

Especialidad de Matemáticas

# Trabajo Fin de Máster

**Teorema de Thales: una propuesta  
didáctica para 2<sup>o</sup> de ESO**

**Thales' theorem: teaching proposal for  
2<sup>nd</sup> of Secondary Education**

Autor: Eduardo Herranz Masegosa

Director: Miguel Ángel Marco Buzunariz

Julio 2016



**Universidad  
Zaragoza**

# INDICE

<b>A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR .....</b>	<b>2</b>
<b>B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO. ....</b>	<b>6</b>
<b>C. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO .....</b>	<b>9</b>
<b>D. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBETO MATEMÁTICO .....</b>	<b>14</b>
<b>E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS.....</b>	<b>16</b>
<b>F. SOBRE LAS TÉCNICAS.....</b>	<b>22</b>
<b>G. SOBRE LAS TECNOLOGÍAS .....</b>	<b>27</b>
<b>H. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA.....</b>	<b>29</b>
<b>I. SOBRE LA EVALUACIÓN .....</b>	<b>32</b>
<b>J. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB.....</b>	<b>42</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>44</b>

## A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

En este Trabajo Fin de Máster, que en adelante llamaremos para abreviar TFM, quiero desarrollar una propuesta didáctica sobre el objeto matemático: el Teorema de Thales y semejanza de triángulos.

Este objeto se enseña por primera vez en la etapa de 2ºESO, aunque el concepto de semejanza ya ha sido introducido en cursos anteriores de 6ºprimaria y 1ºESO.

He podido cerciorarme que en estos cursos anteriores no dan como tal la semejanza, y los alumnos hablan de figuras parecidas (entre ellas triángulos) para hablar de semejanza.

Este objeto matemático está incluido en el currículo aragonés de Educación Secundaria Obligatoria LOE (Orden de 9 de mayo de 2007 del Departamento de Educación, Cultura y Deporte). Más concretamente en el Bloque 4 del segundo curso titulado ‘*Geometría*’ y que dice lo siguiente, seleccionando lo que nos interesa de los contenidos,

- ∞ *El triángulo. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Semejanza de triángulos: teorema de Thales. Criterios de semejanza de triángulos.*
- ∞ *Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza. Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Homotecia.*

En cuanto a los criterios de evaluación, la siguiente selección escogida del currículum, creo que es acorde:

- ∞ “ *Utilizar números enteros, fracciones, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.* ”.
- ∞ “ *Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana* ”
- ∞ “ *Utilizar el lenguaje algebraico para simbolizar, generalizar e incorporar el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado como una herramienta más con la que abordar y resolver problemas.* ”

Las cosas a día de hoy están confusas en el área de educación, en cuanto a legislación se refiere. Así que también voy a incluir el estudio de este objeto matemático y su repercusión en el examen del currículo LOMCE.

Sorprendentemente en Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, en el currículo de 1º y 2º Eso, en el bloque 3 de '*Geometría*', no nombra el teorema de Thales por ningún lado y hace algo de referencia a la semejanza. Dice lo siguiente en la parte de los contenidos:

- ∞ *“Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala.”*

Los criterios de evaluación relacionados con lo anterior son:

- ∞ *“Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.”*

Y en cuanto al estándar de aprendizaje utilizado es:

- ∞ *“Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.”*

Sin embargo en el currículo de 3º ESO de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas habla del teorema en el bloque 3 de '*Geometría*', en los contenidos dice lo siguiente:

- ∞ *“Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas.”*

El criterio de evaluación es el siguiente:

- ∞ *“Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener medidas de longitudes, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos”*

Y los estándares de aprendizaje relacionados con lo anterior son:

- ∞ *“Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados. Establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. ”*
- ∞ *“Reconoce triángulos semejantes, y en situaciones de semejanza utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes. ”*
- ∞ *“Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.”*

Por último en el currículo de Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas en 3º ESO también aparece este contenido en el bloque 3 de ‘Geometría’ dice:

- ∞ *“Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas.”*

Con el criterio de evaluación:

- ∞ *“Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes de los cuerpos elementales, de ejemplos tomados de la vida real, representaciones artísticas como pintura o arquitectura, o de la resolución de problemas geométricos”*

Y los estándares de aprendizajes:

- ∞ *“Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados y establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes.”*
- ∞ *“Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.”*
- ∞ *“Calcula dimensiones reales de medidas de longitudes y de superficies en situaciones de semejanza: planos, mapas, fotos aéreas, etc.”*

En cuanto a los campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas a este objeto matemático y las cuales pretendo enseñar son las siguientes:

1. Los campos de problemas a trabajar durante las clases son:

- I. División de segmentos en partes iguales y proporcionales.
- II. Determinar el segmento cuarto proporcional a 3 segmentos dados.
- III. Determinar segmento tercero proporcional a 2 segmentos dados.
- IV. Determinar si dos triángulos son semejantes.
- V. Calcular la altura de un triángulo rectángulo.
- VI. Calcular los catetos de un triángulo rectángulo.
- VII. Construcción de figuras semejantes.
- VIII. Cálculo de longitudes de segmentos.
- IX. Cálculo de alturas

2. Las técnicas necesarias para resolver los campos de problemas anteriormente citados son:

- I. Técnica tradicional para dividir segmentos en partes iguales y proporcionales
- II. Técnica tradicional para determinar el segmento cuarto proporcional a 3 segmentos dados.
- III. Técnica tradicional para determinar el segmento tercero proporcional a 2 segmentos dados.
- IV. Criterios de semejanza
- V. Teorema Altura
- VI. Teorema Cateto
- VII. Homotecias
- VIII. Pantógrafo

3. Para las tecnologías que nos justificarán las técnicas, tenemos los siguientes conceptos:

- I. Teorema de Thales
- II. Semejanza de triángulos

## **B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO.**

En el estado de la enseñanza del objeto matemático que estoy tratando, me voy a basar en 3 libros de texto y un cuestionario que he enviado a diferentes profesores, que tratan el objeto en sus clases de matemáticas en la etapa de 2º ESO.

Los libros utilizados son los siguientes:

- Libro 1.- Matemáticas 2º ESO. Bloque II: Geometría, Unidad 6: Proporcionalidad geométrica. Unidad 7: Semejanza. Grupo Edebé 2012.
- Libro 2.- Matemáticas 2º ESO. Unidad 8: Proporcionalidad geométrica. Ediciones Vicens Vives 2008.
- Libro 3.- Matemáticas 2º ESO. Unidad 14: Semejanza. Teorema de Tales. Ediciones SM 2002.

En el cuestionario se le formulan las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué se enseña el Teorema de Thales?, ¿Cuál es el fin con el que se enseña dicho Teorema?
2. ¿Qué tipo problemas usas para aplicar este Teorema? Tanto aplicados a la vida cotidiana o no.
3. ¿Qué conocimientos previos asumes?
4. ¿Qué enseñas o repasas antes de introducir el tema?
5. ¿Qué técnicas introduces después de haber introducido el teorema?
6. ¿Qué dificultades tienen los alumnos en su aprendizaje y aplicación?
7. ¿Qué efectos producen sobre el alumno la enseñanza del Teorema de Thales?
8. ¿Usas las TIC para su enseñanza?, ¿Sí es que sí, de qué manera las usas?
9. ¿Qué metodología usas para su enseñanza?

Como primer paso, analizaremos la enseñanza del objeto matemático en los libros citados.

En el libro 1, en la portada de la unidad, propone al alumno el cálculo de la altura del edificio Shanghai World Financial Center de Shanghái tal y como lo hizo Thales de Mileto. Esto nos lleva a pensar que la razón de ser del Teorema de Thales en este libro es un campo de problemas, particularmente el cálculo de alturas inaccesibles, que justifica unas técnicas descritas en el desarrollo de la unidad. En el libro 2, ocurre lo

mismo que con la razón de ser del Teorema de Thales en el libro 1, aunque en menor medida al tratar otros aspectos de semejanzas y proporcionalidad. Y por último, el libro 3, la razón de ser del Teorema de Thales es la misma que en los libros anteriores, pero incide bastante menos en el tema como podría ser el libro 1 y el 2.

Analizando y ciñéndome al objeto matemático, creo que el libro más completo es el libro 1, ya que los otros dos libros no tratan el tema con tanta profundidad y el resto de la unidad lo dedican a otros aspectos de la semejanza y proporcionalidad que no tienen que ver con el Teorema de Thales, como por ejemplo ampliación y reducción de figuras, mapas, planos, maquetas, escalas, relaciones métricas de polígonos semejantes,...

Para los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente en estos 3 libros he diseñado unas tablas; donde se enumeran tales, y lo podéis encontrar en el ANEXO I.

Respecto al cuestionario voy a resumir y sintetizar cada respuesta:

1. **¿Por qué se enseña el Teorema de Thales?, ¿Cuál es el fin con el que se enseña dicho Teorema?** *El Teorema de Thales se enseña, porque junto al Teorema de Pitágoras, son los teoremas básicos de la geometría. Además se da en 2º porque es imprescindible para la Trigonometría q se da en 4º. Por último se estudia con el fin de entender muchas situaciones de la vida real donde lo encontramos: naturaleza, pintura, planos, arte en general...*
2. **¿Qué tipo de problemas usas para aplicar este Teorema? Tanto aplicados a la vida cotidiana o no.**

*Problemas de escalas, calculando medidas, relacionando medidas reales con medidas en mapas o planos de casas. Problemas comparando medidas de edificios, árboles, postes o personas y sus sombras. Representación de figuras semejantes, guardando la proporcionalidad de sus medidas. Comprobación de si dos figuras dadas son semejantes; por ejemplo, ver si hay semejanza entre dos triángulos, estudiando sus lados y sus ángulos. El uso en obras de arte como en Las Meninas.*



**3. ¿Qué conocimientos previos asumes?**

*Proporcionalidad directa, planteamiento de proporciones y cálculo de la razón de proporcionalidad, para explicar el concepto de razón de semejanza.*

**4. ¿Qué enseñas o repasas antes de introducir el tema?**

*Repaso de los conceptos de proporcionalidad directa y de razón de proporcionalidad. Ejercicios para apreciar la semejanza de forma visual, comparando fotos, pinturas, maquetas...*

**5. ¿Qué técnicas introduces después de haber introducido el teorema?**

*Proyección de figuras, construyendo figuras semejantes a otras: Homotecias.*

**6. ¿Qué dificultades tienen los alumnos en su aprendizaje y aplicación?**

*Si se utiliza regla y compás para hacer construcciones, tiene dificultad para mover correctamente las herramientas. También les cuesta plantear las relaciones de proporcionalidad entre los lados de figuras semejantes. Al trabajar con escalas, hay que hacer hincapié en el uso correcto del S.M.I., ya que suelen cometer errores.*

**7. ¿Qué efectos producen sobre el alumno la enseñanza del Teorema de Thales?**

*Les resulta asombroso que con algunos elementos y gracias a sus aprendizajes matemáticos, puedan calcular medidas de objetos inaccesibles como árboles, edificios altos, la profundidad de un pozo, etc.*

**8. ¿Usas las TIC para su enseñanza?, ¿Sí es que sí, de qué manera las usas?**

*Utilizo GeoGebra, haciendo ejercicios de semejanza. El programa permite estudiar las relaciones de semejanza que existen entre polígonos*

**9. ¿Qué metodología usas para su enseñanza?**

*Método tradicional, explicando en la pizarra, proponiendo ejercicios y problemas que se resuelven en papel y se corrigen. Esto se combina, cuando es posible, con el uso de GeoGebra que es muy motivador para el alumno en el estudio de la Geometría. Manejo de planos, mapas, para poder observar proporcionalidad de medidas en papel con medidas reales.*

Para mayor detalle en las respuestas ir al ANEXO II con las respuestas dadas por los profesores.

### C. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

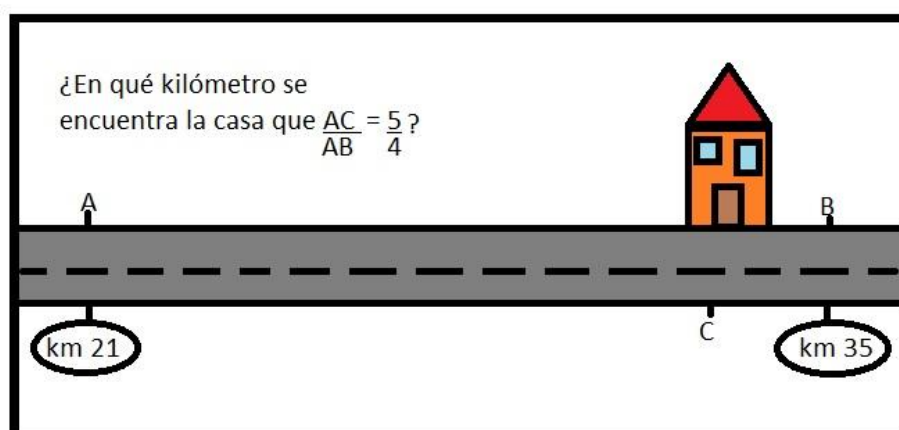
El alumno antes de introducirse en el estudio del objeto matemático, tiene que tener unos conocimientos previos para afrontarlo con garantías. Voy a enumerar estos conocimientos:

1. Proporcionalidad de segmentos.
2. Fracciones equivalentes
3. Elementos y tipos de triángulos.
4. Rectas paralelas, secantes y perpendiculares.
5. Ecuaciones con 1 incógnita, incluso sistemas de ecuaciones.

