Trabajo Fin de Máster

Propuesta de enseñanza de los números racionales en 1º de ESO

A proposal for the teaching of rational numbers in the first course of secondary education

Autor:

Fernando Ruiz Laguna

Director/es

Alberto Arnal Bailera

Facultad de Educación
Año 2016

Prólogo

Los números racionales constituyen una de las primeras desviaciones de las matemáticas del acto de contar, y su aparición está intimamente relacionada con la necesidad de efectuar medidas con mayor precisón que la que los números naturales permiten.

Actualmente los números racionales se trabajan en primaria, pero no de la mejor forma posible, dado que en general se escogen tecnologías que no son del todo óptimas, y que se abandonan rápidamente cuando no permiten explicar una técnica, pasando a un trabajo puramente formal.

En secundaria el trabajo de fracciones tampoco es el más óptimo, dado que tampoco existe una mejoría notable en los modelos y se tiende a pasar muy rápido por este tema, dejando el trabajo de fracciones casi a merced del alumno. Dado que el uso ccorrecto de las fracciones va a ser necesario para futuros temas, es importante que los alumnos adquieran una buena base lo antes posible, con el fin de que un mal dominio de las fracciones no entorpezca los resultados de aprendizaje.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Consideraciones iniciales

El propósito de este Trabajo Fin de Máster es ahondar en la enseñanza de los números racionales en 1º de ESO. En este TFM se incide más en los números racionales en forma de fracción. Se trata de uno de los primeros temas vistos en matemáticas que ocasiona problemas a los alumnos.

Se trata de un tema que comienza a verse en primaria[1], no obstante, como se comentará más adelante, los conocimientos sobre el manejo de los racionales con los que nuestros llegan a la educación secundaria puede ser algo deficiente.

Los racionales son uno de los objetos que más se van a usar a lo largo de todo el desarrollo de la asignatura de matemáticas. Además, no tardarán en irrumpir en otras asignaturas como física o tecnología. Este hecho, unido a la estructura en espiral del currículo[2], nos pone ante una pequeña encrucijada. Es claro que el manejo constante de los números racionales en forma fraccionaria va a hacer que éstos sean uno de los objetos matemáticos sobre los cuales el alumno dispondrá de una mayor práctica y habilidad operativa, pero un aprendizaje deficiente de éstos prodía suponer para un alumno un obstáculo que mine su capacidad de aprendizaje, tanto en aquellas ramas de las matemáticas en las que seguirán apareciendo, como en aquellas asignaturas que involucren a los racionales en sus métodos de trabajo, entre las que se enccuentran física, química, tecnología, ecconomía, etc.

Muchas de estas concepciones erróneas pueden aparecer a causa de basar nuestro discurso en moelos concretos que, aunque matemáticamente no son incorrectos, no resultan del todo adecuados para abordar la enseñanza de determinadas técnicas. Esto puede suceder a causa de que se trate de modelos concretos que limitan las operaciones, proporcionan una tecnología incorrecta o, incluso en ciertos casos, ambas, como sería el caso de usar el concepto de fracción como parte de un todo para tratar de justificar la suma.

Uno de los retos a los que nos enfrentamos en la enseñanza de las fracciones es el de lograr que nuestros alumnos comprendan las fracciones, no sólo como parte de un todo sino también como una medida, como un cociente indicado de dos números, como un operador,

[1] Ver Currículo (Detallado en la sección (2.1) de este trabajo.)
[2] Ver Currículo (Detallado en la sección (2.2) de este trabajo.)

como una razón o como cualquier otro de los múltiples significados que a las fracciones se le pueden dar para modelizar y resolver distintas situaciones matemáticas. La idea de fracción como parte de la unidad si que parece extendida, no obstante, dado que otros significados requieren de mayor abstracción, no son tan inmediatos de entender como el significado de parte-todo. Es también muy importante comprender varios de estos conceptos, en especial el significado de cociente indicado y el de operador, para desenvolverse de forma adecuada en los temas de álgebra, que por lo general son inmediatamente posteriores al de números.

Aunque no presente una dificultad a estos niveles, dado que los números a los que nos enfrentamos en estos momentos no son elevados, sí que podemos aprovechar este tema para ir introduciendo estrategias de cálculo, que se seguirán desarrollando a lo largo del resto del curso, fundamentalmente en el tema de álgebra. En este tema introduciremos la estrategia de simplificación en cada paso intermedio. Así, en este tema comenzamos también a introducir procesos reflexivos de cálculo, iniciando el paso de un paradigma más aritmético a un paradigma más algebraico.

1.2. Qué vamos a enseñar

El primer objetivo que tenemos en mente es volver a familiarizar a los alumnos con el concepto de fracción. No obstante, queremos abordar el objeto de una forma distinta a la que nuestros alumnos han visto en primaria. En primaria la enseñanza más frecuente se suele llevar a cabo dándole a la fracción el significado de una parte de un todo, en lugar de enseñar las fracciones como una medida. Dado que nos interesa más usar este segundo significado, orientaremos nuestra enseñanza a tal fin.

No obstante, nos interesa que nuestros alumnos adquieran un conocimiento algo más completo de qué fenómenos pueden abordarse mediante el uso de fracciones, por lo que trataremos de incluir un mayor número de significados de la fracción, con el fin de que nuestros alumnos logren un aprendizaje más completo sobre qué fenómenos pueden modelizarse mediante el uso de este objeto matemático. Así trataremos de incluir problemas en los que la fracción adopte un significado distinto al de un medida. Trataremos pues de incluir los diferentes significados de la fracción que aparecen descritos por Gairín y Muñoz (2005):

- Obviamente, aparecerá el significado de la fracción como medida, que además va a ser el hilo conductor de la enseñanza, y que usaremos para justificar la gran mayoría de técnicas que aparecen.
- También aparecerá el significado de la fracción como parte de un todo, que los alumnos ya conocían de primaria. No obstante, evitaraemos basar las tecnologías en estos modelos, y plantearemos aquellos problemas que nos permitan justificar algunas técnicas de forma apropiada desde este modelo.
- Problemas de reparto, aunque de nuevo teniendo mucho cuidado de qué no se introduzcan justificaciones tecnológicas erróneas. Este modelo será útil también para introducir tecnologías del paso al decimal más adelante.
- Indicaremos también a nuestros alumnos que una fracción es un cociente indicado, significado que de nuevo será útil cuando queramos enseñar el paso de una fracción a un decimal. También es un significado fundamental más adelante en álgebra.

- Otro significado más que deberíamos introducir es el de fracción entendida como un operador. Además, este significado proporciona un importante refuerzo tecnológico en aquellos conceptos en los que la medida podría quedarse un poco corta.

- También aparecerá el concepto de razón, que aparece de una forma relativamente natural al hablar de medidas, y que nos puede de nuevo servir para arrojar algo de luz sobre por qué determinadas técnicas se efectuan de la forma que se efectuan.

- El último significado de la fracción que queremos enseñar es el de la fracción formal. Esto es la fracción entendida como número. Trabajaremos este significado con el fin dar una estructura formal a las distintas técnicas e ideas que vayan apareciendo.

Así pues, queremos que nuestros alumnos sean capaces de modelizar todos los problemas que surgen en estos campos, usando fracciones y entendiendo las aplicaciones de las técnicas que emplean.

Las técnicas y conceptos que en esta programación se recogen se pueden clasificar en dos grupos.

En el primer grupo consideraríamos, se hallan aquellas técnicas basadas en la manipulación de fracciones y la comprensón de sus propiedades básicas:

- Queremos que los alumnos comprendan lo que implica que dos fracciones sean equivalentes, así como la técnica de paso de una fracción equivalente a otra.

- En el marco de las fracciones equivalentes, queremos que se adquiera el hábito de dejar un resultado correctamente simplificado, para lo cual también enseñaremos una técnica de simplificación de fracciones.

- Siguiendo con el estudio de las fracciones equivalenes, trabajaremos también técnicas de reducir a común denominador y a mínimo común denominador, necesarias a lo largo del tema para poder comparar y operar fracciones.

- Comparación de fracciones, tanto desde un enfoque algorítmico (razonado) como desde un enfoque numérico.

El segundo grupo de técnicas a introducir son aquellas relacionadas con las operaciones entre varias fracciones. Queremos que nuestros alumnos comprendan las ideas que hay detrás de cada técnica, así como que adquieran cierta facilidad operacional. Las técnicas a enseñar son:

- Suma de fracciones.

- Resta de fracciones.

- Producto de fracciones, a poder ser simplificando entre los factores antes de efectuar el producto.

- División de fracciones, de nuevo buscando simplificaciones antes de operar.

Capítulo 2

Estudio Previo

Antes de abordar la enseñanza como tal, conviene tener en cuenta el estado actual de la enseñanza de las fracciones y los decimales en la enseñanza actual. Es importante tener en cuenta con qué conocimientos llegan los alumnos a nuestra aula. Además, también conviene tener en cuenta lo que dicen las actuales leyes educativas bajo las cuales actuamos al enseñar los números racionales. Con el conocimiento de estos campos podremos construir un entorno en el que enmarcar nuestra actuación educativa con el fin de que ésta sea adecuada. No obstante, dado que las leyes educativas son unas directrices que deben concretarse, y que por lo tanto tenemos una relativa libertad en lo que al desarrollo de la asignatura concierne, nos centraremos en los conocimientos previos de nuestros alumnos, que sí que van a ser muy determinantes para plantear de forma correcta el desarrollo de la asignatura.

También es interesante analizar cómo se imparte actualmente el contenido referente a las fracciones y números decimales. Desde una perspectiva objetiva y crítica, será necesario valorar que técnicas, tecnologías y problemas consideramos útiles para la enseñanza, cuáles podrían usar alguna mejora y cuáles no se ajustan a la enseñanza que queremos impartir y deberían ser sustituidos.

2.1. Conocimientos previos del alumno

Antes comenzar a plantearnos la enseñanza, conviene asegurarnos de que nuestros alumnos conocen las distintas técnicas operativas que necesitarán para enfrentarse a esta enseñanza. En general, son pocas técnicas las que son necesarias. Obviamente, para segir una esnseñanza basada en problemas nos interesa que nuestros alumnos ya hayan desarrollado parte de esas capacidades a lo largo de primaria. Por lo demás, básicamente serán necesarias las habilidades para realzar las cuatro operaciones básicas con números enteros. También será necesario que nuestros alumnos sean capaces de aplicar divisibilidad, y que sean capaces de hallar múltiplos (y, en particular el m.cm.) de varios números dados.

Dado que las fracciones también son contenido de educación primaria, nos interesa hacernos una idea de qué nivel de conocimiento pueden haber adquirido nuestros alumnos sobre este objeto matemático. Para ello, nos basaremos en los elementos que la ley refleja en el currículo de educación primaria.

Para hacernos una idea de con qué conocimientos previos vendrán nuestros alumnos a clase, veamos que enseñanza dictamina la legislación vigente[1]. De dicha legislación se extrae que nuestros alumnos deberían tener los conocimientos previos requeridos para seguir nuestra ennseñanza. De hecho, deberían tener la mayoría de conocimientos que impartimos en este tema, pero la legislación ya hace referencia al concepto de fracción con el significado de parte- todo, por lo que es muy posible que la enseñanza adquirida a lo largo de la etapa de primaria no haya sido especialmente significativa en cuanto a que los alumnos apruendan a "darle significado a la fracción".

En cuanto a la normativa de educación primaria propia de nuestra comunidad[2]. De nuevo se observa que, desde la legislación se da importancia al concepto de fracción como parte de un todo, y a las operaciones formales con números fraccionarios.

Los puntos de ambos documentos que hacen referencia al trabajo con fracciones aparecen tratados en el Anexo A.

Así pues, nos encontramos con que las leyes educativas promueven la enseñanza de la fracción en primaria desde el significado de una parte de un todo, por lo que pueden haberse producido algunas concepciones erróneas, siendo posible que desde el significado de la fracción como parte de un todo aparecen justificadas, pero que no se corresponden con la realidad matemática. Así desde dicho significado de la fracción va a ser muy dificil darle un significado a las fracciones iimpropias, o dar una teccnología apropiada a las distintas operaciones.

De aquí podríamos concluir que posiblemente nos encontremos con unos alumnos con unos conocimientos previos aceptables, pero que puede ener asentadas concepciones que pueden resultar difíciles de abandonar, por lo que una parte de nuestra enseñanza deberá ir encaminada a lograr que se produzca cierta ruptura epistemológica, sobre la cual reasentaremos el conocimiento de las fracciones desde una perspectiva más adecuada para la enseñanza. Notar también que es muy posible que, al tratarse de una clase de 1º de ESO, es muy probable que nuestros alumnos hayan venido de diferentes colegios, con enseñanzas muy dispares.

2.2. Las fracciones en las actuales leyes educativas

Veamos que dicen las actuales leyes educativas en lo referente al trabajo con fracciones en el aula. En cuanto a la legislación vigente [3], las indicaciones referentes a las fracciones aparecen refejadas en el Anexo A.

[1]Ver el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín oficial del estado, nº 52*, 2014, 1 de marzo

[2]Ver la parte referente a matemáticas del Anexo II de la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón, nº 119*, 2014, 20 de junio.

[3]Ver el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín oficial del estado, nº3*, 2015, 3 de enero

Tomaremos también como referencia el currículo de nuestra comunidad[4]. Lo que nos dice éste con respecto a la enseñanza de las fracciones es aparece también en el Anexo A.

De donde se decduce que el currículo, al menos en nuestra comunidad autónoma, las leyes educativas son partidarias de una enseñanza similar a la que aquí se propone, buscando una enseñanza que enseñe al alumno a modelizar las distintas situaciones que se pueden acometer con fracciones y a operar con ellas siendo consciente del contexto.

2.3. Estado actual de la enseñanza

Para estudiar el estado actual de la enseñanza nos vamos a centrar fundamentalmente en analizar cómo se propone ésta desde los libros de texto. Aunque se critiquen de forma vehemente algunas técnicas que se enseñan y, especialmente, alguna tecnologías, hay que destacar que en muchos casos no se va a tener una correspondencia plena entre lo que propone el libro de texto y lo que se imparte en el aula. En muchos casos, aunque el libro de texto presente deficiencias, el profesor proporcionará aquellas tecnologías necesarias para lograr una comprensión del objeto adecuada al nivel en el que imparte las clases, quedando el libro de texto como una fuente de ejercicios y problemas, siendo las explicaciones consideradas más como un material de referencia que como un instrumento de aprendizaje.

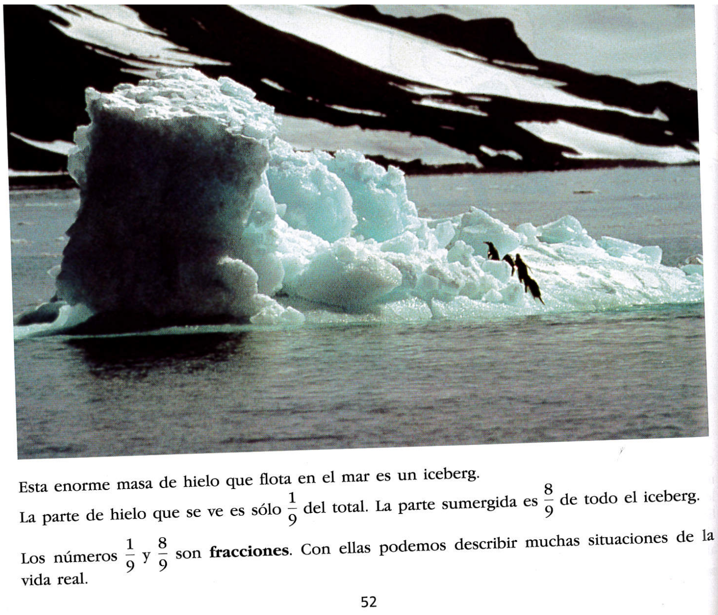
Obviamente, en niveles como 1º de ESO, y, en general a lo largo de toda la educación secundaria, no podemos comenczar a enseñar un objeto matemático sin más, limitándonos a enumaerar sus propiedades y técnicas asociadas y esperar un resultado de aprendizaje real. Es siempre necesaria una progresividad, que comenzará siempre con una motivación que refleje la utilidad del objeto matemático para abordar un nuevo campo de problemas.

Esto es lo que en didáctica se conoce como la razón de ser. Desde esta rama se propone que dicha razón de ser consista en un problema que los alumnos puedan comenzar a resolver con las herramientas de las que disponen antes de comenzar el tema, pero que requiera del nuevo objeto para su resolución plena.

Observando libros de texto, como el libro el que propone SM (Bujanda y Mansilla,1996), observamos que se hace una breve introducción muy simple:

Como vemos en la figura 2.1 se hace una breve exposición de un fenómeno que puede modelizarse en términos de fracciones. No obstante, simplemente se trata de describir una situación que los alumnos ya conocen. Además, incide en la idea de fracción como parte de un todo, que los alumnos ya deberían conocer de primaria. Abordar así las fracciones puede dar lugar a tecnologías equivocadas que a su vez degeneren en técnicas erróneas. Además, no usar fracciones mayores que la unidad puede hacer pensar a los alumnos que éstas no existen, y crear problemas de asociación entre números decimales y fracciones.De todas formas, se puede corregir esta situación si el libro si que introduce el resto de significados de la fracción más adelante. Alternativamente, también es posible considerar que un profesor podría impar-

[4]Según lo dispuesto en la orden de 9 de mayo de 2007, del Departamentode Educación, Cultura y Deporte, por la que seaprueba el currículo de la Educación secundariaobligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.*Boletín oficial de Aragón, nº 65*, 2007, 1 de junio



Esta enorme masa de hielo que flota en el mar es un iceberg.

La parte de hielo que se ve es sólo $\frac{1}{9}$ del total. La parte sumergida es $\frac{8}{9}$ de todo el iceberg.

Los números $\frac{1}{9}$ y $\frac{8}{9}$ son **fracciones**. Con ellas podemos describir muchas situaciones de la vida real.

52

Figura 2.1: Introducción de las fracciones en el libro de SM

tir sus clases con otra razón de ser.

En otros libros de texto, como el libro de Anaya (Colera, Gaztelu y García, 2001), se introducen los numeros racionales como un instrumento de medida; tal y como puede apreciarse en la figura 2.2. Se trata de una introducción más natural, que además permite asociar las fracciones de forma inmediata con los decimales. También aparece de una forma bastante natural la idea de fracción equivalente. Se atisba también la idea de fracción como operador, e icluso una tecnología algo más acertada para tratar la técnica de suma de fracciones. Se plantean también algunas preguntas que darán lugar a algunos de los primeros conceptos matemáticos que aparecerán en el tema.

2.3.1. Editorial SM, Bujanda y Mansilla

Vamos a valorar ahora la propuesta del libro de SM (Bujanda y Mansilla,1996), valorando qué efectos podría tener en el aprendizaje de los alumnos que estudien con dicha propuesta como referencia. Se trata de una propuesta con una metodología bastante expositiva. En ella los problemas, en lugar de ser el motor del aprendizaje, aparecen como ejercicios al final. Se trabaja de forma relativamente abstracta, abordando directamente las distintas propiedades y técnicas relacionadas con las fracciones, sin ningún problema o ejemplo real que ponga de manifiesto la utilidad de las técnicas. Esto podría provocar desmotivación entre los alumnos, a causa de no percibir la utilidad de lo que están trabajando. También podría darse que algunos alumnos, incluso dominando el uso de fracciones, sean incapaces de aplicar dicho dominio para resolver probblemas reales. No obstante, existe la ventaja de que el contexto no ”contamina” el aprendizaje con tecnologías incorrectas surgidas del contexto.

Tras la introducción que hemos visto en la figura 2.1, el lbro procede a introducir las fracciones equivalentes, tal y como puede verse en la figura 2.3. La tecnología que se usa

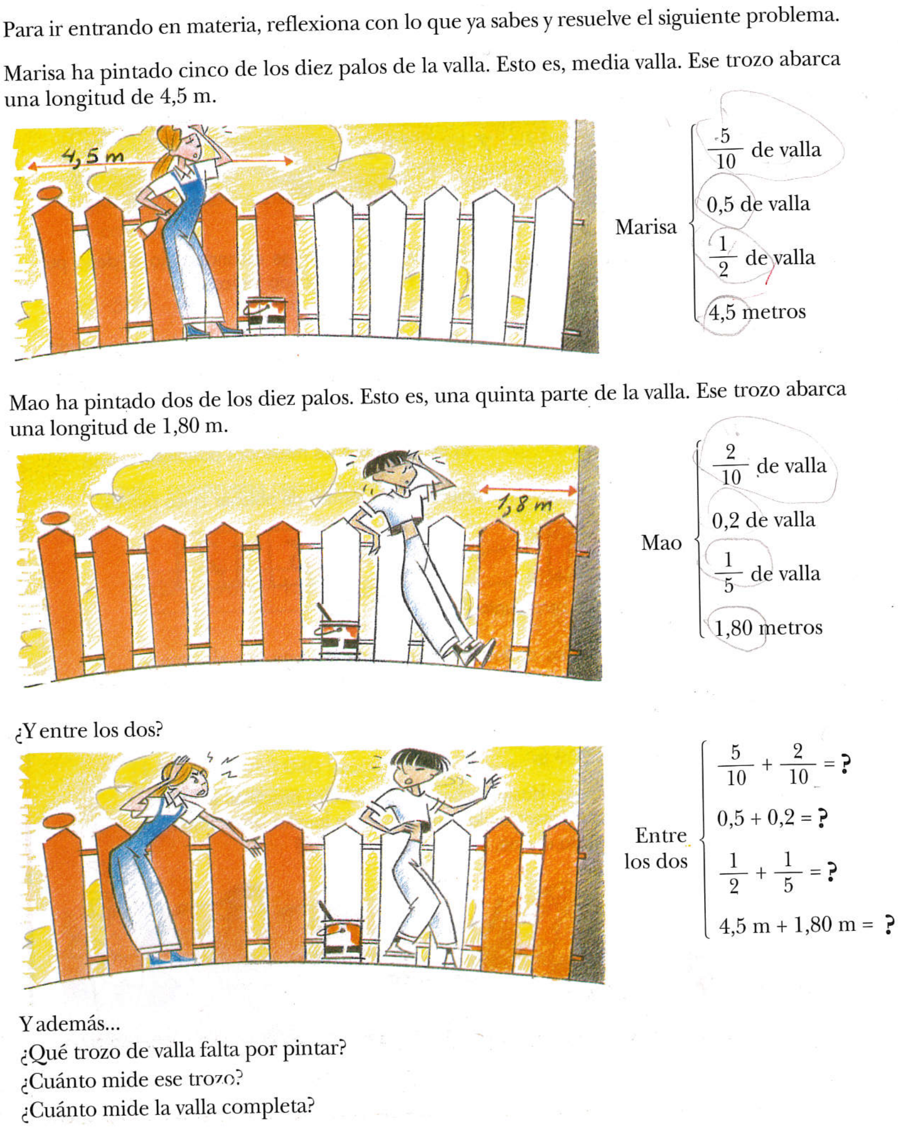
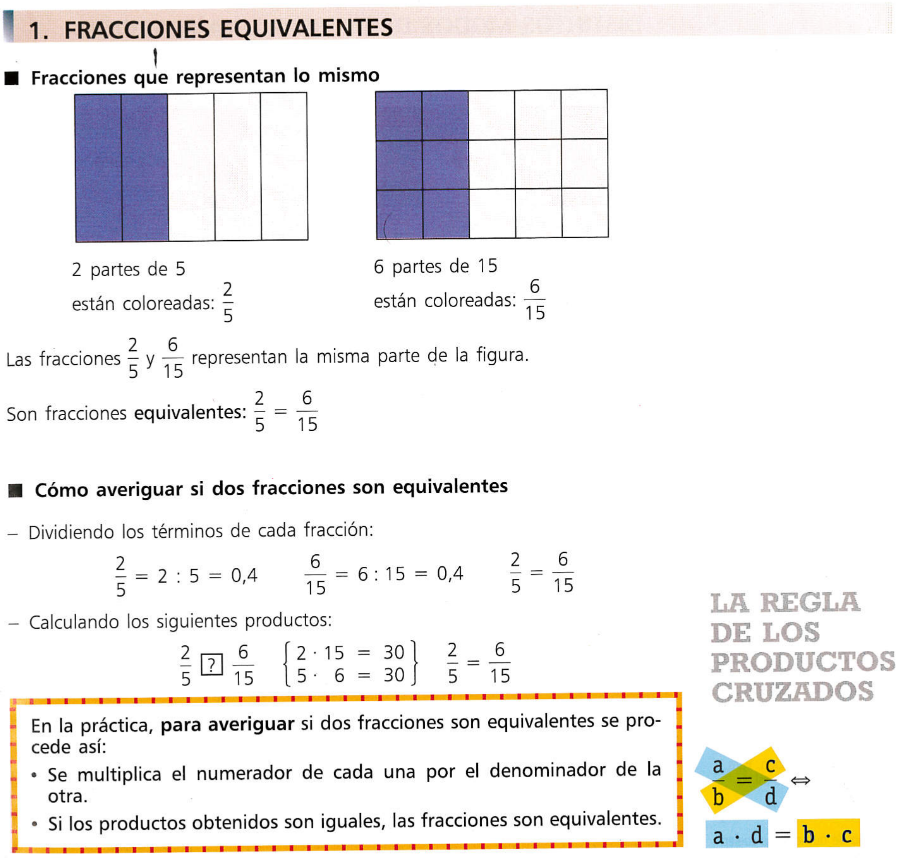


Figura 2.2: Introducción de las fracciones en el libro de Anaya

es visual, y a no del todo incorrecta (aunque un signo = entre ambos dibujos tal vez ayudaría). No obstante, esta tecnología se sustenta en el significado parte-todo de la fracción, y se observa cierta desconexión entre la tecnología y la técnica. Aunque el uso del decimal para justificar que dos fracciones son equivalentes cuando su valor numérico es el mismo es correcta, introducir también los decimales puede ser bastante limitante a la hora de seguir con un trabajo de fracciones, quedando fuera algunos significados, como el de razón o el de operador. Además, se plantea como técnica útil la regla de los productos cruzados en lugar de la de dividir o multiplicar el numerador y denominador de la fracción por el mismo número.en mi opinión, esta segunda técnica es la que debería institucionalizarse como la técnica a emplear, quedando la regla de los productos cruzados como algo anecdótico. En general, la técnica de multiplicar o dividir ambos términos de la fracción arroja algo más de luz sobre la idea de fracción equivalente, genera menos números grandes y va a hacer que, tras algo de práctica, los alumnos sean capaces de identificar fracciones equivalentes a golpe de vista, lo cual propiciará que sean capaces de simplificar en pasos intermedios. Además, puede también favorecer la construcción de estrategias de cálculo para efectuar divisiones y mul-



1. FRACCIONES EQUIVALENTES

■ **Fracciones que representan lo mismo**

2 partes de 5 están coloreadas: $\frac{2}{5}$

6 partes de 15 están coloreadas: $\frac{6}{15}$

Las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$ representan la misma parte de la figura.

