

Apéndices de “Implicaciones de los resultados de PLANCK para los modelos de inflación cosmológica”

Trabajo de Fin de Grado realizado por

Rubén Gracia Abad

Bajo la dirección de

Dr. Manuel Asorey Caballeira

Universidad de Zaragoza

Diciembre 2016



Universidad
Zaragoza

A. Unidades y convenciones

Los convenios que se adoptarán durante el trabajo son los siguientes:

- Usaremos unidades naturales para simplificar la notación. Esto implica que las constantes universales toman el valor unidad:

$$G = \hbar = c = 1$$

Por tanto no aparecerán en las ecuaciones. Esto es equivalente a trabajar con unidades de Planck:

$$l_P = \left(\frac{G\hbar}{c^3}\right)^{1/2} \simeq 1.616 \cdot 10^{-33} \text{cm}$$

$$t_P = \left(\frac{l_P}{c}\right) \simeq 5.391 \cdot 10^{-44} \text{s}$$

$$m_{Pl} = \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{1/2} \simeq 2.177 \cdot 10^{-5} \text{g}$$

Estas relaciones nos permiten cambiar al sistema internacional.

Utilizaremos durante el trabajo la masa reducida de Planck:

$$M_{Pl} \equiv \frac{m_{Pl}}{\sqrt{8\pi}} = 2.435 \times 10^{18} \text{GeV} \quad (81)$$

donde hemos indicado la equivalencia en términos de energía.

- Por otro lado la signatura del tensor métrico será $(-, +, +, +)$.

Lo índices griegos toman valores $\mu = 0, 1, 2, 3$ para indicar las cuatro coordenadas espacio-temporales. La componente 0 es la componente temporal, el resto son espaciales. Los índices latinos indicarán componentes puramente espaciales $i = 1, 2, 3$.

Los cuadvectores se denotarán como x^μ mientras que los vectores espaciales se indicarán como x^i o como \vec{x} .

- Utilizaremos el convenio de sumación de Eintein sobre los índices mudos:

$$A_\mu B^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 A_\mu B^\mu$$

B. La invariancia gauge en teoría de perturbaciones cosmológicas

El problema del gauge desaparece al considerar un universo totalmente homogéneo ya que tenemos unas coordenadas preferentes que nos describen el problema perfectamente. No es así en el caso que nos ocupa ya que en un universo perturbado no podemos tener unas coordenadas preferentes que se adapten a nuestro problema sino que hay muchas de ellas. La única condición que deben cumplir es que, en las coordenadas que elijamos las magnitudes se alejen poco de su valor medio para que se consideren perturbaciones lineales.

Un análisis más completo se puede ver por ejemplo en las referencias [3][5][10]

B.1. Origen de la invariancia gauge

La teoría de perturbaciones cosmológica se afronta a través de (28) como base para construir las perturbaciones.

Una de las maneras de entender el origen del gauge es la siguiente: según (28), la perturbación surge de comparar dos espacio-tiempo distintos, uno de fondo homogéneo con unas coordenadas fijas, y otro físico, perturbado, en el que como hemos dicho antes no hay unas coordenadas preferentes. Para poder compararlos es necesario identificar los puntos de ambos espacios, lo cual se lleva a cabo usando difeomorfismos. Por tanto, un punto del background \bar{P} , puede identificarse con un punto \tilde{P} del espacio perturbado según un difeomorfismo \tilde{D} o con otro P según el difeomorfismo D . El primer difeomorfismo induce un sistema de coordenadas \tilde{x}^α mientras que el segundo induce un sistema x^α distinto. Ambos quedan relacionados por una transformación de coordenadas en el espacio perturbado del tipo:

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(t, \vec{x}) \quad (82)$$

Por lo tanto podemos asociar el cambio de difeomorfismo con la transformación de coordenadas que genera en el espacio perturbado.

Como consecuencia del cambio de difeomorfismo, hay un cambio en el valor de la perturbación, ya que usando uno u otro comparamos dos puntos distintos del espacio perturbado con el mismo punto del background. Este cambio es producto únicamente de un cambio de coordenadas y por tanto no es físico.

Hay pues una libertad en la elección del difeomorfismo que se traduce en un cambio en la elección de las coordenadas. Esto se conoce como libertad gauge. En este caso hemos adoptado un punto de vista pasivo para explicar el origen del gauge aunque existe otro llamado activo que considera un único espacio-tiempo. Puede verse en Ref.[10].