Como he dicho antes, el alumno con esos conocimientos puede dar el paso de conocer y estudiar el objeto matemático tratado. Todos estos elementos matemáticos son estudiados con anterioridad en unidades pasadas, incluso en cursos anteriores.

Con diversas actividades voy afianzar esos conocimientos previos del alumno, y son los siguientes:

1. Para practicar la proporcionalidad de segmentos, les planteare un problema de cálculo de distancias (segmentos)



2. Para trabajar las fracciones equivalentes, realizaremos ejercicios de este tipo, con el fin de mejorar las operaciones entre fracciones y no tener problemas al usarlas posteriormente:

**1.- Señala, en cada grupo, la fracción que no es equivalente a las otras dos:**

$\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{8}{4}$	$\frac{3}{5}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{6}{10}$
$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{10}$	$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$ $\frac{4}{6}$

**2.- Escribe 5 fracciones equivalentes a cada una de las siguientes:**

Por amplificación	Por simplificación
$\frac{2}{3} =$	$\frac{90}{90} =$
$\frac{1}{4} =$	$\frac{24}{36} =$
$\frac{6}{5} =$	$\frac{80}{100} =$

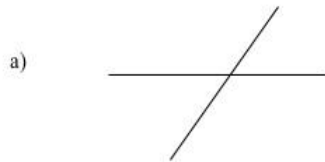
3. Para manejar todos los elementos de un triángulo y saber los tipos que hay, propongo a mis alumnos los siguientes ejercicios:

### Geometría

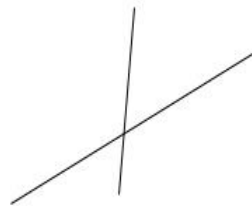
Las siguientes actividades son de repaso de los temas vistos, para fijar los conceptos, sino recuerdan acudan a la carpeta

1) *Observa los dibujos:*

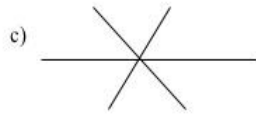
- a) Pinta con verde un par de ángulos consecutivos no adyacentes
- b) Pinta con azul un par de ángulos opuestos por el vértice



b)



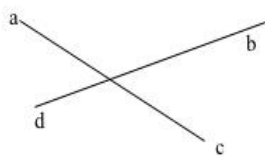
- c) Pinta con verde un par de ángulos consecutivos.
- d) Pinta con azul un par de ángulos adyacentes.



d)



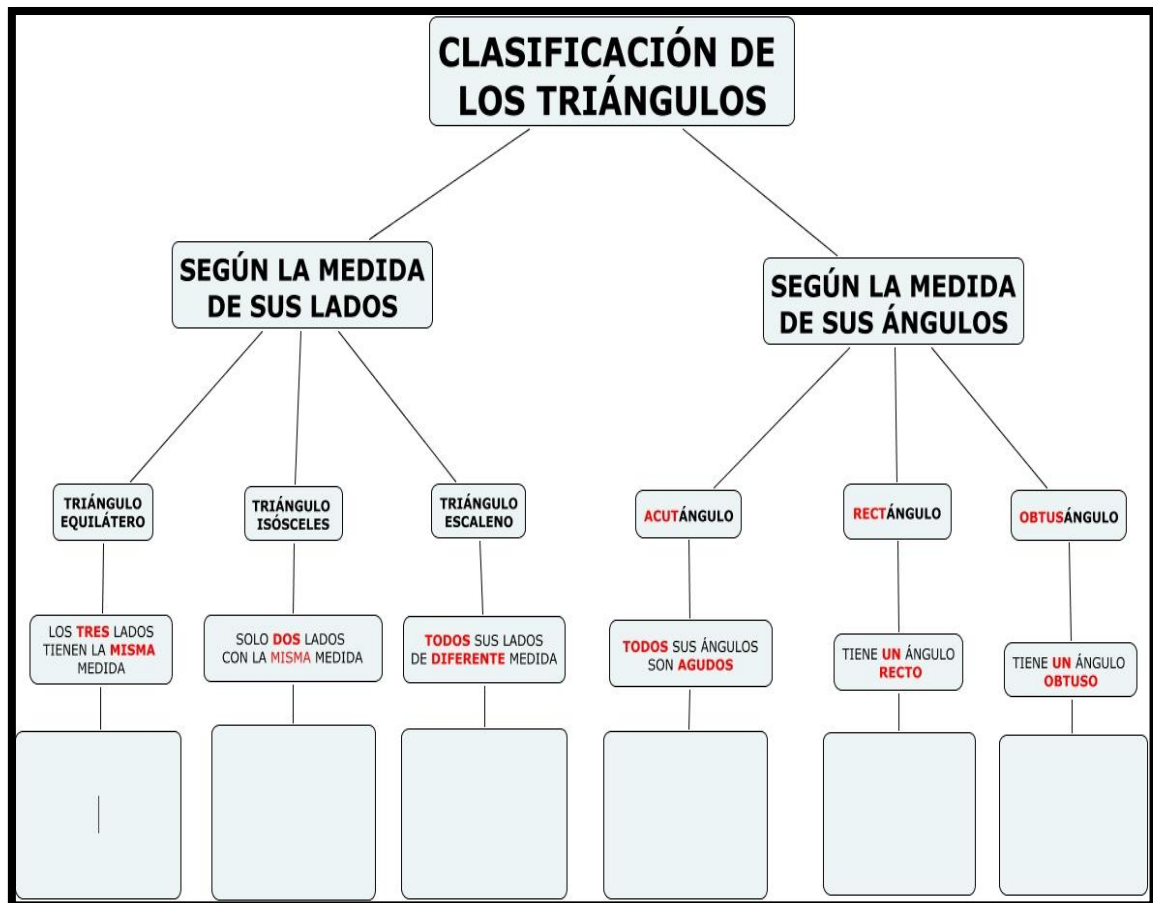
- 2)
- c) Calcula (sin usar transportador) cuánto mide el ángulo boc
  - d) ¿Qué clase de ángulos son aob y boc?



3) *Completa la oración con el término que corresponde*

Si dos ángulos suman  $90^\circ$ , los mismos son \_\_\_\_\_.

Si dos ángulos tienen el vértice y un lado en común se llaman \_\_\_\_\_.



4. Con estas actividades trabajaremos las diferentes posiciones de las rectas:

4. Indica de qué tipo son cada uno de estos pares de rectas.

5. Dibuja en tu cuaderno una recta azul, y traza:

- una recta paralela de color rojo
- una recta secante de color negro
- una recta perpendicular de color verde

6. Busca en el dibujo las rectas que son paralelas, secantes y perpendiculares. Escribe los resultados en tu cuaderno.

5. Por último para practicar las ecuaciones de 1 incógnita y sistemas de ecuaciones, las repasaremos con unos ejercicios:

Ejercicios de ecuaciones con 1 incógnita con fracciones:

$$\begin{aligned}4(x-2) - \frac{2}{3}(3x+1) &= 5-2x \\ \frac{c+3}{4} - \frac{c-1}{2} &= \frac{c}{6} + 1 \\ 3(u-1) + \frac{17+u}{12} &= 1 + \frac{6u+1}{14} \\ \frac{4n+7}{5} - \frac{n-5}{6} - \frac{2n+14}{3} &= \frac{-2n+7}{9} \\ \frac{5x}{2} - \frac{7x}{5} + \frac{4x-5}{2} &= 4 + \frac{8x-5}{5} - \frac{11x-3}{2}\end{aligned}$$

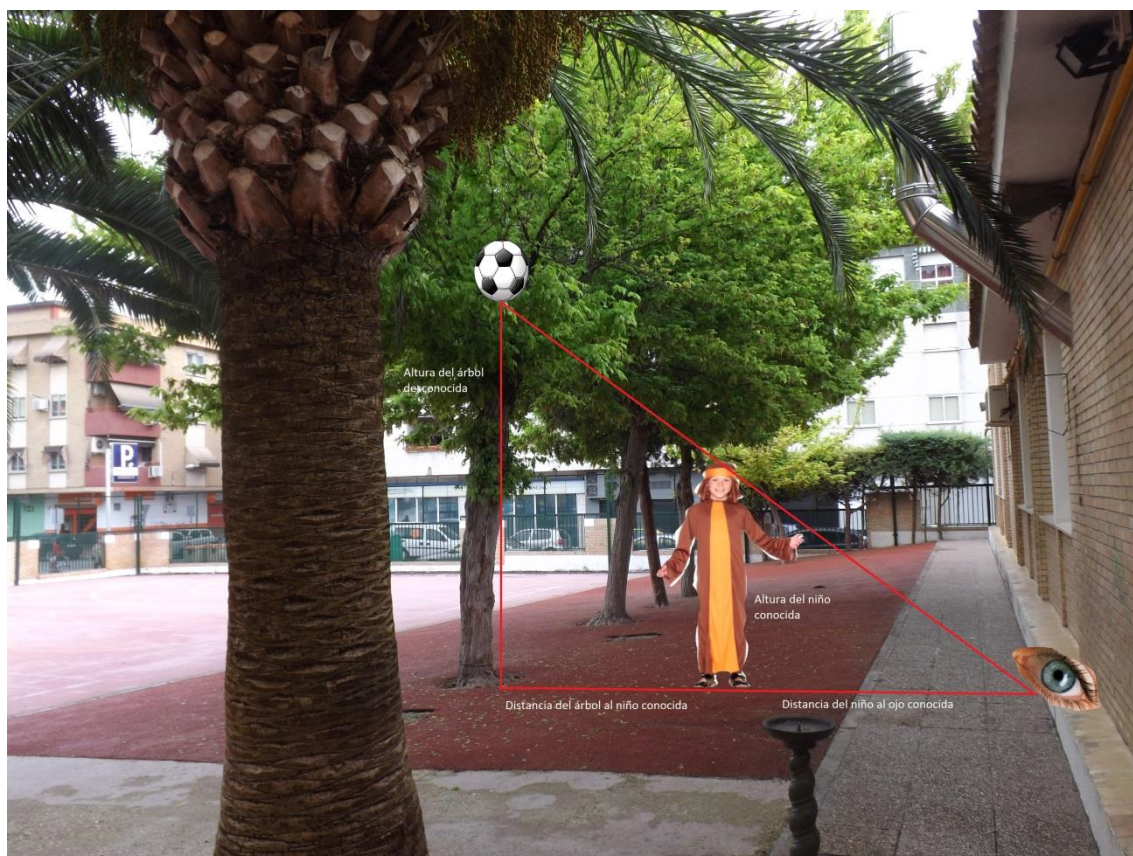
Ejercicios de sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned}1) \quad &\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases} & 2) \quad &\begin{cases} x^2 - y = -5 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \\ 3) \quad &\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = 10 \\ \frac{3}{4}x - y = 4 \end{cases} & 4) \quad &\begin{cases} x^3 - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}\end{aligned}$$



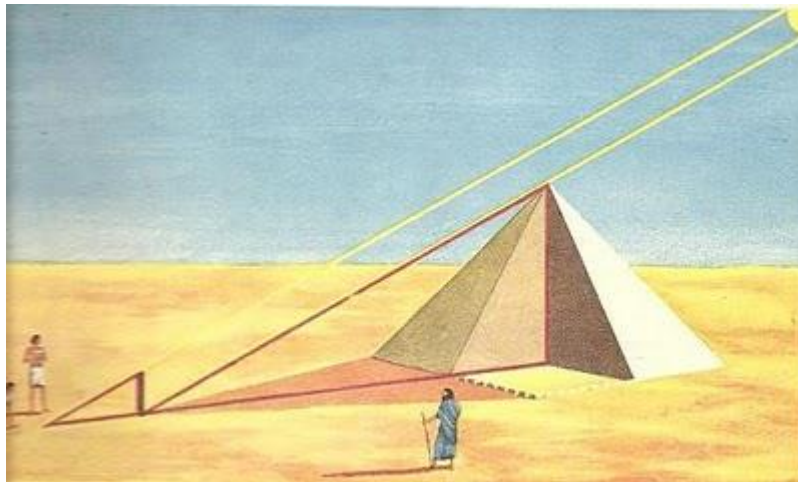
## D. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

La razón de ser que voy a tener en cuenta será un campo de problemas aplicados a la vida cotidiana. Especificando un poco más; mi problema, por el cual introduciré el Teorema de Thales, será el plantear una situación a los alumnos para calcular de manera exacta, tras un debate sobre resolución de diferentes formas, la longitud de una escalera para que lleguemos justo a la pelota que se ha encajado en lo alto del árbol del patio del colegio durante el recreo. A continuación lo ilustraré mediante un dibujo y propondré a los alumnos bajar al patio para recoger las medidas conocidas y resolver el problema; queriendo conseguir el entendimiento, interpretación y aplicación a la realidad lo visto en clase sobre el papel.