Son fracciones **equivalentes**: $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

■ **Cómo averiguar si dos fracciones son equivalentes**

– Dividiendo los términos de cada fracción:

$$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4 \qquad \frac{6}{15} = 6 : 15 = 0{,}4 \qquad \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

– Calculando los siguientes productos:

$$\frac{2}{5} \boxed{?} \frac{6}{15} \qquad \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 15 = 30 \\ 5 \cdot 6 = 30 \end{array} \right\} \qquad \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

En la práctica, **para averiguar** si dos fracciones son equivalentes se procede así:
- Se multiplica el numerador de cada una por el denominador de la otra.
- Si los productos obtenidos son iguales, las fracciones son equivalentes.

LA REGLA DE LOS PRODUCTOS CRUZADOS

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

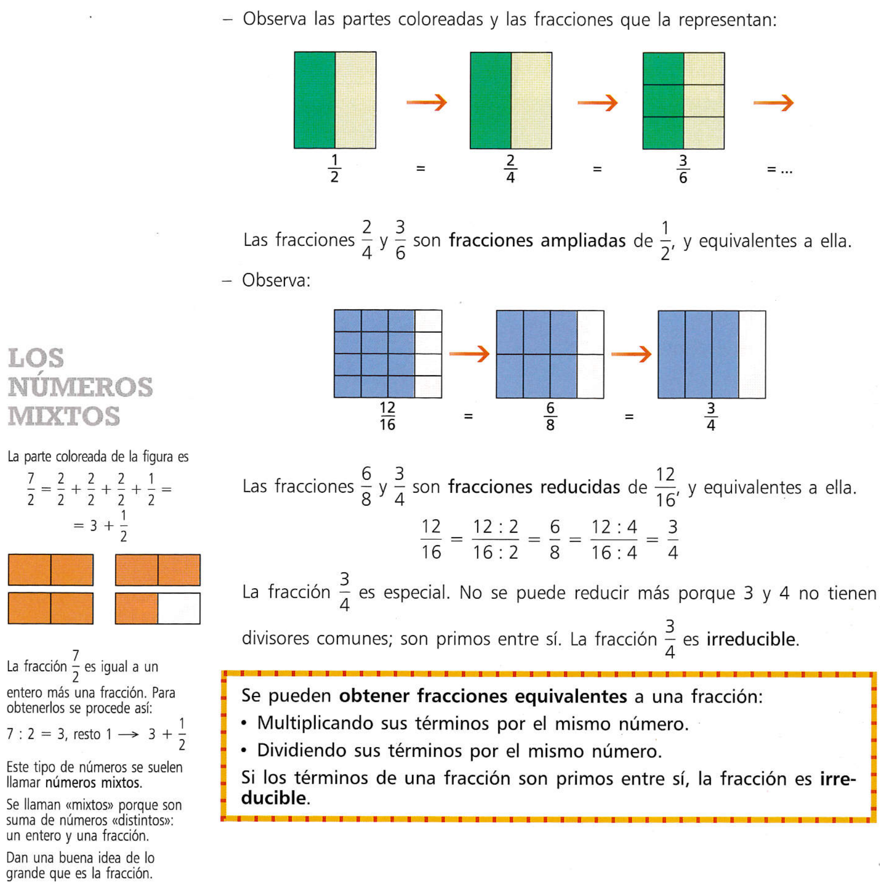
Figura 2.3: Fracciones equivalentes en el libro de SM

tiplicaciones. No obstante, la noción de fracción como cociente indicado ya debería haber sido introducida para disponer de un marco tecnológico óptimo que nos permita arrojar toda la luz posible acerca de esta técnica. Tras esta exposición aparecen un par de ejercicios y es entonces cuando el libro dedica una página a los distintos modos de escribir una fracción, presentando la técnica de multiplicar y dividir numerador, como puede observarse en la figura 2.4. Se introducen en un margen los números mixtos, lo cual era correccto y necesario. No obstante, esta página podría estar unificada con la anterior, lo cual además aportaría algo de consistencia y una mayor interrelación entre ambos conceptos.

Tal vez debería hablarse algo más aquí de la simplificación de fracciones, que debería ser introducida lo antes posible, con el fin de comenzar a incidir en que es necesario presentar la solución de un problema lo más simplificado posible (en general).

Una vez tratada la equivlenciade fracciones, se entra en la parte de reducción de fracciones a común denominador, como puede verse en la figura 2.5.

Tanto la técnica como la tecnología son a mi juicio las apropiadas para tratar este concepto. No obstante, conviene recordar que se trata de una técnica que se va a usar de forma pasajera, y que la técnica a tratar es la siguiente, cuya enseñanza podría plantearse de forma que los alumnos la obtengan de forma autónoma. Aparece a continuación en el libro.



– Observa las partes coloreadas y las fracciones que la representan:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$

Las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$ son **fracciones ampliadas** de $\frac{1}{2}$, y equivalentes a ella.

– Observa:

$\frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Las fracciones $\frac{6}{8}$ y $\frac{3}{4}$ son **fracciones reducidas** de $\frac{12}{16}$, y equivalentes a ella.

$$\frac{12}{16} = \frac{12:2}{16:2} = \frac{6}{8} = \frac{12:4}{16:4} = \frac{3}{4}$$

La fracción $\frac{3}{4}$ es especial. No se puede reducir más porque 3 y 4 no tienen divisores comunes; son primos entre sí. La fracción $\frac{3}{4}$ es **irreducible**.

Se pueden **obtener fracciones equivalentes** a una fracción:
- Multiplicando sus términos por el mismo número.
- Dividiendo sus términos por el mismo número.

Si los términos de una fracción son primos entre sí, la fracción es **irreducible**.

LOS NÚMEROS MIXTOS

La parte coloreada de la figura es

$\frac{7}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} =$

$= 3 + \frac{1}{2}$

La fracción $\frac{7}{2}$ es igual a un entero más una fracción. Para obtenerlos se procede así:

$7 : 2 = 3$, resto $1 \longrightarrow 3 + \frac{1}{2}$

Este tipo de números se suelen llamar **números mixtos**.

Se llaman «mixtos» porque son suma de números «distintos»: un entero y una fracción.

Dan una buena idea de lo grande que es la fracción.

Figura 2.4: Obtención de fracciones equivalentes en el libro de SM

Ya se aprecia en la figura 2.6 que, de nuevo en el libro se expone una técnica de reducciión a mínimo común denominador correcta, aunque sin tecnología. La tecnología en este caso es casi inmediata, de hecho la idea podría surgir durante la exposición del método de forma espontánea, y es casi seguro que surgirá si la actuación del profesor encamina la clase hacia dicho resultado. En cuanto a la propia técnica, aunque correcta, es quizás más algorítmica de lo que debería. Dicha técnica podría resumirse en hallar el m.c.m. de los denominadores y resolver un "problema" de encontrar una fracción equivalente a la dada cuyo denominador sea otro número dado. Enseñar así esta técnica también logrará resultados de aprendizaje más duraderos.

El siguiente problema que se aborda es el de comparación de fracciones, cuyo desarrollo puede observarse en la figura 2.7.

Se trata de una técnica puramente algorítmica, con una tecnología gráfica basada de nuevo en el significado de parte-todo. No obstante, falta la tecnología gráfica precisamente en la menos obvia de las técnicas, dodnde sí que podría facilitar la comprensión de por qué reducimos a común denominador. Tal vez sería interesante trabajar un poco el sentido numérico en esta parte, pero el libro no entra en ello, dejando a merced del docente este trabajo. No tiene mucho sentido comparar fracciones que claramente se pueden comparar por simple inspección. Tal vez una alternativa sería dejar como tarea algún ejercicio de comparación entre fracciones muy dispares, para que los alumnos desarrollen alguna estrategia numérica

3. REDUCCIÓN DE FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR

Reducción de dos fracciones a común denominador

Observa cómo se pueden obtener dos fracciones equivalentes a $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$ pero con igual denominador.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{8}{20}$$

Se han multiplicado los dos términos de cada fracción por el denominador de la otra.

El denominador común 20 es múltiplo de los denominadores 4 y 5.

Reducción de tres o más fracciones a común denominador

Observa cómo se reducen a común denominador $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot (6 \cdot 4)}{3 \cdot (6 \cdot 4)} = \frac{24}{72}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot (3 \cdot 4)}{6 \cdot (3 \cdot 4)} = \frac{60}{72}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot (3 \cdot 6)}{4 \cdot (3 \cdot 6)} = \frac{54}{72}$$

Se han multiplicado los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadores de las otras dos fracciones.

El denominador común 72 es múltiplo de los denominadores 3, 6 y 4.

Para reducir fracciones a **común denominador**:
- Se pone como denominador el producto de los denominadores.
- Se multiplica cada numerador por todos los denominadores menos por el suyo.

Figura 2.5: Reducción a común denominador en el libro de SM

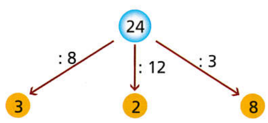
El denominador común es múltiplo de todos los denominadores.

Si se elige el menor de los múltiplos (mínimo común múltiplo: **m.c.m.**) se obtienen fracciones más sencillas.

Por ejemplo, para reducir $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}$ y $\frac{2}{3}$ a mínimo común denominador se procede así:

1.° Se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores:
$8 = 2^3$; $12 = 2^2 \cdot 3$; $3 = 3$, m.c.m. $(8, 12, 3) = 2^3 \cdot 3 = 8 \cdot 3 = \mathbf{24}$

2.° Se divide el m.c.m. por cada denominador:



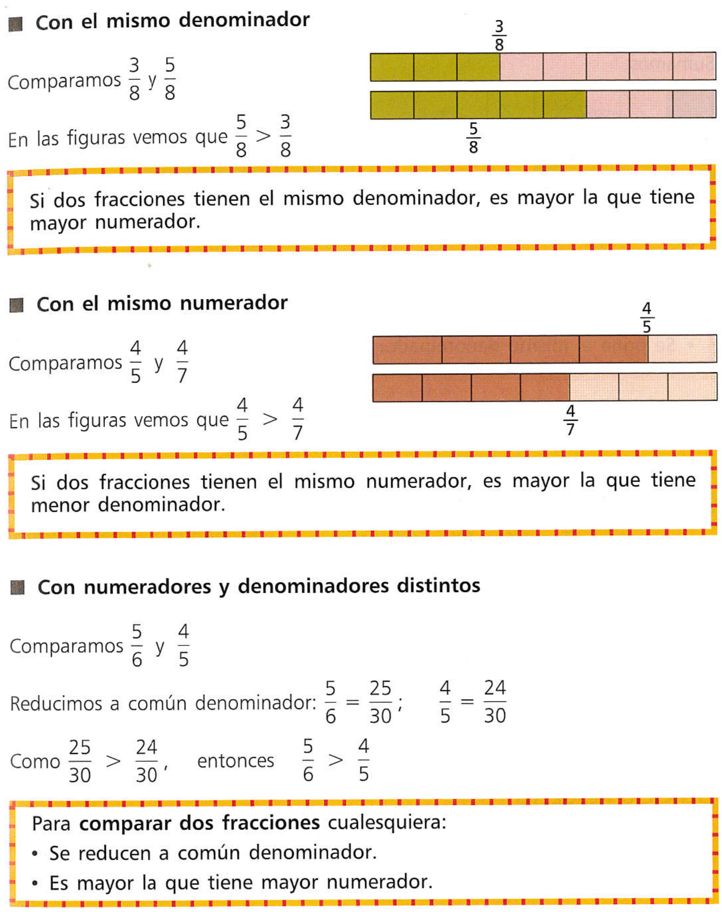
3.° Se multiplican los términos de cada fracción por 3, 2 y 8, como se indica a continuación:

$$\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot \boxed{3}}{8 \cdot \boxed{3}} = \frac{21}{24}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot \boxed{2}}{12 \cdot \boxed{2}} = \frac{10}{24}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot \boxed{8}}{3 \cdot \boxed{8}} = \frac{16}{24}$$

Figura 2.6: Reducción a mínimo común denominador en el libro SM



Con el mismo denominador

Comparamos $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$

En las figuras vemos que $\frac{5}{8} > \frac{3}{8}$

Si dos fracciones tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.

Con el mismo numerador

Comparamos $\frac{4}{5}$ y $\frac{4}{7}$

En las figuras vemos que $\frac{4}{5} > \frac{4}{7}$

Si dos fracciones tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador.

Con numeradores y denominadores distintos

Comparamos $\frac{5}{6}$ y $\frac{4}{5}$

Reducimos a común denominador: $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$; $\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$

Como $\frac{25}{30} > \frac{24}{30}$, entonces $\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$

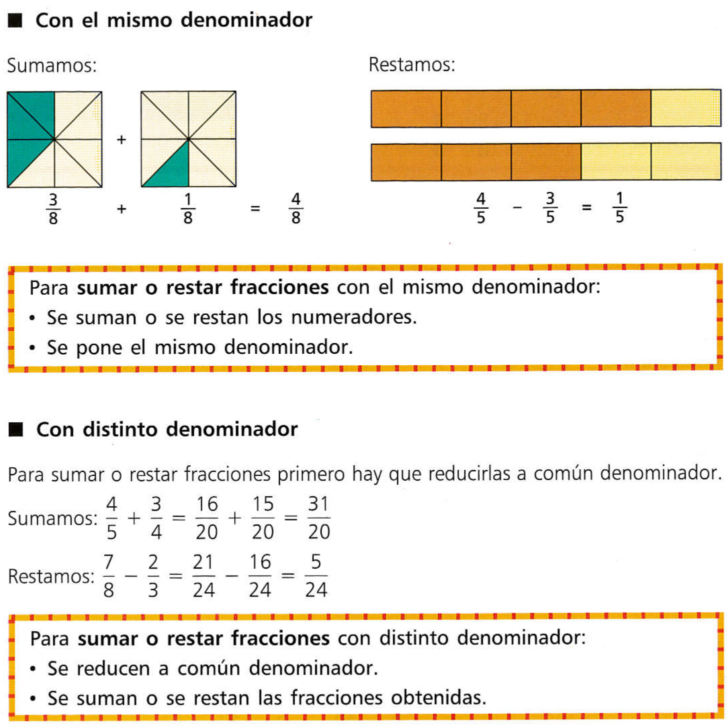
Para **comparar dos fracciones** cualesquiera:
- Se reducen a común denominador.
- Es mayor la que tiene mayor numerador.

Figura 2.7: Técnicas de comparación de fracciones en el libro de SM

personal. Cabe destacar que la comparación de fracciones es un problema bastante acarreado de la educación primaria, por lo que habría que dedicarle algo de tiempo a evaluar.

Una vez trabajada la compración de fracciones, la siguiente técnica en trabajarse es la de suma de fracciones, desarrollada como puede observarse en la figura 2.8. La técnica es la correcta; no obstante, se proporciona una tecnología gráfica para justificar las sumas y restas con el mismo denominador. Es posible que un alumno que se apoye en estas tecnologías pueda acabar sumando fracciones sumando numeradores y denominadores de forma independiente. Además, de nuevo observamos que no aparece la tecnología gráfica en el caso general, que es justamente donde los alumnos podrían necesitar de cierto apoyo gráfico para comprender el proceso.De nuevo, aparece el ssignificado de la fracción como parte de un todo, caundo debería considerarse trabajar con los significados de la fracción como operador o cociente indicado para tener un apropiado entorno tecnológico. Para introducirlo desde el significado de parte de la unidad se debería contextualizar (acercándonos al significado de medida), para prevenir la aparición de errores de concepción, y lograr que los alumnos le den sentido a lo que están haciendo. También se nota cierta desconexión entre las tecnologías gráficas y la técnica formal.

La siguiente técnica que se introduce es la de hallar el producto de dos fracciones, como se aprecia en la figura 2.9. Las técnicas y tecnologías son las apropiadas. No obstante, sería



■ **Con el mismo denominador**

Sumamos:

$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8}$

Restamos:

$\frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

Para **sumar o restar fracciones** con el mismo denominador:
- Se suman o se restan los numeradores.
- Se pone el mismo denominador.

■ **Con distinto denominador**

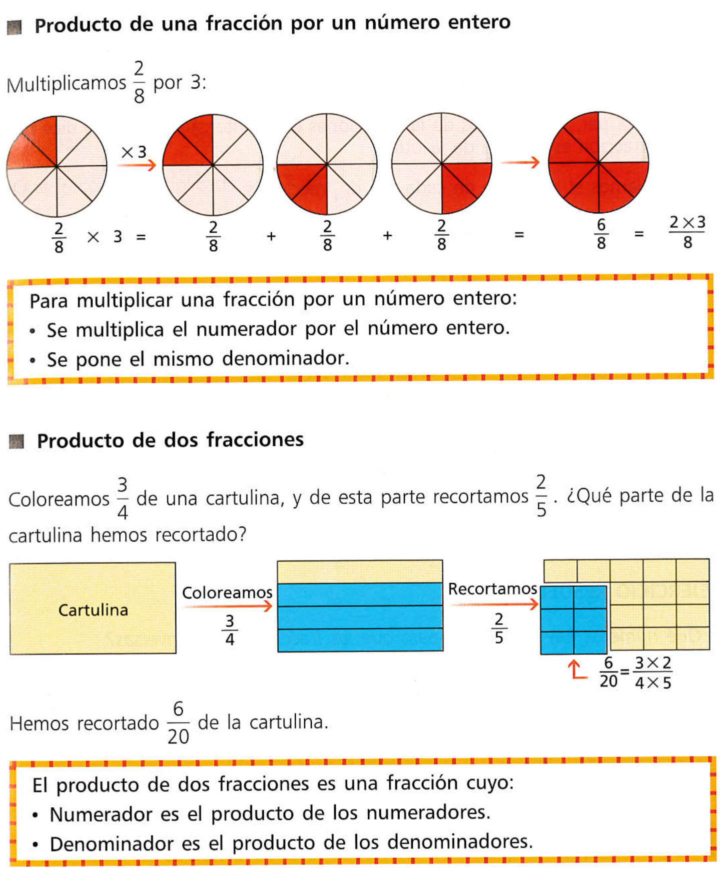
Para sumar o restar fracciones primero hay que reducirlas a común denominador.

Sumamos: $\frac{4}{5} + \frac{3}{4} = \frac{16}{20} + \frac{15}{20} = \frac{31}{20}$

Restamos: $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} = \frac{21}{24} - \frac{16}{24} = \frac{5}{24}$

Para **sumar o restar fracciones** con distinto denominador:
- Se reducen a común denominador.
- Se suman o se restan las fracciones obtenidas.

Figura 2.8: Suma y resta de fracciones en el libro de SM



■ **Producto de una fracción por un número entero**

Multiplicamos $\frac{2}{8}$ por 3:

$\times 3$

$\frac{2}{8} \times 3 = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{2 \times 3}{8}$

Para multiplicar una fracción por un número entero:
- Se multiplica el numerador por el número entero.
- Se pone el mismo denominador.

■ **Producto de dos fracciones**

Coloreamos $\frac{3}{4}$ de una cartulina, y de esta parte recortamos $\frac{2}{5}$. ¿Qué parte de la cartulina hemos recortado?

Hemos recortado $\frac{6}{20}$ de la cartulina.

El producto de dos fracciones es una fracción cuyo:
- Numerador es el producto de los numeradores.
- Denominador es el producto de los denominadores.

Figura 2.9: Producto de fracciones en el libro de SM

– Observa los siguientes pares de fracciones:

$$\frac{2}{3} \text{ y } \frac{3}{2}, \quad \frac{7}{4} \text{ y } \frac{4}{7}, \quad \frac{1}{5} \text{ y } \frac{5}{1}$$

En cada par, los términos de las fracciones están intercambiados. Se dice que una fracción es **inversa** de la otra.

– Calculamos el producto de cada par de fracciones:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\frac{7}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{7 \cdot 4}{4 \cdot 7} = \frac{28}{28} = 1$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{1} = \frac{1 \cdot 5}{5 \cdot 1} = \frac{5}{5} = 1$$

Dos **fracciones** son **inversas** cuando su producto es igual a la unidad.

Figura 2.10: Fracciones inversas en el libro de SM

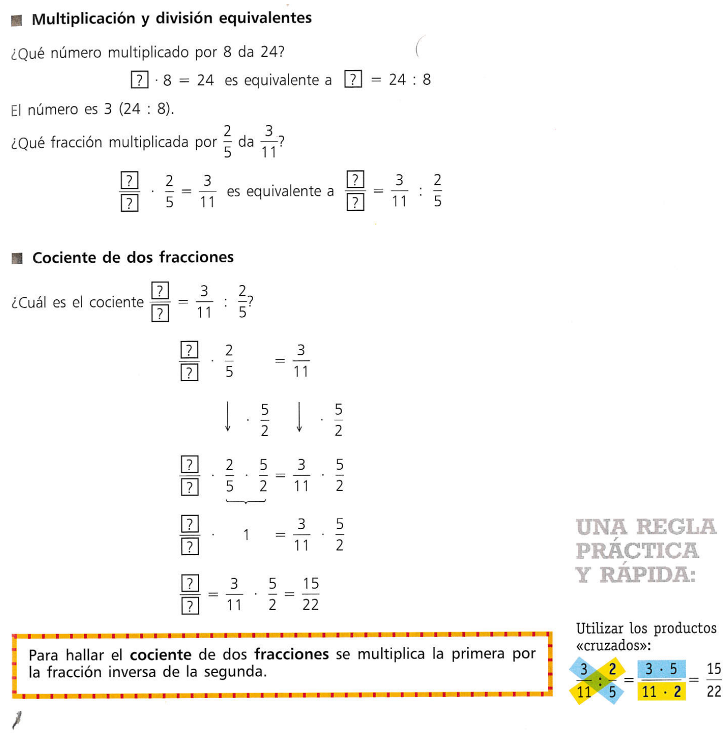
todavía mejor si justificásemos esta técnica desde el significado de fracción como operador. También habría que tratar de buscar simplificar en los pasos intermedios.

Antes de introducir la técnica de división, es necesario introducir el concepto de fracción inversa, tal y como puede verse en la figura 2.10. La tecnología es exactamente la que debería ser. No obstante, sería también interesante proporcionar la técnica de hallar la fracción inversa de una dada permutando numerador y denominador. No obstante, dado que en 1^{o} de ESO aún no se tiene ningún conocimiento sobre conjuntos numéricos introducir propiedades más generales, como la existencia de inverso queda muy fuera de lugar.

