toma una partición P uniforme (es decir compuesta por subintervalos de igual longitud), las sumas de Darboux asociadas quedan de la siguiente forma:

$$U(P, f) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{(iv)}(x_i)$$

$$L(P, f) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f_{(iv)}(x_{i-1})$$

Y, por tanto, la diferencia entre ambas:

$$U(P, f) - L(P, f) = \frac{b-a}{n} \cdot \left[f_{(iv)}(b) - f_{(iv)}(a)\right]$$

De modo que si se toma un número de intervalos que cumpla:

$$n > \frac{b-a}{\varepsilon} \cdot \left[f_{(iv)}(b) - f_{(iv)}(a)\right]$$

Se verifica la siguiente condición necesaria y suficiente de integrabilidad para cualquier $\varepsilon > 0$.

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

Ejercicio CP-1.7

i) El área se puede calcular mediante la suma de los infinitos términos de la siguiente progresión geométrica:

$$A = 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = 2 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

ii) Una posible partición es la siguiente:

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2^m}$$

$$t_2 = \frac{1}{2^{m-1}} - \delta_1$$

$$t_3 = \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$(\dots)$$

$$t_n = 1$$

De esta forma, el dominio se divide en $2m$ subintervalos y la partición consta de $2 \cdot m + 1$ puntos.

La diferencia entre las sumas superiores se puede calcular de la siguiente forma:

$$U(P,f) - L(P,f) = \frac{1}{2^m} \cdot \left(\frac{1}{2^m} - 0\right) + \sum_{i=1}^{m-1} \delta_i \cdot \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{2\cdot m}} + \sum_{i=1}^{m-1} \delta_i \cdot \frac{1}{2^i}$$

Ante esta situación, se pueden optar por distintas opciones para definir δ_i. Una de ellas es tomar un valor constante δ que, por supuesto debe cumplir $\delta < \frac{1}{2^m}$.

Entonces quedaría de la siguiente manera la diferencia entre las sumas:

$$U(P,f)-L(P,f)=\frac{1}{2^m}\cdot\left(\frac{1}{2^m}-0\right)+\sum_{i=1}^{m-1}\delta_i\cdot\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^{2\cdot m}}+\delta\cdot\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{m-1}}}{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{2^{2\cdot m}}+\delta\cdot\left(1-\frac{1}{2^{m-2}}\right)$$

Las condiciones que se deben cumplir δ y $m\epsilon\mathbb{N}$, por tanto son

$$\frac{1}{2^{2\cdot m}}+\delta\cdot\left(1-\frac{1}{2^{m-2}}\right)<\varepsilon$$

$$0<\delta<\frac{1}{2^m}$$

Otra opción, es tomar una razón constante r entre cada δ y su subintervalo asociado. Entonces quedaría:

$$U(P,f)-L(P,f)=\frac{1}{2^{2m}}+\sum_{i=1}^{m-1}r\cdot\frac{1}{2^{i+1}}\cdot\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^{2m}}+\frac{r}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{2m-2}}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}+\frac{r}{6}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{2m-4}}\right)$$

$$\frac{1}{2^{2m}}+\frac{r}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2m-4}}\right)<\varepsilon$$

$$0<r<1$$

O, si se quiere expresar en función del mayor δ_0

$$\frac{1}{2^{2m}}+\frac{\delta_0}{24}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{2m-4}}\right)<\varepsilon$$

Ejercicio CP-1.8

El ejercicio plantea la situación problemática de evaluar la acumulación de cierta magnitud física, en este caso la fuerza. Dado que la presión varía con la posición de cada punto de la superficie horizontal, los alumnos pueden recurrir a la estrategia del problema anterior para obtener una aproximación.

$$U\big(P,A\cdot p(z)\big)=\sum_{i=1}^{n}A\cdot\rho_a\cdot g\cdot(z_i-z_{i-1})\cdot sup\{z\colon z_{i-1}\leq z\leq z_i\}$$

$$L\big(P,A\cdot p(z)\big)=\sum_{i=1}^{n}A\cdot\rho_a\cdot g\cdot(z_i-z_{i-1})\cdot inf\{z\colon z_{i-1}\leq z\leq z_i\}$$

De modo que la fuerza resultante F queda acotada entre las dos aproximaciones.

$$L \leq F \leq U$$

Así, se puede identificar el cálculo exacto de la resultante con la evaluación de la integral.

$$F = A \cdot \rho_a \cdot g \cdot \ supL\big(P, A \cdot p(z)\big) = A \cdot \rho_a \cdot g \cdot \ infU\big(P, A \cdot p(z)\big)$$
$$= \int_0^h A \cdot \rho_a \cdot g \cdot z \cdot dz$$