B.2. Efecto sobre la perturbación de la métrica

Para aplicar el efecto del cambio de difeomorfismo sobre la perturbación de la métrica, podemos suponer un par de sistemas de coordenadas en el espacio-tiempo perturbado x^α y \tilde{x}^α , el primero asocia un punto \bar{P} del background con uno P y el segundo con \tilde{P} . Esta asociación toma la siguiente forma:

$$x^\alpha(P) = \tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \bar{x}^\alpha(\bar{P}) \quad (83)$$

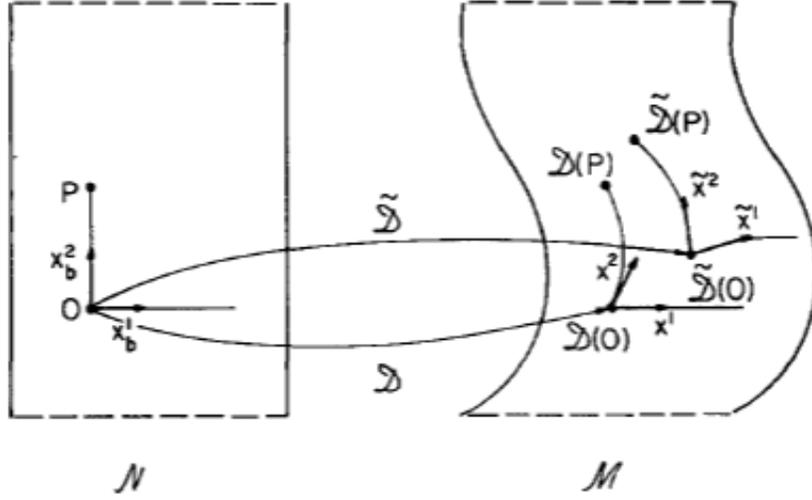


Figura 6: Cambio del sistema de coordenadas inducido por el cambio de difeomorfismo (Imagen Ref.[10]).

donde \bar{x}^α es el sistema de coordenadas fijo del background.

Un cambio de coordenadas en el espacio perturbado de x^α a \tilde{x}^α nos relaciona las coordenadas del mismo punto:

$$\tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = x^\alpha(\tilde{P}) + \xi^\alpha \quad (84)$$

$$\tilde{x}^\alpha(P) = x^\alpha(P) + \xi^\alpha \quad (85)$$

La diferencia entre $\xi^\alpha(\tilde{P})$ y $\xi^\alpha(P)$ es de segundo orden así que tomaremos ξ^α y lo asociaremos con el punto del background \tilde{P} .

Usando las anteriores expresiones podemos encontrar como se relacionan las coordenadas de dos puntos diferentes:

$$\tilde{x}^\alpha(\tilde{P}) = \tilde{x}^\alpha(P) - \xi^\alpha \quad (86)$$

$$x^\alpha(\tilde{P}) = x^\alpha(P) - \xi^\alpha \quad (87)$$

La perturbación se construye como resta de cantidades que viven en dos espacios distintos y podemos considerar que vive en el background. La perturbación de la métrica según el primer difeomorfismo será:

$$\delta g_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha) = g_{\mu\nu}(x^\alpha(P)) - \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha(\tilde{P})) \quad (88)$$

Y en el segundo:

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha) = \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha(\tilde{P})) - \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha(\tilde{P})) \quad (89)$$

donde $\tilde{g}_{\mu\nu}$ es la forma que toma la métrica en las coordenadas \tilde{x}^α . Si hacemos un desarrollo de la cantidad perturbada en el punto \tilde{P} respecto al punto P , encontramos:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha(\tilde{P})) = \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha(P)) - \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} g_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha(P)) \quad (90)$$

Ahora bien, el valor de $g^{\mu\nu}$ cambia de punto a punto pero no cambia si cambiamos el sistema de coordenadas en un punto fijo, por tanto $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha(P)) = g_{\mu\nu}(x^\alpha(P))$. Teniendo esto en cuenta y que $g_{\mu\nu}(x^\alpha(P)) = \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha(\bar{P})) + \delta g_{\mu\nu}$, y el producto de ξ^α con $\delta g_{\mu\nu}$ es de segundo orden:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha(\tilde{P})) = g_{\mu\nu}(x^\alpha(\tilde{P})) = g_{\mu\nu}(x^\alpha(P)) - \xi^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha(\bar{P})) \quad (91)$$

$g_{\mu\nu}$ es un tensor covariante de orden 2 cuyas componentes bajo transformación de coordenadas transforman de la siguiente manera:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha(\tilde{P})) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\gamma\sigma}(x^\alpha(P)) \quad (92)$$

donde observamos que el punto es fijo y cambian las coordenadas.

La matriz jacobiana de la transformación teniendo en cuenta (83) queda:

$$\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu} = \delta_\mu^\gamma - \xi^\gamma_{,\mu} \quad (93)$$

donde el subíndice $_{,\mu}$ indica derivada respecto a la componente x^μ .

