



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

CÁLCULO MENTAL EN EDUCACIÓN PRIMARIA

MENTAL CALCULATION IN PRIMARY EDUCATION

Autor

Presentación Bronchal Marqués

Director

Rafael Escolano Vizcarra

FACULTAD DE EDUCACIÓN
2016

Resumen

La habilidad de calcular mentalmente es una parte importante de las matemáticas, socialmente útil y que debería ser enseñada antes que los cálculos escritos. Sin embargo, el aprendizaje del cálculo mental se encuentra en un segundo plano respecto a la enseñanza de los algoritmos escritos en las aulas de Primaria. Numerosas investigaciones ponen de manifiesto los beneficios del cálculo mental en el desarrollo del sentido numérico y de estrategias de cálculo flexibles y creativas.

Este trabajo se centra en varios aspectos del cálculo mental. Inicialmente se pone de manifiesto la relevancia del sentido numérico y su relación con el cálculo mental. Seguidamente, se analiza la situación actual de la enseñanza del cálculo mental en las aulas de Educación Primaria y por último, se diseña, desarrolla y evalúa una propuesta de enseñanza de estrategias de cálculo mental de forma sistematizada en un grupo de alumnos de 5º de Primaria.

Palabras clave: sentido numérico, cálculo mental, estrategias, algoritmo, enseñanza, suma, resta, multiplicación, división, número natural, Educación Primaria.

Abstract

The ability to calculate in your head is an important part of mathematics, a useful social tool and it must be to teach before that traditional operations. However, learning mental calculation is in the background regarding the teaching of traditional operations in the Primary Education. Numerous investigations expose the benefits of mental calculation in the development of number sense and of flexible and creative strategies calculation.

This report focuses several aspects of mental calculation. Initially highlights the importance of number sense and their relationship to mental calculation. Then, mental calculation in the Primary Education is analyzed for knowing its current situation and finally we develop and assess a proposal teaching strategies in a systematic mental calculation is performed to a group of students of Primary Education.

Keys words: number sense, mental calculation, mental strategies, traditional operations, teaching, addition, subtraction, multiplication, division, natural number, Primary School.

ÍNDICE

Introducción.....	6
CAPÍTULO I – MARCO TEÓRICO: SENTIDO NUMÉRICO.....	9
1.1 Sentido numérico en la realización de cálculos aritméticos.....	9
1.2 Diferentes procedimientos de cálculo.....	15
1.3 El cálculo mental y el cálculo algorítmico en las aulas de Educación Primaria....	
.....	21
CAPÍTULO II – ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO MENTAL....	25
2.1 Importancia de la enseñanza de estrategias de cálculo mental.....	25
2.2 El cálculo mental en el currículo de Educación Primaria.....	26
2.2.1 Valoración crítica de los documentos curriculares.....	28
2.3 Análisis de un libro de texto.....	29
2.3.1 Valoración crítica del libro de texto.....	37
CAPÍTULO III - MARCO EXPERIMENTAL: DISEÑO DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA.....	40
3.1 Objetivos de la enseñanza del cálculo mental en Educación Primaria.....	40
3.2 Contenidos para la enseñanza del cálculo mental.....	40
3.2.1 Sistematización de un conjunto de resultados.....	40
3.2.2 Construcción de estrategias de cálculo mental	42
3.3 Metodología y temporalización para la enseñanza del cálculo mental.....	45
3.4 Contexto del aula donde se desarrolla la experiencia.....	50
CAPÍTULO IV - MARCO EXPERIMENTAL: DESARROLLO Y EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA.....	53
4.1 Desarrollo y evaluación de la prueba inicial.....	53