En este momento, se puede optar por dos alternativas que permiten calcular la integral. En primer lugar, se puede aprovechar el resultado de los problemas, es decir, que el valor de la integral se corresponde al área bajo la función. En este caso, dado que la región forma un triángulo rectángulo se puede de forma inmediata obtener el valor.

$$F = \int_0^h A \cdot \rho_a \cdot g \cdot z \cdot dz = \rho_a \cdot g \cdot \frac{A \cdot h^2}{2}$$

Por otra parte, se puede, de nuevo plantear una partición uniforme de n intervalos y evaluar la suma de los términos de la sucesión.

$$U\big(P_n, A \cdot p(z)\big) = \sum_{i=1}^{n} A \cdot \rho_a \cdot g \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot i = A \cdot \rho_a \cdot g \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$
$$= \rho_a \cdot g \cdot \frac{A \cdot b^2}{2} \cdot \frac{(n+1)}{n}$$

$$L\big(P_n, A \cdot p(z)\big) = \sum_{i=1}^{n} A \cdot \rho_a \cdot g \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 \cdot (i-1) = A \cdot \rho_a \cdot g \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$
$$= \rho_a \cdot g \cdot \frac{A \cdot b^2}{2} \cdot \frac{(n-1)}{n}$$

iii) En el tercer apartado se obtiene un valor negativo de la integral. El objetivo es, por un lago, que los alumnos vuelvan a encontrarse con un resultado negativo en el cálculo de una integral y, por otro lado, que a partir del modelo utilizado, interpreten los resultados.

$$F = -\int_0^h A \cdot (p - \rho_a \cdot g \cdot z) \cdot dz = -A \cdot h \cdot \left(p - \rho_a \cdot g \cdot \frac{h}{2}\right)$$

Problema CP-1.9

La resolución del problema se fundamenta en la comparación de los momentos estáticos resultantes, respectivamente, de la fuerza de gravedad y la presión sobre la presa. De esta forma, para que no vuelque la presa se tiene que asegurar que el momento estático causado por su propio peso es superior al correspondiente a la presión del agua cuando ésta se encuentra en su nivel máximo (h).

Si se aplica una estrategia similar a la del ejercicio anterior (CP-1.8) se pueden calcular sendos momentos estáticos a partir de las siguientes integrales.

$$M_{e,peso} = \rho_p \cdot g \cdot \int_0^a \frac{h}{a} x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \rho_p \cdot g \cdot a^2 \cdot h$$

$$M_{e,presión} = \rho_a \cdot g \cdot \int_0^h (h - x) \cdot x \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot \rho_a \cdot g \cdot h^3$$

$$M_{e,peso} > M_{e,presión} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{h} > \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_p}$$

Problema CP-1.10

La primera pregunta enfrenta a los alumnos a la problemática del cálculo del volumen de un cuerpo cuya fórmula general asociada, en principio, desconocen. Una vez que sean conscientes de dicha situación se les inducirá a que recurran a una estrategia similar a la utilizada en el problema P-RS1. Ésta consistirá en aproximar el volumen del cuerpo a partir de las cotas superiores e inferiores que se obtienen en cada partición que se realiza del mismo. Es importante que los alumnos aprecien la necesidad de construir particiones que les permitan de forma inmediata –utilizando fórmulas conocidas– acotar el volumen del cuerpo.

El volumen del paraboloide se puede acotar mediante la siguiente suma superior e inferior.

$$U = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (sup\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\})^2$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (inf\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\})^2$$

$$U \geq V_{par} \geq L$$

Dado que en este caso $f(x) \geq 0$ se tiene que $(sup\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\})^2 = sup\{f(x)^2: x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ y, análogamente, $(inf\{f(x): x_{i-1} \leq x \leq x_i\})^2 = inf\{f(x)^2: x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$. De la misma forma, el número es factor común de ambas sumas. De este modo, las expresiones anteriores se pueden presentar de la siguiente forma.

$$U = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot sup\{f(x)^2: x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \pi \cdot U(P, f(x)^2)$$

$$L = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot inf\{f(x)^2: x_{i-1} \leq x \leq x_i\} = \pi \cdot L(P, f(x)^2)$$

De esta forma, el volumen del cuerpo de revolución que se engendra a girar f(x), definida en el intervalo $[a, b]$, en torno al eje de abscisas, se puede calcular mediante la integral definida.