Hay una coincidencia en mi razón de ser y en la razón de ser histórica del objeto matemático tratado, puesto que la historia dice que Thales de Mileto (624 a.C. – 547 a.C.), considerado uno de los siete sabios de Grecia, determinó la altura de la pirámide de Keops a partir de la longitud de la sombra que proyectaba la pirámide y un bastón

colocado verticalmente, y de esta manera estableció una relación con la cual se calculaba la altura de la pirámide.



Así pues al fin y al cabo ambos queremos tratar unos campos de problemas que consisten en el cálculo de alturas demasiado grandes para calcularlas a simple vista de forma exacta.

En cuanto a la metodología que implementaré se ha podido intuir un poco:

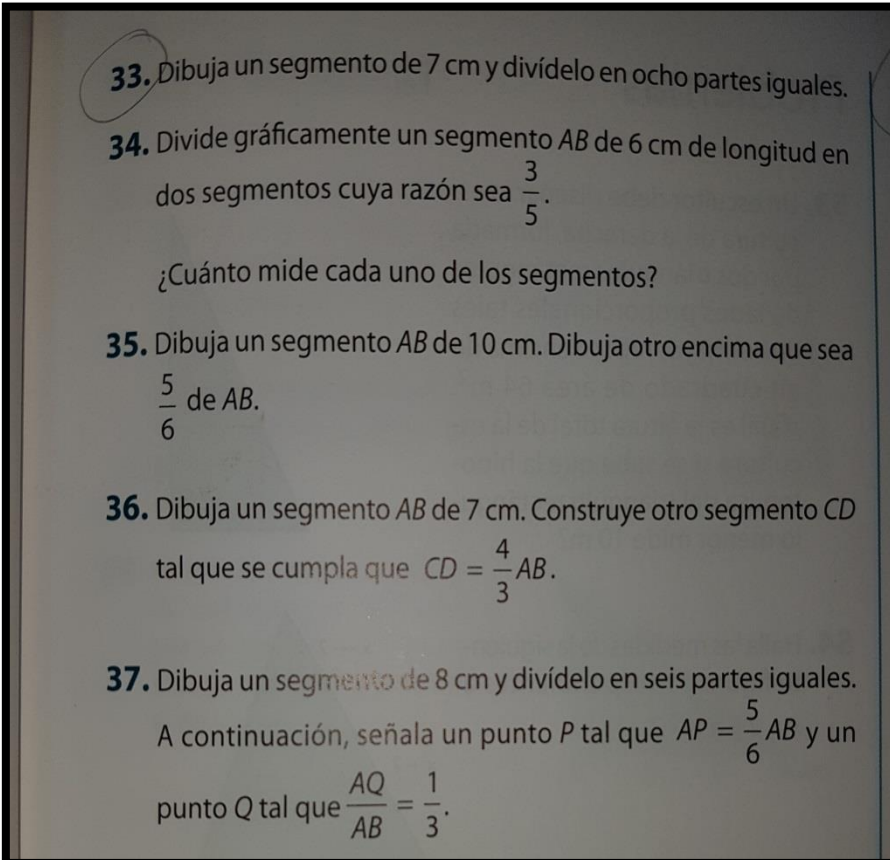
- Enunciaré el problema.
- Daré lugar a que los alumnos debatan sobre ello e investiguen posibles soluciones.
- Les daré una idea de cómo podríamos resolverlo.
- Más adelante con todo lo necesario para resolverlo procederemos a ello y dejaré que los alumnos intenten resolver otros problemas cotidianos usando el Teorema de Tales. Si no se les ocurre guiarles.



## E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS

En el campo de problemas trabajaré diferentes aspectos que irán relacionados con el objeto matemático tratado. Enumeraré los diferentes tipos de problemas más representativos, luego de cada tipo puede haber variantes cambiando el enunciado, pero al fin y al cabo se pedirá lo mismo, por ellos solo unos cuantos.

Problema tipo 1.- División de segmentos en partes iguales y proporcionales.



**33.** Dibuja un segmento de 7 cm y divídelo en ocho partes iguales.

**34.** Divide gráficamente un segmento  $AB$  de 6 cm de longitud en dos segmentos cuya razón sea  $\frac{3}{5}$ .  
¿Cuánto mide cada uno de los segmentos?

**35.** Dibuja un segmento  $AB$  de 10 cm. Dibuja otro encima que sea  $\frac{5}{6}$  de  $AB$ .

**36.** Dibuja un segmento  $AB$  de 7 cm. Construye otro segmento  $CD$  tal que se cumpla que  $CD = \frac{4}{3}AB$ .

**37.** Dibuja un segmento de 8 cm y divídelo en seis partes iguales. A continuación, señala un punto  $P$  tal que  $AP = \frac{5}{6}AB$  y un punto  $Q$  tal que  $\frac{AQ}{AB} = \frac{1}{3}$ .

Problema tipo 2.- Determinar el segmento cuarto proporcional a 3 segmentos dados.

**38.** Construye el segmento cuarto proporcional a tres segmentos  $a$ ,  $b$  y  $c$  cuyas longitudes son 1 cm, 2 cm y 3 cm.

Problema tipo 3.- Determinar segmento tercero proporcional a 2 segmentos dados.

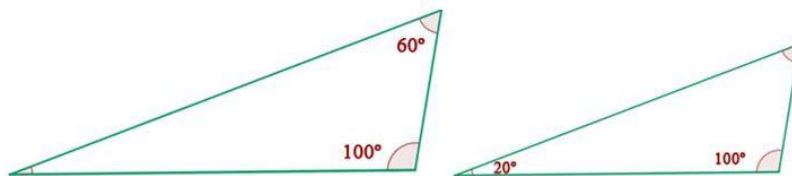
- 40.** Construye el segmento tercero proporcional a los segmentos  $p$  y  $q$  cuyas longitudes son 3 cm y 4 cm, respectivamente.  
Considera que el segmento  $p$  es el que se repite.

Indica si las siguientes frases son ciertas o falsas:

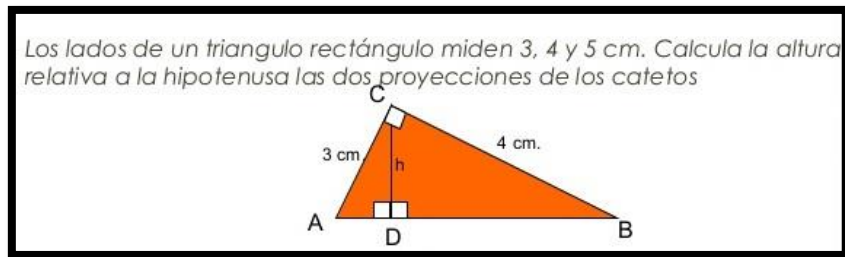
- a) La razón de dos segmentos de longitudes 2 dm y 40 cm es  $\frac{1}{2}$ .
- b) Los segmentos de longitudes 2 cm y 6 cm son proporcionales a los segmentos de longitudes 2,5 cm y 6,5 cm.
- c) El segmento tercero proporcional a los segmentos de longitudes 2 cm y 4 cm mide 3 cm.
- d) El segmento cuarto proporcional a los segmentos de longitudes 3 cm, 4 cm y 9 cm mide 12 cm.

Problema tipo 4.- Determinar si dos triángulos son semejantes.

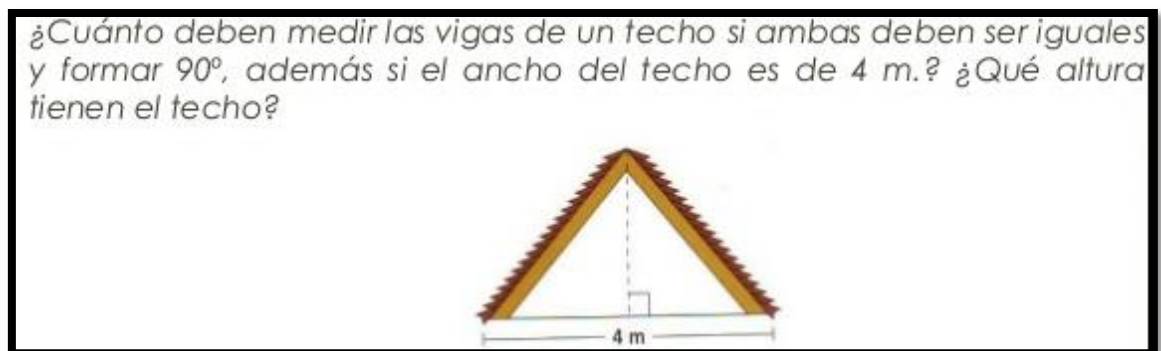
Prueba si los triángulos dados son semejantes



Problema tipo 5.- Calcular la altura de un triángulo rectángulo.



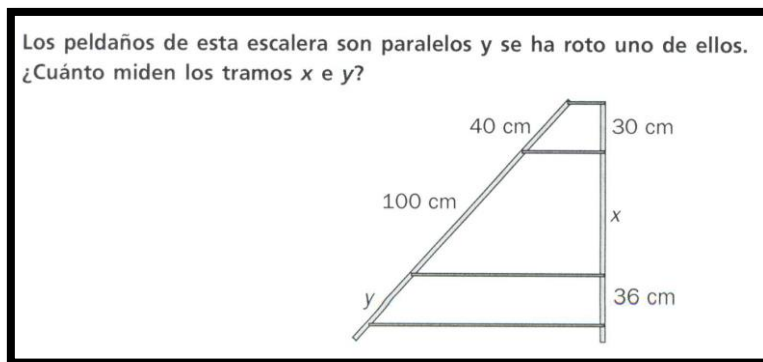
Problema tipo 6.- Calcular los catetos de un triángulo rectángulo.



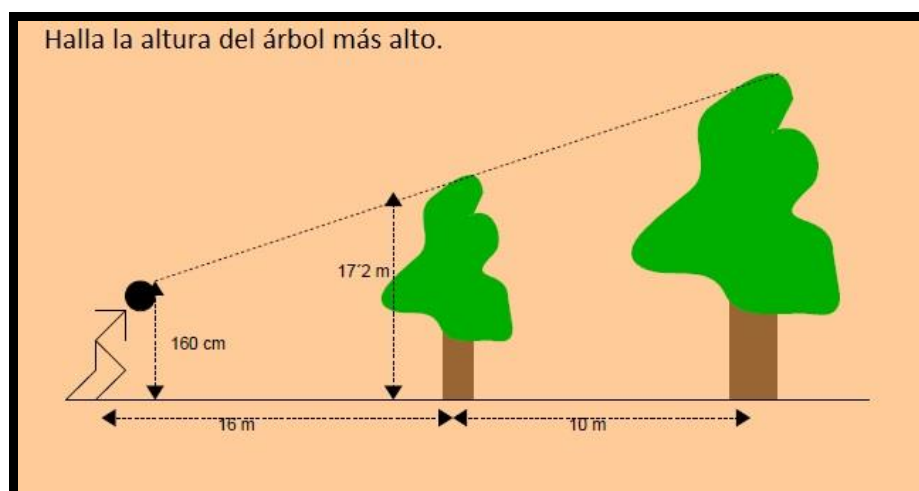
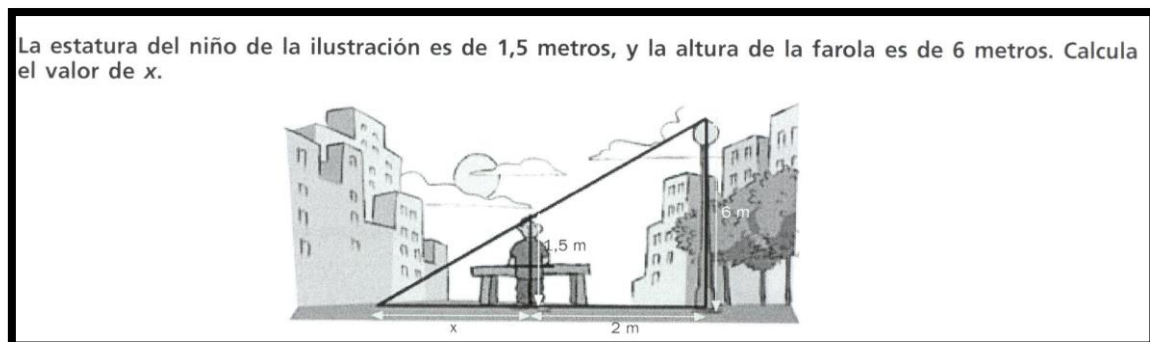
Problema tipo 7.- Construcción de figuras semejantes.