4.1.1 Perfil de los alumnos del grupo experimental.....	59
4.2 Desarrollo y evaluación de la propuesta de enseñanza.....	67
4.2.1 Enseñanza de estrategias de la suma de números naturales.....	67
4.2.1.1 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 1.....	67
4.2.1.2 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 2.....	71
4.2.1.3 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 3.....	77
4.2.1.4 Resultados obtenidos en las estrategias de la suma.....	81
4.2.2 Enseñanza de estrategias de la resta de números naturales.....	81
4.2.2.1 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 4.....	81
4.2.2.2 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 5.....	86
4.2.2.3 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 6.....	91
4.2.2.4 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 7.....	95
4.2.2.5 Resultados obtenidos en las estrategias de la resta.....	100
4.2.3 Enseñanza de estrategias de la multiplicación y división de números naturales	101
4.2.3.1 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 8.....	102
4.2.3.2 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 9.....	108
4.2.3.3 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 10.....	114
4.2.3.4 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 11.....	120
4.2.3.5 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 12.....	125
4.2.3.6 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 13.....	131
4.2.3.7 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 14.....	137
4.2.3.8 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 15.....	142
4.2.3.9 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 16.....	147
4.2.3.10 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 17.....	151
4.2.3.11 Resultados obtenidos en las estrategias de la multiplicación.....	157
4.2.3.12 Resultados obtenidos en las estrategias de la división.....	159
4.3 Desarrollo y evaluación de la prueba final.....	160
4.4 Comparación entre los resultados de la prueba inicial y final.....	170
4.5 Perfil de los alumnos finalizada la enseñanza de estrategias de cálculo mental.....	176
4.5.1 Comparación de perfiles de los alumnos.....	176

4.5.2 Resumen del progreso de los alumnos.....	189
CAPÍTULO V - CONCLUSIONES Y VALORACIÓN PERSONAL.....	192
5.1 Conclusiones.....	192
5.2 Valoración personal.....	199
CAPÍTULO VI - BIBLIOGRAFÍA.....	202
6.1 Bibliografía.....	202
ANEXOS.....	205
ANEXO I.....	206
ANEXO II.....	212
ANEXO III.....	213
ANEXO IV.....	225
ANEXO V.....	231
ANEXO VI.....	235
ANEXO VII.....	239
ANEXO VIII.....	243
ANEXO IX.....	247
ANEXO X.....	251
ANEXO XI.....	255
ANEXO XII.....	259
ANEXO XIII.....	263
ANEXO XIV.....	267
ANEXO XV.....	271
ANEXO XVI.....	275
ANEXO XVII.....	279
ANEXO XVIII.....	283
ANEXO XIX.....	287
ANEXO XX.....	291
ANEXO XXI.....	295

Introducción

El informe que se expone a continuación pone el broche final a mi trayectoria académica en el Grado de Magisterio en Educación Primaria desde el cual se aborda el cálculo mental y su situación actual de la enseñanza de este contenido en las aulas de Educación Primaria.

Mi interés por el cálculo mental nace de sus evidentes beneficios y de la clara necesidad de cambio en cuanto a la metodología del cálculo en las aulas.

Las sociedades cambian y con ellas las necesidades de sus ciudadanos “un chico o chica de los que nos encontrábamos en las aulas hace unas décadas tenía unas necesidades de aprendizaje y educativas muy diferentes a las que tiene un estudiante de hoy día” (Bracho, 2013, p.71).

Respecto a la educación matemática, los marcos normativos actuales de los países desarrollados, “inciden en la importancia de fomentar en los escolares el desarrollo del denominado “sentido numérico” con un enfoque orientado hacia el desarrollo de la competencia matemática” (García et al.,2011, citado en Bracho, 2013, p.72).

Este desarrollo del sentido numérico no se fomenta mediante la enseñanza de algoritmos escritos, es necesario un nuevo método que desarrolle el sentido numérico en el alumnado mejorando el cálculo mental (Martínez-Montero, 2011).

Estudios científicos defienden una enseñanza de la aritmética que se preocupe de ofrecer a los alumnos oportunidades para que inventen sus propios métodos de cálculo (Kamii, Lewis y Livingston, 1993, Burns, 1994, Kamii y Dominick, 1997, citados en Gallardo 2014, p. 18) y otros más recientes como los de Martínez- Montero (2008), Ortega (2001), Gómez (2007), Sancha (2011) y Bracho (2013) adoptan una posición más crítica sobre la conveniencia de enseñar algoritmos preestablecidos en los primeros años de escolaridad.