Con la técnica de hallar la fracción inversa ya estudiada, el libro proceda a introducir la última técnica que se trata en este tema, que es la división de fracciones. esta técnica se aborda directamente desde una perspectiva formal, usando una tecnología basada en un planteamiento algebraico. Es casi imposible que un alumno entienda qué tecnología se está utilizando al abordar así la división de fracciones, cambiando además la forma de razonar y el significado de la fracción justo antes de introducir un concepto dificil de entender. Además, como técnica auxiliar se introduce la llamada regla de los productos cruzados". Esta técnica suele inducir muchos errores, y además dificultará el uso de estrategias de cálculo más adelante. El libro podría haber usado el significado de la fracción como operador de forma previa, logrando así cierto apoyo tecnológico para introducir la técnica de división tal y como la introduce.

Vamos a ver también que problemas se proponen en el libro.

Puede verse en la figura 2.12, que para resolver problemas se plantea un método estructurado. Estructurar de tal forma la resolución de problemas puede o no puede ser una buena idea. En cuanto al uso del objeto, puede observarse que en el problema ya aparece el uso de la fracción como un operador. Intoducirlo de forma tan brusca puede no ser lo más adecuado. Además, no se ha explicado antes tal uso y, por lo general, muchos alumnos no se atreven a ”correr riesgos”. No obstante, esto puede aprovecharse para introducir dicho significado. Falta tal vez la idea de reducir a un problema más sencillo, además de efectuar tanteos.



Multiplicación y división equivalentes

¿Qué número multiplicado por 8 da 24?

$\boxed{?} \cdot 8 = 24$ es equivalente a $\boxed{?} = 24 : 8$

El número es 3 (24 : 8).

¿Qué fracción multiplicada por $\frac{2}{5}$ da $\frac{3}{11}$?

$\frac{\boxed{?}}{\boxed{?}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{11}$ es equivalente a $\frac{\boxed{?}}{\boxed{?}} = \frac{3}{11} : \frac{2}{5}$

Cociente de dos fracciones

¿Cuál es el cociente $\frac{\boxed{?}}{\boxed{?}} = \frac{3}{11} : \frac{2}{5}$?

$$\frac{\boxed{?}}{\boxed{?}} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{11}$$

$$\downarrow \cdot \frac{5}{2} \quad \downarrow \cdot \frac{5}{2}$$

$$\frac{\boxed{?}}{\boxed{?}} \cdot \underbrace{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{2}$$

$$\frac{\boxed{?}}{\boxed{?}} \cdot 1 = \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{2}$$

$$\frac{\boxed{?}}{\boxed{?}} = \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{2} = \frac{15}{22}$$

Para hallar el **cociente** de dos **fracciones** se multiplica la primera por la fracción inversa de la segunda.

UNA REGLA PRÁCTICA Y RÁPIDA:

Utilizar los productos «cruzados»:

$$\frac{3}{11} : \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5}{11 \cdot 2} = \frac{15}{22}$$

Figura 2.11: División de fracciones en el libro de SM

Como podemos ver en la figura 2.13, al final del tema aparecen una serie de problemas, más ideados como complemento y aplicación que como hilo conductor de la enseñanza. Los cuatro primeros problemas son más problemas que abordan la fracción como parte de la unidad, y que simplemente se limitan a proporcionar un contexto al objeto en cuestión. En el ejercicio 34 se vislumbra la idea la idea de fracción como operador, de forma muy fluida desde los anteriores problemas. Los tres siguientes problemas siguen siendo problemas que van ahondando en la fracción como operador. En dos de ellos, el 36 y el 37 se establece el uso del producto de fracciones para componer dichos operadores. En los diversos problemas sí que se observa que van apareciendo fracciones de una cantidad, conocida o desconocida, como solución a las preguntas que el problema plantea. Los tres últimos problemas son muy similares al que aparece resuelto como ejemplo de resolución de problemas (figura 2.12). En general, éstos requieren de usar sucesivamente una fracción como reparto multiplicada por otra como operador. En cuanto a la naturaleza de los problemas, se tratan problemas de partes de un todo, de repartos y de fracciones de una medida.

Los resultados de aprendizaje que tendría un alumno con esta propuesta si bien son suficientes, no resultan todo lo óptimos que deberían. Aparecen algunas carencias que deberían ser consideradas por el profesor encargado de impartir estos contenidos. Muchas de ellas se han mencionado a lo largo del análisis, pero se produce alguna más. Para comenzar, no se hacen casi referencias a los números enteros, por que sería muy posible que nuestros alumnos adquirieran una concepción erronea, en la que los números enteros son un conjuntos separado e independiente de los racionales. Así, no solo se adquiere una idea incorrecta del funcionamiento de los números, sino que además los alumnos pierden la opción de resolver un problema convirtiendo un entero en un racional. Además, no se trabaja la fracción como cociente indicado, trabajo que sería necesario de cara al trabajo posterior en álgebra, en la

Para resolver un problema:
– *Hacer tanteos para comprenderlo mejor y encontrar una idea. Utilizar fracciones. Hacer cálculos necesarios. Comprobar los resultados.*

PROBLEMA

A los ganadores de una competición se les premia regalándoles discos:
- *Al primero le regalan la mitad de los discos.*
- *Al segundo, la mitad que al primero.*
- *Al tercero, la mitad que al segundo.*
- *Al cuarto, los 12 discos que quedan.*
- *¿Cuántos discos se han regalado?*

Tantear

Supongamos que se regalan 36 discos en total:
- Al primero le tocarían 18.
- Al segundo le tocarían 9.
- Al tercero le tocarían la mitad de 9. ¡Esto no es posible!

Una idea: el tercero recibe «la mitad de la mitad de la mitad».
Luego el número de discos tiene que ser múltiplo de 8.

Utilizar fracciones

Indicamos con $\boxed{?}$ el total de discos:
- El primero recibe la mitad: $\frac{\boxed{?}}{2}$
- El segundo recibe la mitad que el primero: $\frac{1}{2}$ de $\frac{\boxed{?}}{2} = \frac{\boxed{?}}{4}$
- El tercero recibe la «mitad que el segundo»: $\frac{1}{2}$ de $\frac{\boxed{?}}{4} = \frac{\boxed{?}}{8}$

Entre los tres primeros reciben:

$$\frac{\boxed{?}}{2} + \frac{\boxed{?}}{4} + \frac{\boxed{?}}{8} = \frac{4 \cdot \boxed{?} + 2 \cdot \boxed{?} + \boxed{?}}{8} = \frac{7}{8}\boxed{?}$$

El cuarto recibe: $\frac{1}{8}\boxed{?}$

Hacer cálculos

Como el cuarto recibe 12 discos, se tiene: $\frac{1}{8} \cdot \boxed{?} = 12 \quad \boxed{?} = 12 : \frac{1}{8} = 96$
El número de discos regalados es 96.

Comprobar el resultado

El primero recibe: $\frac{96}{2} = 48$

El segundo recibe: $\frac{48}{2} = 24$

El tercero recibe: $\frac{24}{2} = 12$

El cuarto recibe: 12

Total de discos: $48 + 24 + 12 + 12 = 96$

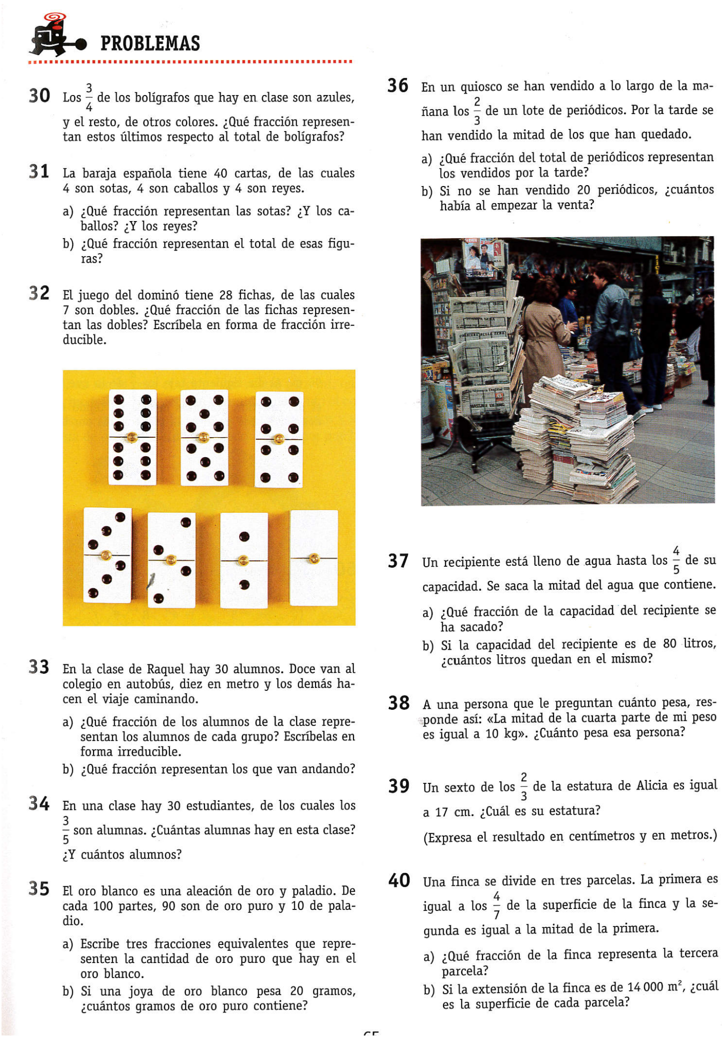
Figura 2.12: Problema resuelto en el libro de SM

que sí es necesario este concepto de fracción.

De todas formas, una buena actuación docente puede compensar estas pequeñas carencias. Además, en general los alumnos suelen aplicar los distintos significados de la fracción indistintamente, sin plantearse ciertas cuestiones de fondo. En cuanto a la división, la ausencia de problemas en los que se aplique puede dificultar la comprensión, además de resultar algo desmotivante para los alumnos. Tal vez, dado que ha usado problemas en los que se usaba la fracción como un operador, se podría plantear algún problema en el que se use la división de fracciones en el sentido de aplicar el operador inverso.

2.3.2. Editorial Anaya, Colera, Gaztelu y Gracía

Veamos otra propuesta, se trata del libro de texto que propone la editorial Anaya (Colera, Gaztelu y Gracía, 2001) , cuya introducción puede verse en la figura 2.2. Tras la introducción se abordan los números decimales, entre ellos la equivalencia entre números decimales y fracciones, las propiedades de orden y densidad de los decimales, además de sus operaciones. Una vez tratados los números decimales, se procede a trabajar las fracciones.



PROBLEMAS

30 Los $\frac{3}{4}$ de los bolígrafos que hay en clase son azules, y el resto, de otros colores. ¿Qué fracción representan estos últimos respecto al total de bolígrafos?

31 La baraja española tiene 40 cartas, de las cuales 4 son sotas, 4 son caballos y 4 son reyes.

a) ¿Qué fracción representan las sotas? ¿Y los caballos? ¿Y los reyes?

b) ¿Qué fracción representan el total de esas figuras?

32 El juego del dominó tiene 28 fichas, de las cuales 7 son dobles. ¿Qué fracción de las fichas representan las dobles? Escríbela en forma de fracción irreducible.

33 En la clase de Raquel hay 30 alumnos. Doce van al colegio en autobús, diez en metro y los demás hacen el viaje caminando.

a) ¿Qué fracción de los alumnos de la clase representan los alumnos de cada grupo? Escríbelas en forma irreducible.

b) ¿Qué fracción representan los que van andando?

34 En una clase hay 30 estudiantes, de los cuales los $\frac{3}{5}$ son alumnas. ¿Cuántas alumnas hay en esta clase? ¿Y cuántos alumnos?

35 El oro blanco es una aleación de oro y paladio. De cada 100 partes, 90 son de oro puro y 10 de paladio.

a) Escribe tres fracciones equivalentes que representen la cantidad de oro puro que hay en el oro blanco.

b) Si una joya de oro blanco pesa 20 gramos, ¿cuántos gramos de oro puro contiene?

36 En un quiosco se han vendido a lo largo de la mañana los $\frac{2}{3}$ de un lote de periódicos. Por la tarde se han vendido la mitad de los que han quedado.

a) ¿Qué fracción del total de periódicos representan los vendidos por la tarde?

b) Si no se han vendido 20 periódicos, ¿cuántos había al empezar la venta?

37 Un recipiente está lleno de agua hasta los $\frac{4}{5}$ de su capacidad. Se saca la mitad del agua que contiene.

a) ¿Qué fracción de la capacidad del recipiente se ha sacado?

b) Si la capacidad del recipiente es de 80 litros, ¿cuántos litros quedan en el mismo?

38 A una persona que le preguntan cuánto pesa, responde así: «La mitad de la cuarta parte de mi peso es igual a 10 kg». ¿Cuánto pesa esa persona?

39 Un sexto de los $\frac{2}{3}$ de la estatura de Alicia es igual a 17 cm. ¿Cuál es su estatura?

(Expresa el resultado en centímetros y en metros.)

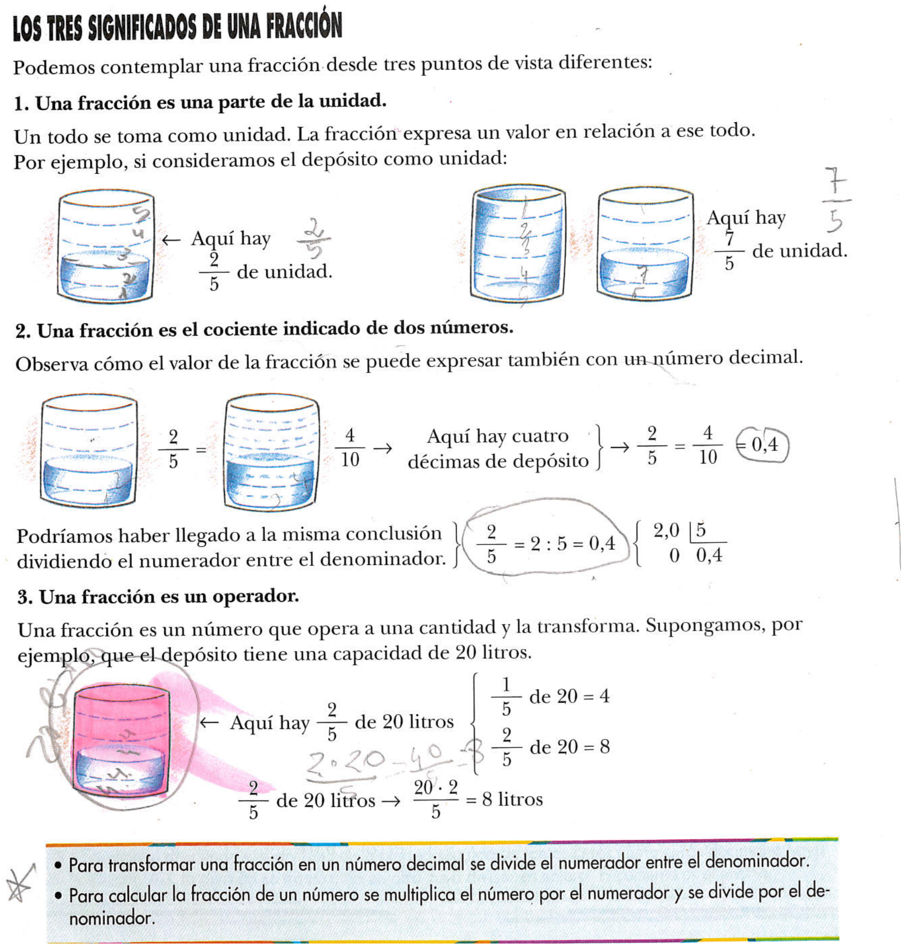
40 Una finca se divide en tres parcelas. La primera es igual a los $\frac{4}{7}$ de la superficie de la finca y la segunda es igual a la mitad de la primera.

a) ¿Qué fracción de la finca representa la tercera parcela?

b) Si la extensión de la finca es de 14 000 m^2, ¿cuál es la superficie de cada parcela?

Figura 2.13: Problemas de fracciones en el libro de SM

Como puede contemplarse en la figura 2.14, lo primero que se explica son los tres significados de la fracción. Como parte de la unidad, como cociente indicado y como operador. Habría que plantearse si introducir los significados de la fracción de forma explícita ayuda a la comprensión o la dificulta. Lo que sí es claro es que debería realizarse un cierto trabajo que permita al alumno interiorizar los distintos significados de la fracción. De todas formas se proporciona un ejemplo contextualizado que ayuda a la comprensión. Además, se introduce también una fracción mayor que la unidad, en el significado de partición. Esto puede ayudar a desterrar de primeras la idea que podrían tener los alumnos de que una fracción debe ser siempre menor que 1. No obstante, hablar de fracciones mayores que 1 con el significado de parte de la unidad no tiene mucho sentido, y la interpretación correcta desde ese punto de vissta es $\frac{7}{10}$, en lugar de $\frac{7}{5}$. Tampoco es buena idea convertir las fracciones a decimales, ya que la mayoría de los alumnos, dado que se aclaran mejor con decimales, pueden caer en la tentación de convertir de forma inmediata cualquier fracción que les aparezca en un número decimal, lo que a la larga podría generar dificultades añadidas (como en un tema de álgebra, al ser necesario plantear una fracción como $\frac{a}{3}$).



LOS TRES SIGNIFICADOS DE UNA FRACCIÓN

Podemos contemplar una fracción desde tres puntos de vista diferentes:

1. Una fracción es una parte de la unidad.

Un todo se toma como unidad. La fracción expresa un valor en relación a ese todo. Por ejemplo, si consideramos el depósito como unidad:

← Aquí hay $\frac{2}{5}$ de unidad.

Aquí hay $\frac{7}{5}$ de unidad.

2. Una fracción es el cociente indicado de dos números.

Observa cómo el valor de la fracción se puede expresar también con un número decimal.

$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ → Aquí hay cuatro décimas de depósito → $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

Podríamos haber llegado a la misma conclusión dividiendo el numerador entre el denominador. $\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4$ $\quad$ 2,0 | 5 ; 0 0,4

3. Una fracción es un operador.

Una fracción es un número que opera a una cantidad y la transforma. Supongamos, por ejemplo, que el depósito tiene una capacidad de 20 litros.

← Aquí hay $\frac{2}{5}$ de 20 litros $\begin{cases} \frac{1}{5} \text{ de } 20 = 4 \\ \frac{2}{5} \text{ de } 20 = 8 \end{cases}$

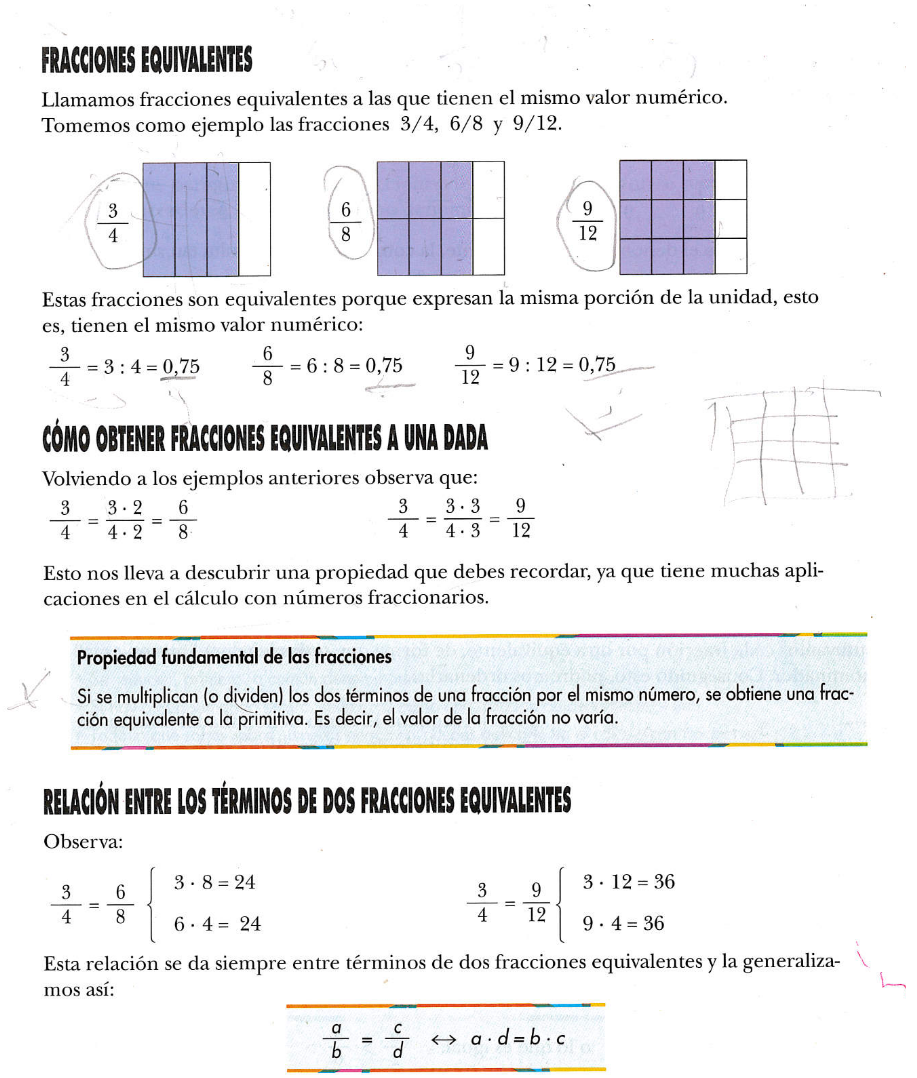
$\frac{2}{5}$ de 20 litros → $\frac{20 \cdot 2}{5} = 8$ litros

- Para transformar una fracción en un número decimal se divide el numerador entre el denominador.
- Para calcular la fracción de un número se multiplica el número por el numerador y se divide por el denominador.

Figura 2.14: Significados de la fracción en el libro de Anaya

Tras ello, se abordan las fracciones equivalentes, de la forma que aparece en la figura 2.15. Se da una definición, acompañada de una ayuda gráfica, y se plantea la técnica de obtener fracciones equivalentes multiplicando o dividiendo. Por último, se vuelve a aludir a la regla de los productos cruzados. En ambos casos las tecnologías son más bien de verificar que existe verosimilitud con lo que ya se tenía. Tal y como sucedía en el libro de SM, se muestra la técnica de productos cruzados. Aunque puede ser útil para álgebra, en mi opinión esta técnica no debería enseñarse en el tema de fracciones, dado que su aportación es casi nula.

El libro no presenta una técnica específica de reducción a común denominador, y pasa directamente a las técnicas de compaación de fracciones, que pueden verse en la figura 2.16. Se presentan los criterios de comparación entre fracciones con el mismo denominador. Se incluyen fracciones con numerador negativo, que aunque no se den a estos niveles pueden incluirse. Para abordar las fracciones con distinto denominador se ofrecen dos técnicas. La segunda que se presenta es la técnica tradicional de convertir a común denominador, cuya tecnología es inmediata desde la comparación de fracciones con numerador similar. La otra técnica que se ofrece es la de transformar en números decimales. Por un lado esta técnica es útil en lo referente a que nos permite trabajar el sentido numérico. No obstante, al trabajar simultáneamente decimales y fracciones se corre el riesgo de que los alumnos conviertan cualquier fracción en un numero decimal. De nuevo, dado que nuestro objetivo es



FRACCIONES EQUIVALENTES

Llamamos fracciones equivalentes a las que tienen el mismo valor numérico.
Tomemos como ejemplo las fracciones $3/4$, $6/8$ y $9/12$.

$\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{9}{12}$

Estas fracciones son equivalentes porque expresan la misma porción de la unidad, esto es, tienen el mismo valor numérico:

$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75 \qquad \frac{6}{8} = 6 : 8 = 0{,}75 \qquad \frac{9}{12} = 9 : 12 = 0{,}75$

CÓMO OBTENER FRACCIONES EQUIVALENTES A UNA DADA

Volviendo a los ejemplos anteriores observa que:

$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8} \qquad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$

Esto nos lleva a descubrir una propiedad que debes recordar, ya que tiene muchas aplicaciones en el cálculo con números fraccionarios.

Propiedad fundamental de las fracciones

Si se multiplican (o dividen) los dos términos de una fracción por el mismo número, se obtiene una fracción equivalente a la primitiva. Es decir, el valor de la fracción no varía.