Problema tipo 8.- Cálculo de longitudes de segmentos

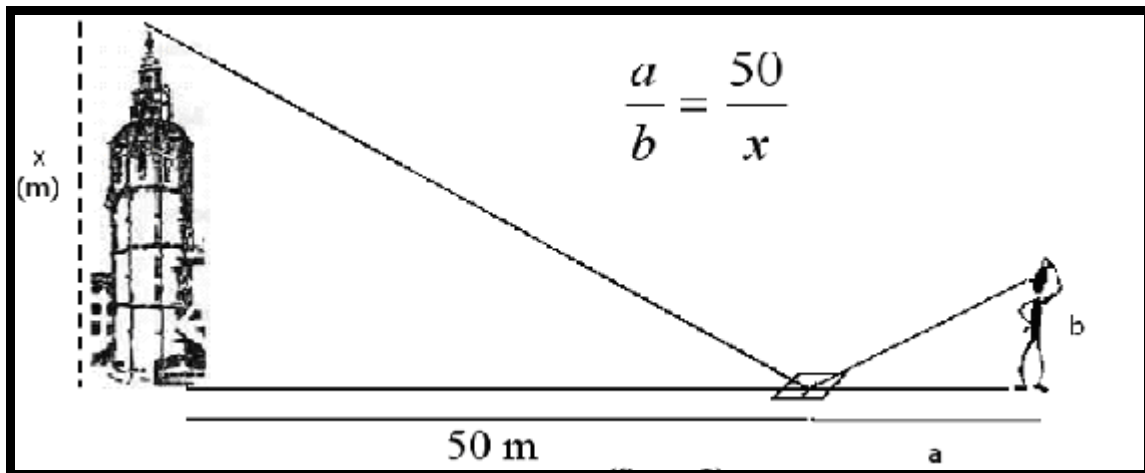


Problema tipo 9.- Cálculo de alturas

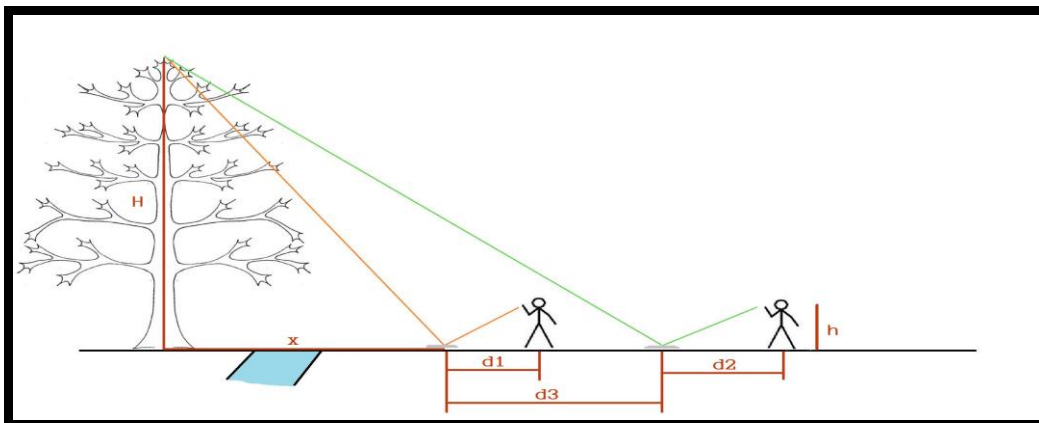


Otro problema a este tipo sería el que he utilizado para mi razón de ser. Además en vez de usar a otra persona como medida intermedia conocida podemos usar otro tipos de objetos, incluso mediante sombras, tal y como hizo Thales de Mileto para calcular la altura de la pirámide.

Problema tipo 10.- Cálculo de alturas, distancia mediante semejanzas de triángulos usando el método del espejo



Incluso lo podemos complicar un poco el problema del espejo si además de desconocer la altura, también desconocemos otra de las distancias, para ello tendremos que utilizar un sistema de ecuaciones, que en el currículo se dan antes, por lo tanto son conocidos.



Algunos problemas; como es el segundo problema del tipo 10, si aplicamos la técnica inicial de semejanza de triángulos, no llegaremos a ningún resultado, porque en este caso tenemos dos datos que son desconocidos, luego tendremos que modificar nuestra estrategia para conseguir llegar a un resultado. Por ello plantearemos dentro del problema otro caso y de esta manera tendremos dos ecuaciones con dos incógnitas y por teoría conocida sabemos que este sistema de ecuaciones tiene solución. En otros tantos problemas ocurrirán cosas parecidas, no podremos usar la técnica inicial y tendremos que modificarla para llegar a buen puerto.

La metodología que usaré para trabajar los problemas en clase es la siguiente:

- Plantearé el problema a los alumnos
- Los alumnos pensarán sobre su resolución
- Dejaré que salgan a la pizarra a resolverlo
- Si no lo sabe hacer el alumno de la pizarra, le ayudarán los alumnos que lo sepan hacer
- Daré una explicación aclarando su resolución
- Por último resolveré las posibles dudas surgidas en el problema

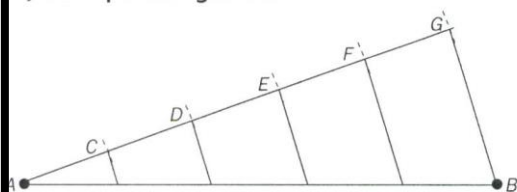
## F. SOBRE LAS TÉCNICAS

Para el estudio del objeto matemático el alumno tiene que conocer y saber ejecutar unas técnicas que enunciaré, las cuales están adecuadas al campo de problemas; propuestos anteriormente, y que nos ayudarán a su resolución. Los ejercicios, que acompañan a las técnicas siguientes, nos ayudarán a saber utilizarlas y perfeccionarlas.

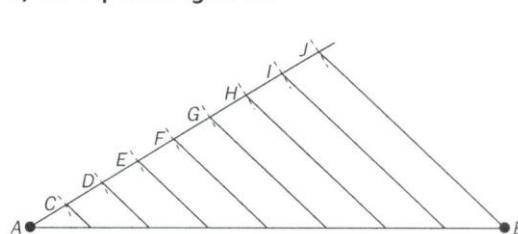
### 1.- Técnica para dividir segmentos en partes iguales y en partes proporcionales

Divide un segmento de 7 centímetros de longitud en partes iguales.

a) En 5 partes iguales.



b) En 8 partes iguales.



**64.** Representa mediante el teorema de Tales tres subsegmentos dentro de un segmento de 10 cm, de modo que dos de ellos tengan igual longitud y estén situados en ambos extremos y el tercero esté centrado. Debe cumplirse:

- La suma de los dos subsegmentos iguales debe ser tres cuartas partes de la longitud del mayor.
  - El subsegmento central debe ser cuatro veces mayor que cada uno de los dos subsegmentos de los extremos.
- Resuélvelo como un sistema de ecuaciones.

**11.** Divide gráficamente un segmento de veinte unidades en partes proporcionales a:

a) 3 y 5

b) 3, 6 y 9

¿Cuál es el mínimo número de rectas paralelas que debes trazar para resolverlo?



2.- Técnica para determinar segmento cuarto proporcional a 3 segmentos dados

**Ejercicio N° 6.-** Hallar el segmento cuarto proporcional de los tres dados

$\underline{a}=70$  mm y  $\underline{b}=40$  mm y  $\underline{c}=50$  mm.

3.- Técnica para determinar segmento tercero proporcional a 2 segmentos dados

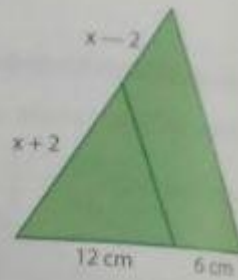
**6** Determina el segmento tercero proporcional a dos segmentos,  $m$  y  $n$ , cuyas longitudes son 5 cm y 10 cm, respectivamente.

**40.** Construye el segmento tercero proporcional a los segmentos  $p$  y  $q$  cuyas longitudes son 3 cm y 4 cm, respectivamente.

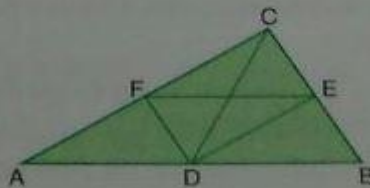
Considera que el segmento  $p$  es el que se repite.

4.- Criterios de semejanzas

**54.** Halla las medidas de la siguiente figura correspondientes a  $x+2$  y  $x-2$ .

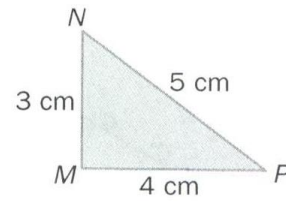
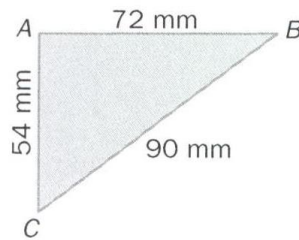


**16.** Observa la figura dada e indica pares de triángulos en posición de Tales. ¿Cuántos pares has descubierto?





Estudia si son semejantes los siguientes triángulos.



5.- Teorema de la altura

El triángulo  $ABC$  es rectángulo en  $C$ .  
 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ,  $\overline{CD} = 2\sqrt{5}$ , entonces la medida de  $\overline{AB}$  es igual a:

A) 12  
 B) 10  
 C) 7  
 D) 5  
 E) 2

Diagrama: Triángulo  $ABC$  rectángulo en  $C$ . Se traza la altura  $CD$  desde  $C$  hasta  $AB$  en  $D$ . Se indica  $AD = x+5$  y  $DB = x-3$ .

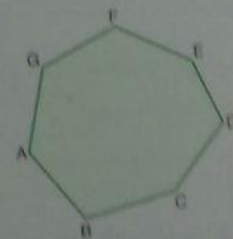
6.- Teorema del cateto

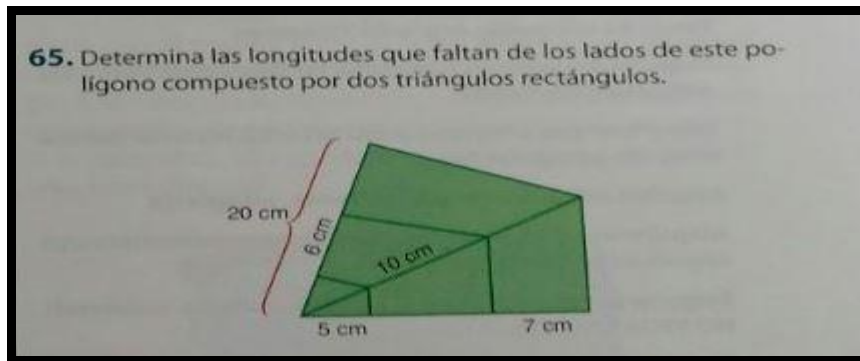
- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm y la proyección de un cateto sobre ella 10.8 cm. Hallar el otro cateto.

7.- Homotecias

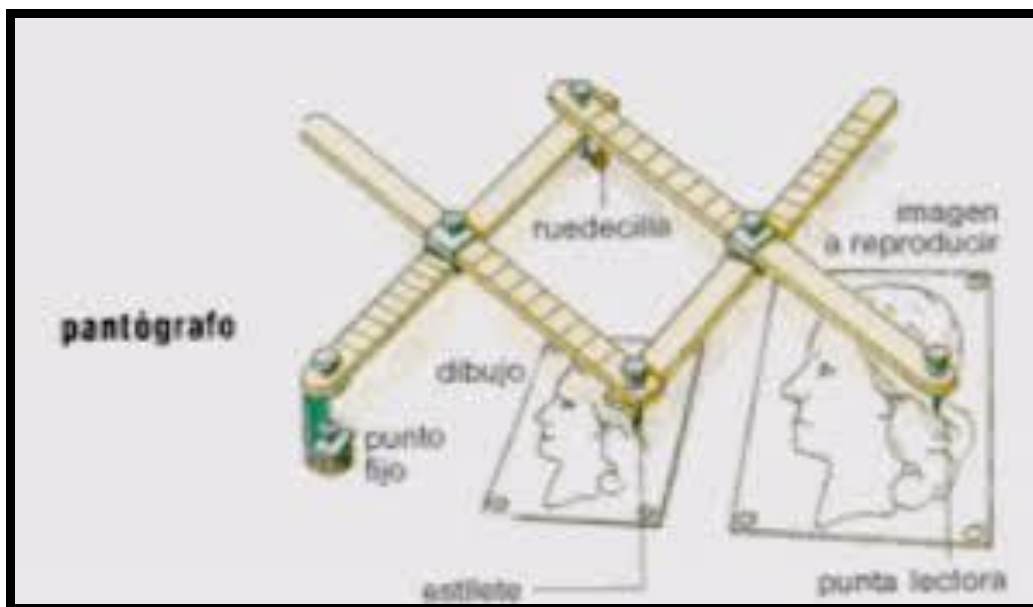
14. Construye un polígono semejante al de la figura en cada uno de estos casos:

- a) El punto  $O$  es un punto exterior del hexágono y con razón de semejanza  $k = \frac{5}{3}$ .
- b) El punto  $O$  es un punto interior del polígono y con razón de semejanza  $k = \frac{3}{4}$ .
- c) El punto  $O$  es el vértice  $A$  y con razón de semejanza  $k = \frac{3}{2}$ .