Si dentro de los fines que persigue el sistema educativo es dotar al alumno de competencia matemática para comportarse como ciudadano que participe activamente en el contexto económico, social y cultural que le toca vivir, parece razonable que el cálculo mental adquiera un papel protagonista en el aula, puesto que a diario nos vemos inmersos en multitud de situaciones que requieren cálculos simples que exigen ser resueltos al instante. Sumar, restar, multiplicar y dividir son operaciones aritméticas que usamos a diario.

Por consiguiente, el cálculo mental juega un papel en la adquisición de los conceptos relacionados con la operatoria, con la profundización de los conocimientos matemáticos intuitivos antes de su formalización y como medio para promover la reflexión de los estudiantes y la evaluación y reorientación del trabajo del profesor.

Los objetivos de este Trabajo Fin de Grado son:

- 1º. Ubicar el cálculo mental entre los diferentes procedimientos de cálculo de números naturales y estudiar su relación con el sentido numérico.
- 2º. Analizar la enseñanza del cálculo mental en las aulas de Educación Primaria a partir de dos fuentes documentales: el currículo oficial y la propuesta didáctica que realiza una editorial de libros de texto.
- 3º. Estudiar el conocimiento de las estrategias de cálculo mental y el uso que hacen los alumnos de un grupo natural de 5º curso.
- 4º. Diseñar, desarrollar y evaluar una propuesta parcial de enseñanza de estrategias de cálculo mental en 5º curso de Educación Primaria. Para evaluar la intervención se realiza, diseña y se pasa en dos momentos temporales: antes y después de comenzar la intervención docente.

Para ello, la memoria se estructura en seis capítulos:

1. El capítulo I se centra en el concepto del sentido numérico. Profundizamos en la relación que tiene el sentido numérico con los diferentes tipos de cálculos, así como, la repercusión que tienen los diferentes tipos de cálculo en el desarrollo del sentido numérico. Además, se analiza y contrasta la aportación del cálculo mental y del algorítmico en las aulas de Educación Primaria al desarrollo del sentido numérico.
2. En el capítulo II se analiza la importancia del cálculo mental y su situación actual en la Educación Primaria mediante el estudio de dos fuentes documentales, como son el currículo oficial y el libro de texto Vicens Vives que es la editorial que utiliza el colegio dónde se ha desarrollado la fase experimental de este trabajo.
3. En el capítulo III se exponen los objetivos, contenidos, metodología y temporalización, así como, el contexto en el que se lleva a cabo la experimentación de enseñanza de estrategias de cálculo mental en un grupo de 5º de Primaria.
4. En el capítulo IV recoge la investigación de campo que consiste en el diseño, desarrollo y evaluación de una intervención sobre estrategias de

cálculo mental en alumnos de 5° de Primaria. Inicialmente se realiza una prueba para estudiar el conocimiento de las estrategias de cálculo mental que poseen los alumnos del grupo experimental, objetivo 3 de este informe y posteriormente, se realiza una prueba final para conocer la repercusión de la enseñanza de estrategias de cálculo mental en los alumnos.

5. En el capítulo V se concretan las conclusiones y valoración personal de la memoria.
6. El capítulo VI recoge la bibliografía.

CAPÍTULO I – MARCO TEÓRICO: SENTIDO NUMÉRICO

1.1 Sentido numérico en la realización de cálculos aritméticos.

Definir sentido numérico no es una tarea sencilla. El sentido numérico puede definirse como una habilidad, una intuición, comprensión, conocimiento o razonamiento acerca de los números, que es importante porque permite aplicar el conocimiento matemático adquirido ante nuevas situaciones de la vida cotidiana, es decir, generalizarlo a los diferentes problemas o situaciones futuras.