RELACIÓN ENTRE LOS TÉRMINOS DE DOS FRACCIONES EQUIVALENTES

Observa:

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} \begin{cases} 3 \cdot 8 = 24 \\ 6 \cdot 4 = 24 \end{cases} \qquad \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \begin{cases} 3 \cdot 12 = 36 \\ 9 \cdot 4 = 36 \end{cases}$

Esta relación se da siempre entre términos de dos fracciones equivalentes y la generalizamos así:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Figura 2.15: Fracciones equivalentes en el libro de Anaya

que los alumnos trabajen con fracciones, deberíamos mantenernos alejados de la representación decimal, en tanto no resulte especialmente clarificadora. Tal vez un trabajo de sentido numérico más general sería algo más recomendable, ordenando primero las fracciones vía sentido numérico y usando el criterio de común denominador para comparar las que sean similares. También debería incluirse la comparación entre fracciones con igual numerador y distinto denominador. Aunque dicha técnica no sea excesivamente útil, si que ahonda en la comprensión de las fracciones y el sentido numérico. Aparece también una fracción en la que el numerador es un número negativo, lo cual no es justificable mediante ninguno de los significados de una fracción que se han introducido hasta ahora.

Tras establecer las técnicas de comparación de fracciones, se procede a introducir las operaciones con fracciones, comenzando por la suma, tal y como puede verse en la figura 2.17. Se presenta primero la técnica de suma/resta de fracciones con el mismo denominador, y después se enseña a sumar/restar reduciendo a común denominador. Las tecnologías se dan por ya conocidas u obvias. Además, se puede ver en el ejemplo que la técnica a aplicar para reducir a común denominador es la de reducción a mínimo común denominador.

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

Cuando varias fracciones tienen el mismo denominador, compararlas no ofrece ninguna dificultad.

Por ejemplo:

$$\frac{5}{9} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{-3}{9} \quad \frac{7}{9} \longrightarrow \frac{7}{9} > \frac{5}{9} > \frac{1}{9} > \frac{-3}{9}$$

Sin embargo, cuando el denominador es diferente, la comparación no resulta tan simple.

Supongamos que queremos ordenar las fracciones $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{3}$.

Para conseguirlo podemos seguir dos caminos:

1. TRANSFORMAR LAS FRACCIONES EN NÚMEROS DECIMALES

$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75 \qquad \frac{3}{2} = 3 : 2 = 1{,}5 \qquad \frac{5}{6} = 5 : 6 = 0{,}8\widehat{3} \qquad \frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}\widehat{6}$

Ahora es evidente que: $\frac{3}{2} > \frac{5}{6} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$

2. REDUCIR LAS FRACCIONES A COMÚN DENOMINADOR

Sustituyamos cada fracción por otra equivalente, de forma que todas tengan el mismo denominador. Conseguido esto, podremos ordenarlas.

$$\frac{3}{4} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{2}{3}$$

Elegimos 12 como denominador común (es un múltiplo de 4, 2, 6 y 3).

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} \quad \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 6} \quad \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} \quad \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4}$$

Multiplicamos los dos miembros de cada fracción por el mismo número, el adecuado en cada caso, para obtener 12 en el denominador.

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\frac{9}{12} \quad \frac{18}{12} \quad \frac{10}{12} \quad \frac{8}{12}$$

Cada fracción tiene el mismo valor que su primitiva. Todas tienen el mismo denominador.

Ahora ya podemos ordenarlas:

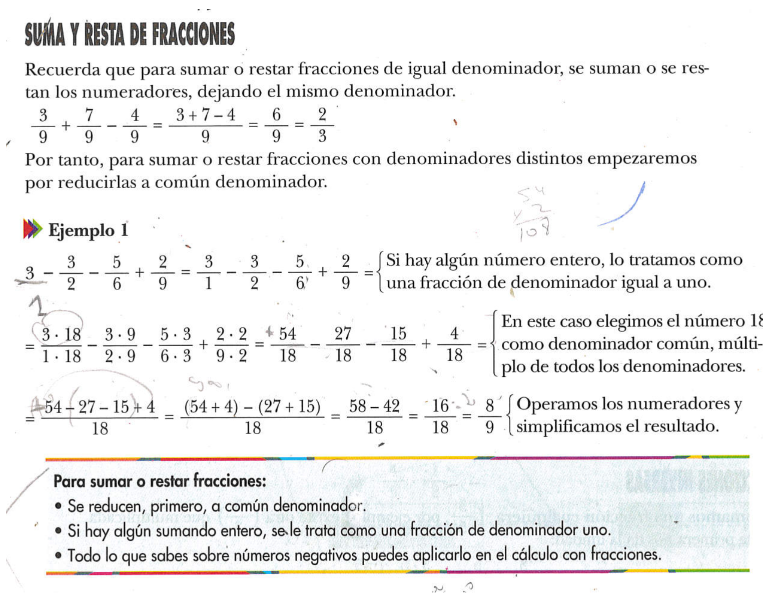
$\frac{18}{12} > \frac{10}{12} > \frac{9}{12} > \frac{8}{12}$ o lo que es igual: $\frac{3}{2} > \frac{5}{6} > \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$

Figura 2.16: Comparación de fracciones en el libro de Anaya

La siguiente técnica que se trabaja es la del producto de fracciones, acompañada de una tecnología gráfica, como puede verse en la figura 2.18. La técnica es la estándar y tampoco se habla de simplificar antes de operar para reducir el tampaño de los números que aparecen.

Tras ello se expone brevemente el concepto de fracción inversa, también en la figura 2.18. La definición de inversa (el producto es la unidad) es la correcta. Se sigue inmediatamente la técnica de permutar numerador y denominador. También se apunta que el 0 no tiene inverso, aunque no se hace referencia explícita a los números enteros.

La última técnica planteada es la del cociente de fracciones, que puede verse en la figura 2.19. Se comienza con la observación de que dividir dos números da el mismo resultado que la fracción que representa dicho cociente indicado, reforzando esta representación de fracción. tras ello aplica lo mismo cuando el dividendo es una fracción. En ambos casos se apoya en gráficos y en tecnologías de comprobación de que efectivamente, se obtienen los mismos resultados. Por último exone la técnica de dividir una fracción entre otra reduciéndolo a mul-



SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Recuerda que para sumar o restar fracciones de igual denominador, se suman o se restan los numeradores, dejando el mismo denominador.

$$\frac{3}{9} + \frac{7}{9} - \frac{4}{9} = \frac{3+7-4}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, para sumar o restar fracciones con denominadores distintos empezaremos por reducirlas a común denominador.

Ejemplo 1

$$3 - \frac{3}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{9} = \frac{3}{1} - \frac{3}{2} - \frac{5}{6} + \frac{2}{9} =$$ Si hay algún número entero, lo tratamos como una fracción de denominador igual a uno.

$$= \frac{3 \cdot 18}{1 \cdot 18} - \frac{3 \cdot 9}{2 \cdot 9} - \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{54}{18} - \frac{27}{18} - \frac{15}{18} + \frac{4}{18} =$$ En este caso elegimos el número 18 como denominador común, múltiplo de todos los denominadores.

$$= \frac{54 - 27 - 15 + 4}{18} = \frac{(54+4) - (27+15)}{18} = \frac{58-42}{18} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$ Operamos los numeradores y simplificamos el resultado.

Para sumar o restar fracciones:
- Se reducen, primero, a común denominador.
- Si hay algún sumando entero, se le trata como una fracción de denominador uno.
- Todo lo que sabes sobre números negativos puedes aplicarlo en el cálculo con fracciones.

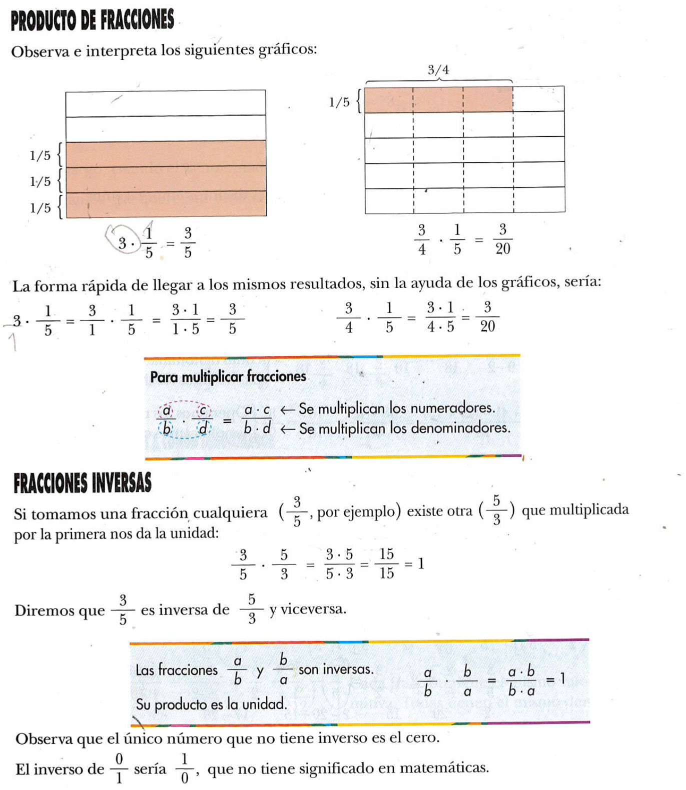
Figura 2.17: Comparación de fracciones en el libro de Anaya

tiplicar por la inversa. a mi juicio debería para aquí, en lugar de añadir la técnica del producto cruzado, que suele dar lugar a errores.

Los problemas que aparecen en este libro son muy similares a los del libro de SM. Cabe destacar, no obstante, que sí aparece algún problema más a lo largo de la explicación del tema, en lugar de quedar recluidos al final. Hay al final del tema un pequeño compendio de problemas, que puede verse en la figura 2.20.

Los tipos de problemas son similares, se trabajan proporciones, repartos y algun porblema que puede considerarse como división de una medida. Se trabaja bastante con la fracción enytendida como operador. No obstante, los problemas tampoco profundizan mucho y son bastante genéricos. Es algo interesante el número 37, que obliga a concatenar repartos, haciendo que los alumnos entiendan mejor cuando en un reparto hay que sumar y cuando hay que multiplicar.

En general, este libro aborda las fracciones desde otro enfoque, mu ligado a los números decimales. Hay muchas tecnologías que se consideran ya conocidas u obvias, por lo que una buena actuación doccente puede ser necesaria cuando exista algún problema de comprensión. También se trata de una propuesta de caracter expositivo, en la que los problemas aparecen como actividades para asentar el conocimiento adquirido, en lugar de servir de motor para la aparición de éste. No obstante, hay que destacar que sí aparecen números enteros y fracciones mayores a la unidad. Aunque se comienz enseñando las fracciones en un contexto real, répidamente éste desaparece, pasando a trabajar el objeto de forma pura. Es muy posible que muchos alumnos no terminen de darle sentido a las fracciones y entender lo que estásn haciendo con ellas.



PRODUCTO DE FRACCIONES

Observa e interpreta los siguientes gráficos:

$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$

La forma rápida de llegar a los mismos resultados, sin la ayuda de los gráficos, sería:

$3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{1 \cdot 5} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$

Para multiplicar fracciones

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ← Se multiplican los numeradores. ← Se multiplican los denominadores.

FRACCIONES INVERSAS

Si tomamos una fracción cualquiera $\left(\frac{3}{5}\text{, por ejemplo}\right)$ existe otra $\left(\frac{5}{3}\right)$ que multiplicada por la primera nos da la unidad:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3 \cdot 5}{5 \cdot 3} = \frac{15}{15} = 1$$

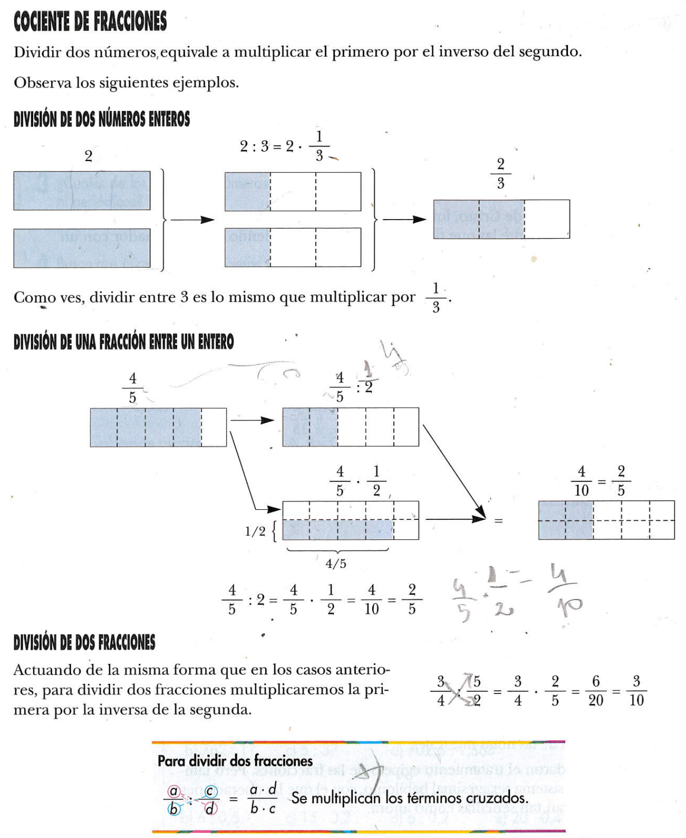
Diremos que $\frac{3}{5}$ es inversa de $\frac{5}{3}$ y viceversa.

Las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ son inversas. Su producto es la unidad. $\qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1$

Observa que el único número que no tiene inverso es el cero.

El inverso de $\frac{0}{1}$ sería $\frac{1}{0}$, que no tiene significado en matemáticas.

Figura 2.18: Producto de fracciones y fracciones inversas en el libro de Anaya



COCIENTE DE FRACCIONES

Dividir dos números equivale a multiplicar el primero por el inverso del segundo.

Observa los siguientes ejemplos.

DIVISIÓN DE DOS NÚMEROS ENTEROS

Como ves, dividir entre 3 es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{3}$.

DIVISIÓN DE UNA FRACCIÓN ENTRE UN ENTERO

$\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ $\qquad \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{10}$

DIVISIÓN DE DOS FRACCIONES

Actuando de la misma forma que en los casos anteriores, para dividir dos fracciones multiplicaremos la primera por la inversa de la segunda.

$\frac{3}{4} : \frac{5}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Para dividir dos fracciones

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ Se multiplican los términos cruzados.

Figura 2.19: Cociente de fracciones en el libro de Anaya

32 Resuelve mentalmente y contesta las siguientes preguntas:

a) En una clase de 20 alumnos y alumnas, 2/5 son chicos. ¿Cuántas son las chicas?

b) En una población, el 20 % de las personas está en el paro. ¿Qué fracción de la población no tiene trabajo?

c) Me he gastado, primero, la mitad de lo que llevaba y, después, la mitad de lo que me quedaba. ¿Qué fracción del total me he gastado?

d) Rafael tenía 500 PTA y se ha gastado 200. ¿Qué fracción le queda de lo que tenía?

e) ¿Qué fracción de las bolas no son rojas?
¿Qué fracción de las bolas "no rojas" son amarillas?
Calcula: ¿Cuánto es un tercio de los dos tercios de nueve?

33 En una clase hay 10 chicas y 14 chicos. ¿Qué fracción de la clase representan las chicas? ¿Y los chicos?

34 Un agricultor riega, por la mañana, 2/5 de un campo. Por la tarde riega el resto, que son 6 000 m^2. ¿Cuál es la superficie del campo?

35 Una familia, cuyos ingresos mensuales son de 300 000 PTA, invierte las tres décimas partes de su presupuesto en comida, un quinto en ropa, un décimo en ocio y un cuarto en otros gastos. ¿Cuánto ahorra en un año?

36 Un depósito, con una capacidad de 1 500 litros, está lleno de agua.
Se sacan, primero, dos quintos de su contenido y, después, un tercio de lo que quedaba.

a) ¿Qué fracción de depósito se ha extraído?

b) ¿Qué fracción de depósito queda?

c) ¿Cuántos litros se han extraído?

d) ¿Cuántos litros quedan?

37 Un agricultor dice:
—Las heladas me estropearon 3/10 de la cosecha.
—La sequía me hizo perder otros 3/10.
—Y luego, una vez recogida, la inundación me ha estropeado 4/10 de lo que tenía en el almacén.
—Por lo tanto, (3/10 + 3/10 + 4/10 = 10/10), no me queda nada.
Un amigo le contesta:
—No exageres, has salvado casi la cuarta parte de la cosecha.
¿Cuál de los dos tiene razón? Justifica la respuesta.

Figura 2.20: Problemas del libro de Anaya

Capítulo 3

Propuesta

3.1. Consideraciones previas

Una de las primeras consideraciones que deberíamos llevar a cabo es cómo vamos a fundamentar la enseñanza de los números fraccionarios. Las fracciones tienen múltiples significados, y puede interesarnos más enfocar la enseñanza de los distintos objetos desde uno de los significados de la fracción o desde otro. No obstante, deberíamos usar el mismo significado para introducir una técnica, y luego extrapolarla a los distintos significados de la fracción que valoremos sencillos de abordar, o que nos sirvan para arrojar algo más de luz sobre la técnica.

El significado que mejor se adecúa a introducir las distintas técnicas con una tecnología apropiada es el de fracción entendida como resultado de una medida. Usaremos el resto de significados descritos en la sección 1.2 en los distintos problemas donde proceda.

En cuanto a la clasificación en distintos campos de problemas, consideraremos como cada campo de problemas los problemas que requieren de una determinada técnica matemática para su resolución, en contraposición a considerar una división basada en los distintos significados de la fracción. La razón para considerar esta división es que se adecua mejor a como se va a distribuir la enseñanza a partir de este punto, y permitirá una transición hacia el estudio de distintas propiedades de un objeto matemático de forma más abstracta, que se secuenciará de esta forma.

En cuanto a los significados de la fracción que trabajaremos, basándonos en una clasificación similar a la de Gairín y Muñoz (2005), estos serán:

- Medida: Consideraremos como problemas con significado de medida aquellos en los que el objetivo es conocer la medida de una magnitud dada. En general se caracterizan porque el resultado vendrá acompañado de una unidad de medida.
- Reparto: Los problemas con significado de reparto son aquellos en los que la tarea a acometer consiste en repartir uno o varios objetos iguales de forma equitativa entre varios receptores.
- Razón: Son problemas en los que se haya un promedio de un objeto sobre otro. Podríamos diferenciarlos de los problemas de reparto en el sentido de que, en un problema de reparto el resultado es exactamente lo que corresponde a cada uno de los individuos, y

en los de razón lo que le corresponde a un inddividuo medio. También consideraremos problemas de razón aquellos en los que el resultado debe ir acompañado de un cociene de medidas.

- Parte-todo: Consideraremos que la fracción adquiere un significado de parte-todo en aquellos problemas en los que identifiquemos la unidad con un total. En estos problemas no tiene sentido que aparezcan fracciones mayores que la unidad.
- Operador: Entenderemos que la fracción adquiere un significado de operador en aquellos problemas en los que es necesaria aplicarla multiplicando a un objeto para llegar a la solución, en el sentido de que primero dividiríamos el objeto en tantas partes como indique el denominador y luego nos quedamos con tantas de éstas partes como nos indqique el denominador.
- Cociente indicado: Consiste en entender la fracción como el resultado de una división aún no realizada. Aunque en esta propuesta no se trabaja como tal, se considera que se llevará un trabajo sobre este significado más adelante, en álgebra.
- Formal: En el que simplemente trabajamos con la fración entendida como una fracción.

3.2. Razón de ser

Dado que las fracciones y los números decimales no son objetos que los alumnos no conozcan, dado que se trabajan en primaria, no vamos a poder buscar un problema que fuerze su aparición por primera vez. No obstante, dado que uno de los campos de problemas que vamos a tratar van a estar basados en medida, buscaremos algún problema de razón de ser que nos permita introducir las fracciones desde ese punto de vista. Así, subdividir una medida será uno de los problemas desde los que partiremos, permitiéndonos además, desarrollar los significados de la fracción. También usaremos un poco de geometría muy básica (el area de un rectángulo, dado que nos permite aportar mejores tecnologías a ciertas técnicas)

Además, tal problema coincide con la razón de ser histórica de las fracciones, que comenzaron a usarse en el antiguo egipto para ganar precisión en las medidas geométricas.

Problema 3.2.1. *El padre de Andrés quiere medir una habitación para saber si en él cabrá un mueble que le gusta. Como no encuentra su cinta métrica, ha decidido medir la habitación con una vara que tenía por casa y que despues puede medir en la tienda. Para medir el largo, se tiene la siguiente situación:*

a)Primero quiere medir una de las paredes, y se encuentra con la situación de la figura 3.1. ¿Cuantas "varas" mide la pared?
b)Cuando quiere medir la siguiente pared, se encuentra con la situación de la figura 2, ¿cuantas "varas" mide esta otra pared?
c)Si tuviéramos una vara de longitud exactamente la mitad de la primera, ¿cuantas "nuevas varas" mediría la pared del apartado b)?

d)¿De qué formas sabes expresar el resultado obtenido?

Figura 3.1: Apartado a)

Figura 3.2: Apartado b)

e)Hemos podido comprobar que 3 varas equivalen a 4 metros, ¿cuanto mide una vara?¿Cuanto miden las paredes?

f)Si antes de colocar el mueble queremos pintar las paredes, y sabemos que con un bote de pintura pintamos 2 metros, ¿cuantos botes de pintura nos harán falta?

g) ¿Qué superficie (en metros cuadrados) tiene la habitación?

La idea sería plantear este problema, y dejar que nuestros alumnos lo trabajen, quizás en grupos de dos personas. De momento permitiremos que lo trabajen un poco y se comentarás las ideas a las que los alumnos han llegado, haciendo incisos en las que sean interesantes. Los apartados a), b) y c) serán resueltos en el momento, el resto se quedarán pendientes, haciéndose referencia a ellos cuando queramos introducir las distintas técnicas que los resuelven. También podemos usar este problema para comprobar que conocimientos previos tienen los alumnos sobre este tema.

El apartado a) de este problema es bastante sencillo, y no presenta dificultad alguna. Podemos esperar que los alumnos respondan con un simple 3. El objetivo de este apartado es proporcionar una primera pregunta fácil, que los alumnos sepan resolver.

El apartado b) busca comenzar a introducir los racionales. La respuesta más esperada es ”Dos varas y media”. Es posible que aparezca también la representación decimal, 2,5. Enlazando con esto tenemos el apartado c), cuya respuesta es 5, y nos permitirá introducir la idea de fracción como división de la unidad, expresando esta longitud como $\frac{5}{2}$ de vara. Nos servirá también para trabajar algo más adelante la idea de distintas representaciones para un mismo número.

El d) es el primer apartado que podemos esperar que suponga alguna dificultad para nuestros alumnos. Su resolución sería tan sencilla como efectuar el producto. $3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ y $\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$. En un curso algo superior incluiríamos también las unidades de medida, pero, dado que aún no ha aparecido el álgebra, no es recomendable hacer tal cosa.

El e) está pensado para introducir la suma de racionales, así, bastaría sumar $2 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot 4 = \frac{20}{3} + \frac{24}{3} = \frac{44}{3}$ para obtener el total de metros, y luego dividir $\frac{44}{3} : 2 = \frac{22}{3} =$.

Por último, el apartado f) está también pensado para introducir el producto de racionales, desde un punto de vista más geométrico, su resolución sería tan sencilla como multilicar $4 \cdot \frac{10}{3} = \frac{40}{3}$.

Otra opción sería mandar este problema para casa, y que los alumnos piensen cómo abordar dichas preguntas, poniéndolo en común en clase el día siguiente.

3.3. Significados de la fracción (Campo de problemas 1)

El primer concepto que aparece es el de la modelización de distintos problemas mediante el uso de fracciones. En un principio se trata de mostrar a los alumnos las distintas situaciones que se pueden modelizar con fracciones. Habría que considerar si explicitar los usos de la fracción con un problema resulta necesario para todos los modelos, aunque según se valore más adelante, puede ser interesante introducir ciertos modelos menos inmediatos mediante problemas específicos. El problema para introducir la necesidad de subdividir la medida ya aparece como razón de ser.

Problema 3.3.1. *Para ir a una excursión, Sandra ha cogido 8 cantimploras para 4 personas.*

a) Suponiendo que cada a cada persona le corresponde la misma cantidad de agua, ¿cuántas cantimploras le corresponderá a cada persona?

b) Y si hubiese cogido 6 cantimploras para 4 personas, ¿cántas les corresponderían a cada persona? Expresa el resultado como una fracción.

c) Expresa la fracción anterior en forma de número decimal.

Simplemente se trata de introducir el reparto. Dado que repartir suele ser análogo a dividir para nuestros alumnos, es claro que deberíamos introducir estos modelos para seguir ahondando el la idea de que una fracción es una división. Al efectuar el paso de la fracción al número decimal, también podríamos considerar que también se introduce la fracción como un cociente indicado. De todas formas el significado de cociente indicado no se trabajará de forma muy extensa, dado que es más propio de otros temas, como por ejemplo el álgebra. Podríamos ayudarnos de algún applet de geogebra, como el que aparece en https://www.geogebra.org/m/TzQfEYV9?doneurl=%2F.