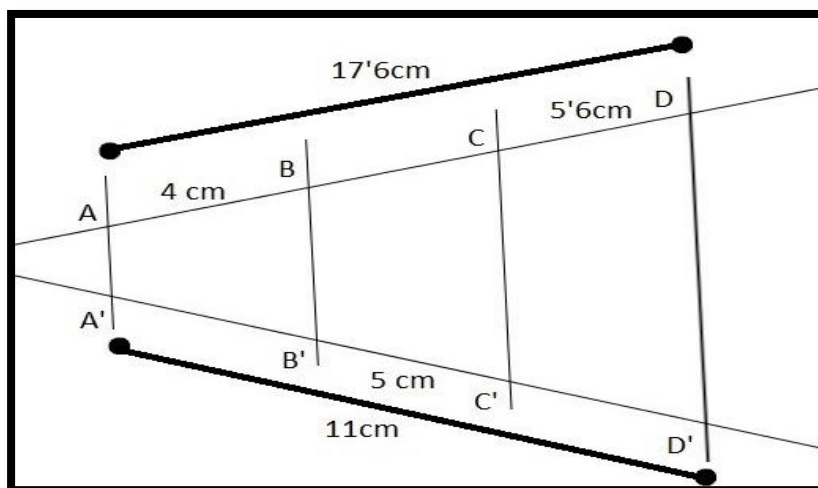




8.- El pantógrafo es una técnica sencilla para dibujar figuras semejantes con una razón de proporcionalidad dada.



9.- Aplicación de la fórmula del teorema de Thales para calcular longitudes de segmentos.



Todas las técnicas anteriores van enfocadas para resolver el campo de problemas que hemos descrito anteriormente, luego sí que están adecuadas las técnicas al campo de problemas.

La metodología usada para la implementación de las técnicas en clase es la siguiente:

- Alternaré la explicación de la técnica con la pizarra i el uso de las TIC, puesto que muchas veces nos facilitan para el entendimiento por parte de los alumnos, esto no debería llevarme demasiado tiempo, ya que quiero no quiero que sea una clase magistral.
- Seguidamente propondré los ejercicios vistos antes para practicar las técnicas, en un principio sin la ayuda del profesor, y cuando lo requieran acudiré en su ayuda.
- Sacaré a alumnos a la pizarra para que expliquen a sus compañeros como lo realiza, si tiene algún fallo lo corrijo.
- Resolver las posibles dudas que hayan surgido en la resolución de los ejercicios en la pizarra.
- Iré incrementando la dificultad de los ejercicios conforme va avanzando la clase, también en función de lo que demanden los alumnos.

## G. SOBRE LAS TECNOLOGÍAS

Los razonamientos por los cuales vamos a justificar el uso de las técnicas a lo largo de esta propuesta son las tecnologías. Las técnicas del apartado anterior son usadas para resolver los campos de problemas antes descritos.

Voy a enumerar las tecnologías que usaremos y a su vez los campos de problemas y técnicas que tienen detrás dicha tecnología.

1. La tecnología del **teorema de Thales**. Esta tecnología es la justificación a muchas de las situaciones antes descritas tanto en el apartado del campo de problemas como en el apartado de las técnicas, pues bien; la división de segmentos en partes iguales y proporcionales, cálculo del segmento cuarto y tercero proporcional a 3 y 2 segmentos dados respectivamente, y determinación de triángulos semejantes; se pueden resolver con diferentes técnicas todas ellas justificadas con esta tecnología.

2. Otra de las tecnologías es la **semejanza de triángulos**, la cual es fundamental para resolver campos de problemas como cálculo de la altura y catetos de un triángulo rectángulo; u otros problemas tan variados como la construcción de figuras semejantes mediante homotecias y el pantógrafo.

La responsabilidad va a ser conjunta en la justificación de las técnicas, en algunos momentos será el profesor quien justifique una técnica usada y en otros momentos el propio alumno por descubrimiento justificará el uso de técnicas aprendidas.

A continuación concretaré esta situación comentada anteriormente, que dará lugar a la institucionalización de los diferentes aspectos del objeto matemático.

En toda institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático hay una parte en el que el alumno tiene que ir descubriendo y haciéndose preguntas sobre la resolución de un problema, por ejemplo, mi metodología sería el plantear el problema original de Thales y ver como Thales calcula la altura de la pirámide de Keops. Les propongo ahora mi problema que da razón de ser al objeto matemático, es decir, tenemos que ser capaces de averiguar a qué altura está el balón en el árbol para coger una escalera adecuada. Una vez que los alumnos han pasado esa etapa de investigación y descubrimiento, en la cual se hacen preguntas del tipo: qué relación guarda el problema de Thales con este nuevo problema, ¿existirá algún algoritmo, recetilla para

resolverlo? y que de esta manera vayan encontrando coincidencias con el problema de la pirámide de Keops, y además haya una lluvia de ideas; entonces el profesor se encargará de estructurar las ideas, darle un sentido descartando las erróneas y eligiendo las buenas, y así encontraremos una técnica útil para resolver ese campo de problemas, cuya tecnología, es decir, la justificación del porque podemos usar esa técnica; pasará a formar parte del lenguaje matemático de la clase.

En todos los campos de problemas ocurre lo mismo, también hay que decir que habrá momentos donde el profesor tendrá que intervenir más asiduamente en la institucionalización, y otros momentos donde los alumnos, se podría decir, institucionalizan los aspectos por si solos. Un ejemplo podría ser en el uso del pantógrafo para realizar figuras semejantes, ellos institucionalizan fácilmente las matemáticas que hay detrás de este instrumento.

## H. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

Esta propuesta de enseñanza la llevaré a cabo durante 14 sesiones, con esta cronología el alumno irá adquiriendo los conocimientos necesarios para superar la asignatura sin problemas.

Mediante una tabla creo la secuenciación y cronograma.

SESIÓN	SECUENCIACIÓN	DURACIÓN APROX. (min)
1	-Repaso de conocimientos previos con realización de actividades propuestas (ver actividades del aptdo. C). -Corrección en pizarra las actividades que sean necesarias.	50
2	-Presentación del problema de Thales. Pirámide de Keops. -Resolución de la altura de la pirámide según lo hizo Thales. -Planteamiento problema motivador de esta propuesta.	10 30 10
3	-Espacio de tiempo dedicado a realizar una lluvia de ideas sobre el problema y guiarles en su resolución. -Presentación del teorema de Thales y explicación. -Video de la canción del teorema de Thales (les Luthiers, la parte interesante). -Búsqueda de situaciones de la vida real donde puedan encontrar Thales.	15 20 5 10
4	-Propuesta de un problema de cálculo de segmentos en partes iguales y proporcionales. -Momento reflexión de los alumnos y dudas. -Resolución en pizarra mediante técnicas tradicionales con instrumentación geométrica e institucionalización. -Dudas y explicación por parte del profesor. -Propuesta de un problema de segmento cuarto proporcional a 3 segmentos dados. -Momento reflexión de los alumnos y dudas.	5 5 15 5 5 15

	-Resolución en pizarra mediante técnicas tradicionales con instrumentación geométrica e institucionalización.	
5	-Propuesta de un problema de segmento cuarto proporcional a 3 segmentos dados. -Momento reflexión de los alumnos y dudas. -Resolución en pizarra mediante técnicas tradicionales con instrumentación geométrica e institucionalización. -Propuesta de un problema de ver si 2 triángulos son semejantes. -Discusión y dudas de cómo hacerlo. -Explicación criterios de semejanza. Institucionalización. -Resolución para casa del problema con la técnica de los criterios.	5 5 15 5 5 15
6	-Resolución problema sesión anterior en la pizarra por los alumnos. Dudas y explicación por parte del profesor. -Propuesta de un problema de cálculo de longitudes de segmentos. -Discusión y dudas. -Resolución en pizarra por un alumno. -Propuesta de un problema de cálculo de alturas de objetos grandes.	15 5 5 15 10
7	-Resolución problema sesión anterior en la pizarra por los alumnos. Dudas y explicación por parte del profesor. -Propuesta del mismo problema anterior pero utilizando un espejo. -Discusión y dudas sobre como utilizarían el espejo y maneras de resolverlo. -Resolución del problema en la pizarra por alumnos. -- Dudas y explicación por parte del profesor.	15 5 10 20

8	-Propuesta de un problema del cálculo de altura de un triángulo rectángulo.	
	-Discusión y dudas de su posible resolución.	5
	-Resolución en pizarra por alumno e institucionalización mediante el teorema de la altura. Dudas.	5
	-Propuesta de un problema del cálculo de los catetos de un triángulo rectángulo.	15
	-Discusión y dudas de su posible resolución.	5
	-Resolución en pizarra por alumno e institucionalización mediante el teorema del cateto. Dudas.	5
		15
9	-Dibujar figuras semejantes mediante homotecias y pantógrafos. Explicación de estas técnicas e institucionalización. Todos los alumnos disponen de pantógrafos.	50
	-Dudas sobre el método.	
10	-Resolución del problema motivador de la sesión 2 en la pizarra por alumno.	
	-Dudas.	50
	-Propuesta de ejercicios y problemas para repasar la unidad. Comienzan en clase a hacerlos.	
11	-Resolución de los ejercicios y problemas de la sesión anterior en pizarra por alumnos.	50
	-Dudas sobre los contenidos de la unidad.	
12	-Examen (apartado I: Sobre la Evaluación)	60
13	-Entrega de exámenes.	
	-Turno personalizado de dudas respecto al examen.	50
	-Corrección en pizarra	
14	-Sesión de ordenador con la representación y comprobación del teorema de Thales con Geogebra.	50



## I. SOBRE LA EVALUACIÓN

A continuación he diseñado una prueba escrita donde evaluaré el aprendizaje realizado por los alumnos sobre el objeto matemático estudiado.

La prueba tiene una duración de 1 hora, que realizarán en horario de clase. Consta de 6 preguntas donde se evalúan diferentes aspectos y tiene una puntuación total de 10 puntos. El examen valdrá el 80% de la evaluación.

El 20% restante se estructurará de la siguiente manera:

- 5% en la revisión del cuaderno del alumno, con la finalidad de si corrigen los ejercicios en los que hayan podido tener dudas y estaban mal, y en la presentación del cuaderno.
- 5% la actitud mostrada en clase con sus compañeros y hacia el profesor.
- 5% por puntos positivos al salir a la pizarra a realizar o corregir ejercicios, o participar en el buen desarrollo de la clase, por ejemplo respondiendo a preguntas que el profesor haga durante el desarrollo de la clase.
- 5 % por la entrega voluntaria de ejercicios propuestos.

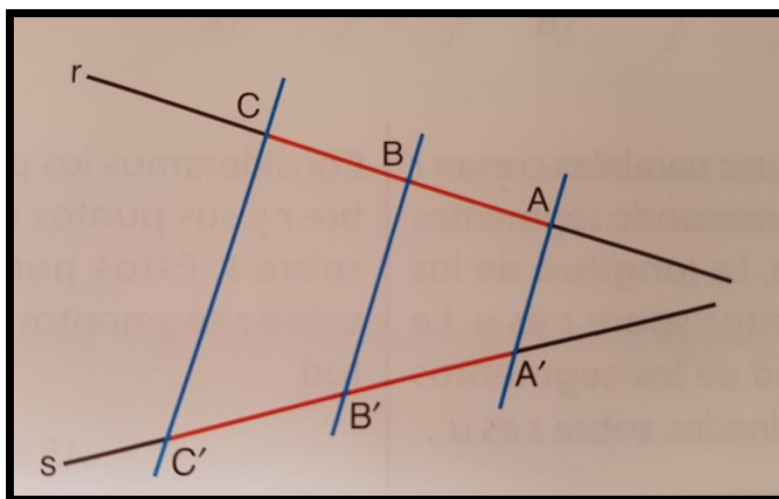
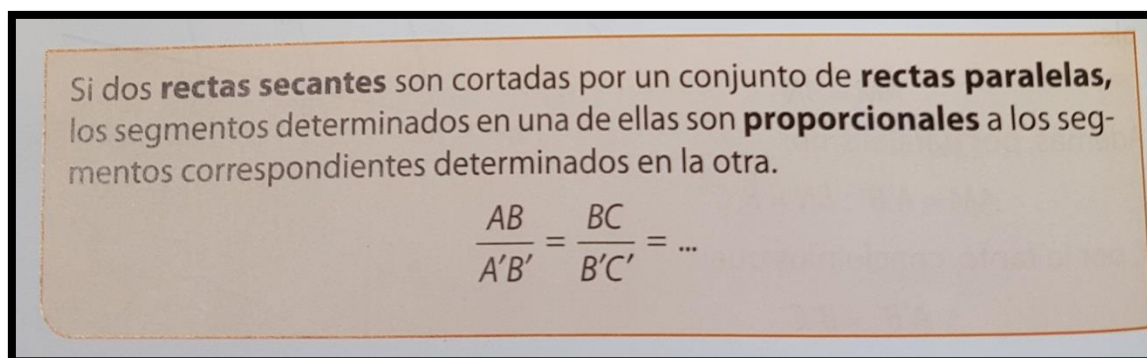
A continuación, voy a ver cada ejercicio del examen, en su desarrollo comentaré lo que se pide en cada uno de ellos analizando los campos de problemas, técnicas y tecnologías que hay que abordar. Seguidamente pondré la solución o posibles soluciones a cada ejercicio. Y por último haré una tabla por cada ejercicio con los criterios de calificación, tanto lo que vale cada apartado, como lo que hay que quitar en la puntuación.