Sustituyendo esto y el desarrollo (91) en la transformación (92) queda:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha(\tilde{P})) = (\delta_\mu^\gamma - \xi^\gamma_{,\mu})(\delta_\nu^\sigma - \xi^\sigma_{,\nu}) \left[g_{\mu\nu}(x^\alpha(P)) - \xi^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}^\alpha(\bar{P})) \right] \quad (94)$$

Desarrollando y quedándonos a primer orden en las perturbaciones tenemos:

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha(\tilde{P})) \approx g_{\mu\nu}(x^\alpha(P)) - \xi^\alpha_{,\mu} \bar{g}_{\alpha\nu} - \xi^\alpha_{,\nu} \bar{g}_{\alpha\mu} - \xi^\beta \bar{g}_{\mu\nu,\beta} \quad (95)$$

Usando (85) y (84) encontramos la diferencia entre las perturbaciones en los dos difeomorfismos:

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - \xi^\alpha_{,\mu} \bar{g}_{\alpha\nu} - \xi^\alpha_{,\nu} \bar{g}_{\alpha\mu} - \xi^0 \bar{g}_{\mu\nu,0} \quad (96)$$

donde en el último término se ha tenido en cuenta que la métrica de fondo solo depende del tiempo. Haciendo uso de la definición de derivada covariante y de conexión afín encontramos:

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - D_\mu \xi_\nu - D_\nu \xi_\mu \rightarrow \Delta(g_{\mu\nu}) = -2D_{(\mu} \xi_{\nu)} \quad (97)$$

donde Δ indica la variación en la perturbación debido al cambio de difeomorfismo, D es derivada covariante y $D_{(\mu} \xi_{\nu)} \equiv D_\mu \xi_\nu + D_\nu \xi_\mu$.

B.3. Variable invariantes gauge

Si aplicamos el resultado anterior a las perturbaciones escalares de (30) cambian como sigue [1]:

$$A \rightarrow A - (\xi^0)' - \mathcal{H}\xi^0 \quad (98)$$

$$B \rightarrow B + \xi^0 - \xi' \quad (99)$$

$$C \rightarrow C - \mathcal{H}\xi^0 \quad (100)$$

$$E \rightarrow E - \xi \quad (101)$$

donde ξ es la parte escalar de la descomposición SVT de la parte espacial de ξ^α .

Por otro lado, en el sector de materia nos interesa saber como cambia la parte escalar de la descomposición SVT de la velocidad v^i , que interviene en (45). v^i entera lo hace como sigue [4][1]:

$$v^i \rightarrow v^i + (\xi^i)' \quad (102)$$

Y aplicando la descomposición SVT tanto a v^i como a ξ^i y considerando solo la parte escalar:

$$v \rightarrow v + \xi^0 \quad (103)$$

Sustituyendo las nuevas perturbaciones en (43) y en (45) se demuestra de forma inmediata que son invariantes gauge.

C. Espectro de potencias de las perturbaciones cosmológicas

C.1. Definición

El espectro de potencias se define como la transformada de Fourier de la función de correlación $\xi(r)$ dada en (50) en la que asumimos homogeneidad e isotropía estadística. Para verlo partimos de la función de correlación en el espacio de Fourier y aplicamos la transformada inversa:

$$\langle \delta X_{\vec{k}} \delta X_{\vec{k}'} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \langle \delta X(\vec{x}) \delta X(\vec{x} + \vec{r}) \rangle e^{-i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\vec{k}'(\vec{x} + \vec{r})} d\vec{x} d\vec{r} \quad (104)$$

Desarrollando esta expresión llegamos a:

$$\langle \delta X_{\vec{k}} \delta X_{\vec{k}'} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i(\vec{k}' + \vec{k})\vec{x}} d\vec{x} \int \xi(r) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \delta(\vec{k} + \vec{k}') \int \xi(r) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} = \delta(\vec{k} + \vec{k}') \mathcal{P}_X(k) \quad (105)$$

donde hemos usado que $\xi(r) \equiv \delta X(\vec{x}) \delta X(\vec{x} + \vec{r})$. Por tanto:

$$\mathcal{P}_X(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \xi(r) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \quad (106)$$

Muchos autores prefieren otra definición del espectro de potencias:

$$\mathcal{P}_X(k) \equiv \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_X(k) \quad (107)$$

que también usaremos nosotros. De manera que tenemos:

$$\langle \delta X_{\vec{k}} \delta X_{\vec{k}'} \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \delta(\vec{k} + \vec{k}') \mathcal{P}_X(k) \quad (108)$$

Un estudio estadístico más detallado se puede ver en [3][4].

C.2. Expresión explícita del espectro de potencias

Partimos del correlador de la función $v(\vec{x})$ y comparamos la expresión clásica con la cuántica:

$$\langle v(\vec{x})v(\vec{y}) \rangle \quad (109)$$

Esta función debe ser real por lo que $v(\vec{x}) = v^*(\vec{x})$ lo que implica en el espacio de Fourier $v_{\vec{k}}^* = v_{-\vec{k}}$. Por tanto:

$$\langle v(\vec{x})v(\vec{y}) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3k' \langle v_{\vec{k}} v_{\vec{k}'} \rangle e^{-i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\vec{y}} \quad (110)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3k' \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_v(k) \delta(\vec{k} + \vec{k}') e^{-i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\vec{y}} \quad (111)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{2\pi^2}{k^3} \mathcal{P}_v(k) e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \quad (112)$$

$$= \int \frac{dk}{k} \mathcal{P}_v(k) e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \quad (113)$$

donde hemos considerado la expresión (51) y el elemento de volumen $d^3k = 4\pi k^2 dk$. Teniendo en cuenta la simetría del sistema el resultado solo puede depender de $|\vec{x} - \vec{y}|$.