$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \cdot dx$$

En el caso concreto que se presenta en el problema $\left(f(x) = \frac{4\sqrt{10}}{5} \cdot \sqrt{x} \quad 0 \leq x \leq 10\right)$, el volumen del cuerpo se calcula de la siguiente forma:

$$V_{par} = \pi \cdot \int_0^{10} \frac{32}{5} \cdot x \cdot dx = \pi \cdot \frac{32}{5} \cdot \int_0^{10} x \cdot dx = \pi \cdot \frac{32}{5} \cdot \frac{100}{2} = 320\pi\ cm^3$$

ii y iii) Ahora el problema solicita un cálculo inverso: dado un cierto volumen determinar el volumen de líquido asociado. Los alumnos pueden razonar que se puede resolver el problema estableciendo como incógnita h el límite superior de integración.

$$\pi \cdot \frac{32}{5} \cdot \int_0^h x \cdot dx = \pi \cdot \frac{16}{5} \cdot h^2$$

Así, para el primero de los resultados que se solicitan:

$$h = \sqrt{1000 \cdot \frac{5}{16\pi}} = \sqrt{\frac{625}{2\pi}}$$

$$h = 99{,}7mm$$

El hecho de que se les haya solicitado un cálculo repetitivo en estos apartados tiene por objeto que los alumnos aprecien la utilidad de definir una función que relacione el nivel de líquido con el volumen.

$$V(h) = \pi \cdot \frac{32}{5} \cdot \int_0^h x \cdot dx = \pi \cdot \frac{16}{5} \cdot h^2$$

En este momento se puede institucionalizar la función integral.

Así, la función $F(h)$ relaciona el nivel de líquido con el volumen contenido en el recipiente.

$$F(h) = \pi \cdot \frac{32}{5} \cdot \int_0^h x \cdot dx = \pi \cdot \frac{16}{5} \cdot h^2 \quad 0 \leq h \leq 10$$

La solución al apartado (iii) se puede proporcionar a través de la evaluación de la función inversa de la anterior:

$$h_i = F^{-1}(V_i)$$

Donde

$$F^{-1}(V) = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{5}{\pi} \cdot V}$$

Una representación gráfica como la siguiente (fig. I.6) puede ayudar a los alumnos.

La separación entre dos marcas V_{i-1} y V_i se puede calcular a partir de la función $F^{-1}(V)$.

$$\Delta h_i = h_i - h_{i-1} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \left(\sqrt{h_i} - \sqrt{h_{i-1}}\right)$$

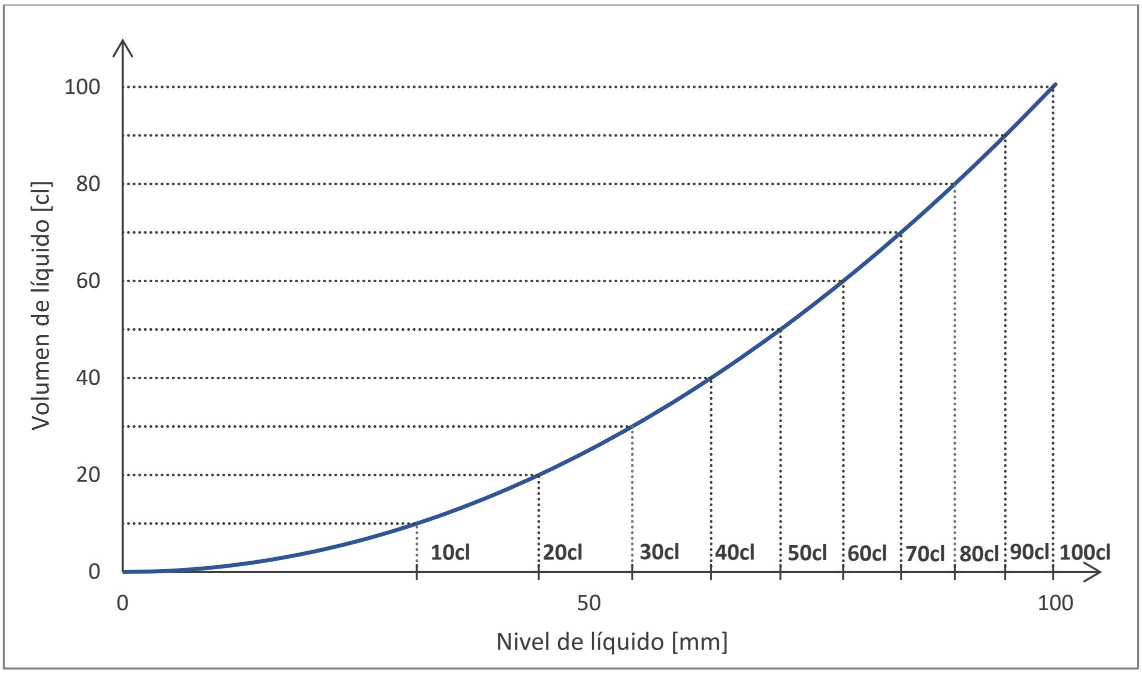


Fig. I.6. Representación gráfica de la graduación del recipiente.