La hoja de examen la encontrarás en el ANEXO III

# 1. Enuncia y representa con exactitud el Teorema de Thales. (1p)

1.1) En este ejercicio quiero que enuncien el teorema de Thales con la fórmula y una representación gráfica. Todo ello lo habremos visto en el desarrollo de las clases.

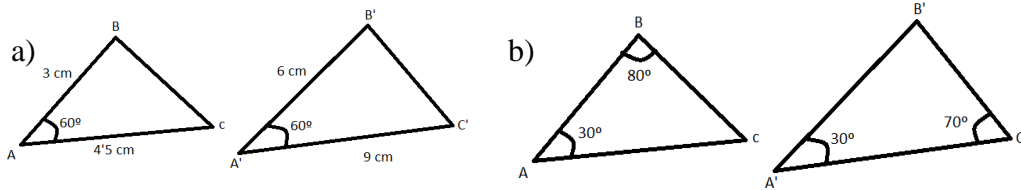
1.2) La respuesta que espero que den los alumnos según los conocimientos adquiridos en las clases es la siguiente:



1.3) Tabla con los criterios de evaluación, basándome en la respuesta dada anteriormente:

PUNTUACIÓN	MODIFICACIÓN
+ 0.5 enunciado teorema correcto	Hasta - 0.3 explicar y no enunciar.
+ 0.25 fórmula bien expresada	- 0.25 fórmula mal expresada
+ 0.25 dibujo bien representado	- 0.25 dibujo mal realizado
TOTAL: hasta + 1 punto	Total: quitar hasta 1 punto

## 2. ¿Son los triángulos semejantes? Justifica la respuesta en cada apartado. (1'5p)



2.1) En este ejercicio tratamos de averiguar si 2 triángulos son semejantes (campo de problemas), utilizando la técnica de los criterios de semejanza vista en clase y por último estas técnicas son justificadas por el teorema de Thales.

2.2) La respuesta que espero que den los alumnos según los conocimientos adquiridos en las clases es la siguiente:

a) Si que son semejantes por el criterio que dice que dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales.

$$\hat{A} = \hat{A}' = 60^\circ$$

$$K = \frac{6}{3} = \frac{9}{4.5} = 2. \quad // \quad K = \frac{3}{6} = \frac{4.5}{9} = 0.5.$$

b) Si que son semejantes por el criterio que dice que dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos iguales.

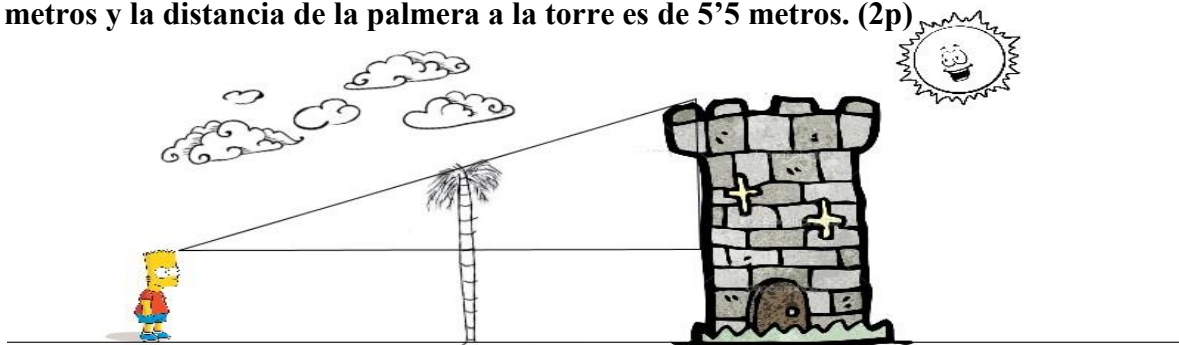
$$\alpha = 180 - (80 + 30) = 70^\circ$$

$$\beta = 180 - (30 + 70) = 80^\circ$$

2.3) Tabla con los criterios de evaluación, basándome en la respuesta dada anteriormente:

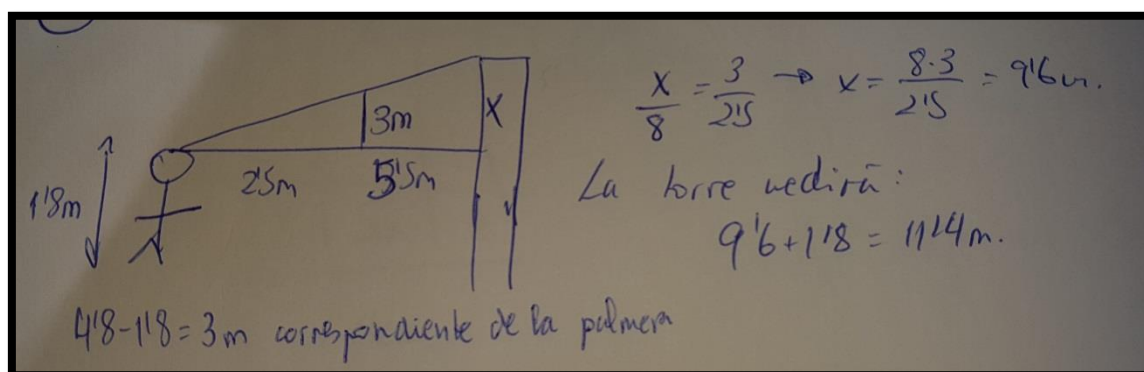
<b>PUNTUACIÓN</b>	<b>MODIFICACIÓN</b>
+ 0.25 por cada respuesta acertada (SI)	- 0.25 por cada respuesta errónea (NO)
+ 0.5 por una buena justificación en a	- 0.5 mal justificación en cada respuesta
+0.5 por buena justificación en b	- 0.25 justificación a medias(sin k, sin ángulos)
TOTAL: hasta + 1.5 puntos	TOTAL: quitar hasta 1.5 puntos

**3.** Calcula la altura de la torre sabiendo que la altura de Bart es 1'8 metros, la altura de la palmera es 4'8 metros, la distancia de Bart a la palmera es de 2'5 metros y la distancia de la palmera a la torre es de 5'5 metros. (2p)



3.1) En este problema nos pide calcular la altura de la torre conociendo unos datos determinados. Como el problema dice se pide el cálculo de una altura (campo de problemas) que resolveremos mediante técnica consistente en uno de los criterios de semejanza, que dice que 2 triángulos son semejantes si tienen un ángulo en común y los lados que lo forman son proporcionales; además esta técnica está justificada por el teorema de Thales (tecnología).

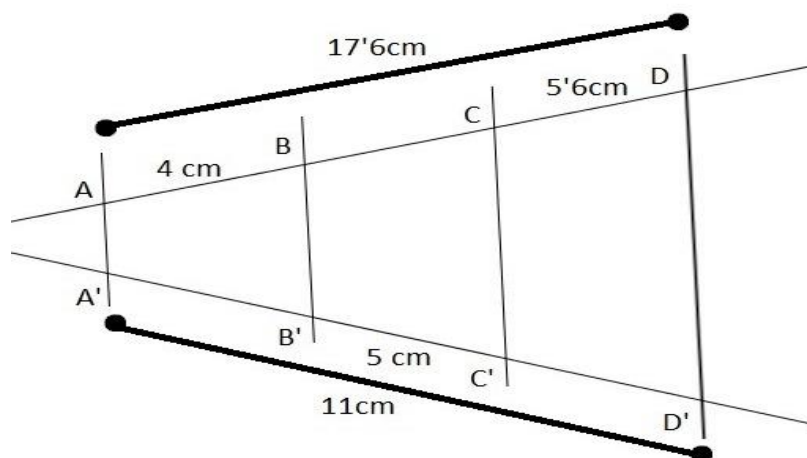
3.2) La respuesta que espero que den los alumnos según los conocimientos adquiridos en las clases es la siguiente:



3.3) Tabla con los criterios de evaluación, basándome en la respuesta dada anteriormente:

PUNTUACIÓN	MODIFICACIÓN
+ 0.25 segmento de 3m de la palmera	- 0.25 utilizar altura total palmera
+ 0.5 cálculo 11.4 metros	- 0.5 no calcular bien la suma
+1.25 cálculo de la x	hasta - 1.25 calcular mal x
	- 0.25 no unidades en el resultado
TOTAL: hasta + 2 puntos	TOTAL: quitar hasta 2 puntos

#### 4. Calcula las longitudes que faltan. (1'5p)



4.1) En este ejercicio queremos calcular las longitudes que faltan en el dibujo (campo de problemas), para ello usaremos como técnica la fórmula que nos proporciona el teorema de Thales y el cual nos justifica la utilización de tal (tecnología).

4.2) Las respuestas posibles que espero que den los alumnos según los conocimientos adquiridos en las clases es la siguiente:

**1ª forma**

$$\frac{17'6}{11} = \frac{4}{x} \rightarrow x = 2'5 \text{ cm}$$

$$\frac{17'6}{11} = \frac{y}{5} \rightarrow y = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{17'6}{11} = \frac{5'6}{z} \rightarrow z = 3'5 \text{ cm}$$

**2ª forma**

$$y = 17'6 - (4 + 5'6) = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{17'6}{11} = \frac{4}{x} \rightarrow x = 2'5 \text{ cm}$$

$$\frac{17'6}{11} = \frac{5'6}{z} \rightarrow z = 3'5 \text{ cm}$$

**3ª forma**

$$y = 17'6 - (4 + 5'6) = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{17'6}{11} = \frac{4}{x} \rightarrow x = 2'5 \text{ cm}$$

$$z = 11 - (2'5 + 5) = 3'5 \text{ cm}$$

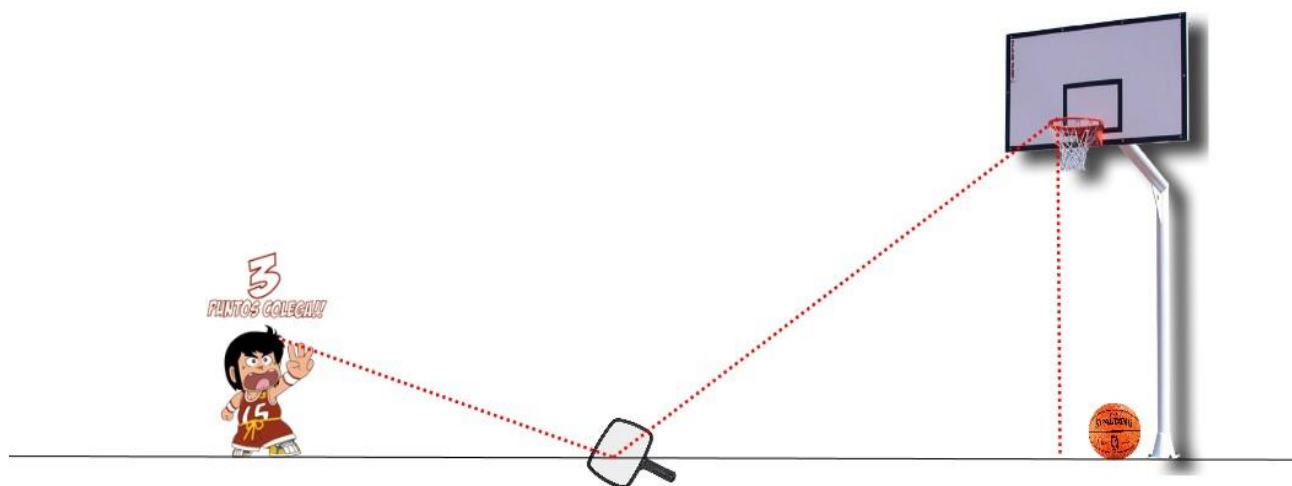
Hay 3 formas de resolver este ejercicio. Bien decir que espero la 1ª forma, aunque son igualmente válidas las otras dos.