En el caso de un operador $\hat{v}(\vec{x})$ tenemos aplicando el desarrollo (61):

$$\langle \psi | \hat{v}(\vec{x}) \hat{v}(\vec{y}) | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3k' \langle \psi | [\hat{a}_{\vec{k}} v_k e^{i\vec{k}\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger v_k^* e^{-i\vec{k}\vec{x}}] [\hat{a}_{\vec{k}'} v_{k'} e^{i\vec{k}'\vec{y}} + \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger v_{k'}^* e^{-i\vec{k}'\vec{y}}] | \psi \rangle \quad (114)$$

$$+ \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger v_{k'}^* e^{-i\vec{k}'\vec{y}} | \psi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3k' \langle \psi | \hat{a}_{\vec{k}} v_k e^{i\vec{k}\vec{x}} \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger v_{k'}^* e^{-i\vec{k}'\vec{y}} | \psi \rangle \quad (115)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \int d^3k' \delta(\vec{k} + \vec{k}') v_k e^{i\vec{k}\vec{x}} v_{k'}^* e^{-i\vec{k}'\vec{y}} \quad (116)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k |v_k|^2 e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} = \frac{1}{2\pi^2} \int k^2 dk |v_k|^2 e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \quad (117)$$

donde $|\psi\rangle$ es algún estado cuántico del sistema y se han utilizado las propiedades de conmutación de los operadores de creación y destrucción.

Comparando los resultados de los dos cálculos:

$$\mathcal{P}_v(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} |v_k|^2 \quad (118)$$

C.3. Espectro de potencias de \mathcal{R}

El espectro de \mathcal{R} se relaciona con el de u a través de (57), de manera que:

$$\langle \mathcal{R}_{\vec{k}} \mathcal{R}_{\vec{k}'} \rangle = \left(\frac{\mathcal{H}}{a\phi'} \right)^2 \langle u_{\vec{k}} u_{\vec{k}'} \rangle \quad (119)$$

Si utilizamos a ambos lados la expresión (108) encontramos la relación entre los espectros:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{\mathcal{H}}{a\dot{\phi}'} \right)^2 \mathcal{P}_u(k) \quad (120)$$

Sustituyendo (118):

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left(\frac{\mathcal{H}}{a\dot{\phi}'} \right)^2 \frac{k^3}{2\pi^2} |u_k|^2 = \left(\frac{\mathcal{H}^4}{\dot{\phi}'} \frac{k}{(2\pi)^2} |u_k|^2 \right)_{k=aH} \quad (121)$$

donde en el último paso hemos considerado que la escala está saliendo del horizonte $k \sim aH$. Ahora computando $|u_k|^2$ usando (65), llegamos a la siguiente expresión:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left[\frac{\mathcal{H}^4}{\dot{\phi}'} \frac{1}{(2\pi)^2} \left(1 + \frac{1}{k^2\tau^2} \right) \right]_{k=aH} \quad (122)$$

En el límite de escalas mayores que el radio de Hubble tenemos $k|\tau| \ll 1$ y por tanto:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} \simeq \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{H^4}{\dot{\phi}^2} \right)_{k=aH} \quad (123)$$

donde hemos cambiado al tiempo cósmico t en lugar del conforme τ .

D. Cuantización en espacios curvos

Para entender la diferencia entre cuantizar un campo escalar en un espacio llano de Minkowski y hacerlo en un espacio en expansión vamos a explicar brevemente ambos casos para un campo escalar libre ($V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2$) resaltando los aspectos que los diferencian. Para una explicación completa ver las referencias [4][10][17].

D.1. Métricas no dependiente del tiempo

Supongamos pues un campo escalar libre $\phi(t, \vec{x})$ en un espacio-tiempo de Minkowski. La acción viene dada por (usamos $M_{Pl} = 1$):

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x (-\eta_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - m^2 \phi^2) = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x} dt (\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2 \phi^2) \quad (124)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es el tensor de Minkowski.

Expresando el campo en sus modos de Fourier:

$$\phi_{\vec{k}} = \int \frac{d^3\vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi(t, \vec{x}) \quad (125)$$

De la acción se deriva la ecuación de movimiento de los modos:

$$\ddot{\phi}_{\vec{k}} + (k^2 + m^2)\phi_{\vec{k}} = 0 \quad (126)$$

Se trata de la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia $w_k = \sqrt{k^2 + m^2}$ independiente del tiempo.