Ejercicio CP-1.11

En el caso del cono, el enunciado del problema da –de forma intencionada– una descripción incompleta de la posición en que dicho cuerpo se sumerge. De esta forma, se pueden analizar los dos casos según esta inmersión se dé a partir del vértice (a) o la base (b).

(a) Inmersión a partir del vértice

Se puede plantear por medio de una integral el volumen del agua que desaloja un cono sumergido hasta una profundidad h.

$$V(h) = \int_0^h \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot h^3$$

De este modo, si se impone el principio de Arquímedes a partir del resultado anterior, se obtiene la profundidad de inmersión.

$$\rho_a \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot h^3 = \rho_s \cdot \frac{\pi}{3} \cdot R^2 \cdot H$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{\rho_s}{\rho_a}} \cdot H$$

(b) Inmersión a partir de la base

El volumen del agua desalojada se puede calcular mediante la siguiente integral:

$$V(h) = \int_{H-h}^{H} \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot x^2 \cdot dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot [H^3 - (H-h)^3] =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot [3 \cdot H^2 \cdot h - 3 \cdot h \cdot H^2 + h^3]$$

Si se impone la condición correspondiente al principio de Arquímedes:

$$\rho_a \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot [3 \cdot H^2 \cdot h - 3 \cdot h \cdot H^2 + h^3] = \rho_s \cdot \frac{\pi}{3} \cdot R^2 \cdot H$$

La profundidad h a la que flota el cuerpo es la que satisface la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{h}{H}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{h}{H}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{h}{H}\right) - \frac{\rho_s}{\rho_a} = 0$$

Por otro lado, si se representa la función V(h), se puede obtener gráficamente la solución a ambas situaciones como muestra la figura I.7.

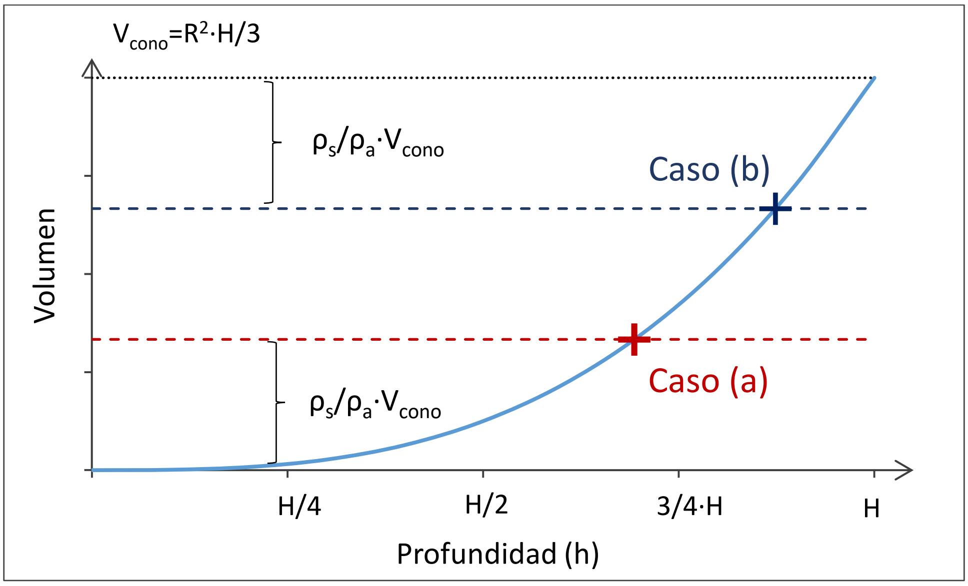


Fig. I.7. Representación gráfica de la solución del problema CP-1.11.

En el caso de la esfera, se puede calcular el volumen del agua desalojada se puede calcular a través de la siguiente integral:

$$V(h) = \int_{R-h}^{R} \pi \cdot (R^2 - x^2) \cdot dx = \pi \cdot \left(R \cdot h^2 - \frac{h^3}{3}\right)$$

De forma análoga, se puede calcular la profundidad a la que se sumerge para flotar dicho cuerpo mediante la resolución de la siguiente ecuación:

$$\left(\frac{h}{R}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{h}{R}\right)^2 - 4 \cdot \frac{\rho_s}{\rho_a} = 0$$

Por último, se puede aplicar para el cuerpo engendrado por la curva que muestra la figura del enunciado del problema CP-1.11 el método gráfico que presentado anteriormente (fig. I.7). Así pues, es necesario calcular cuál es el volumen de agua desalojado en función de la profundidad sumergida. Conviene, por tanto, obtener una expresión analítica de la curva $R(x)$. En la figura I.8 se muestra la curva del volumen desalojado en función de la profundidad del cuerpo que se sumerge. Es interesante que los alumnos adviertan que, pese a que la función $R(x)$ no es continua en el punto $x = H/3$ la función volumen desaloja sí lo es.