Esta expresión “sentido numérico” comienza a aparecer a finales de los años ochenta y surge con mayor fuerza en la última década del siglo pasado. Este término se asocia a que el aprendizaje matemático debe ser una actividad que «tenga sentido».

Para definir sentido numérico debemos atender por un lado, a la psicología cognitiva, a los estudios cognitivos sobre el sentido numérico propio de las primeras edades (intuiciones elementales de numerosidad, conteo o comparación numérica de magnitudes, etc.) Y, por otro lado, a la educación matemática, que centra su interés en la enseñanza y aprendizaje, ampliando el sentido numérico a tareas más complejas.

El siguiente diagrama pretende recoger las ideas que definen sentido numérico. (García, 2014, p.59)

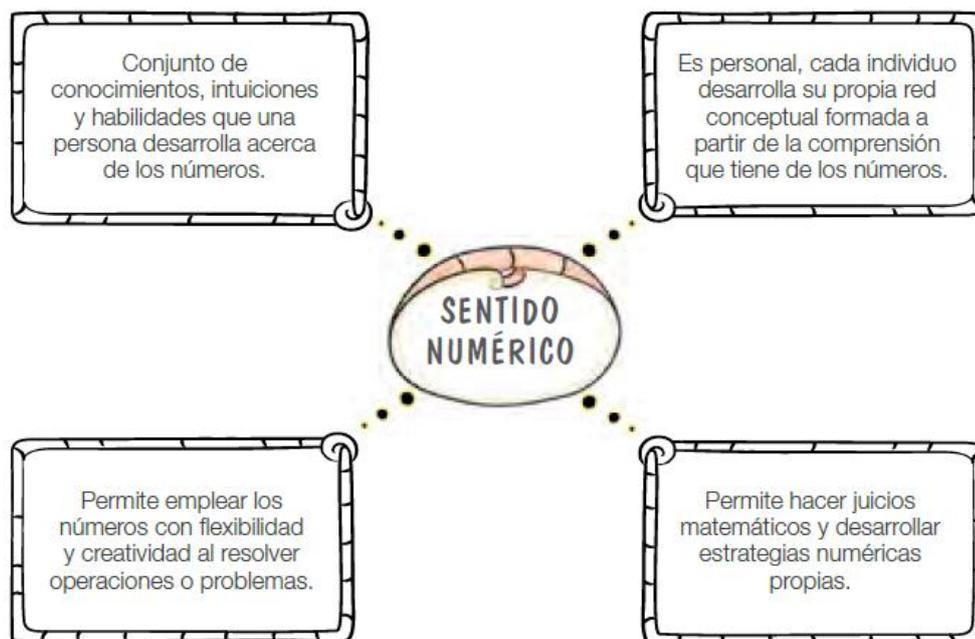


Figura 1.- Estructura conceptual del sentido numérico extraído de García S. (2014).

A continuación, en un intento de aproximarnos al concepto de sentido numérico nos apoyamos en las diferentes definiciones que realizan varios autores sobre el término sentido numérico y que detalla García (2014, p. 58-59).

El sentido numérico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre los números y las operaciones, junto con la habilidad para usar esta comprensión de forma flexible para hacer juicios matemáticos y para desarrollar estrategias numéricas. (Bruno, 2000)

El sentido numérico consiste en los conocimientos, las habilidades y las intuiciones que una persona desarrolla acerca de los números y sus operaciones, junto con la habilidad e inclinación hacia el empleo del conocimiento numérico de manera flexible para formular proposiciones matemáticas, desarrollar estrategias útiles para manipular números, realizar operaciones y resolver problemas. (Sánchez, Hoyos y López, 2011)

Otros autores lo definen a partir de la idea de red conceptual. Esta red se basa en la creación por parte del alumno de una red conceptual que relaciona los conceptos de agrupamiento y valor de posición con la habilidad de usar las magnitudes absolutas y relativas de los números.