Para cuantizar promovimos el operador $\phi_{\vec{k}}$ y su momento conjugado $\pi_{\vec{k}}$ a operadores: $\hat{\phi}_{\vec{k}}$, $\hat{\pi}_{\vec{k}}$ sobre los cuales imponemos las reglas de conmutación:

$$[\hat{\phi}_{\vec{k}_1}, \hat{\pi}_{\vec{k}_2}] = i\delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \quad (127)$$

El operador $\hat{\phi}_{\vec{k}}$ satisface la misma ecuación de movimiento que el campo (126). Esta ecuación tiene un espacio de soluciones de dimensión 2 y por tanto cualquier par de soluciones linealmente independientes es base. Sea v_k solución, otra solución independiente es v_k^* y podemos expandir $\hat{\phi}_{\vec{k}}$ en esta base:

$$\hat{\phi}_{\vec{k}} = \hat{a}_{\vec{k}} v_k(t) + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger v_k^*(t) \quad (128)$$

donde los coeficientes $\hat{a}_{\vec{k}}$ y $\hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger$ portan el caracter operador de $\hat{\phi}_{\vec{k}}$ y son los operadores de destrucción y creación que cumplen:

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}] = [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \quad (129)$$

Si sustituimos esta expansión en la relación de conmutación (127) encontramos la siguiente condición para la función v_k que recibe el nombre de función modal:

$$v_k^* \dot{v}_k - \dot{v}_k^* v_k = -i \quad (130)$$

Esta relación se conoce como wronskiano de v_k y v_k^* .

Ahora solo queda construir el espacio de Fock partiendo del estado de vacío $|0\rangle$. Este estado de vacío se define como:

$$\hat{a}_{\vec{k}} |0\rangle = 0 \quad (131)$$

El vacío es aniquilado por el operador destrucción. Desde el punto de vista de la interpretación de partículas, es el estado que no contiene partículas.

El estado de vacío y por tanto el resto, que se construyen a partir de él, solo pueden tener una interpretación física definida una vez hayamos elegido v_k adecuadamente. Esto se debe a que los operadores de creación y destrucción son los coeficientes de la descomposición (128) y por lo tanto si v_k cambia también cambiarán dichos coeficientes y por tanto la forma en la que definamos el vacío a través de (131). El problema es que no hay un solo v_k que satisfaga la normalización del wronskiano y sea solución de la ecuación (126).

Por ejemplo una función construida de la siguiente manera:

$$w_k(t) = \alpha_k v_k(t) + \beta_k v_k^*(t) \quad (132)$$

con α_k y β_k constantes complejas, satisface la ecuación de movimiento y además satisface la relación del wronskiano siempre que:

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1 \quad (133)$$

Por tanto la función modal no está unívocamente definida. No hay nada que favorezca v_k sobre w_k , pero al desarrollar $\hat{\phi}_{\vec{k}}$ en términos de w_k y w_k^* encontramos nuevos operadores de creación y destrucción:

$$\hat{\phi}_{\vec{k}} = \hat{b}_{\vec{k}} w_k(t) + \hat{b}_{-\vec{k}}^\dagger w_k^*(t) \quad (134)$$

Estos operadores satisfacen también las relaciones de conmutación (129). Comparando (128) y (134) encontramos la transformación de Bogolyubov entre $\hat{a}_{\vec{k}}^\pm$ y $\hat{b}_{\vec{k}}^\pm$:

$$\hat{a}_{\vec{k}} = \alpha_k^* \hat{b}_{\vec{k}} + \beta_k \hat{b}_{-\vec{k}}^\dagger \quad \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger = \alpha_k \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger + \beta_k^* \hat{b}_{-\vec{k}} \quad (135)$$

Los dos sets pueden utilizarse para construir un espacio de Fock a partir de dos vacíos distintos:

$$\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle_v = 0 \quad \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger |0\rangle_w = 0 \quad (136)$$

El primero en ausencia de v-partículas y el segundo en ausencia de w-partículas.

Los v-estados son distintos de los w-estados como era de esperar. Si medimos el número de ocupación de $|0\rangle_w$ con $\hat{N}^{(a)} = a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$ encontramos v-partículas:

$${}_w\langle 0 | \hat{N}^{(a)} | 0 \rangle_w = |\beta_k|^2 \quad (137)$$

Llegados a este punto lo que se hace es añadir la condición extra de que el vacío es el estado de mínima energía. Se trata de minimizar ${}_v\langle 0 | H | 0 \rangle_v$ (el valor esperado del hamiltoniano sobre el vacío definido por la función modal v_k). Esto nos lleva a:

$$v_k(t) = \frac{1}{(2w_k)^{1/2}} e^{-i w_k \tau} \quad (138)$$

Con esta función modal el estado de vacío es aquel para el cual la energía es mínima y queda totalmente definido. De esta manera la expansión del campo en modos de Fourier se puede escribir finalmente:

$$\hat{\phi}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k \frac{1}{(2w_k)^{1/2}} [\hat{a}_{\vec{k}} e^{-i(w_k \tau - \vec{k}\vec{x})} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{i(w_k \tau - \vec{k}\vec{x})}] \quad (139)$$

El vacío definido por estas condiciones se conoce como vacío de Minkowski.