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{R}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{3 \cdot x}{H}} & 0 \leq x \leq \dfrac{H}{3} \\ \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{R}{H} \cdot (H - x) & \dfrac{H}{3} < x \leq H \end{cases}$$

$$V(h) = \pi \int_0^h R(x)^2 dx = \begin{cases} \pi \displaystyle\int_0^h R(x)^2 dx & 0 \leq x \leq \dfrac{2 \cdot H}{3} \\ \pi \left[\displaystyle\int_0^{\frac{2 \cdot H}{3}} R(x)^2 dx + \int_{\frac{2 \cdot H}{3}}^h R(x)^2 dx \right] & \dfrac{2 \cdot H}{3} < x \leq H \end{cases}$$

$$V(h) = \begin{cases} \dfrac{3\pi}{16} \cdot R^2 \cdot \dfrac{h^2}{H} & 0 \leq x \leq \dfrac{2 \cdot H}{3} \\ \dfrac{\pi}{12} \cdot R^2 \cdot H - \pi \cdot R^2 \cdot \left(h - \dfrac{2 \cdot H}{3}\right) & \dfrac{2 \cdot H}{3} < x \leq H \end{cases}$$

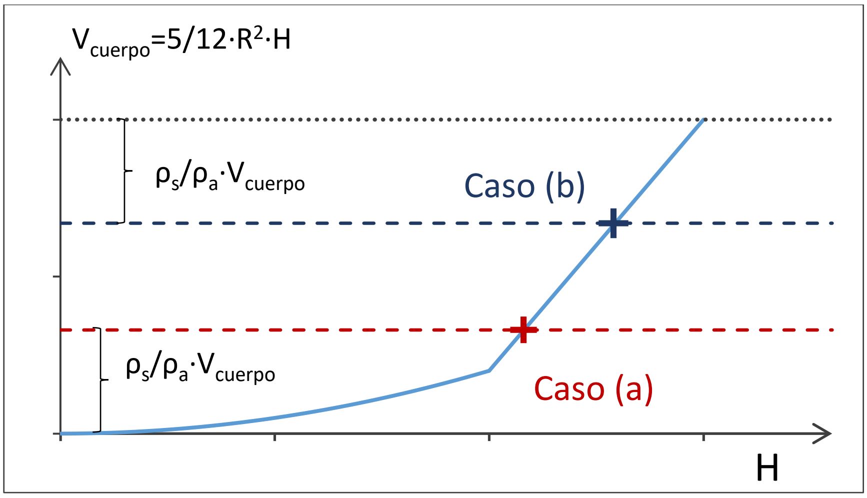


Fig. I.8. Representación gráfica de la solución del problema CP-1.11.

I.3 Ejercicios del segundo campo de problemas

Ejercicio CP-2.1

El objetivo de la primera parte del problema es la aplicación de la función integral a la cuantificación de la variación dentro de un proceso de cambio. Así, el volumen de líquido que ha entrado en un intervalo de tiempo [0,t] se puede aproximar mediante las sumas superior e inferior.

$$L(P,q) \leq \Delta V(t) = V(t) - V(t=0) \leq U(P,q)$$

Donde

$$U(P,t) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \cdot sup\{q(t), t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$$

$$L(P,t) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \cdot inf\{q(t), t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$$

Así pues, el volumen en cada instante se puede calcular por medio de la integral definida.

$$V(t) - V(t=0) = V(t) = \int_0^t q(\tau) \cdot d\tau$$

Ahora bien, el volumen que contiene el recipiente no puede superar su capacidad máxima.

Las integrales correspondientes a las tres primeras funciones de caudal propuestas se pueden calcular a partir de los resultados previos y de algunas propiedades de las integrales. Por ejemplo:

i) $\int_0^t q_0 \cdot d\tau = q_0 \cdot \int_0^t d\tau = q_0 \cdot t$

ii) $\int_0^t q_0 - k \cdot \tau \cdot d\tau = q_0 \cdot \int_0^t d\tau - k \cdot \int_0^t \tau \cdot d\tau = q_0 \cdot t - k \cdot \frac{t^2}{2}$

iii) $\int_0^t q(\tau) \cdot d\tau = \int_0^{n \cdot T} q(\tau) \cdot d\tau + \int_{n \cdot T}^t q(\tau) \cdot d\tau \qquad n = \left[\frac{t}{T}\right]$