4.3) Tabla con los criterios de evaluación, basándome en la respuesta dada anteriormente:

<b>PUNTUACIÓN</b>	<b>MODIFICACIÓN</b>
+ 0.5 cálculo de la x	- 0.25 mal cálculo de la x con Thales
+ 0.5 cálculo de la y	- 0.25 mal cálculo de la y con Thales
+ 0.5 cálculo de la z	- 0.25 mal cálculo de la z con Thales
	- 0.5 por no aplicar Thales en cada cálculo de longitudes que no haya sido restando
	- 0.25 no unidades en el resultado
TOTAL: hasta + 1.5 puntos	TOTAL: quitar hasta 1.5 puntos



**5.** Chico Terremoto es un gran pequeño jugador de baloncesto, quiere calcular la altura a la que está el aro del suelo para poder encestar, para ello se coloca al lado de la canasta y avanza 40 pasos, coloca un espejo y avanza otros 15 pasos hasta estar en la posición que vemos en el dibujo. Sabiendo que cada paso avanza 0'2 metros y que Chico Terremoto mide 1'6 metros. Calcula la altura a la que está el aro y dime que distancia ha recorrido Chico Terremoto. ¿Encestará si lanza hasta una altura de 410 centímetros? (3p)



5.1) En este problema quiero que los alumnos calculen la altura de la canasta a través del método del espejo explicado en clase (campo de problemas), usando como técnica el criterio de semejanza que dice que dos triángulos son semejantes si los lados son proporcionales. Esta técnica viene justificada por el teorema de Tales.

5.2) La respuesta que espero que den los alumnos según los conocimientos adquiridos en las clases es la siguiente:

$$\frac{x}{8} = \frac{1'6}{3} \rightarrow x = \frac{1'6 \cdot 8}{3} = 4'26 \text{ m.}$$

①  $40 \times 0'2 = 8 \text{ m}$   
 $15 \times 0'2 = 3 \text{ m}$

Solución). a) Altura del aro 4'26 m  
 b) Recorrido de  $8 + 3 = 11 \text{ m.}$   
 c) No porque la altura es de  $4'26 \text{ m} > 4'10 \text{ m} = 410 \text{ cm.}$



5.3) Tabla con los criterios de evaluación, basándome en la respuesta dada anteriormente:

<b>PUNTUACIÓN</b>	<b>MODIFICACIÓN</b>
+ 0.5 cálculo de 8m	- 0.5 mal cálculo de 8m
+ 0.5 cálculo de 3m	- 0.5 mal cálculo de 3m
+ 1.25 calcular x	Hasta - 1.25 mal cálculo de x, si aplica mal Thales descontar como máximo 1p.
+ 0.5 calcular distancia 11m	- 0.5 no calcular 11m
+ 0.25 decir que NO porque $4.26\text{m} > 410\text{cm}$	- 0.25 por decir que SI
	- 0.25 no unidades en los resultados
TOTAL: hasta + 3 puntos	TOTAL: quitar hasta 3 puntos

**6. Responde con VERDADERO o FALSO a las siguientes cuestiones. (1p)**

- a) El teorema del cateto es aplicado en triángulos agudos.**
- b) Con las homotecias construimos triángulos semejantes.**
- c) El teorema de la altura es aplicado en triángulos rectángulos.**
- d) El segmento cuarto proporcional se saca con 2 segmentos dados.**

6.1) En este ejercicio quiero que los alumnos apliquen los conocimientos vistos en clase para verificar las respuestas que sean correctas y en caso contrario que digan que son falsas esas afirmaciones. Las técnicas usadas para poder responder este cuestionario son la del teorema del cateto, homotecias, teorema de la altura y cálculo del segmento cuarto proporcional a 3 segmentos dados. Tanto la respuesta a, c y d vienen justificadas por el teorema de Thales, mientras que la b viene justificada por el criterio de semejanza que dice que 2 triángulos son semejantes si tienen 1 ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales (tecnológicas).

6.2) La respuesta que espero que den los alumnos según los conocimientos adquiridos en las clases es la siguiente:

- a) FALSO
- b) VERDADERO
- c) VERDADERO
- d) FALSO

En este caso no pido justificación porque creo que el examen es ya lo suficientemente largo y nos iríamos de horario.

6.3) Tabla con los criterios de evaluación, basándome en la respuesta dada anteriormente:

<b>PUNTUACIÓN</b>	<b>MODIFICACIÓN</b>
+ 0.25 por cada respuesta acertada	- 0.25 por cada respuesta fallada
TOTAL: hasta + 1 punto	TOTAL: quitar hasta 1 punto

## J. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB

Libros de texto:

- Edición 2012. *Matemáticas 2ºESO. Bloque II: Geometría*. Barcelona. España. Grupo Edebé
- Edición 2008. *Matemáticas 2ºESO. Unidad 8: Proporcionalidad geométrica*. Barcelona. España. Ediciones Vicens Vives.
- Edición 2002. *Matemáticas 2ºESO. Unidad 14: Semejanza. Teorema de Tales*. Madrid. España. Ediciones SM.

Historia de Thales de Mileto:

- Javier Peralta. Universidad Autónoma de Madrid. *Divulga Mat*. Real Sociedad Matemática Española. Recuperado de:  
[http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com\\_content&view=article&id=3372%3Athales-de-mileto-624-ac-547-ac&catid=37%3Abiograf-de-matemcos-ilustres&Itemid=33](http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3372%3Athales-de-mileto-624-ac-547-ac&catid=37%3Abiograf-de-matemcos-ilustres&Itemid=33)

Conocimientos previos del alumno:

- Ejercicios sobre proporcionalidad de segmentos. Recuperado de:  
<https://cldv3cicloprimaria.wordpress.com/category/h-deberes-matematicas/page/12/>
- Ejercicios sobre elementos y tipos de triángulos. Recuperado de :  
<https://nuestroblogde5primaria.wordpress.com/matematicas/tema10figuras-planas/01-clasificacion-de-poligonos/>
- Ejercicios sobre fracciones equivalentes. Recuperado de :  
<http://es.slideshare.net/veronistal/actividades-quinto-grado>
- Ejercicios sobre rectas paralelas, secantes y perpendiculares. Recuperado de:  
<http://www3.uah.es/pramos/Blog/Pdfs/Angulos-y-rectas-Samuel-Arroyo.pdf>
- Ejercicios de ecuaciones de grado 1 y sistemas de ecuaciones. Recuperado de:  
<http://examen-senescyt.blogspot.com.es/2014/08/resolucion-de-ecuaciones-curso-de.html> y <http://es.slideshare.net/ujgh/sistemas-de-ecuaciones-5436356>

Campos de problemas:

- Problemas sobre Teorema de Thales. Recuperado de  
[http://www.iesprofesorjuanbautista.es/IMG/pdf\\_10\\_Teorema\\_de\\_Tales.pdf](http://www.iesprofesorjuanbautista.es/IMG/pdf_10_Teorema_de_Tales.pdf) y

<http://matematicas.torrealmirante.net/SEGUNDO%20ESO/soluciones%20libro%20Sm%20Esfera/tema%2012%20teorema%20de%20tales.pdf>

- Problemas sobre criterios de semejanza. Recuperado de:  
[http://www.amolasmates.es/pdf/cidead/4\\_eso/apuntes/teoria%20semejanza\\_cideac.pdf](http://www.amolasmates.es/pdf/cidead/4_eso/apuntes/teoria%20semejanza_cideac.pdf)

#### Técnicas:

- Ejercicios para resolver usando técnicas nombradas en el apartado F. Recuperado de:  
[http://www.academico.cecyl7.ipn.mx/Geo\\_Trig/menus/unidad2/documentos/tema2/unidad2\\_2-7\\_thales.pdf](http://www.academico.cecyl7.ipn.mx/Geo_Trig/menus/unidad2/documentos/tema2/unidad2_2-7_thales.pdf) y  
[http://www.iesprofesorjuanbautista.es/IMG/pdf\\_10\\_Teorema\\_de\\_Tales.pdf](http://www.iesprofesorjuanbautista.es/IMG/pdf_10_Teorema_de_Tales.pdf) y  
<http://matematicas.torrealmirante.net/SEGUNDO%20ESO/soluciones%20libro%20Sm%20Esfera/tema%2012%20teorema%20de%20tales.pdf> y  
[http://www.amolasmates.es/pdf/cidead/4\\_eso/apuntes/teoria%20semejanza\\_cideac.pdf](http://www.amolasmates.es/pdf/cidead/4_eso/apuntes/teoria%20semejanza_cideac.pdf)

# ANEXOS

# ANEXO I

---

Libro 1.- Grupo Edebé

TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS	CAMPOS DE PROBLEMAS
<ul style="list-style-type: none"><li>• Razón y proporcionalidad de segmentos</li><li>• Rectas secantes cortadas por paralelas</li><li>• División de un segmento en partes proporcionales a unos segmentos dados</li><li>• División de un segmento en partes iguales</li><li>• Segmento cuarto proporcional a tres segmentos dados</li><li>• Segmento tercero proporcional a dos segmentos dados</li><li>• Triángulos semejantes</li><li>• Homotecias</li><li>• El pantógrafo</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Secantes cortadas en segmentos iguales</li><li>• Producto de segmentos</li><li>• Teorema de Tales</li><li>• Triángulos en posición de Tales</li><li>• Criterios de semejanza de triángulos (rectángulos e isósceles)</li><li>• Método de Tales (o radiación)</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Cálculo de distancias</li><li>• Rectas secantes por paralelas</li><li>• Triángulos en posición de Tales</li><li>• Cálculo de alturas</li><li>• Cálculo de sombras</li><li>• Triángulos semejantes</li></ul>

Libro 2.- Edición Vicens Vives.

TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS	CAMPOS DE PROBLEMAS
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Razón de proporcionalidad de 2 segmentos</li> <li>• Segmentos proporcionales</li> <li>• Determinación del segmento cuarto proporcional a 3 dados</li> <li>• División de un segmento en partes iguales</li> <li>• División de un segmento en partes proporcionales</li> <li>• Triángulos semejantes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La divina proporción</li> <li>• Figuras semejantes</li> <li>• Teorema de Thales</li> <li>• Triángulos en posición de Thales</li> <li>• Criterios de semejanza</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Proporcionalidad de segmentos</li> <li>• Cálculo de alturas</li> <li>• Triángulos semejantes y en posición de Thales</li> <li>• Cálculo de longitudes</li> </ul>

Libro 3.- Edición SM.

TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS	CAMPOS DE PROBLEMAS
<ul style="list-style-type: none"><li>• Razón de semejanza</li><li>• División de un segmento en partes proporcionales</li><li>• Triángulos semejantes</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Teorema de Thales</li><li>• Criterios de semejanza de triángulos</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• Cálculo de longitudes de segmentos</li><li>• Cálculo de alturas</li><li>• Triángulos semejantes</li></ul>



# ANEXO II

---

## CUESTIONARIO TFM I

A continuación te voy a realizar unas cuestiones para que me respondas, tus preguntas serán muy útiles para mi trabajo fin de máster TFM. Gracias.