D.2. Métricas dependientes del tiempo

Hemos visto como en un espacio de Minkowski se puede solucionar la ambigüedad del vacío sin problemas. La cosa cambia en un espacio-tiempo dependiente del tiempo como el de de Sitter o el de FLRW. En este caso la acción tiene la siguiente forma:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (-g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2) = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (a^{-2} \dot{\phi}^2 - a^{-2} (\partial_i \phi)^2 - m^2 \phi^2) \quad (140)$$

y dependen del tiempo a través del factor de escala.

De hecho, podemos escribir la acción en función del tiempo conforme τ y del campo auxiliar canónico

$\chi \equiv a\phi$:

$$S = \frac{1}{2} \int d^3\vec{x}d\tau(\chi'^2 - (\partial_i\chi)^2 - m_e(\tau)^2\chi^2) \quad (141)$$

donde $m_e(\tau) \equiv m^2a^2 - \frac{a''}{a}$. Esta acción muestra que la dinámica de ϕ en un espacio plano de FLRW es equivalente matemáticamente a la dinámica de un campo escalar auxiliar χ en un espacio de Minkowski en la cual se recoge toda la influencia del campo gravitatorio en una masa efectiva dependiente del tiempo $m_e(\tau)$.

Variando la acción encontramos la ecuación de movimiento del campo χ que en términos de los modos de Fourier queda:

$$\chi''_{\vec{k}} + \left[k^2 + m^2a^2(\tau) - \frac{a''}{a} \right] \chi_{\vec{k}} \equiv \chi''_{\vec{k}} + w_k(\tau)^2\chi_{\vec{k}} = 0 \quad (142)$$

Vemos que es análoga a la ecuación de un oscilador armónico pero con frecuencia dependiente del tiempo, a diferencia del caso minkowskiano (126).

Ahora deberíamos cuantizar el campo de manera análoga a como lo hemos hecho antes y definir el vacío a partir del cual crear el resto de estados. El problema esta vez es que la acción depende del tiempo y se traduce en que la frecuencia del oscilador depende del tiempo. Por tanto el sistema no es conservativo y el hamiltoniano no tiene autoestados independientes del tiempo que puedan ser definidos como vacío.

La condición que añadimos para cuantizar el campo en el caso minkowskiano haciendo que el vacío fuese el estado de mínima energía no se puede aplicar en este caso ya que, aunque en un instante dado definamos el vacío de esta manera en un instante posterior este estado cambiaría cambiando su energía debido a que los autoestados de H dependen del tiempo.

Este fenómeno supone desde el punto de vista de la interpretación de partículas la creación de partículas, ya que si en un instante dado definimos un vacío de acuerdo a la condición de mínima energía pero instantes posteriores este estado deja de ser el de mínima energía esto implica la creación de partículas en este estado. La energía necesaria para la formación de estas partículas está proporcionada por el campo gravitatorio, que es al fin y al cabo el causante de que nuestro sistema no sea conservativo.

D.3. Vacío de Bunch-Davies

Veamos cómo solucionar este problema en el caso que nos interesa, el de un universo de de Sitter, para el cual:

$$a(\tau) = -\frac{1}{\mathcal{H}\tau} \rightarrow w_k^2(\tau) = k^2 + \left(\frac{m^2}{\mathcal{H}^2} - 2 \right) \frac{1}{\tau^2} \quad (143)$$

En principio tenemos una frecuencia dependiente del tiempo. Ahora nos centramos en un instante τ_0 e intentamos definir el vacío en ese instante como el estado que minimiza la energía. Solo es posible minimizar la energía si $w_k^2(\tau_0) > 0$, de lo contrario la frecuencia es imaginaria y el modo o crece exponencialmente o decae y la interpretación como partículas carece de sentido. Observando la expresión para la frecuencia vemos que debido a que $m \ll \mathcal{H}$ siempre hay modos tal que $k|\tau_0| \ll 1$ para los que

ésta es negativa. Esto implica que no podemos definir un vacío completo para todos los modos, solo para aquellos tales que $k|\tau_0| \gtrsim 1$, es decir, para los modos que en τ_0 están dentro del radio de Hubble.

El punto fundamental está en elegir este τ_0 lo suficientemente atrás en τ como para que todos los modos de interés estén dentro del radio de Hubble. De hecho, si elegimos $\tau \rightarrow -\infty$ la frecuencia tiende a una constante k^2 . Esto significa desde el punto de vista físico que cuando los modos están muy adentro de la esfera de Hubble no sienten la gravedad y ven un espacio llano de Minkowski. Esto se expresa exigiendo que la función modal $v_k(\tau)$ elegida cumpla:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau} \quad (144)$$

Este vacío determinado por las $v_k(\tau)$ tal que se cumple la condición anterior se conoce como vacío de Bunch-Davies. De esta manera se soluciona el problema del vacío en espacios-curvos en un espacio de FLRW o de de Sitter.