Analíticamente, las funciones $V_i(t)$ quedan:

$$V_1(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{5} & t \leq \dfrac{8}{5} \cdot \pi \\ \dfrac{8}{25} \cdot \pi & t > \dfrac{8}{5} \cdot \pi \end{cases}$$

$$V_2(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{5} - \dfrac{t^2}{40} & t \leq 4 \\ \dfrac{2}{5} & t > 4 \end{cases}$$

$$V_3(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{5} & t \leq 2 \\ \dfrac{2}{5} & 2 < t \leq 3 \\ \dfrac{t}{5} - \dfrac{1}{5} & 3 < t \leq 5 \\ \dfrac{4}{5} & 5 < t \leq 6 \\ \dfrac{t}{5} - \dfrac{2}{5} & 5 < t \leq \dfrac{8}{5} \cdot \pi + 2 \\ \dfrac{8}{25} \cdot \pi & t > \dfrac{8}{5} \cdot \pi \end{cases}$$

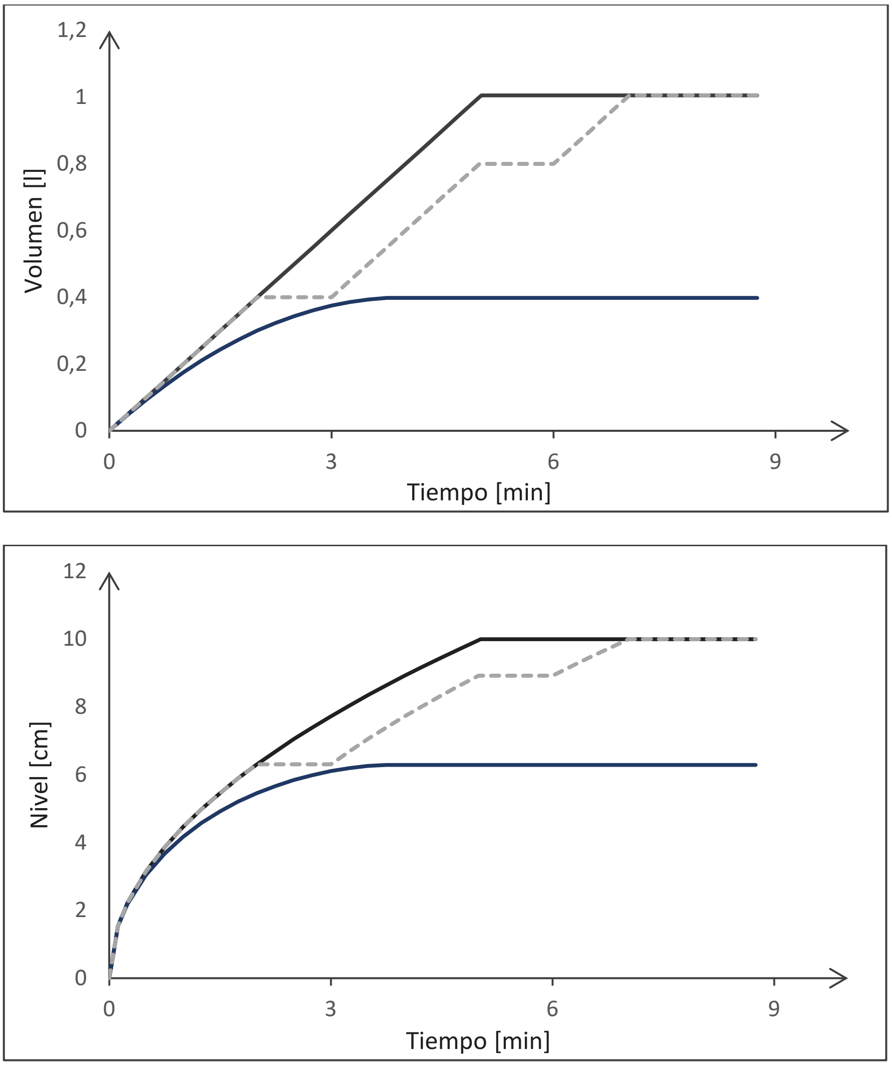


Fig. I.9. evolución temporal del volumen (sup.) y el nivel (inf.) de líquido.

En las primeras secciones de la segunda parte del problema se orienta a los alumnos hacia el cálculo de la derivada. En primer lugar, se solicita el cálculo de caudal medio en dos intervalos de tiempo distintos. Si se aplica la ley de conservación de la masa, siempre que se desprecien las variaciones de densidad en el fluido, dicho caudal volumétrico coincide con la tasa media de variación del volumen de líquido que contiene el recipiente.

$$\bar{q} = \frac{V(t_2) - V(t_2)}{t_2 - t_1}$$

La siguiente cuestión orienta el cálculo del caudal instantáneo a través de la derivada. Se solicita el cálculo en las distintas regiones del dominio de la función $V(t)$. Se ha escogido una función con puntos en los que la derivada no existe, con el objeto de que los alumnos puedan observar algunas condiciones para que se cumpla el principal resultado del primer teorema fundamental de cálculo.