### **1.- ¿Por qué se enseña el Teorema de Thales?, ¿Cuál es el fin con el que se enseña dicho Teorema?**

- *Para profundizar el concepto de proporcionalidad y usarlo después en escalas.*
- *Por la necesidad de tener una herramienta para medir objetos que no se pueden medir utilizando directamente un instrumento de medida.*
- *El teorema de Thales se enseña, porque junto al teorema de Pitágoras, son los teoremas básicos de la Geometría.*
- *se da en 2º porque es imprescindible para la Trigonometría q se da en 4º y en 3º no se ve*
- *se estudia con el fin de entender muchas situaciones de la vida real donde lo encontramos: Naturaleza, pintura, planos, arte en general...*
- *La importancia del Teorema de Thales radica en que sin él es imposible entender los triángulos y las figuras semejantes.*
- *Ciertamente yo me pregunto lo mismo. Imagino que es para entender mejor la semejanza de triángulos, aunque creo que sin Thales podrían entenderlo.*

### **2.- ¿Qué tipo problemas usas para aplicar este Teorema? Tanto aplicados a la vida cotidiana o no.**

- *Se ve una foto y se cuenta cómo funciona el zoom que utilizan en cualquier aparato para acercar o alejar las fotos.*
- *Ejemplos reales de mapas, escalas ...*
- *Cálculo de medidas que son imposibles de medir sin saber este teorema, por ejemplo: altura o distancias de objetos lejanos.*

- *Problemas de escalas, calculando medidas, relacionando medidas reales con medidas en mapas o planos de casas. Problemas comparando medidas de edificios, árboles, postes o personas y sus sombras.*
- *Representación de figuras semejantes, guardando la proporcionalidad de sus medidas.*
- *Comprobación de si dos figuras dadas son semejantes; por ejemplo, ver si hay semejanza entre dos triángulos, estudiando sus lados y sus ángulos.*
- *Calcular la longitud de determinados segmentos, conociendo la longitud de otros.*
- *Calcular longitudes o alturas de elementos de la vida cotidiana a partir de triángulos semejantes.*
- *Aplicados a la vida real: Calcular alturas de edificios, estatuas, personas... a partir de la sombra de un bastón o un palo. Calcular distancias entre barcos.*
- *No aplicados: El típico dibujo de dos rectas secantes que se cortan por paralelas, calcular la distancia que falta.*

### **3.- ¿Qué conocimientos previos asumes?**

- *Conocimientos previos de álgebra y geometría.*
- *Proporcionalidad directa, planteamiento de proporciones y cálculo de la razón de proporcionalidad, para explicar el concepto de razón de semejanza.*
- *Definición de segmento, rectas paralelas y rectas secantes.*
- *Operaciones con fracciones, ecuaciones de primer grado, despejar incógnitas.*
- *Geometría básica: rectas secantes, rectas paralelas, ángulos correspondientes.*

### **4.- ¿Qué enseñas o repasas antes de introducir el tema?**

- *Proporcionalidad y regla de tres. Triángulos.*
- *Repaso de los conceptos de proporcionalidad directa y de razón de proporcionalidad.*
- *Ejercicios para apreciar la semejanza de forma visual, comparando fotos, pinturas, maquetas...*

- *Fracciones equivalentes y razón y proporcionalidad de segmentos.*
- *Solo lo doy como repaso de dudas porque en segundo doy taller de matemáticas, pero lo que dan antes es geometría en el plano, ángulos, rectas, etc. (Creo, no estoy segura) Y ecuaciones también repasamos.*

### **5.- ¿Qué técnicas introduces después de haber introducido el teorema?**

- *Ejemplos variados con cálculos, con dibujos... Comprobaciones de si el resultado a simple vista tiene lógica.*
- *Proyección de figuras, construyendo figuras semejantes a otras: Homotecias.*
- *Nombrar ejemplos de la vida cotidiana donde se utiliza dicho teorema.*
- *Proponer problemas para que los alumnos piensen sobre la aplicación de dicho teorema.*
- *Sustituir y despejar.*

### **6.- ¿Qué dificultades tienen los alumnos en su aprendizaje y aplicación?**

- *No consiguen fácilmente colocar los triángulos en posición Thales, dificultades con ángulos.*
- *Si se utiliza regla y compás para hacer construcciones, tiene dificultad para mover correctamente las herramientas. También les cuesta plantear las relaciones de proporcionalidad entre los lados de figuras semejantes. Al trabajar con escalas, hay que hacer hincapié en el uso correcto del S.M.I., ya que suelen cometer errores.*
- *Al tratarse de geometría y poder observar los resultados los alumnos suelen tener menos dificultades que con otros conceptos de la materia.*
- *En la aplicación no mucha, pero en su aprendizaje real de lo que significa muchas. No entienden la demostración, no entienden el enunciado del teorema con letras. Y a la hora de despejar el valor que se busca también, les cuesta.*

### **7.- ¿Qué efectos producen sobre el alumno la enseñanza del Teorema de Thales?**

- *Les parece útil para el tema de ampliación/reducción de imágenes y les gusta calcular la altura de objetos lejanos.*
- *Les resulta asombroso que con algunos elementos y gracias a sus aprendizajes matemáticos, puedan calcular medidas de objetos inaccesibles como árboles, edificios altos, la profundidad de un pozo, etc.*
- *Lo que más les llama la atención es poder calcular cuánto mide una persona conociendo la sombra que proyecta (y problemas similares).*
- *Rechazo, confusión, se preguntan para qué sirve.*

### **8.- ¿Usas las TIC para su enseñanza?, ¿Sí es que si, de qué manera las usas?**

- *A veces, programas para trabajar imágenes.*
- *Utilizo GeoGebra, haciendo ejercicios de semejanza. El programa permite estudiar las relaciones de semejanza que existen entre polígonos*
- *Realizamos construcciones geométricas en el ordenador usando [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)*
- *No. Como mucho, la pizarra digital.*

### **9.- ¿Qué metodología usas para su enseñanza?**

- *Al principio manipulativa y visual para que visualicen semejanzas. Después ejercicios y problemas con ejemplos reales y cotidianos para ellos.*
- *Método tradicional, explicando en la pizarra, proponiendo ejercicios y problemas que se resuelven en papel y se corrigen.*
- *Esto se combina, cuando es posible, con el uso de GeoGebra que es muy motivador para el alumno en el estudio de la Geometría.*
- *Manejo de planos, mapas, para poder observar proporcionalidad de medidas en papel con medidas reales.*
- *Primero explico el teorema de Thales.*

- *Planteo varios problemas para que los alumnos discurren como se puede aplicar dicho teorema. Son los propios alumnos los que salen a la pizarra para resolver dichos problemas.*
- *Explico los problemas anteriores y planteo unos nuevos.*
- *Realizamos construcciones geométricas usando [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).*
- *Me gusta plantearles lo que le pasó a Thales. Les pregunto cómo calcularían la altura de la pirámide de Keops un día soleado. Les dejo tiempo para pensar. Si ya se lo saben, les pregunto qué pasaría si no hubiese sol. A partir de ahí que vayan deduciendo y luego ejercicios parecidos. Me gusta que piensen pero con los alumnos que yo tengo (suelen ser los que van mal) difícil, al final siempre acabas aplicando sin más el teorema.*

# ANEXO III

## EXAMEN MATEMÁTICAS 2º ESO. TEOREMA DE THALES

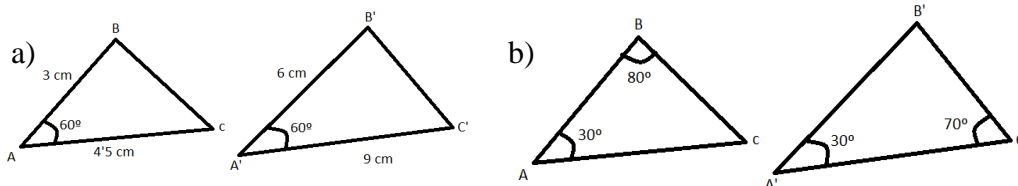
ALUMNO:

FECHA:

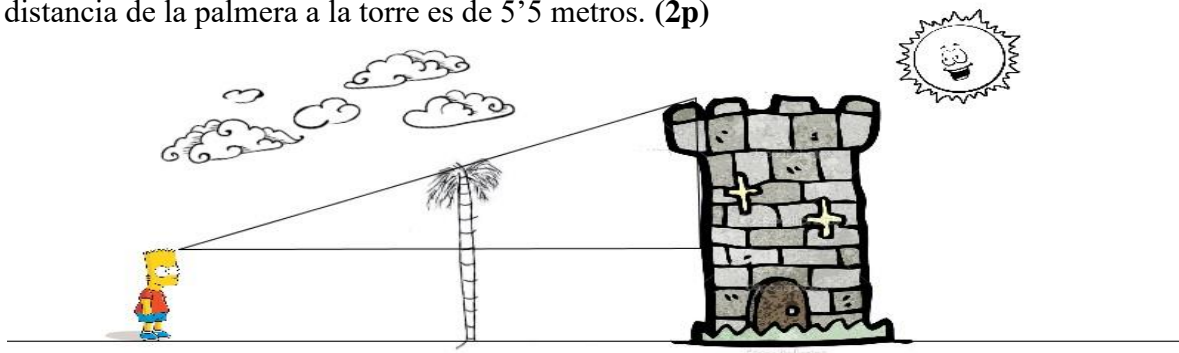
El tiempo para realizar el examen será de 1 hora. Cuando sea necesario cogeréis 2 decimales por truncamiento. Se puede utilizar calculadora.

1. Enuncia y representa con exactitud el Teorema de Thales. (1p)

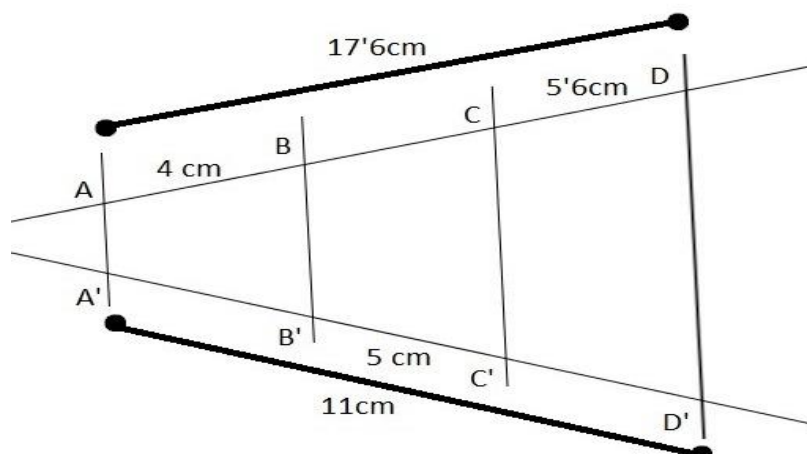
2. ¿Son los triángulos semejantes? Justifica la respuesta en cada apartado. (1'5p)



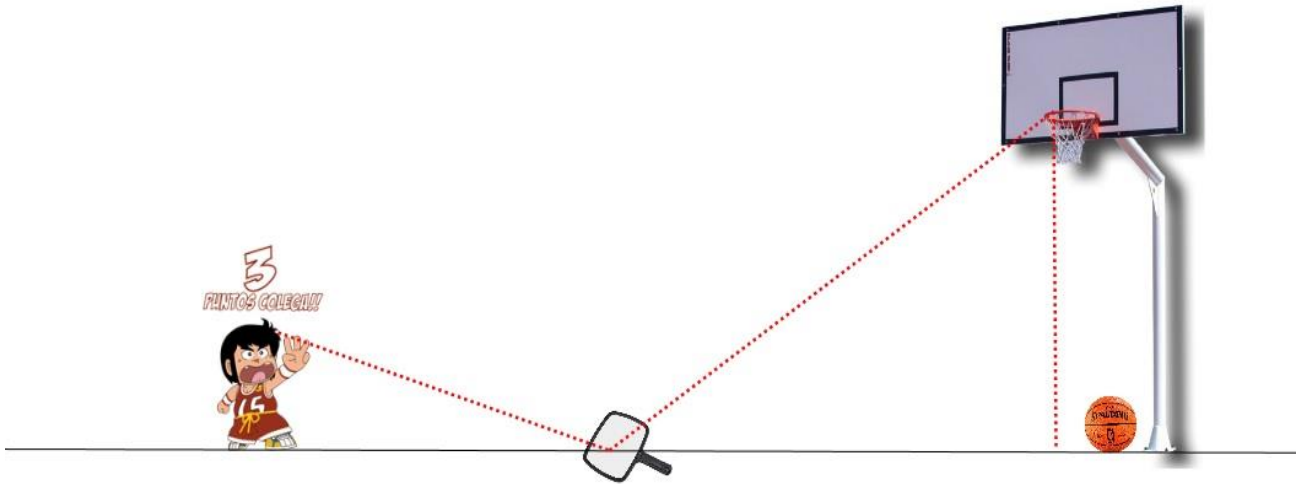
3. Calcula la altura de la torre sabiendo que la altura de Bart es 1'8 metros, la altura de la palmera es 4'8 metros, la distancia de Bart a la palmera es de 2'5 metros y la distancia de la palmera a la torre es de 5'5 metros. (2p)



4. Calcula las longitudes que faltan. (1'5p)



5. Chico Terremoto es un gran pequeño jugador de baloncesto, quiere calcular la altura a la que está el aro del suelo para poder encestar, para ello se coloca al lado de la canasta y avanza 40 pasos, coloca un espejo y avanza otros 15 pasos hasta estar en la posición que vemos en el dibujo. Sabiendo que cada paso avanza 0'2 metros y que Chico Terremoto mide 1'6 metros. Calcula la altura a la que está el aro y dime que distancia ha recorrido Chico Terremoto. ¿Encestará si lanza hasta una altura de 410 centímetros?(3p)



6. Responde con VERDADERO o FALSO a las siguientes cuestiones. (1p)

- a) El teorema del cateto es aplicado en triángulos agudos.
- b) Con las homotecias construimos triángulos semejantes.
- c) El teorema de la altura es aplicado en triángulos rectángulos.
- d) El segmento cuarto proporcional se saca con 2 segmentos dados.