Problema 3.3.2. *En una clase de 20 alumnos, 12 de estos alumnos son chicas. ¿Qué fracción de la clase representan las chicas?*

No usaremos casi ningún problema en el que la fracción adquiera el significado de parte-todo, dado que es el trabajo fundamental que se ha llevado a cabo en primaria. No obstante, sí que lo reccordaremos un poco en alguna situación, dado que también los porcentajes se basan en fracciones, queremos mantener este significado. Puede verse también el significado de la fraccion como parte-todo usando un applet como el realizado por Jaime Andres Osorio Rojo, que puede consultarse en https://www.geogebra.org/student/m1024755

Problema 3.3.3. *En una clase de 30 alumnos se va a hacer una excursión, pero* $\frac{1}{3}$ *de los alumnos no pueden ir. ¿Cuántos alumnos se quedarán sin ir a la excursión?*

Aunque no hemos introducido formalmente una técnica de multiplicación que permita realizar el problema de forma correcta, es de esperar que los alumnos ya sepan acometer un problema tan simple, y así, introduciríamos también la idea de fracción como operador.

Problema 3.3.4. *En un bosque se estima que hay unos 20 arbustos de una determinada especie por cada 10 metros cuadrados.*

a)¿Cuántos árbustos hay por metro cuadrado?

b) Queremos estudiar otra especie, que presenta unos 14 arbustos por cada 10 metros cuadrados. ¿Cuántos arbustos de esta nueva especie hay por metro cuadrado?

Es inmediato que se trata de un porblema de razones, que primero introduciría una razón entera que casi puede verse como un reparto, y luego pasamos a buscar que aparezca una unidad fraccionaria. En general, cuando aparezcan estos problemas podríamos buscar hacer un cierto trabajo con unidades, o limitarnos a mencionarlo para que los alumnos se vayan quedando con éste.

No abordaremos un uso formal en problemas, dado que en este nivel y casi al principio del curso, trabajar con las matemáticas de forma abstracta puede no ser recomendable. Sí que usaremos cierto formalismo para hablar de técnicas generales, siempre habiendo presentado antes los modelos que nos permitan asociar las teccnologías que aparecen con estrategias para resolver el problema en un contexto.

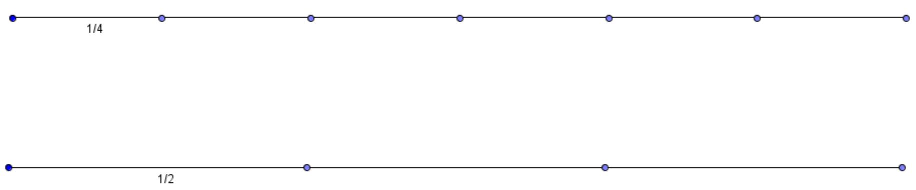
Habría que mencionar también que un número entero, por ejemplo 5, también puede expresarse como una fracción, simplemente poniendo un uno en el denominador, antes de comenzar. Tal situación se justifica desde casi todos los significados, por lo que tampoco es necesario plantear un problema que responda a tal planteamiento.

3.4. Técnicas asociadas al concepto de fracción

Dado que seguiremos un modelo de enseñanza basada en problemas, comenzaremos la explicación de cada técnica comenzará por plantear un problema que la requiera. Después, lo resolveremos usando la técnica y explicando de froma precisa cómo lo usaremos. Buscaremos aquel problema que nos otorgue un marco tecnológico apropiado para explicar por qué se aplica dicha técnica, con el fin de apoyarnos en el contexto para ayudar a los alumnos a visualizar por qué se aplica dicha técnica. Plantearemos siempre algún ejercico similar al problema usado para introducir la técnica o algún ejercicio de trabajo de la técnica. Valoraremos un enfoque más o menos participativo, en función del clima del aula.

3.4.1. Fracciones equivalentes (Campo de problemas 2)

El uso como tal de la fracción no debería plantear dificultades. No obstante, comenzaremos a usar problemas para acostumbrar a los alumnos a usar fracciones para modelizar problemas reales. Así, el primer concepto a tratar debería ser el fracciones equivalentes. Podríamos también usar un applet equivalente al realizado porel usuario agarci18, que puede consultarse en https://www.geogebra.org/student/m885997, aunque tal y como hemos enfocado el tema tal vez habría que rehacerlo, dado que aparecen números mixtos.



Problema 3.4.1. *José se ha dado cuenta de que mide exactamente lo mismo que tres varas de medio metro. No obstante, un amigo ha querido probar con varas de un cuarto de metro, y ha comprobado que José mide exactamente seis de estas varas. ¿Quién de las dos tiene razón?¿Es posible que las dos a la vez tengan razón?*

Dejaríamos a nuestros alumnos pensar un poco sobre el problema, y, tras un breve periodo de reflexión, pasaríamos a explicar, después de haber recopilado las ideas que hayan surgido entre nuestro alumnado. Efectivamente, ambos tienen razón, dado que tenemos que $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$. Podemos introducir así el concepto de fracción equivalente como resultado de una medida, en el sentido de que para pasar de una fracción equivalente a otra lo que se hace es tomar una subdivisión de la medida, y después tomar tantas de estas nuevas subunidades como sean necesarias para llegar a tener el mismo resultado. Dicho de otra forma, dos fracciones son equivalentes si son el resultado de medir objetos con la misma medida, pero tomando diferentes subdivisiones de la unidad. Así, en este ejemplo concreto, es lo mismo dividir la unidad en dos partes y tomar tres de estas subunidades que dividir la unidad en cuatro partes y tomar seis de estas subunidades.

Problema 3.4.2. *Pablo ha ido a comprar caramelos con sus amigos. El y sus amigos han comprado 4 regalices iguales a repartir entre los 6 amigos. Marina también ha ido a la tienda con sus dos amigas y han comprado 2 regalices del mismo tipo para repartir entre las tres. Antes de comerse ninguno, han descubierto que ambos tienen la misma cantidad de regaliz. ¿Se trata de una feliz coincidencia o sucede algo?*

Vemos aquí que las fracciones equivalentes mediante un problema de reparto, en el sentido de que dos fracciones son equivalentes cuando, en los repartos que describen, se tiene que los participantes acaban recibiendo lo mismo. Así, se tendría que a Pablo le corresponden $\frac{4}{6}$ de regaliz y a Marina ,$\frac{2}{3}$ de regaliz. Podríamos valorar explicar a los alumnos que otra forma de plantearlo podría ser considerar que lo que tenemos en realidad es que el reparto $\frac{4}{6}$ se puede partir en dos repartos idénticos de 2 regalices entre 3 personas, y que por la tanto a cada participante le corresponderá lo mismo.

Problema 3.4.3. *Dos familias mantienen una discusión acerca de cuál de las dos tiene mejores manzanos. Los Sanchez tienen tres árboles, y afirman que, cuando es temporada recogen 20 manzanas al día. Los Martinez tienen nueve árboles y, según ellos, cuando es temporada recogen 60 manzanas al día. El alcalde dice que ninguna de laas familias tiene árboles mejores que la otra, ¿en qué se basa para decir eso?*

Así, tenemos un problema de razones, y en este caso el suceso que se tiene es que $\frac{20}{3} = \frac{40}{6}$. Con el significado de razón, dos fracciones son equivalentes cuando expresan la misma razón.

Procederemos pues a introducir ya la idea forma de operaciones equivalentes.

Para ello, indicaríamos las tres fracciones equivalentes que han aparecido, y plantearíamos a nuestros alumnos si observan alguna relación. Debería surgir la idea de que en ambos casos se multiplica numerador y denominador por el mismo número en una fracción y se obtiene la equivalente. Así, tenemos ya la primera idea fundamental para obtener fracciones equivalentes. Introducimos pues la técnica para hallar fracciones equivalentes, consistente en multiplicar (o dividir) numerador y denominador por el mismo número.

Usaríamos fracciones equivalentes a un entero (o a un decimal sencillo de calcular, si consideramos que no va a crear problema alguno) para ilustrar el otro hecho fundamental. Así $\frac{10}{2}$ es equivalente a $\frac{15}{3}$, dado que $10 \cdot 1{,}5 = 15$ y $2 \cdot 1{,}5 = 10$. Ahora podemos pedir que calculen el valor de la fracción (recordando también que una fracción es un cociente indicado). En ambos casos tenemos el mismo valor y podemos dar la definición que resuelve el problema inicial: dos fracciónes son equivalentes si su valor numérico es el mismo. Podemos usar un apoyo tecnológico basado en la división entera, con un argumento de que, dado que la fracción es un cociente indicado, y se tiene que al multiplicar el dividendo (numerador) y el divisor (denominador) por el mismo número, el resultado no varía, por ejemplo $10 : 5 = 2 = (10 \cdot 4) : (5 \cdot 4) = 40 : 20$.

La técnica explícita para comprobar si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ será verificar si $a : c = b : d$, dado que muchas veces los números que se obtienen al realizar dicha permutación son mucho más sencillos. En el caso en el quee sea más sencillo efectuar los cocientes $a : b$ y $c : d$, se procederá de ese otro modo, teniendo en cuenta que los alumnos han trabajado estas divisiones en primaria. De considerar que ambos cocientes pueden ser excesivamente difíciles de calcular, se recurrirá a la regla del producto.

Veamos algunos ejercicios de trabajo de la técnica:

Ejercicio 3.4.4. *Halla 3 fracciones equivalentes a cada una de las dadas:*

a) $\frac{2}{12}$ *b)* $\frac{3}{5}$ *c)* $\frac{10}{5}$

Es un ejercicio sencillo, orientado a introducir a nuestros alumnos en la idea de fracción equivalente. No existe una solución única, pero es inmediato de corregir. Es posible que algún alumno de este nivel busque algun ejemplo extraño y nos presente fracciones con números muy altos, pero aun así resulta inmediato verificar si se tienen o no fracciones equivalentes. En general la equivalencia de fracciones no plantea muchos problemas, aunque sí que nos interesa que nuestros alumnos identifiquen fracciónes similares, por lo que también se propondrá algún ejercicio del siguiente tipo:

Ejercicio 3.4.5. *Decir si los siguientes pares de fracciones son equivalentes:*

a) $\frac{2}{5}$ *y* $\frac{4}{10}$ *b)* $\frac{3}{10}$ *y* $\frac{1}{3}$ *c)* $\frac{7}{4}$ *y* $\frac{15}{8}$ *d)* $\frac{32}{6}$ *y* $\frac{16}{3}$

Podemos ilustrar las tres técnicas que podríamos usar para hallar fracciones equivalentes. No obstante, destacar que la segunda quedará un poco fuera, por tratarse de un posible ”vicio” que los alumnos podrían adquirir, y que les lastrará más adelante. Para resolver a) basta comprobar que $4 : 2 = 2 = 10 : 5$, y por lo tanto son fracciones equivalentes. Aplicando la misma técnica de comprobación se tiene que $3 : 1 = 3 \neq 3.\widehat{3} = 10 : 3$, lo que nos indica que no se trata de fracciones equivalentes.

En cuanto a la técnica de hallar el valor decimal, aplicada a c) se tiene que $7 : 4 = 1{,}75 \neq 1{,}875 = 15 : 8$, lo que implica que las fracciones no son equivalentes. Usando esto mismo en d), se tiene que $32 : 6 = 5.\widehat{3} = 16 : 3$, por lo que ambas fracciones son equivalentes.

Antes de pasar a la siguiente técnica a trabajar, podría ser interesante plantear el siguiente problema:

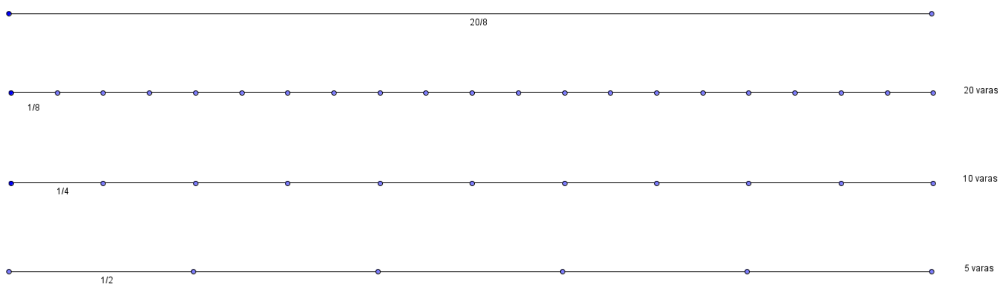
Problema 3.4.6. *Completar las siguientes igualdades:*

$\frac{3}{7} = \frac{}{21}$ $\frac{8}{5} = \frac{}{20}$ $\frac{2}{8} = \frac{}{12}$ $\frac{11}{9} = \frac{}{63}$

El objetivo de este problema es que los alumnos comprendan cómo puede obtenerse una fracción equivalente a otra con un cierto denominador dado, de cara a que comprendan mejor la técnica de reducción a común denominador (mínimo común denominador). Aunque podría trabajarse como una técnica adicional, considero más interesante resolver uno o dos problemas de este tipo (uno para explicar los pasos seguidos y otro para que los alumnos adquieran un poco más de práctica).

En cuanto a su resolución basta observar que, para obtener el denominador en, por ejemplo a) hay que multiplicar dicho denominador por 3, por lo que, si queremos obtener una fracción equivalente, habrá que multiplicar el numerador por el mismo número , y se tiene $\frac{3}{7} = \frac{3\cdot 3}{7\cdot 3} = \frac{9}{21}$. El resto son iguales, aunque en el caso c) sea necesario multiplicar por 1,5. Algún problema de este tipo se dejaría para que los alumnos lo pensasen en casa, para en la siguiente sesión exponer la técnica: si queremos obtener una fracción equivalente a $\frac{a}{b}$ con un denominador c, para hallar el numerador simplemente hay que obtener $d = c : b$ y escoger $a \cdot d$ como numerador. Presentaremos esta técnica de forma más traspuesta, mediante ejemplos. Aunque podríamos enseñar esta técnica desde un principio, dejar que los alumnos tengan ocasión de relexionar sobre ella debería dar lugar a un aprendizaje allgo más significativo.

3.4.2. Simplificación y fracciones equivalentes (Campo de problemas 3)



Problema 3.4.7. *El coche de Isabel mide lo mismo que 20 varas de un octavo de metro cada una. ¿Podría medirlo usando otras varas más largas, de forma que pueda seguier expresando el resultado con un número entero de estas varas?*

De nuevo dejaríamos a nuestros alumnoss pensar algo más antes Desde el marco de la medida, simplificar es equivalente a deshacer las subdivisiones excesivas que hayamos podido hacer. Por ejemplo, es claro que si tenemos un número par de varas, y hemos tomado un número par de subdivisiones de la unidad, tenemos, desde el punto de vista de fracciones equivalentes, que podríamos duplicar el tamaño de cada vara y medir el objeto usando la mitad de varas. En este caso, 20 varas de un octavo cada una equivalen a 10 varas de un cuarto cada una y a su vez esto equivale a 5 varas de medio metro cada una. Es claro que no es posible seguir este proceso y llegar a un número entero de unidades, por lo que aparece también así el concepto de fracción irreducible.

Problema 3.4.8. *Pedro ha hecho un viaje de 340 kilómetros en 4 horas. ¿Sabrías expresar con una fracción el número de kilómetros por hora que ha hecho?*

Es claro que se han recorridodo $\frac{340}{4}$ kilómetros por hora, especialmente teniendo en cuanta que tal idea es muy cotidiana, y los alumnos ya se habrán enfrentado a ella en más de una ocasión. La idea fundamental cuando trabajamos con razones es ver que podemos ver tal situación como una nueva razón, en este caso 340 km en 4 horas es equivalente a hacer 170 km en dos horas que a su vez es equivalente a hacer 85 km por hora. Así queda claro que cuando tomamos una razón, podemos dividir ambos miembros entre el mismo número y que el coeciente se mantenga constante, por lo que estamos en la misma situación que antes, cuando trabajábamos fracciones equivalentes.

De una manera más formal, podemos ver esta técnica como una aplicación de las fracciones equivalentes, que permite trabajar con fracciones más sencillas. La técnica a aplicar consiste en dividir numerador y denominador entre un número que sea divisor de ambos. Así comenzaremos proponiendo simplificar fracciones en las que el denominador común sea un número entero sencillo. Introduciremos también el concepto de fracción irreducible, siendo ésta aquella en la que el numerador y el denominador no tienen divisores comunes. La técnica más general para llevar a cabo éste proceso sería hallar el m.c.d. del numerador y el denominador. No obstante, nos interesa más que nuestros alumnos aprendan a identificar distintos divisores ccomunes y a hacerlo de forma progresiva, simplificando. Ya conocen las técnicas para hallar los distintos divisores de un número, así que no debería haber ningún problema. Para lo que sí que puede venir bien el m.c.d. es para tener una forma rápida de verificar que una fracción es irreducible.

Ejercicio 3.4.9. *Simplifica las siguientes fracciones, hasta llegar a fracciones irreducibles:*

a) $\frac{15}{10}$ *b)* $\frac{28}{16}$ *c)* $\frac{60}{124}$ *d)* $\frac{14}{7}$ *e)* $\frac{18}{4}$

Identificando divisores comunes, es inmediato identificar que para resolver a) o e), basta dividir ambos miembros entre 5, obteniéndose $\frac{15}{10} = \frac{15:5}{10:5} = \frac{3}{2}$. En otros, como el c) o el d), es posible identificar los divisores de forma progresiva o identificar el producto. Es muy importante que los alumnos comprendan que es necesario simplificar hasta que se tenga una fracción irreducible. Así, por ejemplo el c) se simplificaría: $\frac{60}{124} = \frac{30}{62} = \frac{15}{31}$. Es posible que en algún caso, como el d) se tenga que la fracción irreducible es un número entero.

Con las fracciones irreducibles ya impartidas, podríamos tratar de plantear ya algún problema que también implique ahondar en los distintos significados que una fracción y en las distintas situaciones que se pueden modelizar mediante el uso de una fracción.

Problema 3.4.10. *En una clase de 30 alumnos, 6 de ellos han venido hoy a clase con una chaqueta de color azul. ¿Que fracción representa a la parte de la clase que ha venido con la chaqueta azul? Expresa el resultado como una fracción irreducible.*

La resolución es inmediata: la fracción en cuestión es $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$. En los problemas de parte-todo será ffundamental que los alumnos se acostumbren a simplificar, dado que en muchas ocasiones esto simplificará el futuro trabajo con porcentajes.

Problema 3.4.11. *En una clase hay 12 chicos y 16 chicas, ¿qué fracción de la clase representan las chicas?*

Basta sumar chicos y chicas para obtener el total de alumnos en la clase y plantear la fracción $\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$.

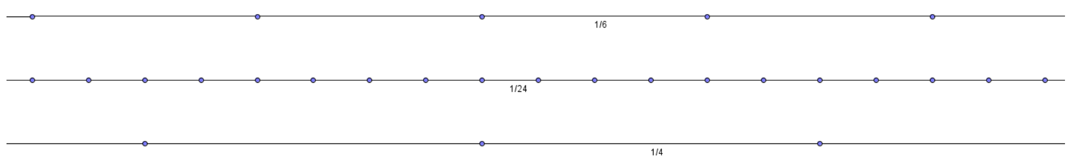
3.4.3. Reducción a común denominador y a mínimo común denominador. (Campo de problemas 4)

Una vez tenemos cubierta la técnica de comparar fracciones equivalentes, la siguiente técnica a tratar será la de reducción a común denominador. Comenzaremos por el siguiente problema:

Problema 3.4.12. *Juan y Julia quieren comprobar cuanto tiempo tardan en hacer los deberes de un determinado día. Como no encontraban ningún reloj que funcionara, han optado por uar relojes de arena de dos juegos de mesa. El que ha cogido Juan se vacía 20 veces en una hora y el que ha cogido Julia, 30 veces en una hora. Juan ha logrado llevar a cabo su tarea en 32 vaciados y Julia, en 42. ¿Sabrías describir con una fracción el tiempo en horas que le ha costado a cada uno hacer los deberes? ¿Serías capaz de hallar fracciones equivalentes que nos permitieran expresar el tiempo de ambos en fracciones con el mismo denominador?*

Es claro que las medidas que se obtienen para la tarea son, en el caso de Juan, $\frac{32}{20}$ de hora y en el de Julia $\frac{42}{30}$. Es muy posible que, durante el periodo de tiempo que hayamos dejado para pensar, Algún alumno haya transformado esto s tiempos en minutos, obteniendo 96 minutos para Juan y 84 minutos para Julia. Podemos aprovechar esto para indicar que las fracciones que hemos obtenido antes son equivalentes a decir que el coste en tiempo ha sido de $\frac{96}{60}$ para Juan y de $\frac{84}{60}$ para Julia. Y que una subdivisión de una hora en 60 partes iguales es lo mismo que considerar los minutos transcurridos. Así, la idea funddamental es que, en medida, reducir a común denominador equivale a "pactarüna nueva subdivisión de la unidad que respete las medidas obtenidas en cada caso. En este caso, lo obvio era buscar ir a la subdivisión que se ajusta a nuestro sistema de mediada, pero en otros problemas la situación será distinta.

Problema 3.4.13. *Pablo y Ramón han medido las puertas de sus garajes. Para ello, Pablo ha usado varas de un sexto de metro, y ha obtenido que la puerta de su garaje mide lo mismo que 21 de estas varas. Por su parte, Ramón ha medido la suya con varas de un cuarto de metro, obteniendo una longitud de 15 varas. ¿Podrías expresera sus resultados en forma de fracciones con el mismo denominador?*



De nuevo tenemos un problema de medidas, el primer paso es obvio, dado que se obtiene una medida de $\frac{21}{6}$ y $\frac{15}{4}$. Ahora su que se ve que es preciso ”pactar” una nueva subdivisión, de nuevo volviendo a la idea de fracciones equivalentes, tendríamos que se Pablo subdivide sus medidas, tomando 4 particiones por subunidad y llegando a $\frac{84}{24}$ y Pedro subdivide su media, tomando 6 particiones por unidad y llegando a $\frac{90}{24}$. Llegados a este punto, podemos plantear si nos sirve otra partición, y la respuesta es que nos sirve cualquier partición en la que el número de divisiones de la unidad sea un múltiplo de los números de divisiones de la unidad que hayamos tomado en las medidas que queremos unificar. En ese caso, lo lógico, con el fin de trabajar con números lo más simples posibles, será tomar como denominador el m.c.m.

Problema 3.4.14. *Hallar fracciones equivalentes a $\frac{5}{8}$ y a $\frac{9}{4}$ con el mismo denominador.*

Se trata ya de la formalización de lo anterior. Iintroduciremosla técnica, consistente en, dadas las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, multiplicaremos el numerador y el denominador de cada una por el denominador de la otra, teniéndose $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d}$ y $\frac{c}{d} = \frac{c \cdot b}{b \cdot d}$. Podríamos introducir también la misma técnica para más de dos fracciones, o trabajar algún ejercicio de esta técnica. No obstante, posiblemente sea más efectivo introducir directamente la siguiente técnica de reducción al mínimo común denominador antes de proceder a un trabajo de dicha técnica. Con ésta técnica las fracciones del problema quedarán $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{20}{32}$ y $\frac{9}{4} = \frac{9 \cdot 8}{4 \cdot 8} = \frac{72}{32}$.

De nuevo argumentaremos a nuestros alumnos que es más fácil trabajar con números más pequeños. Así, en el ejemplo anterior podríamos tener común denominador 8, teniendo así $\frac{5}{8}$ y $\frac{18}{8}$. La técncia a aplicar va a consistir en usar el m.c.m., dado que simplificar de forma simultánea varias fracciones no es recomendable ni útil. Dadas dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, comenzaremos por hallar el m.c.m. de b y d, técnica ya conocida por nuestros alumnos. tras ello basta dividir el m.cm por el denominador de cada fracción para hallar el número por el que multiplicar dicha fracción. Veamos un ejemplo:

Ejercicio 3.4.15. *Reducir las siguientes fracciones a mínimo común denominador:*

a) $\frac{1}{3}$ *y* $\frac{1}{4}$ *b)* $\frac{4}{9}$ *y* $\frac{5}{6}$

En el primer caso, como 3 y 4 son primos entres sí, el m.c.m. es su producto, 12. Basta dividir $12/3 = 4$ y $12/4 = 3$ para tenerse que $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}$ y $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{12}$. En el segundo, el m.c.m. es 18. Teniendo en cuenta $18/9 = 2$ y $18/6 = 3$, haremos $\frac{4}{9} = \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{8}{18}$ y $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{15}{18}$. A excepción de ilustrar la técnica, no debería practicarse esta técnica de froma específica, dado que se va a trabajar mucho a lo largo de todo el tema. Introduciremos también una técnica para reducir tres o más fracciones a mínimo común denominador:

Ejercicio 3.4.16. *Reducir a mínimo común denominador las siguientes fracciones:*

$\frac{5}{4}$ *y* $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{13}{6}$.