$$q(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

t	$q(t)$
0	0
a $\quad 0 \leq a < 2$	$\frac{t}{5}$
2	n. e.
a $\quad 2 \leq a < 4$	0
4	0
a $\quad 4 \leq a < 6$	$\frac{t-4}{5}$

A partir de los resultados del ejercicio, los alumnos pueden observar que así como el volumen que contiene el depósito se calcula a través de la función integral:

$$V(t) = \int_0^t q(\tau) \cdot d\tau$$

De forma inversa el caudal se puede calcular, en los puntos donde $q(t)$ es continua, mediante la derivada.

$$q(t) = \frac{dV(t)}{dt}$$

En este momento se propone institucionalizar el primer teorema fundamental del cálculo.

El apartado 1.iv, que había quedado sin resolver, se puede abordar en este momento utilizando la regla de Barrow.

$$V(t) = \int_{t=0}^{t} \frac{1 + sen(\pi \cdot t)}{8} \cdot dt = \frac{1}{8} \cdot t - \frac{cos(\pi \cdot t) - 1}{8 \cdot \pi}$$

Problema CP-2.2

La desviación que produce un error Δh de lectura del nivel de líquido, se relaciona, a través de la función F(h), con la desviación en la estimación del volumen de líquido.

$$\Delta V = F(h + \Delta h) - F(h) = \pi \cdot \frac{16}{5} \cdot (2 \cdot h \cdot \Delta h + \Delta h^2)$$

La razón entre la desviación en el resultado global y el error de lectura da una buena cuantificación de la sensibilidad.

$$s = \frac{\Delta V}{\Delta h} = \pi \cdot \frac{16}{5} \cdot (2 \cdot h + \Delta h)$$

Sin embargo esta expresión tiene la desventaja de depender del nivel de error. Ya que éste es pequeño se puede aprovechar la derivada para cuantificar la sensibilidad.

$$s = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta h} = \frac{dF}{dh} = \pi \cdot \frac{32}{5} \cdot h$$

Ya que la función F(h) había quedado definida como:

$$F(h) = \int_{0}^{h} A(x) \cdot dx$$

Si se aplica el teorema fundamental del cálculo, se obtiene que la sensibilidad es igual al área de la sección, $A(h)$.

$$s = \frac{dF}{dh} = A(h)$$

Ahora bien, la sensibilidad se puede analizar, dependiendo de las exigencias de la medida, en términos relativos.

$$\frac{s}{V} = \frac{A(h)}{V(h)}$$

En el caso del recipiente que se proponía quedan ambas:

$$s = \pi \cdot \frac{32}{5} \cdot h$$

$$\frac{s}{V} = \frac{2}{h}$$

Luego la conclusión del apartado iv varía dependiendo si se fija la atención en la sensibilidad absoluta o relativa. En términos absolutos, se obtiene una mejor medida para valores bajos del nivel de líquido, mientras que, en dicha zona, aumenta el error relativo.

Los recipientes que cumplan que en todo el rango de medida tienen una sensibilidad relativa idéntica deben verificar la siguiente condición:

$$\frac{dF}{dh} = A(h) = k$$

El cilindro cumple esta condición.

En el caso de exigir una sensibilidad relativa uniforme en el rango de medida la condición es la siguiente:

$$\frac{\frac{dF}{dh}}{F(h)} = k$$

Se puede ver que las funciones exponenciales satisfacen esta ecuación[24].

$$F(h) = V_0 \cdot e^{k \cdot h}$$

Sin embargo, desde el punto de vista práctico, la construcción de un recipiente con esta forma no es posible debido a que ningún punto de la curva verifica que $R(h) = 0$.

Ejercicio CP-2.3

En primer lugar, se puede calcular la cantidad de líquido, $V_e(t)$, que ha escapado hasta un tiempo t mediante la siguiente integral:

$$V_e(t) = \int_0^t \frac{8\pi}{250} \cdot e^{-\frac{\tau}{10}}\, d\tau = \frac{8\pi}{25} \cdot \left[-e^{-\frac{\tau}{10}}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{8\pi}{25} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$$

Así pues, se trata de igualar esta función a la mitad del volumen del recipiente $160\pi cm^3$ (ejercicio CP-1.10).

[24] No se introduciría ningún comentario acerca de la unicidad de la solución de la ecuación diferencial.

$$\frac{8\pi}{25} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) = \frac{160\pi}{1000}$$

$$t = 10 \cdot \ln(2) \approx 6'56''$$

En el segundo caso, la igualdad se plantea utilizando el volumen total del recipiente: $320\pi cm^3$

$$\frac{8\pi}{25} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right) = \frac{320\pi}{1000}$$

Dado que no existe un valor de t que verifique: $e^{-\frac{t}{10}} = 0$, pero ya que

$$\lim_{x \to \infty} e^{-\frac{t}{10}} = 0$$

Se concluye que el depósito nunca llega quedar vacío. Sin embargo, puede llegar a tener un volumen de líquido tan pequeño como se quiera si se espera lo suficiente.