En tal caso la solución general de la ecuación (142), cuando $m \ll \mathcal{H}$ viene dada por:

$$v_k(\tau) = \alpha \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) + \beta \frac{e^{ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 + \frac{i}{k\tau}\right) \quad (145)$$

que depende de dos constantes α y β . La condición asintótica del vacío nos fija $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ dejando finalmente:

$$v_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) \quad (146)$$

E. Obtención de expresiones útiles dependientes de los parámetros *slow-roll*

E.1. Parámetros observacionales en función de los parámetros *slow-roll*

E.1.1. Índice espectral n_s

Partimos del espectro de potencias de las perturbaciones escalares escrito en términos del potencial, al que llegamos utilizando las ecuaciones (18) y (19):

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{12\pi^2} \left(\frac{V^3}{M_{Pl}^6 V_\phi^2} \right)_{k=aH} \quad (147)$$

Recordando la definición de ϵ_V (20) podemos escribirlo como:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{24\pi^2 M_{Pl}^4} \frac{V}{\epsilon_V} \Big|_{k=aH} \quad (148)$$

Aplicando la expresión para el índice espectral n_s :

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = \frac{d \ln V}{d \ln k} - \frac{d \ln \epsilon_V}{d \ln k} \quad (149)$$

En donde hemos utilizado las propiedades de los logaritmos y hecho cero las derivadas de constantes.

Ahora usando la ecuación en aproximación *slow-roll* (19) en el primer sumando podemos reducir esta expresión a:

$$n_s - 1 = 2 \frac{d \ln H}{d \ln k} - \frac{d \ln \epsilon_V}{d \ln k} \quad (150)$$

donde de nuevo las derivadas de constantes se han hecho cero.

Ahora recordemos que estamos evaluando el espectro en $k = aH$ por lo que $\ln k = \ln(aH)$ y:

$$\frac{d \ln(aH)}{dt} = \frac{1}{aH} (\dot{a}H + \dot{H}a) = H + \frac{\dot{H}}{H} \simeq H \quad (151)$$

donde hemos utilizado que durante la inflación $\dot{H} \ll H$. Por tanto $d \ln k \simeq H dt$. Esto nos permite escribir el primer término de la derecha de (150) como:

$$2 \frac{d \ln H}{d \ln k} \simeq \frac{2}{H} \frac{d \ln H}{dt} = 2 \frac{\dot{H}}{H^2} \quad (152)$$

Usando la definición de ϵ_V y las ecuaciones de movimiento en *slow-roll* (19) y (18):

$$\epsilon_V = \frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{-3H\dot{\phi}}{3M_{Pl}^2 H^2} \right)^2 = \frac{\dot{\phi}^2}{2M_{Pl}^2 H^2} \quad (153)$$

Ahora, derivando a ambos lados de (19) respecto al tiempo y usando de nuevo (18) para poner $\dot{\phi}$ en función de H encontramos:

$$\epsilon_V \simeq -\frac{\dot{H}}{H^2} \quad (154)$$

Consecuentemente:

$$2 \frac{d \ln H}{d \ln k} \simeq -2\epsilon_V \quad (155)$$

Para el segundo término de (150) utilizamos otra vez la definición de ϵ_V :

$$\frac{d \ln \epsilon_V}{d \ln k} = \frac{d}{d \ln k} \left[\ln \left(\frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{V_\phi}{V} \right)^2 \right) \right] = 2 \frac{d \ln V_\phi}{d \ln k} - 2 \frac{d \ln V}{d \ln k} \quad (156)$$

Del segundo sumando ya tenemos el resultado, el primero requiere algo más de cálculo:

$$\frac{d \ln V_\phi}{d \ln k} \simeq \frac{1}{V_\phi} \frac{d V_\phi}{H \frac{dt}{d \ln k}} = \frac{\dot{\phi}}{V_\phi H} V_{\phi\phi} \quad (157)$$

Usando ahora (18) encontramos:

$$\frac{d \ln V_\phi}{d \ln k} \simeq -\frac{1}{3H^2} V_{\phi\phi} \quad (158)$$

Y por último teniendo en cuenta (19) y la definición de η :

$$\frac{d \ln V_\phi}{d \ln k} \simeq -\frac{M_{Pl}^2}{V} V_{\phi\phi} = -\eta_V \quad (159)$$

Lo que nos sirve para encontrar:

$$\frac{d \ln \epsilon_V}{d \ln k} = 4\epsilon_V - 2\eta_V \quad (160)$$

Por tanto finalmente tenemos juntando los resultados (155) y (160) en (150):

$$n_s - 1 = 2\eta_V - 6\epsilon_V \quad (161)$$

donde los parámetros están evaluados en $k = aH$.