La técnica a aplicar consistirá ahora en calcular el m.c.m. de los tres números, en este caso m.c.m.$(4,3,6) = 12$. Después, basta usar la técnica de convertir fracciones a otras con un denominador dado para obtener las fracciones que buscamos, que en este caso serán $\frac{15}{12}$ y $\frac{8}{12}$ y $\frac{26}{12}$. Esta técnica puede extrapolarse a un número mayor de fracciones, y su única dificultad consiste en hallar el m.c.m. de varios números.

3.4.4. Comparación de fracciones (Campo de problemas 5)

Aunque no es una técnica imprescindible, desarrollar técnicas de comparación de fracciones puede ayudar a trabajar el sentido numérico y, además arrojará algo de luz sobre los significados que ésta toma. Comenzaremos con la técnica de comparación entre fracciones con igual denominador. Para ello, usaremos el siguiente problema, basado en medidas:

Problema 3.4.17. *Vicente quiere medir las paredes de su huerto rectangular para tener la certeza de cual de ellas es más larga. Usando una vara de medio metro, comprueba que uno de los lados mide 19 varas y el otro, 15 varas. ¿Cual de los dos mide más?*

Casi ni se le puede llamar problema, es lógico que los alumnos nos indiquen que $19 > 15$. Podemos explicar que en este caso cogemos las medidas en varas, usando fracciones, y se tiene que $\frac{19}{2} > \frac{15}{2}$, extrapolando de forma inmediata la técnica de comparación de fracciones con mismo numerador. La siguiente técnica a introducir es la de comparar fracciones con el mismo denominador. Esta técnica no sería necesaria, pero arroja algo de luz sobre la naturaleza de las fracciones, facilitando la comprensión de ellas como cociente indicado. Para ello, nos basaremos en un problema sencillo de reparto:

Problema 3.4.18. *El viernes, Marcos fue a cenar fuera con dos amigos y entre los tres se comieron una pizza. El domingo fue al mismo restaurante con su padre y su hermana y pidieron la misma pizza para los 4. ¿Cual de los dos días comió más pizza?*

De nuevo es tan obvio que casi no es si quiera un problema. De nuevo, no obstante, pensando en fracciones se tiene que, siendo $3 < 4$, se tiene $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$. Así podemos extrapolar que, dadas dos fracciones con el mismo numerador, la que tiene mayor denominador es la menor. Solo falta pues establecer un criterio de comparación general.

Problema 3.4.19. *Un biólogo ha estimado que en un bosque hay 5 lobos por cada* $6km^2$*. En otro bosque cercano se han estimado unos 6 lobos por cada* $8km^2$*. ¿En cual de los bosques habrá un mayor número de lobos?*

Es posible que tengamos que ayudar a algún alumno a interpretar un poco más el problema, pero también es importante expandir el rango de problemas que nuestros alumnos pueden modelizar con fraccciones. Además, hará más fácil que se enfrented más adelante a conceptos como el de densidad. Una vez entendido el problema, en realidad se trata de decidir qué fraccion es mayor, $\frac{5}{6}$ o $\frac{6}{8}$. Podríamos comenzar reduciendo la segunda fracción a $\frac{3}{4}$, dado que simplifica el resultado. Tal cosa debería hacerse incluso en aquellos casos en los que no sea necesario, dado que el cálculo del m.c.m. será más sencillo y, por tanto, habrá menos errores. Sabiendo que $\text{m.c.m}(6,4) = 12$, sólo falta aplicar la técnica de reducción a mínimo común denominador y obtener $\frac{5}{6} = \frac{10}{12}$ y $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ comparando fracciones se deduce que hay más lobos en el primer bosque.

En un principio no necesitaríamos establecer ninguna técnica. No obstante, deberíamos recordar a nuestros alumnos que no siempre es necesario reducir a comun denominador para comparar fracciones. Así, para comparar las fracciones $\frac{16}{5}$ y $\frac{3}{4}$ no es realmente necesario reducir a denominador común, dado que la primera es algo superior a 3 y la segunda, algo inferior a 1. Así, se establece la posibilidad de comparar fracciones mediante el uso del sentido numérico:

Ejercicio 3.4.20. *Comparar las siguientes fracciones sin efectuar ningún cálculo:*

a)$\frac{26}{3}$ *y* $\frac{15}{4}$ *b)*$\frac{15}{4}$ *y* $\frac{1}{2}$ *c)*$\frac{7}{8}$ *y* $\frac{1}{4}$

Así, para a) se tiene que la primera fracción es algo menor que 9 y la segunda es algo menor que 4, por lo que la primera es mayor. En b) se tiene que la primera fracción es algo menor que 4 y la segunda es media unidad, por lo que también es la primera la mayor. Por último, para c), la primera fracción se acerca mucho a la unidad y la segunda es un cuarto de ella, por lo que también es mayor la primera. De momento, plantearemos un par de ejercicios en la que aproximar la división sea suficiente para decidir cual de las fracciones es mayor y cual menor. Haremos que sean los alumnos los que expliquen sus respuestas a este ejercicio, así como sus estrategias. Se trata de un ejercicio en el que los alumnos, al expresarse, tienen que trasladar sus ideas matemásticas al lenguaje ordinario, sin limitarse a repetir el discurso del profesor. Otras técnicas de compariación que requieran de un razonamiento algo más elaborado, como podrían ser aquellas que se basan en la búsqueda de referencias o comparación del resultado de dos diferencias, quedan reservadas para cursos algo más superirores. Además, deberíamos especificar que no siempre es tan inmediato, frente a la técnica de comparación presentada, que funciona siempre que se aplique bien.

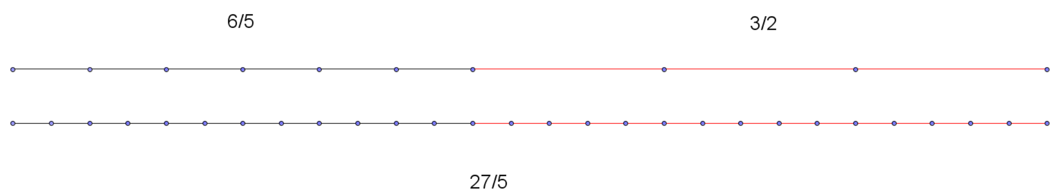
3.5. Técnicas de operación con fracciones

Una vez hemos acabado con las técnicas de manejo de las fracciones como tal, es el momento de introducirnos en la segunda parte del tema, consitente en enseñar a nuestros alumnos cómo operar con fracciones. Es muy posible que en esta parte se pongan de manifiesto los errores que los alumnos arrastran de cursos anteriores, que tendremos que corregir. También podremos observar qué nivel de comprensión han adquirido nuestros alumnos sobre las fracciones en la primera pare del tema. Trataremos, como antes, de irles dando sentido en diferentes contextos, y con distintos significados de la fracción. En algún caso podemos acompañarnos de alguna tecnología gráfica que nos ayude a ver lo que sucede, aunque no sin antes plantear algún problema que nos permita justificar la técnica, dado que las tecnologías gráficas pueden causar problemas, sobre todo si los alumnos entienden la fracción como parte de un todo.

3.5.1. Suma y resta de fracciones (Campo de problemas 6)

Vamos a enseñar la suma y la resta de forma simultánea. Aunque los alumnos no han dado números enteros como tal y por la tanto aún no podemos impartir la suma en general, ambas operaciones se enseñarán al mismo tiempo, con el fin de que los alumnos tengan ocasión de ver que la técnica es la misma y preparando un poco el terreno para su introducción en el campo del álgebra. Comenzaremos introduciendo la suma de fracciones de igual denominador con el siguiente problema:

Problema 3.5.1. *Una pared mide exactamente lo mismo que una vara de $\frac{6}{5}$ de metro y otra vara de $\frac{3}{2}$ de metro, puestas seguidas. ¿Cuanto mide nuestra pared en total?*



Con un problema de medida de este tipo queda patente lo que explicabamos en la parte de reducción a común denominador. Es tan sencillo como el hecho de que para sumar dos medidas debemos sumarlas en la misma unidad (podríamos plantearnos usar un ejemplo de como no podemos sumar centímetros y milímetros). Así, primero pactaríamos una nueva subunidad, llevando las medidas a $\frac{12}{10}$ y a $\frac{15}{10}$. Con las medidas en la misma unidad, es inmediato sumar, obteniendo $\frac{27}{10}$.

Problema 3.5.2. *A la hora de la cena, a Alejandro le correspondían 3 trozos de una pizza dividida en 8. No obstante, un amigo llegó después y Alejandro le dió uno de sus trozos. ¿Qué porción de pizza ha comido Alejandro?*

Es un problema de reparto, que de nuevo puede abordarse sin usar fracciones; no obstante, mediante el uso de fracciones, se tiene que $\frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} \left(= \frac{1}{4}\right)$. De nuevo puede darse la respuesta restando "trozos" y después dividiendo. Así pues, buscaremos que nuestros alumnos comprendan que la suma y la resta de fracciones con el mismo denominador es análoga a sumar o restar las partes en las que se divide la unidad en cada caso. Pasaremos a enseñar la suma y resta de fracciones en general:

Problema 3.5.3. *Luis quiere pintar dos verjas de 13 y 9 metros. Sabiendo que con un cubo de pintura pinta 5 metros, ¿cuantos cubos necesitará para pintar las dos verjas?*

Se trata de un problema de medida, aunque puede entreverse cierto uso del significado de razón. Aunque sería posible sumar y luego dividir, nosotros lo haremos sumando fracciones: $\frac{13}{5} + \frac{9}{5} = \frac{22}{5}$. Se establece así la técnica de sumar fracciones con el mismo denominador se suman los numeradores y se deja el denominador. Si algún alumno expresa dudas, podríamos permitirles hacer primero la suma y luego dividir, observando que se llega al mismo resultado. Pasamos al siguiente problema para introducir la técnica de resta de fracciones con el mismo denominador:

Problema 3.5.4. *A un operario le corresponden $\frac{3}{4}$ del precio de una reparación. No obstante, para hacer la faena, tuvo que comprar material por un valor de $\frac{1}{5}$ de la reparación. ¿Cuáles serán sus beneficios finales?*

Una vez que nuestros alumnos saben que el beneficio se haya restando los gastos de los ingresos, este problema es bastante simple, aunque la fracción aparece por primera vez como un operador actuando sobre una cantidad desconocida, también se puede ver como una construcción de parte-todo. En cuanto al uso de cantidades abstractas, también conviene que nuestros alumnos se habituen a la aparación de éstas, para más adelante ser capaces de enfrentarse a problemas de álgebra. En cuanto a la resolución, de nuevo tenemos que la primera parte de la técnica consistirá en reducir a mínimo común denominador, en este caso $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ y $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$. Después basta con usar la técnica de restar con igual denominador, teniéndose así $\frac{16}{20} - \frac{5}{20} = \frac{11}{20}$. En este caso, el paso a un denomidador común consiste en equiparar las partes que hemos obtenido, aunque la idea fundamental sigue siendo la necesidad de llegar a partes iguales para poder operar.

Problema 3.5.5. *Al ir al cine, Jorge decidió compartir una botella de refresco con dos amigos más. A última hora llego un amigo, y Jorge acordó comprar a medias otra botella de refresco para compartirla entre los dos. ¿Qué cantidad de refresco le corresponde?*

Es un problema sencillo de reparto con una solución inmediata. La única finalidad de este problema es hacer que nuestros alumnos entiendan que, en un modelo de reparto, sumar equivale a reccibir en dos repartos distintos, y no a repartir el total entre todos los participantes.

Ejercicio 3.5.6. *Realizar las siguientes operaciones:*

a)$\frac{5}{7}+\frac{3}{4}$ *b)* $\frac{4}{5}-\frac{1}{4}$

Para realizar a),enseñaremos la técnica de reducir las fracciones a mínimo común denominador, en este caso $\frac{5}{7}=\frac{20}{28}$ y $\frac{3}{4}=\frac{21}{28}$. Tras ello, basta aplicar la técnica de sumar fracciones con el mismo denominador para obtener el resultado, en este caso $\frac{20}{28}+\frac{21}{28}=\frac{41}{28}$. Ya tendríamos el resultado esperado. Aunque en este caso no proceda, habría que recordar a nuestros alumnos que hay que simplificar los resultados obtenidos. En cuanto a b); de nuevo tenemos que la primera parte de la técnica consistirá en reducir a mínimo común denominador, en este caso $\frac{4}{5}=\frac{16}{20}$ y $\frac{1}{4}=\frac{5}{20}$. Después basta con usar la técnica de restar fracciones con igual denominador, haciendo $\frac{16}{20}-\frac{5}{20}=\frac{11}{20}$.

3.5.2. Multiplicación de fracciones (Campo de problemas 7)

La multiplicación es muy posiblemente la técnica más dificil de comprender de entre todas las que aquí tratamos. Además, se da la particularidad de que no todos los significados de la fracción permiten darle un significado claro. Así pues, será necesario abordarla de forma progresiva, comenzaremos con el siguiente problema, usando la fracción como un operador:

Problema 3.5.7. *Un pasillo mide lo mismo que 5 varas de $\frac{3}{4}$ de metro. ¿Cual es su medida en metros?*

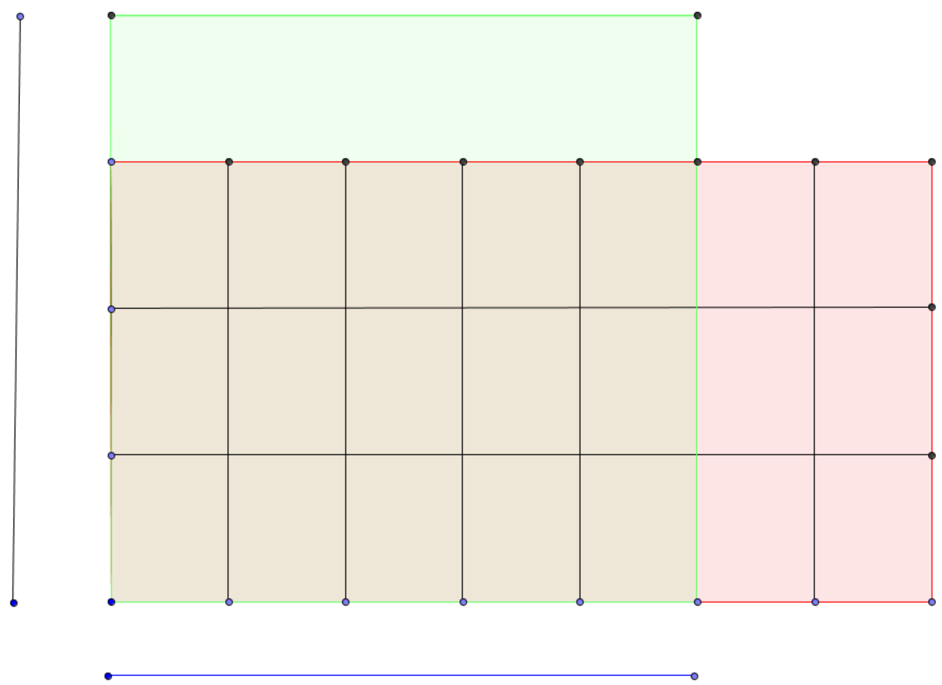
Es un primer problema basado en medidas, argumentando que la multiplicación de una fracción por un entero puede reducirse a sumar la fracción varias veces, teniéndose $\frac{3}{4}\cdot 5=\frac{15}{4}$.

Problema 3.5.8. *Un frutero ha vendido $\frac{2}{3}$ de los 20 kg de manzanas que tenía. ¿Cuantos kg de manzanas ha vendido?*

Es otro problema de producto de una fracción por un entero, esta vez la fracción tiene el significado de operador, y ya se atisba que la idea de tales problemas es hallar cuánto es una parte, y después multiplicar por el número de partes que teníamos. La respuesta es $\frac{2}{3}\cdot 20=\frac{2\cdot 20}{3}=\frac{40}{3}$. La técnica de multiplicar una fracción por un número entero no debería suponer ningún problema. Simpletmente consiste en multiplicar el numerador por el número en cuestión dejando el denominador invariante.

Problema 3.5.9. *Queremos saber cuanto mide de largo una tablet que mide exactamente la mitad de lo que mide una vara de $\frac{3}{4}$ de metro. ¿Cuanto mide en metros?*

De nuevo no debería haber muchos problemas para que los alumnos entiendan que lo que se hace en realidad es dividir, y que el producto queda $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4\cdot 2}=\frac{3}{8}$. Así, obtenemos la técnica de multiplicar una fracción por otra de denominador 1. Si detectamos dificultades de comprensión, podríamos intentar despejar dudas mostrando que realizar dos divisiones encadenadas da el mismo resultado que dividir ente el producto de divisores. Después, haremos alusión al significado de fracción. Hay que notar que, aunque ya debería haberse producido en primaria, es posible que para algún alumno suponga una ruptura epistemológica, al tenerse que es posible ue al multiplicar un número por otro se obtenga un resultado menor que el número de partida. Haremos incidencia en que es algo perfectamente aceptable, especialmente si consideramos el uso de la fracción como un operador. Preguntaremos a nuestros alumnos cuando se da esta situación, e incidiremos en la respuesta correcta, que es cuando se trata de una fracción cuyo valor numérico es menor que 1.



Problema 3.5.10. *Un rectángulo tiene lados que miden repsectivamente, $\frac{8}{5}$ y $\frac{3}{4}$. ¿Cuál será su area?*

De nuevo otro problema de medida, pero ya con el producto general de fracciones. Es claro que la respuesta a éste problema es $\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 3}{5 \cdot 4}$. Para darle una justificación apropiada a esta técnica podríamos mostrar cómo al multiplicar fracciones, el producto de los denominadores subdivide a la unidad producto, y el de numeradores nos indica el número de unidades a tomar.

Problema 3.5.11. *Un albañil cobra $\frac{7}{10}$ del coste total una obra. No obstante, tiene que pagar impuestos, tras lo cual le quedan $\frac{4}{5}$ de lo que había recibido. ¿Qué fracción del coste total de la obra representa el dinero que el albañil recibe?*

Un problema un poco más generalizado de operadores. De nuevo, la técnica no cambia, y se tiene que la solución es $\frac{7}{10} \cdot \frac{4}{5} = \frac{14}{25}$. Así, Podemos explicar que ahora comenzaríamos "dividiendo en 10 partes y quedándonos 7"; para después "dividir esos 7 entre 5 y quedarnos 4".

Así, en realidad lo que hacemos es dividir la fracción en partes usando el denominador de la segunda, lo cual es análogo a efectuar el producto en el cociente, y después nos quedaremos con tantas partes como indique el numerador, lo cual es análogo a efectuar el producto en el numerador. La multiplicación es un proceso un poco difícil, por lo que insistiremos lo que sea necesario para garantizar que hay una buena comprensión. Los dos problemas anteriores permiten un buen apoyo de tecnologías gráficas, por lo que el uso de éstas también puede ser útil para lograr buenos resultados de aprendizaje. Así, queda establecida la técnica de multiplicación, consistente en que el producto $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ será otra fracción cuyo numerador será el producto de numeradores y el denominador será el producto de denominadores, quedando $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$. Recordaremos también que es necesario simplificar al final.

Ejercicio 3.5.12. *Realizar las siguientes operaciones:*
a)$\frac{9}{10} \cdot \frac{15}{2}$ *b)* $\frac{24}{15} \cdot \frac{15}{4}$ *c)*$\frac{72}{49} \cdot \frac{56}{24}$

aunque todos estos ejercicios pueden simplemente resolverse aplicando la técnica general que enseñaremos,y que es $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, otros de los objetivos que perseguiremos con nuestra enseñanza será buscar que los alumnos aprendan a operar buscando simplificaciones. Podríamos ilustrar la idea con el primer ejercicio, cancelando el 5 con el 15. para llegar a que $\frac{9}{10}\frac{15}{2} = \frac{9}{2}\frac{3}{2}$. La idea para hacer esta parte será dejar que los alumnos hagan por su cuenta las operaciones y después pongan en común las distintas estrategias de simplificación que han seguido.

3.5.3. Fracciones inversas y división de fracciones (Campo de problemas 8)

La técnica de división de fracciones es bastante sencilla, no obstante, justificarla con el fin de que nuestros alumnos adquieran una buena comprensión puede no ser fácil. De hecho, lo más sencillo será justificar las técnicas desde el punto de vista de una operación formal, usando un argumento de cohesión. No obstante, los problemas que provocan la aparición de la división sí que se pueden enmarcar dentro de alguno de los usos de la fracción que hemos visto. Un argumento enteramente basado en medida puede verse en Gairín y Escolano (2007).

Problema 3.5.13. *Sabemos que una vara mide $\frac{4}{5}$ de metro. ¿Cuánto medirá media vara? ¿Y si la vara midiese $\frac{3}{5}$ de metro?*

El primer caso es sencillo, y podríamos esperar que nuestros alumnos nos respondán $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$. Con mucha seguridad lo habrán hecho dividiendo el numerador. Aun así, podemos ahora pedir a nuestros alumnos que efectuen esta divsión multiplicando el denominador de la fracción dividendo por el divisor. Así, tendríamos $\frac{4}{5} : 2 = \frac{4}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Aunque puede parecer más dificil con este segundo método, éste sí que nos permite usar la división de forma más sencilla, resultando $\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$. Podemos dar una primera aproximación de la técnica de división, consistente en que para efectuar $\frac{a}{b} : c$, haremos $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$.Continuaremos con el siguiente problema:

Problema 3.5.14. *Un biólogo está estudiando la cantidad de champiñones de una cierta especie que crecen en un bosque. Ha observado que en dos zonas del bosque se tienen diferentes cantidades:*

a) En una zona ha estimado que hay 10 champiñones por cada 2 metros cuadrados.

b) En la otra zona ha estimado que hay 3 champiñones por cada medio metro cuadrado.

¿Qué fracción representa el número de champiñones por metro cuadrado en cada zona?

La pare a) simplemente busca que los alumnos entiendan que hay que dividir para llegar al resultado que nos piden. Así $10 : 2 = 5$ es la solución. En cuanto a la parte b), es fácil que los alumnos vean que la respuesta es 6 champiñones por metro cuadrado. Si intentamos reproducir el procedimiento anterior nos encontramos que lo que tenemos es $3 : \frac{1}{2} = 3 \cdot 6$. Podemos comprobar en una división sencilla que dividir entre dos el divisor y multiplicar por dos el dividendo dan lugar a resultados análogos. Así, se tiene la segunda técnica auxiliar, consistente en que dividir entre una fracción de numerador 1 ($\frac{a}{b} : \frac{1}{d}$) es equivalente a multiplicar el dividendo por el denominador de la fracción divvisor ($\frac{a}{b} : \frac{1}{d} = \frac{a}{b} \cdot d = \frac{a \cdot d}{b}$). Fomentaremos también la ruptura epistemológica indicando que se observe que en el apartado b) sucede que, pese a estar dividiendo, el resultado es mayor que el dividendo. Tras ello, pasaremos ya a la técnica general.

Problema 3.5.15. *a) Sabemos que un rectángulo tiene área* 20 *m, y que uno de sus lados mide* 5 *m. ¿Cuanto mide el otro lado?*

b) Sabemos que otro rectángulo tiene un area de $\frac{3}{4}m^2$*, y que uno de sus lados mide* $\frac{3}{2}$*. ¿Cuanto mide el otro lado?*

c) Un último rectángulo tiene un area de $1m^2$*. Sabiendo que un lado mide* $\frac{4}{3}$ *de metro, ¿cuánto mide el otro lado?*

La parte a) está fundamentalmente pensada para que los alumnos se den cuanta de que basta dividir el área entre uno de los lados para obtener la medida del otro lado. Así en este caso la respuesta es $20 : 5 = 4$. El apartado b) está pensado para dejar que nuestros alumnos prueben por tanteo. De no llegar nuestros alumnos a la solución en un breve intervalo de tiempo, les proporcionaremos la respuesta, $\frac{1}{2}$ y les pediremos que la comprueben. El apartado c) está pensado para introducir el concepto de fracción inversa. De nuevo permitiremos a nuestros alumnos efectuar tanteos con el fin de tratar de llegar a la solución, proporcionando de nuevo la respuesta en el caso de que nuestros alumnos no sean capaces de hallarla por sí mismos, en este caso, la solución será $\frac{3}{4}$, y pediremos que la comprueben.