Por tanto, esta red permite al alumno emitir juicios sobre la racionalidad de resultados producidos en problemas numéricos, favorece la creación de algoritmos no convencionales y por último, relacionar los números con las propiedades de las operaciones, etc. (Linares, 2001)

Asimismo, en términos de estructura, se hace referencia a que el sentido numérico es una red conceptual bien organizada, propia de cada individuo, por la cual es capaz de relacionar números y propiedades de las operaciones para resolver problemas de manera flexible y creativa. (Castro, Castro y Rico, 2004)

Como podemos observar todos estos autores coinciden y ponen en relieve que el sentido numérico permite resolver problemas de un modo flexible. Compartimos la idea que hay que favorecer en los alumnos una enseñanza que propicie el uso flexible del conocimiento numérico y fomente el desarrollo del sentido numérico. Como consecuencia, el sentido numérico capacita al alumno para la toma de decisiones puesto que tendrá los recursos necesarios para seleccionar el procedimiento más adecuado a la situación o contexto del problema a resolver.

El sentido numérico se caracteriza por cinco componentes: significado del número, relaciones numéricas, tamaño de los números, operaciones con los números

y referentes para los números y cantidades. (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, citado en Adrián, Jiménez-Fanjul, Maz-Machado, Bracho, García, 2012, p. 2). Esta caracterización del sentido numérico es la que más influencia ha tenido para la educación matemática.

Por tanto, para adquirir un buen sentido numérico es necesario alcanzar destrezas relacionadas con el cálculo mental, estimación del tamaño relativo de los números y del resultado de operaciones con los mismos, la composición y descomposición de los números, conceptos de valor posicional y resolución de problemas.

La inclusión del sentido numérico en los currículos ha hecho que numerosas publicaciones sobre este tópico se sitúen en el contexto de la innovación educativa, con actividades e indicaciones metodológicas.

En nuestro país son importantes las aportaciones y materiales del Quinzet y de profesores como Jiménez (2010). También son relevantes las aportaciones de investigadores como de Ortiz (2005).

Nuestra propuesta parcial de enseñanza recogida en esta memoria se genera bajo esta perspectiva, buscamos la flexibilidad del pensamiento numérico, que el alumno juegue con los números y sea consciente de los caminos o procedimientos que hay para realizar una misma operación. En consecuencia, nuestro trabajo se orienta a la enseñanza de estrategias de cálculo mental de números naturales y no abordamos la resolución de problemas.

Manifestaciones del sentido numérico en la realización de cálculos aritméticos

En los primeros años de vida, el ser humano comienza a desarrollar múltiples habilidades. En esta etapa, en el ámbito matemático, evoluciona el pensamiento lógico, el razonamiento, se construyen las bases que permiten adquirir posteriores conocimientos y paralelamente, de un modo transversal se va generando el sentido numérico.

Para la mayoría de los estudiosos el cálculo aritmético es el que se realiza con números y puede realizarse de cabeza, por escrito, o con materiales manipulativos como el ábaco o la calculadora.

El siguiente diagrama muestra los tipos de cálculo aritmético elemental. (Gallardo, 2014, p.8)