E.1.2. Índice espectral n_t

Análogamente partiendo del espectro de las perturbaciones tensoriales y usando la aproximación de la ecuación de Friedmann (19) de nuevo en régimen *slow-roll*:

$$\mathcal{P}_g = \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{H}{M_{Pl}} \right)_{k=aH}^2 = \frac{2}{3\pi^2} \frac{V}{M_{Pl}^4} \Big|_{k=aH} \quad (162)$$

Usando la definición del índice espectral n_t :

$$n_t = \frac{d \ln \mathcal{P}_g}{d \ln k} = \frac{d \ln V}{d \ln k} \quad (163)$$

El resultado de esta expresión lo hemos calculado previamente:

$$n_t = -2\epsilon_V \quad (164)$$

E.1.3. Razón tensor-escalar r

Por definición:

$$r = \frac{\mathcal{P}_g}{\mathcal{P}_\mathcal{R}} = \frac{\frac{2}{3\pi^2} \frac{V}{M_{Pl}^4} \Big|_{k=aH}}{\frac{1}{24\pi^2 M_{Pl}^4} \frac{V}{\epsilon_V} \Big|_{k=aH}} = 16\epsilon_V \quad (165)$$

E.2. Obtención de las expresiones de los parámetros inflacionarios en función del número de *e-folds*

E.2.1. Potenciales monómicos

Consideremos primero un potencial escalar de tipo monómico:

$$V(\phi) \sim \phi^n \quad (166)$$

De forma inmediata con la expresiones (20) y (21) llegamos a una forma genérica de los dos parámetros *slow-roll* en función del exponente n y del campo:

$$\epsilon_V(\phi) = \frac{n^2}{2} \left(\frac{M_{Pl}}{\phi} \right)^2 \quad \eta_V(\phi) = n(n-1) \left(\frac{M_{Pl}}{\phi} \right)^2 \quad (167)$$

La inflación acabará cuando $\epsilon_V \approx 1$ o $|\eta_V| \approx 1$ violando la condición *slow-roll*. En este caso ϵ_V se aproxima a 1 ligeramente más rápido que $|\eta_V|$. Esto se da para un valor del campo ϕ_f :

$$\epsilon_V(\phi_f) = \frac{n^2}{2} \left(\frac{M_{Pl}}{\phi_f} \right)^2 = 1 \rightarrow \phi_f = \frac{nM_{Pl}}{\sqrt{2}} \quad (168)$$

Usando (23) con este valor de ϕ_f podemos poner el campo en función del número de *e-folds*:

$$N \simeq \int_{\phi}^{\phi_f} \frac{1}{M_{Pl}\sqrt{\epsilon_V}} d\phi \rightarrow \phi^2(N) = 2nM_{Pl}^2 \left(N + \frac{n}{4} \right) \quad (169)$$

Sustituyendo esto en las fórmulas anteriores encontramos los parámetros *slow-roll* en función de N :

$$\epsilon_V(N) = \frac{n}{4} \left(N + \frac{n}{4} \right)^{-1} \quad \eta_V(N) = \frac{n-1}{2} \left(N + \frac{n}{4} \right)^{-1} \quad (170)$$

Finalmente utilizando las expresiones para n_s y r del apartado anterior:

$$n_s = \frac{N-1-\frac{n}{4}}{N+\frac{n}{4}} \quad r = \frac{4n}{N+\frac{n}{4}} \quad (171)$$

E.2.2. Modelo de Starobinsky

A continuación hagamos lo mismo para el modelo de inflación R^2 de Starobinsky. Es análogo al anterior usando el potencial (27), aunque esta vez los cálculos son algo más tediosos.

Los parámetros *slow-roll* en función del campo que obtenemos son:

$$\epsilon_V(\phi) = \frac{4}{3} \frac{1}{\left(e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}} - 1 \right)^2} \quad (172)$$

$$\eta_V(\phi) = -\frac{4}{3} \frac{\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}} - 2 \right)}{\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}} - 1 \right)^2} \quad (173)$$

En este caso ϵ_V alcanza el 1 antes que $|\eta_V|$. Por lo tanto la condición *slow-roll* deja de ser válida para ϕ_f tal que $\epsilon_V(\phi_f) = 1$:

$$\phi_f \simeq \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \right) M_{Pl} = 0.94M_{Pl} \quad (174)$$

Para η_V deja de ser válida más tarde, cuando $\phi \simeq 0.62M_{Pl}$, ya que recordemos que el valor inicial del

campo es mayor que la masa de Planck. El número de e -folds en función del campo queda:

$$N(\phi) \simeq \frac{3}{4} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right) - 1.04 \quad (175)$$

Ahora tenemos que despejar ϕ en función de N , sin embargo no es posible hacerlo analíticamente a no ser que hagamos un desarrollo en $1/N$ lo que nos conduce a [16]:

$$e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}} = \frac{3}{4N} - \frac{9 \ln N}{16N^2} - \frac{0.94}{N^2} + \mathcal{O} \left(\frac{\ln^2 N}{N^3} \right) \quad (176)$$

Quedándonos a primer orden en $1/N$ y sustituyendo en (172) y en (173) obtenemos:

$$\epsilon_V(N) = \frac{3}{4N^2} \quad \eta_V(N) = -\frac{1}{N} \quad (177)$$

Finalmente usando las expresiones para n_s y r llegamos al final del desarrollo:

$$n_s - 1 = -\frac{2}{N} \quad r = \frac{12}{N^2} \quad (178)$$