Ahora pediríamos a nuestros alumnos que observasen la solución del apartado c), ¿por qué número habría que multiplicar 1 para llegar a la solución? Es una pregunta tan simple que la solución es inmediata: $\frac{3}{4}$. Si preguntamos a nuestros alumnos si encuentran alguna relación con la fracción divisor, posiblemente respondan de inmediato que bsta intercambiar los papeles del numerador y el denominador para llegar de una a otra. Podemos introducir el concepto de fracción inversa de una dada. Usaremos la definición de que la fracción inversa es aquella que multiplicada por una dada resulta en la unidad. La técnica para hallar la inversa de una fracción $\frac{a}{b}$ dada consiste en permutar numerador y denominador, quedando $\frac{b}{a}$. Dicha técnica se justifica de forma inmediata desde la técnica de multiplicación de fracciones, simplificando.

Lo otro que cabe preguntarse es cual será la fracción por la que, en el aoartado b), haya que multiplicar a $\frac{3}{4}$ para obtener así el resultado de la división, que era $\frac{1}{2}$, de nuevo se observa que la fracción por la que hay que multiplicar es, de nuevo, la inversa de la fracción divisor. Así, la técnica de división general consistirá en: para efectuar la división $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, lo que haremos será cambiar la divisón por una multiplicación por la inversa del divisor $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. La tecnología asociada a esta técnica puede ser algo más dificil de visualizar, dado que no tenemos apoyos gráficos.No obstante podemos basarnos en las dos tecnologías anteriores para arrojar algo de luz al respecto de por qué dicha técnica funciona, podemos basarnos en las dos técnicas auxiliares que ya teníamos. Así, dividir un fracción por otra podría considerarse como dividir primero por el numerador, y luego divirdir por la fracción con denominador uno que nos queda. De todas formas, en estos cursos los alumnos le dan algo de sentido a las técnicas cuando comprueban que, efectivamente, funcionan. Recordar que, una vez hayamos hecho $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, es recomendable observar si se puede simplificar agún término, para facilitar las operaciones.

Para el prodducto y la división de fracciones, podemos considerar usar un applet similar al desarrollado por Jose Manuel Arranz, que puede consultarse en https://www.geogebra.org/m/70843, aunque tenemos el problema de que no admite fracciones impropias, y se basa en el significado de parte-todo.

3.5.4. Expresiones combinadas (Campo de problemas 9)

Por último, queremos que nuestros alumnos sean capaces de manejar expresiones combinadas, no tanto en el sentido de plantear y resolver la operación de forma algebraica, como el pero sí de ir recordando el orden de las operaciones, y darles sentido a las distintas formas de plantear las expresiones.

Problema 3.5.16. *Pedro ha adquirido una parcela para hacer otra huerta. Ha comprobado que ésta mide $\frac{43}{2}$ de mentro de largo y $\frac{23}{5}$ de ancho. Sabiendo que la que ya contaba con una huerta de $\frac{1207}{10}$ de metro cuadrado, ¿de cuanta superficie cultivable dispone ahora?*

Basta hacer $\frac{43}{2}\frac{23}{5} + \frac{1207}{10} = \frac{989}{10} + \frac{1207}{10} = \frac{2196}{10} = \frac{1098}{5}$. Lo único interesante al respecto es tener clara la prioridad de las operaciones, aunque ésto se puede deducir del contexto. Se puede hacer también en dos pasos, hallando primero un área y después sumando ambas áreas para hallar el total.

Problema 3.5.17. *El ancho de una piscina mide lo mismo que nueve varas de medio metro y cuatro de un tercio de metro. El largo mide lo mismo que 40 varas de un quinto de metro. ¿Cuánto mide la superficie de nuestra piscina?*

En este caso, lo que se tiene es que hay que efectuar primero la adición y después la multiplicación, por lo que la notación quedaría:

$$\left(\frac{9}{2}+\frac{4}{3}\right)\frac{40}{3}=\frac{35}{6}\frac{40}{5}=\frac{7}{3}\frac{20}{1}=\frac{140}{3}$$

Este problema y el anterior sirven para ilustrar cuándo se usan paréntesis, así como para fijar el convenio del producto. Podemos mencionar la idea de que lo natural es usar el producto para hallar cada uno de los sumandos, y después sumarlos. Así, aparece una primera idea de las expresiones combinadas a través de la medida.

Problema 3.5.18. *Un frutero ha vendido hoy manzanas y peras. De los 50 kilos de manzanas que ha sacado a la venta, ha vendido $\frac{5}{6}$ y, de los 40 kilos de peras, ha vendido $\frac{2}{5}$. ¿Cuántos kilos de fruta ha vendido en total?*

De nuevo, en calro que basta efectuar la suma $50\cdot\frac{5}{6}+40\cdot\frac{2}{5}=\frac{125}{3}+16=\frac{173}{3}$. Una vez se haya resuelto este problema, podríamos plantear a nuestros alumnos que plantearan una situación en la que fuera necesario usar un paréntesis para sumar, y aplicar después un operador.

Ejercicio 3.5.19. *Realiza las siguientes operaciones:*

a)$\frac{25}{27}\frac{9}{20}+\frac{11}{15}=$
b)$\left(\frac{10}{12}+\frac{14}{15}\frac{20}{7}\right)\frac{36}{5}=$
c)$\left(\frac{42}{9}\frac{81}{26}+\frac{63}{13}\frac{5}{3}\right)+\frac{104}{3}$

Se trata de ejercicios sencillos, que usaremos para explicar de forma ejemplificada el uso de los paréntesis. Como idea general, usaremos que los paréntesis se operan com una expresión independiente, y una vez hallado su valor se tratan como un número más. En resumen, el orden de prioriadad es 1^o: Paréntesis, 2^o:Productos, 3^o: Sumas. El objetivo de este trabajo es servir de repaso a las operaciones con paréntesis para tener un entorno en el que apoyar el álgebra, pero dado que se va a hacer un fuerte trabajo con éstos en los temas de álgebra, tampoco será preocupante que no haya un aprendizaje en profundidad de éstos, en especial teniendo en cuenta que los problemas de este tema se pueden resolver mediante otras estrategias, como el uso de tablas. No obstante

3.6. Recapitulación

Así, tenemos que trabajamos los siguientes campos para introducir cada nueva técnica:

Objeto Matemático	Significados de la fracción
Uso de la fracción	Medida Reparto Parte-todo Operador Razones

Fracciones equivalentes	Medida Reparto Razones Formal
Simplificación	Medida Razones Formal
Común denominador	Medida Trabajo formal
Comparación	Medida Reparto Razón Formal
Suma y resta	Medida Reparto Operadores Formal
Producto	Medida Operador Formal
División	Medida Razón Formal
Expresiones combinadas	Medida Operador Formal

3.7. Sobre los ejercicicios

Aunque aquí no se incluyan ejercicios de trabajo específico del la técnica tan apaenas, notar que ésto serán muy similares a los que aparecerían en un libro de texto. Notar que es interesante que en la mayoría aparezca algún número entero, con el fin de que nuestros alumnos se acostumbren a trabajarlos de forma natural. Los ejercicios no deberían ser excesivos, dado que lo que busquemos es que haya algo de práctica de la técnica, no es necesario que los alumnos repitan lo mismo 20 veces, que , además, puede llegar a ser muy desmotivante.

Para aquellos alumnos que requieran de una mayor cantidad de práctica, podríamos diseñar un programa informático que genere ejercicios de trabajo de la técnica, así como indicaciones para su resolución. La idea sería hacer algo similar a lo que hace el usuario Paulo, qu puede consultarse en https://www.geogebra.org/m/twkXrWhY, aunque tal vez convendría hacerlo en C++, con el fin de tener un ejecutable más funcional.

Capítulo 4

Implementación en el aula

4.1. Metodología

Como ye se ha dejado entrever, seguiremos un modelo metodológico de caracter expositivo, aunque buscando una participación y un cierto descubrimiento por parte de los alumnos. Así, ante cada problema primero plantearemos que es lo que queremos saber, con el fin de que los alumnos tengan claro el objetivo del problema. Después, dejaremos un tiempo, variable según cada problema, para que los alumnos piensen en posibles resoluciones y estrategias.

Para los problemas de razón de ser, el tiempo en clase será de unos 15 minutos, asignando 10 minutos a la refelxión y 5 a la discusión de los distintos apartados. Otra opción sería dejar la parte de reflexión como tarea para casa, mandándoles el problema, con la indicación de que queremos que lo hayan pensado un poco, no que lo traigan hecho.

Para los problemas que usamos para introducir el significado de la fracción, el tiempo que usaremos en clase será de unos 10 minutos, con 5 minutos reservados a la reflexión y 5 minutos reservados a la discusión para el problema de medida. Dado que en los siguientes ya cabría esperar que los alumnos intenten usar fracciones, dejaríamos menos tiempo de reflexión, con un total de 2 minutos reservados a la reflexión y 2 minutos reservados a la discusión en aquellos significados que ya se conocen de primaria (parte-todo o reparto) o son facilmente tratables a partir de otros (operador a partir de reparto). No obstante, nuestro objetivo con este trabajo es lograr que los alumnos entiendan los significados de la fracción, con el fin de que no ocasionen problemas en los futuros problemas, por lo que si es necesario, dedicaremos máss tiempo a la discusión.

Por último, para el resto de problemas dedicaremos un total de 5 minutos a la reflexión y dicusión, dado que no queremos que los alumnos, al pensar dde forma equivocada, creen concepciones erróneas que después les dificulten adquirir de la concepción correcta. De nuevo, dedicaremos a la discusión un poco más de tiempo del previto en el caso de que creamos que pueden surgir dudas.

Una vez transcurrido ese plazo, haremos una puesta en común, quedándonos con las ideas correctas o más interesantes, apuntándolas en la pizarra para llevar después a cabo la institucionalización sobre ellas. Justificaremos por qué las ideas erróneas son erróneas, o ddejaremos que sean otros compaeros los que den una explicación al respecto. Con este mapa o lista de ideas que hayamos confeccionado, procederemos a institucionalizar los objetos que estemos explicando y después pasaremos al siguiente campo de problemas. Durante la institucionalización trataremos de hacer referencia a todas las técnicas anteriormente trabajadas que se apliquen para deducir la técnica, aunque más que una estructura lógica, buscaremos resaltar la idea de la cohesión entre los distintos objetos y lo que ya conocen. También trataremos de llevar a cabo las rupturas epistemológicas que haya que llevar a cabo, insistiendo enb la contraposición entre el concepto anterior y el nuevo objeto a introducir. No obstante, hay muy pocas rupturas en esta unidad. Fundamentalmente, la existencia de fracciones mayores a la unidad, el hecho de que el resultado de un producto ya no va a ser siempre mayor que cualquiera de los dos factores y que el cociente de una división puede ahora ser mayor que el dividendo.

En cuanto a los ejercicios de trabajo de la técnica, aunque si que usaremos alguno, trataremos de que sean pocos y conduzcan a algún resultado de aprendizaje. En general habría que evitar excesos de ejercicicios similares que no conducen a nuevos resultados de aprendizaje y resultan tediosos. En su lugar, podríamos buscar problemas que, aun trabajando la misma téccnica, requieran de adaptarla a un nuevo significado de la fracción y construir una tecnología desde este nuevo punto de vista. En el caso de que dichas sesiones se desarrollen con fluidez, podríamos permitir a los alumnos que realizasen los ejercicios/problemas que se hayan mandado ese día, dándonos además ésto la opción de que los alumnos consulten dudas, lo que nos permitirá hacernos una idea de cuánto han aprendido los alumnos, y observar qué capacidades tienen de trabajar de forma autónoma.

4.2. Secuencia didáctica

A la hora de establecer una secuencia didáctica se ha valorado que las fracciones ocuparán un espacio de dos semanas, que es el que se ha valorado como el apropiado para ahondar en este tema, teniendo en cuenta que se trata de un tema ampliamente trabajado a lo largo de primaria. Además, tampoco es necesario llevar a cabo un trabajo más extenso en este bloque, dado que en posteriores temas se va a seguir trabajando con este objeto. La secuenciación temporal seguiría la siguiente estructura:

Sesión	**Contenido**
1	Razón de ser. Significados de la fracción.
2	Signiificados de la fracción. Fracciones equivalentes. Simplificación. Reduccción a común denominador.
3	Comparación de fracciones. Comparación numérica de fracciones. Dudas, trabajo de la técnica y problemas. Calificaciones del examen del tema previo.
4	Suma y resta de fracciones.
5	Producto de fracciones. División de fracciones.
6	Expresiones combinadas y prioridad de operaciones. Dudas, trabajo de la técnica y problemas.
7	Dudas y práctica.
8	Examen.

En las sesiones más centradas en explicar e institucionalizar, la metodología a seguir será proponer un problema que requiera el uso del objeto a introducir en cada sesión. Preguntaremos a los alumnos, comprobando también qué conocimientos han adquirido de otros años. En el caso de que haya alumnos muy aventajados, trataremos de dar proridad al resto en las intervenciones. Apuntaremos aquellas ideas que sean de mayor valor en la pizarra. Este proceso ddebería duroar dos o tres minutos. Tras ello explicaremos el concepto que queramos tratar de forma rigurosa.

La sesión 1 se distribuirá en unos 15 minutos para trabajar la razón de ser y unos 25 para ir trabajando los distintos usos de la fracción que usaremos este curso. Iremos también preguntando a los alumnos qué recuerdan de otros años, para hacernos una idea del nivel básico del cual parten nuestros alumnos. A continuación, comenzaremos con los problemas que usaremos para institucionalizar los significados de la fracción, con el fin de que no se conviertan en un obstáculo más adelante.

La sesión 2 comenzará revisando de nuevo los significados de la fracción y trabajando aquellos que no hayamos impartido en la sesión anterior, dado que queremos que no suponga un problema al abordar el resto de campos de problemas. Después comenzaremos a trabajar y a institucionalizar los conceptos aparecen en la tabla, en principio, las fracciones equivalentes, la simplificación y la reducción a común denominador pueden no parecer excesivamente útiles por sí mismas, por lo que también resultará importante mencionar a nuestros alumnos que se trata de técnicas que se usarán para poder llevar a cabo técnicas posteriores en el tema.

La sesión 3 comenzará con la impartición de las técnicas de comparación de fracciones, en unos 10 minutos, explicando tanto la técnica general como mediante un trabajo de un carácter más numérico.Una vez explicado este conceto, dado que habremos trabajado los pilares fundamentales de el tema, convendría hacer un repaso de todo, al que dedicaremos el resto de la hora, aprovechando este tiempo para comunicar los resultados del examen anterior. Para llevar a cabo este trabajo, proporcionaremos una hoja de ejercicios/problemas, que los alumnos trabajarán en grupos de dos. Iremos llamando a los alumnos a nuestra mesa para comunicarles los resultados, así como nuestra valoración sobre qué debe ser repasado o donde deberían mejorar. Una vez hallamos acabado con los resultados de los exámenes, monitorizaremos el trabajo de los alumnos, y resolveremos las dudas que vayan surgiendo, interrumpiendo la actividad si es necesario explicar algo a toda la clase, en el caso de que percibamos que no ha quedado claro durante las anteriores sesiones.

Las sesiones 4 y 5 llevarán el desarrollo que se ha mencionado antes en las sesiones más centradas en explicar contenido. Es muy posible que en la sesión de ssuma y resta de fracciones nos ssobre tiempo, por lo que cabría considerar adelantar el trabajo de productos a esta sesión, dejando en la sesión 5 un mayor tiempo para trabajar la técnica de simplificar en pasos intermedios de la operación.

La sesión 6 sigue un desarrollo muy similar a la sesión 3, seguiremos insistiendo un poco en la posibilidad de simplificar en pasos intermedios. El objetivo de esta sesión es también ir detectando posibles errores de concepción que pudieran haber surgido a lo largo de la enseñanza.

La sesión 7 está pensada como un margen, dado que si realentiza la enseñanza será necesario desplazar el resto de sesiones. También aunque esto no halla sucedido, de haber detectado muchas dificultades, podríamos incidir en los concencptos que no parezcan correctamente asimilados. Por lo demás, de nuevo tenemos el mismo tipo de trabajo que en la sesión anterior, aunque en esta sesión intentaremos centrarnos más en despejar dudas que en que los alumnos trabajen de la forma más eficiente posible.

4.3. Evaluación

4.3.1. Examen

Indicaciones:

- Para obtener la máxima puntuación, será necesario simplificar los resultados a una fracción irreducible.
- Se valorará realizar las operaciones de la forma más sencilla posible.
- Si el enunciado de alguna pregunta te parece confuso o ambiguo, pregunta al profesor.
- NO se permite el uso de calculadora.

1.-Efectuar las siguientes operaciones:(2 puntos)

a) $\frac{6}{5}+\frac{3}{10}-\frac{14}{8}=$

b) $\frac{26}{10}\cdot\frac{45}{65}=$

c) $\frac{9}{4}\cdot\frac{15}{28}\cdot\frac{16}{3}=$

d) $\frac{49}{27}:\frac{90}{77}=$

2.-Para embaldosar una piscina, hemos comprado baldosas. Hemos observado que, si ponemos 15 balsdosas seguidas a lo largo, su longitud suma un metro exacto. Si hacemos lo mismo a lo ancho, necesitamos 40 baldosas para tener 3 metros exactos.¿Cuántas baldosas necesitaremos para tener una superficie de un metro cuadrado? (Puedes dejar el resultado como una fracción, o hallar su expresión decimal). (2 puntos)

3.-Silvia y Marcos fueron de compras el otro día, aprovechando las rebajas. Silvia compró una camiseta cuyo precio original era de 25€, pero que estaba rebajada a la mitad. Se compro también unas zapatillas que originalmente costaban 50€, pero que habían sido rebajadas en un quinto de su precio original y un cinturón que costaba 10€, que no estaba rebajado. Por su parte, Marcos compro unos vaqueros que costaban 50€ en principio, rebajados a mitad de precio y dos camisetas, que costaban 24€ y 18€ originalmente, pero que habían sido rebajados en un tercio de su precio original. ¿Quién de los dos gastó más? (2 puntos)

4.-Alejandra ha observado que las 15 canciones del último dsico de su grupo favorito representan un sexto del total de canciones de dicho grupo que tiene en el móvil. Sabiendo que las canciones de su grupo favorito son $\frac{3}{10}$ del total de canciones que tiene en su móvil, ¿sabrías decir cuantas canciones tiene en su movil?(2 puntos)

5.-Este fin de semana, Carlos ha ganado dos torneos de futbolín con dos equipos distintos. En el primero, se repartían un total de 300€, de los cuales $\frac{7}{12}$ eran para el equipo ganador, a repartir entre los cinco integrantes. La cuota de inscripción en dicho torneo era de 45€ por equipo. En el segundo, del total de 560€, $\frac{5}{8}$ eran para el equipo gandor, esta vez a repartir entre 7 jugadores y con una cuota de inscripción de 28€ por equipo. ¿Cuanto dinero ha ganado en total Carlos este fin de semana con el futbolín? (2 puntos)

4.3.2. Qué queremos evaluar

Si atendemos primero a los estándares evaluables que fija el currículo estatal LOMCE, podemos considerar que, en el caso de este examen deberíamos valorar:

Del bloque 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas:

1.1. Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuada.

2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).

2.2. Valora la información de un enunciado y la relaciona con el número de soluciones del problema.

2.3. Realiza estimaciones y elabora conjeturas sobre los resultados de los problemas a resolver, valorando su utilidad y eficacia.

6.4. Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.

Del bloque 2: Números y álgebra:

1.1. Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa.

1.2. Calcula el valor de expresiones numéricas de distintos tipos de números mediante las operaciones elementales y las potencias de exponente natural aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones.

1.3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.

2.1. Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales.

2.3. Identifica y calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales mediante el algoritmo adecuado y lo aplica problemas contextualizados.

2.6. Realiza operaciones de redondeo y truncamiento de números decimales conociendo el grado de aproximación y lo aplica a casos concretos.

2.7. Realiza operaciones de conversión entre números decimales y fraccionarios, halla fracciones equivalentes y simplifica fracciones, para aplicarlo en la resolución de problemas.

3.1. Realiza operaciones combinadas entre números enteros, decimales y fraccionarios, con eficacia, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o medios tecnológicos utilizando la notación más adecuada y respetando la jerarquía de las operaciones.

4.1. Desarrolla estrategias de cálculo mental para realizar cálculos exactos o aproximados valorando la precisión exigida en la operación o en el problema.

4.2. Realiza cálculos con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales decidiendo la forma más adecuada (mental, escrita o con calculadora), coherente y precisa.

El bloque uno son criterios transversales, por lo que su implimentación en la evaluación se hará de forma algo más cualitativa. La forma en la que se implementarán algunos de estos criterios será en forma de atenuantes cuando se den errores. Así, un alumno que comenta errores en alguno de los ejercicios del examen restara menos calificación cuando valoremos que se supera estos criterios. Así, el punto 1.1 será verificado cuando el alumno explicite los pasos que siga en su proceso de resolución y el 2.3 será atenuante cuando, ante una solución que numéricamente se aleja mucho de lo que cabría esperar en el problema, el alumno al menos es capaz de indicar que la solución obtenida no termina de tener sentido.

En cuanto a los puntos 2.1, 2.2 y 6.4; hacen referencia a evaluar el proceso de resolución de problemas que el alumno lleva a cabo, y se evalúan en todas las preguntas menos en la primera.

En lo referente a los estándares evaluables que ya aparecen en el bloque 2, los que evaluaremos de forma específica son el 1.1, el 1.2, el 1.3, el 3.1 y el 4.2. Estos estándares se corresponden con los contenidos del tema, y se evalúan en cada uno de los ejercicios que aparecen en el examen. Los estándares 2.1 y 2.3 hacen referencia al uso de estrategias óptimas de cálculo, y a las distintas situaciones en las que la equivalencia de fracciones nos permite simplificar un problema. Los puntos 2.6 y 2.7 se trabajan, aunque no de forma específica, sino en el sentido de manejar el sentido numérico al trabajar con fracciones.

4.3.3. Análisis de los problemas

Ejerciccio 1

El objetivo de este ejercicio será evaluar el dominio que los alumnos han adquirido a la hora de operar con la fracciones de manera formal, sin que el contexto del problema les ayude o le suponga una interferencia a la hora de realizar el trabajo. Así, comprobamos el trabajo de las técnicas que aparecen en el campo de problemas 9, que podría considerarse como el que integra a todos los otros, aunque en cada caso el trabajo se encuadra dentro de un número limitado de estos campos. Notar también que, dado que las técnicas que aparecen en los campos de problemas del 2 al 5 tienen un fuerte carácter vehicular, se evaluarán de forma implícita a lo largo de todo el ejercicio.

Las respuestas más correcta en el primer ejercicio serían las que aparecen a continuación:

a) $\frac{6}{5}+\frac{3}{10}-\frac{14}{8}=\frac{6}{5}+\frac{3}{10}-\frac{7}{4}=\frac{24}{20}+\frac{6}{20}-\frac{28}{20}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

.

Como respuestas alternativas válidas, podríamos esperar que no lleven a cabo la primera simplificación, llevando el mismo proceso con denominador 40. Es también posible que al redicir a común denominador observen la relación entre 5 y 10, pero al ignorar el proceso por m.c.m., usen denominador 80. El peor caso sería efectuar el proceso con denominador producto, o lo que es lo mismo, con denominador 400.

Entre los fallos que podrían darse entre los alumnos que conocen la técnica, se hallan los errores operacionales, así como la no simplificación del resultado obtenido.

El resto de posibles fallos responderan al desconocimiento de la técnica, o a que algún alumno crea posible atacar el problema convirtindo las fracciones a decimales, contra lo cual ya se habrá prevenido en clase.

El trabajo de este ejercicio (y lo que queremos evaluar) se encuadra dentro del campos de problemas 6.

b) $\frac{26}{10} \cdot \frac{45}{65} = \frac{13}{5} \cdot \frac{9}{13} = \frac{9}{5}$

Entre las resoluciones alternativas, la más común será que los alumnos efectúen el producto de forma directa, obteniendo un número elevado y dificil de simplificar. A mitad de camino entre una y la otra estará ver alguna de las cancelaciones que se pueden hacer pero no todas.