Ejercicio CP-2.4

Ya que la aceleración se define como la tasa de variación instantánea de la velocidad y, análogamente, esta última como la tasa de variación instantánea del desplazamiento. Se pueden definir de la siguiente forma las correspondientes funciones ($a(t)$: aceleración; $\Delta v(t)$: variación acumulada de la velocidad; $v(t)$: velocidad; $y(t)$: posición; $d(t)$: despladamiento).

$$a(t) = -g$$

$$\Delta v(t) = \int_0^t a(\tau) \cdot d\tau = -g \cdot t \qquad v(t) = v(0) - \Delta v(t) = v_0 - g \cdot t$$

$$\mathrm{y}(t) = \int_0^t v(\tau) \cdot d\tau = v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} \qquad \mathrm{d}(t) = \int_0^t |v(\tau)| \cdot d\tau$$

$$\mathrm{d}(t) = \begin{cases} v_0 \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2} & 0 \leq t \leq \frac{v_0}{g} \\ \frac{g \cdot {v_0}^2}{2} + g \cdot \frac{\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2}{2} & \frac{v_0}{g} \leq t \leq 2 \cdot \frac{v_0}{g} \end{cases}$$

El tiempo que le cuesta volver a la posición original es $2 \cdot \frac{v_0}{g}$.

Se puede aprovechar este resultado para calcular el tiempo de ocupa el proceso descrito en el problema AI-1. Del sistema físico que describe dicho ejercicio se conoce la altura máxima que alcanza la pelota en cada rebote, que se puede relacionar con la velocidad $v_{0,\mathrm{n}}$, es decir aquella que tiene el objeto en el instante del rebote, mediante la siguiente ecuación.

$$H_n = \frac{H}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{{v_{0,\mathrm{n}}}^2}{g}$$

Luego el tiempo (Δt_{n}, $n = 1{,}2 \ldots$) que duran el proceso de rebote n, se puede expresar relacionar con la altura H_n.

$$\Delta t_n = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{H_{\mathrm{n}}}{g}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\mathrm{H}}{2^{n-2} \cdot g}}$$

Es preciso tener en cuenta que Δt_0, el tiempo que transcurre desde que se deja caer la pelota hasta que impacta con el suelo, no sigue la misma ley general.

$$\Delta t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot \mathrm{H}}{g}}$$

Así pues, el tiempo hasta el rebote n (t_{n}, $n = 0{,}1{,}2 \ldots$) se puede expresar de la siguiente forma:

$$t_n = \Delta t_0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t_n = \sqrt{\frac{2 \cdot \mathrm{H}}{g}} + \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2 \cdot \frac{\mathrm{H}}{2^{n-2} \cdot g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \mathrm{H}}{g}} \cdot \left(1 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2}^{i-1}}\right)$$

De nuevo, se tiene la suma de los términos de una sucesión geométrica. En la siguiente expresión se han realizado ya las operaciones y racionalizado:

$$t_n = \sqrt{\frac{2 \cdot \mathrm{H}}{g}} \cdot \left(1 + \sqrt{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2}^{i-1}}\right) = 2 \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right] \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{g}}$$

De modo que se puede calcular el tiempo que ocupa el proceso infinito (t), ya que la sucesión t_n es convergente.

$$t = \lim_{n \to \infty} 2 \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right] \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{g}} = 2 \cdot \left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{g}}$$

Ejercicio CP-2.5

A continuación se completa la tabla (tabla I.7) que propone el ejercicio CP-2.5. En ella se indican los puntos en los que no se cumplen las condiciones que señala el teorema fundamental del cálculo.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
k	$k \cdot x + C$	$k \cdot e^{b \cdot x}$	$k \cdot \frac{e^{b \cdot x}}{b} + C$
$k \cdot (b \cdot x)^m$ $m \neq -1$	$\frac{k}{b} \cdot \frac{(b \cdot x)^{m+1}}{m+1} + C$ (Si $m < 0, x \neq 0$)	$k \cdot sen(b \cdot x)$	$-\frac{k}{b} \cdot cos(b \cdot x) + C$
$\frac{k}{b \cdot x + a}$	$\frac{k}{b} \cdot ln\lvert b \cdot x + a\rvert + C$ (Si $x \neq -\frac{a}{b}$)	$k \cdot cos(b \cdot x)$	$\frac{k}{b} \cdot sen(b \cdot x) + C$

Tabla I.7. Tabla con las funciones primitivas que solicita el ejercicio CP-2.5.