En este ejercicio es en el único en el que no aparece una expresión combinada (técnica del campo de problemas 9), en su lugar, simplemente evaluaremos el trabajo en el campo de problemas 7.

c) $\frac{9}{4} \cdot \frac{15}{28} \cdot \frac{16}{3} = \frac{3}{1} \cdot \frac{15}{7} \cdot \frac{1}{1} = \frac{45}{7}$

Muy similar al anterior, aunque presumiblemente requerirá de un mayor número de pasos, y es mucho más difícil de atacar de forma directa. En este caso si que es un trabajo muy similar al de la técnica del campo de problemas 9, en el cual habría que incluir también los campos de problemas 6 y 7.

d) $\frac{27}{49} : \frac{90}{77} = \frac{3}{7} : \frac{10}{11} = \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{10} = \frac{33}{70}$

En cuanto a las resoluciones alternativas, de nuevo tenemos que es posible transformar la división en el producto por la fracción inversa y operar sin llevar a cabo ningún tipo de simplificación, aunque de nuevo se tiene que es muy posible que se introduzcan errores a causa de la aparición de números elevados. La otra opción que es posible sería convertir primero la división en un producto, y luego simplificar éste. Se trata de un trabajo que nos permitirá evaluar la técnica aplicada en el campo de problemas 8.

En cuanto a la tipología de errores esperados, es muy posible que algún alumno no vea la división y efectúe un producto, o que al simplificar simplifique como si de un producto se tratara. El resto de errores deberían responder a un carácter operacional.

En este ejercicio, consideraremos tarea general el algoritmo de la operación en sí y la simplificación, tareas auxiliares específicas el uso de fracciones equivalentes y el cálculo de mínimos comunes múltiplos y máximos ccomunes divisores y tareas auxiliares específicas los cálculos de tipo aritmético.

Ejerciccio 2

En general, la resolución de este ejercicio y de los siguientes sigue un mismo esquema en cuanto a las tareas a realizar. Consideraremos que los campos ddel 1 al 5 se evalúan de forma transversal, dado que son técnicas que se deben aplicar casi en cualquier tipo de trabajo con fracciones. Dado que el primer ejercicio ya evalúa las técnicas que surgen de los campos de problemas desde el 2 hasta el 5, uno de los que mayor peso tendrá en la evaluación será el 1.

El ejercicio 2 busca evaluar la comprensión de un problema de medida (dentro del campo de problemas 1), así como de las operaciones involucraddas en éste. Para realizarlo, lo primero que hay que hacer es interpretar el enunciado, observando que lo que nos dicen es que tenemos baldosas de $\frac{1}{15}$ m de largo y $\frac{40}{3}$ m de ancho, por lo que el área de cada baldosa será de $\frac{1}{15} \cdot \frac{3}{40} = \frac{3}{600} = \frac{1}{200}$ de metro por baldosa, por lo que con 200 baldosas tendremos un metro cuadrado (aunque para ello es necesario cierto uso del significado de razón de una fracción).La única dificultad de este ejercicio es saber interpretar el enunciado, en el sentido de que las medidas no vienen dadas de forma directa, y observar que para hallar el número de baldosas hay que dividir el metro cuadrado entre el área de cada baldosa. La solución que se obtiene puede ser descolocadora para un alumno que no haya caído nunca en la relación entre la proporcionalidad lineal y la cuadrática (Un cuadrado está compuesto por 100 cuadrados de lado $\frac{1}{10}$ del cuadrado original).

En general los errores que cabría esperar son referentes a no comprender el enunciado, a no ser capaz de plantear una solución o a no haber alcanzado resultados aceptables en cuanto al dominio de la medida. Es posible que se dé también algun error operacional.

Principalmente, podemos evaluar los capos de problemas 7 y 8 con este ejercicio. Además, al poder separar el proceso en dos pasos, podemos separar la evaluación de ambas partes. de ambas partes.

En cuanto a las tareas, queda claro que las tareas principales son extraer la información del enunciado, plantear las operaciones para llegar a la solución y expresar la solución de forma correcta. En cuanto a las tareas secundarias específicas, se conssiderarían como tales la realización de las distintas operaciones con fracciones. Son tareas auxiliares generales las operaciones aritméticas con números enteros que de éstas se derivan.

Ejerciccio 3

El ejercicio 3 busca evaluar el correcto uso de la fracción como un operador, aunque se trata de un ejercicio bastante sencillo, y casi si dificultad. Más que difícil, es largo de leer, e implica una cantidad considerable de operaciones. Para realizarlo, basta calcular cuanto han gastado Silvia ($\frac{1}{2} \cdot 25 + \frac{4}{5} \cdot 50 + 10 = \frac{25+80+20}{2} = \frac{125}{2}$€) y Marcos ($50\frac{1}{2} + (24+18)\frac{2}{3} = 25 + 28 = 53$). Después, bastará con comparar ambas fracciones y llegar a la conclusión de que la que más ha gastado es Silvia.Como puede apreciarse, en este problema no hay que trabajar con fracciones grandes, y es incluso posible trabajar con números decimales sencillos y no con fracciones. Los errores que puedan surgir se deberán más a una mala interpretación del enunciado o a errores de aritmética que a dificultades reales.

Las resoluciones que cabría esperar e alumnos de un curso de 1º de ESO se encuadran más en un proceso separado en más pasos, en muchas ocasiones en forma de tabla y más extensas que la que se lleva a cabo simplemente con las dos operaciones. Hay que recordar que al no conocer aún el cálculo algebraico, no podemos preveer que definan como valores el dinero que ha gastado cada uno, calculando primero y operando después.

Los principales campos de problemas que evaluaremos en este problema serán el 1, en el sentido de que será necesario trabajar la fracción como un operador, también se hace uso de las técnicas de los campos de problemas 5, 6 y 7. En algunas resokuciones es muy posible que aparezcan técnicas del campo de problemas 9, aunque presumiblemente no en todas.

En cuanto a las tareas, consideraremos que la tarea principal serían hallar lo que les ha costado a cada uno de dinero, y comparar ambas cantidades para llegar a una conclusión válida y expresarla. Serían tareas auxiliares específicas las propias operaciones con fracciones, y tareas auxiliares generales las propias operaciones aritméticas que surgen de las operaciones con fracciones.

Ejercicio 4

En el ejercicio 4 se busca que los alumnos demuestren su capacidad de resolver un problema, también mediante el uso de operadores, en este caso encadenados. Puede considerarse que los alumnos también pueden resolver el problema aludiendo al significado de la parte-todo, aunque en este caso consiste en hallar un todo a partir de una parte conocida. Para llevar a cabo la resolución, bastará con aplicar los inversos de los operadores y hacer $15 \cdot \frac{6}{1} \cdot \frac{10}{3} = 300$. Cabe esperar que muchos alumnos decidan acometer este problema en dos pasos, hallando primero el número de canciones del grupo y a partir de ahí hallar el total. Cabría esperar que, para hacer más simple este proceso, muchos alumnos organicen la información en tablas. En cuanto a los posibles errores, los errores que cabría esperar serán o bién de comprensión del enunciado, o bien de no ver que basta inveertir el operador o incluso errores de tipo operacional.

Los campos de problemas evaluables serán, principalmente, el 7 y el 8, en función de cómo acometan los alumnos el problema. De los campos que dan lugar a técnicas más vehiculares, en este ejercicio podemos evaluar fundamentalmente las de los campos 1 y 3.

Las tareas principales de este ejercicio serían plantear las operaciones necessarias para llegar a la solución, y una vez obtenida ésta, expresarla mediante un lenguaje claro y aceptable. Serían tareas auxiliares específicas las operaciones con fracciones que aparezcan, y de nuevo tareas auxiliares generales las operaciones con números enteros que sean necesarias para concluir éstas.

Ejercicio 5

En el 5, queremos evaluar tanto el trabajo con la fracción entendida como reparto, así como la capacidad de los alumnos para introducir una variable que no aparece en el enunciado (el hecho de que la cuaota la pagan entre todos los jugadores del equipo de forma equitativa). Para llevar a cabo su resolución, bastará encadenar los operadores de forma correcta, haciendo $\frac{7}{12} \cdot \frac{1}{5} \cdot 300 - 45 \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot 560 - \frac{1}{7} \cdot 28 = 5 \cdot 7 - 9 + 10 \cdot 5 - 4 = 72$. De nuevo se puede llevar a cabo este problema de forma alternativa mediante pasos y uso de tablas, manteniendo en todo momento el contexto de los problemas, y de nuevo la única dificultad que presenta es interpretar correctamente el enunciado y efectuar las operaciones con precisión.

Además de los campos de problemas cuyas técnicas hemos considerado como vehiculares, también podemos evaluar en este último ejercicio el trabajo de las técnicas que surgen de los campos de problemas 6, 7 y, posiblemente 9, aunque la aparición de las técnicas asociadas al campo de problemas 9 depende más de la resolución que halyan seguido los alumnos para abordar esste ejercicio.

Las tareas principales de este ejercicio son de nuevo el planteamiento de un método que lleve a la solución, y la expresión correcta de ésta. De nuevo tendremos que las tereas auxiliares generales son las técnicas de operación con fracciones y, como tareas auxiliares específicas, podemos identificar las operaciones aritméticas con enteros que hay que realizar.

4.3.4. Criterios de calificación

Para el ejercicio 1, los criterios de evaluación serán, teniendo en cuenta que cada apartado vale 0'5 puntos:

Puntuación	Criterio
0.3	Aplicar el algoritmo de operación de forma correcta.
0.1	Llegar al resultado correcto
0.1	Simplificar el resultado a una fracción irreducible
0.1 adicional	Realizar las operaciones de forma sencilla.

En el último criterio, nos referimos a los puntos como adicionales en el sentido de que se trata de puntuación que puede no asignarse a un ejercicio que esté correctamente resuelto, pero se haya efectuado mediante simple fuerza bruta. Nos referimos por forma sencilla a usar el mínimo común denominador para las operaciones de suma, o a realizaar simplificaciones intermedias para efectuar productos y divisiones.

Para el ejercicio 2, sobre dos puntos tenemos:

Puntuación	Criterio
0.8	Hallar el área de cada baldosa.
0.8	Efectuar la división para llegar al número final de baldosas.
0.4	Expresar ambos resultados de forma correcta.
0.2 adicional	Efectuar los cálculos de forma sencilla.

De la primera parte, penalizaremos hasta 0.5 puntos por efectuar mal el producto, aunque sólo penalizaríamos 0.25 en el caso de que el error aparezca como resultado de realizar mal el producto de enteros que aparece como consecuencia de aplicar la técnica del producto de medidas para hallar un área. El segundo apartado simplemente consistiría en dividir el area entre el area de cada baldosa, y aplicaríamos el mismo criterio para los errrores operacionales. En el caso de que la parte anterior no estuviera bien hallada, seguiremos puntuando de forma correcta en este criterio, en el caso de que exista consistencia con la solución incorrecta obtenida en el apartado anterior.

En la última parte, expresar el resultado de forma correcta quiere decir que ha de explicarse la solución numérica reintegrada en el contexto, y ésta debe expresarse con una fracción irreducible o un número entero.

Nos referimos a los puntos como adicionales, en el sentido de que un ejercicio puede estar correctamente resuelto y no calificar en éste apartado. En este caso, el único criterio sobre el que podríamos considerar añadir esta puntuación adicional sería el simplificar en el paso intermedio del producto. No obstante, en el caso de que algún alumno cometa errores, siga un proceso aceptable y consistente con los errores y en algún paso intermedio se encuentre con la posibilidad de llevar a cabo estas simplificaciones, también optaría a estos puntos adicionales.

Para el ejercicio 3, sobre dos puntos tenemos:

Puntuación	Criterio
1	Hallar cuánto ha gastado cada uno.
1	Expresar la solución al problema

Del primer criterio, penalizaremos hasta 0.6 puntos por efectuar mal las operaciones con fracciones que aparecen, y sólo penalizaríamos 0.3 en el caso de que el error aparezca en alguna operaión entre números enteros.Exigiríamos aquí llevar a cabo una comparación entre lo que cada uno gasta, y de ahí explicar quién de los dos ha gastado más, devolviendo así la solución al contexto. En caso de que haya errores en el apartado anterior (derivados de operaciones o de un planteamiento incorrecto pero con cierta lógica), seguiríamos calificando esta parte como bien resuelta, siempre y cuando haya consistencia.

En cuanto al ejercicio 4, tenemos lo siguiente:

Puntuación	Criterio
1.2	Hallar la solución.
0.8	Expresar la solución de forma correcta.
0.2 adicional	Efectuar los cálculos de forma sencilla.

En el primer criterio, consideraríamo quitar hasta 0.8 puntos por errores operacionales, siempre que éstos respondan a errores en la técnica de cálculo de fracciones. Como siempre, en el caso en el que los errores sean al efectuar las operaciones con enteros que aparecen, sólo consideraríamos restar 0.4 puntos. Valoraremos cualquier procedimiento que permita llegar a la solución, (tablas, producto/división de fracciones sucesivas, hacerlo en dos pasos, etc.). Nos referimos a explicar la solución de forma correcta cuando es necesario reintegrar ésta en el contexto y explicarla de forma escrita.

De nuevo los puntos adicionales están pensados para premiar a aquellos alumnos que realizan simplificacciones en los cpasos intermedios, o adoptan estrategias efectivas de resolución. Se trata tambien de un margen que nos reservamos para evittarnos tener que puntuar a la baja respuestas que no nos esperábamos en los criterios y que han fallado por errores de operaciones y no de razonamiento.

Por último, para evauar el ejercicio 5:

Puntuación	Criterio
0.5	Planteamiento correcto de las operaciones a realizar.
1	Solución hallada de forma correcta.
0.5	Expresión correcta de la solución obtenida.
0.2 adicional	Efectuar los cálculos de forma sencilla.

En el primer criterio consideraríamos que se califica de forma correcta cuando, al menos se ha planteado, bien en forma de operación, en forma de tabla o mediante algún otro procedimiento, aunque para optar a este criterio, el alumno debería tener un planteamiento exitoso que le permitiese hallar o bien los ingresos y loss gostos, o bien los beneficios de cada torneo. El único error en el que podríamos pensar calificar parcialmente sería en el caso de que un alumno no advirtiera que, la cuota de inscripción debe dividirse también entre los mimbros del grupo, lo cual penalizaríamos con un 0.25.

En el segundo criterio se incluye la realización de las operaciones, como en otros casos, penalizaríamos hasta todo el punto por errores en las técnicas de operación con fracciones y hasta medio punto por errores de operaciones con números enteros.

De nuevo tenemos una situación en la que los puntos adicionales se distribuirán a aquellos alumnos que lleven a cabo aquellas simplificaciones en los productos que aparezcan, o que al sumar fracciones lo hagan usando el míno común denominador y no el producto.

4.3.5. Comunicación y gestión de resultados

Una vez hayamos llevado a cabo el proceso de corrección, cabrá plantearse cómo vamos a llevar al aula los resultados, teniendo en cuenta que los resultados podrían no ser del agrado de todos los alumnos, y pueden suponer un cierto trauma para alumnos que hayan obtenido una calificación más baja.

La comunicación de dichos resultados se llevará a cabo durante alguna sesión en la que valoremos que va a llevarse a cabo un trabajo más autónomo por parte de los alumnos. Así que elegiremos alguna sesión en la cual se lleve a cabo un cierto trabajo de alguna técnica. A lo largo de esa hora iremos llamando a la mesa a los alumnos, para comunicarles las notas y señalarles los fallos más graves que hayan podido cometer.

Es importante que nuestros alumnos sean conscientes de que ni de lejos es una nota definitiva, y de que deben perseverar en su aprendizaje si desean mejorar una nota mala o mantener una nota buena.

Bibliografía

Bujanda, M.P. y Mansilla, S. (1996) *Marемáticas 1º ESO*, Editorial SM, Seseña (Toledo)

Colera, J., Gaztelu, I. y García, J.E. (2000) *Maremáticas 1º ESO*, Grupo Anaya, Madrid

Gairín, J.M. y Escolano, R. (2007) *El currículum de Matemáticas en Educación Primaria*, Apuntes curso 2007/08 Universidad de Zaragoza.

Gairín, J.M. y Muñoz, J.M. (2009) *Fundamentos de análisis matemático*, Colección Textos Docentes, Prensas Universitarias de Zaragoza

Textos legales

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín oficial del estado*, nº 52, 2014, 1 de marzo.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín oficial del estado, nº 3, 2015, 3 de enero.

Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamentode Educación, Cultura y Deporte, por la que seaprueba el currículo de la Educación secundariaobligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.*Boletín oficial de Aragón*, nº 65, 2007, 1 de junio.

Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón*, nº 119, 2014, 20 de junio.

Anexos

Anexo A

Legislación educativa

A.1. Primaria

Los puntos de las leyes, tanto estatales como autonómicas que nos dan una idea del trabajo que se lleva a cabo con las fracciones en primaria son, comenzando por la legislación estatal, de acuerdo con el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín oficial del estado, nº 52*, 2014, 1 de marzo:
En cuanto a contenidos:

- Números enteros, decimales y fracciones:
- El Sistema de Numeración Decimal: valor posicional de las cifras.
- El número decimal: décimas, centésimas y milésimas.
- Concepto de fracción como relación entre las partes y el todo.
- Fracciones propias e impropias. Número mixto. Representación gráfica.
- Fracciones equivalentes, reducción de dos o más fracciones a común denominador.

- Los números decimales: valor de posición.
- Redondeo de números decimales a las décima, centésima o milésima más cercana. Relación entre fracción y número decimal, aplicación a la ordenación de fracciones.
- Divisibilidad: múltiplos, divisores, números primos y números compuestos. Criterios de divisibilidad.
- Operaciones con fracciones. Operaciones con números decimales. Porcentajes y proporcionalidad.

Y en cuanto a estándares evaluables:

1.2. Lee, escribe y ordena en textos numéricos y de la vida cotidiana, números (naturales, fracciones y decimales hasta las milésimas), utilizando razonamientos apropiados e interpretando el valor de posición de cada una de sus cifras.

2.2. Interpreta en textos numéricos y de la vida cotidiana, números (naturales, fracciones y decimales hasta las milésimas), utilizando razonamientos apropiados e interpretando el valor de posición de cada una de sus cifras.

2.4. Ordena números enteros, decimales y fracciones básicas por comparación, representación en la recta numérica y transformación de unos en otros.

3.1. Reduce dos o más fracciones a común denominador y calcula fracciones equivalentes.

3.3. Ordena fracciones aplicando la relación entre fracción y número decimal.

5.1. Opera con los números conociendo la jerarquía de las operaciones.

5.2. Utiliza diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos, identificándolos y utilizándolos como operadores en la interpretación y la resolución de problemas.

6.5. Aplica las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas.

6.6. Realiza sumas y restas de fracciones con el mismo denominador. Calcula el producto de una fracción por un número.

6.7. Realiza operaciones con números decimales.

6.8. Aplica la jerarquía de las operaciones y los usos del paréntesis.

Si acudimos ahora a la normativa autonómica, de acuerdo con lo dsipuesto por la la parte referente a matemáticas del Anexo II de la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón, nº 119*, 2014, 20 de junio, tenemos que:

En cuanto a contenidos:

5º curso de primaria:

- Ordenación de fracciones en las que el numerador es mayor que el denominador
- Sumas y restas de fracciones con el mismo denominador. Producto de una fracción por un número.
- Producto de una fracción por un número.

6º curso de primaria:

- Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.
- Concepto de fracción como relación entre las partes y el todo.
- Fracciones propias e impropias. Número mixto. Representación gráfica.
- Fracciones equivalentes, reducción de dos o más fracciones a común denominador.
- Relación entre fracción y número decimal, aplicación a la ordenación de fracciones.
- Operaciones con fracciones.
- Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

Y en cuanto a estándares y criterios de evaluación:

5º curso de primaria:
Crit.MAT.2.3. Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas del entorno inmediato.
Est.MAT.2.3.3. Ordena fracciones en las que el numerador es mayor que el denominador aplicando la relación entre fracción y número decimal.
Crit.MAT.2.5. Utilizar los números naturales, decimales y fraccionarios para interpretar e intercambiar información en contextos del entorno inmediato.

Crit.MAT.2.4./Crit.MAT.2.6. Operar con los números teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, aplicando las propiedades de las mismas, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, calculadora), usando el más adecuado.

Est.MAT.2.6.6. Realiza sumas y restas de fracciones con el mismo denominador. Calcula el producto de una fracción por un número.

6º curso de primaria:

Crit.MAT.2.1. Leer, escribir y ordenar, utilizando razonamientos apropiados, distintos tipos de números (romanos, naturales, fracciones y decimales hasta las milésimas, enteros).

Est.MAT.2.1.2. Lee, escribe y ordena en textos numéricos y de la vida cotidiana, números (naturales, fracciones, decimales hasta las milésimas y enteros), utilizando razonamientos apropiados e interpretando el valor de posición de cada una de sus cifras.

Crit.MAT.2.2. Interpretar diferentes tipos de números según su valor, en situaciones de la vida cotidiana.

Est.MAT.2.2.2. Interpreta en textos numéricos y de la vida cotidiana, números (naturales, fracciones y decimales hasta las milésimas), utilizando razonamientos apropiados y considerando tanto el valor de posición de cada una de sus cifras.

Est.MAT.2.2.4. Ordena números enteros, decimales y fracciones básicas por comparación, representación en la recta numérica y transformación de unos en otros.

Crit.MAT.2.3. Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas.

Est.MAT.2.3.1. Reduce dos o más fracciones a común denominador y calcula fracciones equivalentes.

Est.MAT.2.3.3. Ordena fracciones aplicando la relación entre fracción y número decimal.

Crit.MAT.2.5. Utilizar los números enteros, decimales, fraccionarios y los porcentajes sencillos para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana.

Crit.MAT.2.4./Crit.MAT.2.6. Operar con los números teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones, aplicando las propiedades de las mismas, las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (algoritmos escritos, cálculo mental, tanteo, estimación, calculadora), usando el más adecuado.

Est.MAT.2.6.6. Realiza sumas y restas de fracciones con el mismo denominador. Calcula el producto de una fracción por un número.

A.2. Secundaria

Si buscamos en las leyes, tanto estatales como autonómicas, indicaciones que nos señalen cómo deberíamos abordar la enseñanza de las fracciones, nos encontramos lo siguiente.

Si acudimos a la legislación estatal, según lo dispuesto en el el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín oficial del estado, nº3*, 2015, 3 de enero:

- *Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación defracciones. Representación, ordenación* *y operaciones.*

En cuanto a los criterios de evaluación, los que se contemplan son:

1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.
3. Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental.
4. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.

Por último, en cuanto a los estándares de aprendizaje evaluables:

1.1. Identifica los distintos tipos de números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales) y los utiliza para representar, ordenar e interpretar adecuadamente la información cuantitativa.
1.3. Emplea adecuadamente los distintos tipos de números y sus operaciones, para resolver problemas cotidianos contextualizados, representando e interpretando mediante medios tecnológicos, cuando sea necesario, los resultados obtenidos.
2.1. Reconoce nuevos significados y propiedades de los números en contextos de resolución de problemas sobre paridad, divisibilidad y operaciones elementales.

2.6. Realiza operaciones de redondeo y truncamiento de números decimales conociendo el grado de aproximación y lo aplica a casos concretos.

2.7. Realiza operaciones de conversión entre números decimales y fraccionarios, halla fracciones equivalentes y simplifica fracciones, para aplicarlo en la resolución de problemas.

3.1. Realiza operaciones combinadas entre números enteros, decimales y fraccionarios, con eficacia, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o medios tecnológicos utilizando la notación más adecuada y respetando la jerarquía de las operaciones.

4.2. Realiza cálculos con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales decidiendo la forma más adecuada (mental, escrita o con calculadora), coherente y precisa.

Observando la normativa de nuestra comunidad, según lo especificado en la orden de 9 de mayo de 2007, del Departamentode Educación, Cultura y Deporte, por la que seaprueba el currículo de la Educación secundariaobligatoria y se autoriza su aplicación en los cen-tros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.*Boletín oficial de Aragón, nº 65*, 2007, 1 de junio, tenemos lo siguiente:

- *Medida. Las magnitudes: cualidades de los objetos quepueden medirse.*
- *Números racionales positivos: necesidad y usos. Sistemas de representación: notación fraccionaria; notación decimal; notación porcentual. Utilización de la recta numérica para comparar y ordenar fracciones, decimales positivos. Expresión de una fracción como número decimal; transformación de un número decimal exacto en fracción. Números perió-*

dicos. Aproximaciones decimales y redondeos. Operaciones elementales con fracciones y decimales; aproximación del resultado de acuerdo con la precisión requerida. Razón y proporción.

- *Interpretación y utilización, en diferentes contextos, de los números naturales, fraccionarios, decimales positivos y sus operaciones.(...)*

Y en cuanto a los criterios de evaluación:

1. Utilizar números naturales y enteros y las fracciones y decimales sencillos, sus operaciones y propiedades, pararecoger, transformar e intercambiar información en actividades relacionadas con la vida cotidiana.(...)

2. Resolver problemas para los que se precise la utilizaciónde las cuatro operaciones, con números enteros, decimales yfraccionarios, utilizando la forma de cálculo apropiada yvalorando la adecuación del resultado al contexto.(...)