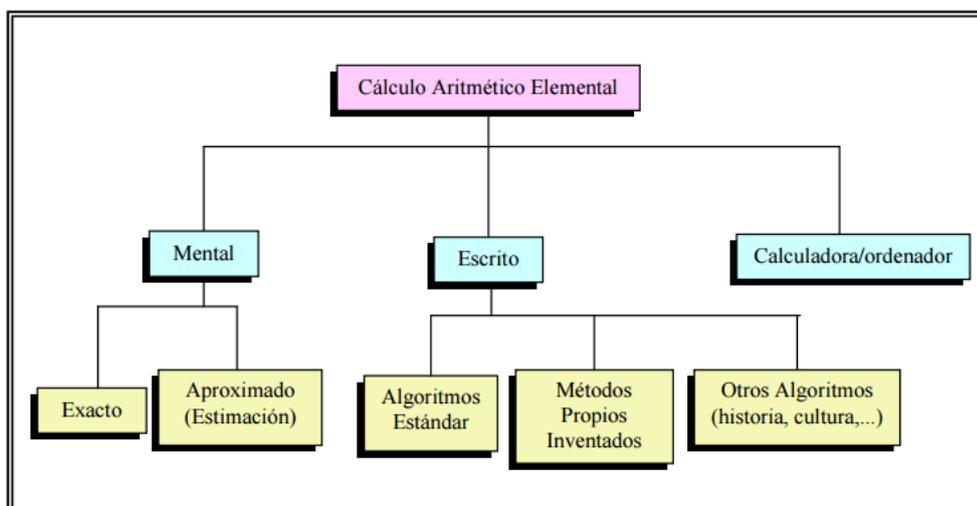


Figura 2.- Cálculo aritmético elemental en sus distintas manifestaciones.

En este trabajo el interés recae sobre el cálculo mental. Cuando el cálculo se realiza de cabeza puede ser exacto, aproximado o estimado. Cabe señalar, que el cálculo aproximado o estimado no es exacto, tan solo el cálculo exacto se conoce como “cálculo mental” y es el que utilizamos en este trabajo fin de grado. Además, nos vamos a circunscribir exclusivamente al campo numérico de los números naturales.

Todos los estudios comparten, como se aprecia en el diagrama anterior, que el cálculo aritmético engloba diferentes tipos de cálculo. Sin embargo, el objetivo de enseñanza es que los alumnos los conozcan y sepan elegir el procedimiento más adecuado a la hora de realizar un cálculo aritmético.

El sentido numérico permite resolver el mismo cálculo mediante diferentes procedimientos. Para comprender mejor de qué se trata, a continuación, se ejemplifica mediante la resolución de un problema diferentes procedimientos de cálculo. A pesar de no ser objeto de estudio la resolución de problemas en este trabajo nos parece clarificador el siguiente ejemplo.

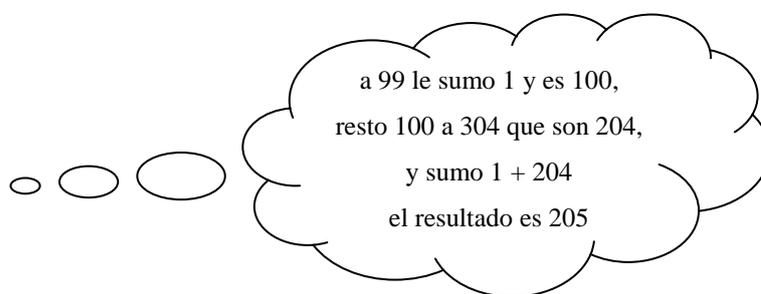
Juan tiene 304 cromos de fútbol. Esta tarde con el colegio se ha ido de excursión y ha perdido 99, ¿cuántos cromos tiene ahora?

Para resolver este problema, inicialmente tenemos que saber que al haber perdido 99 cromos, esos cromos ya no los tiene. Por tanto, a la cantidad inicial 304 hay que quitarle 99. Uno de los caminos que nos permite resolver $304 - 99$ sería

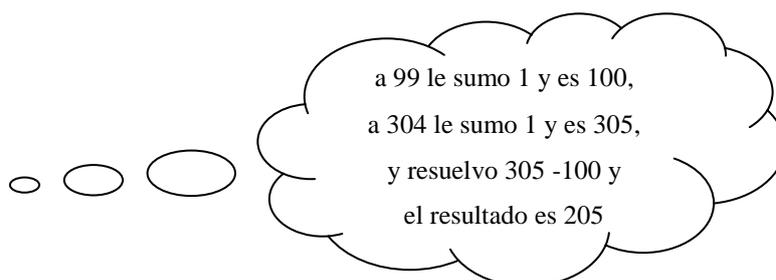
aplicar el algoritmo convencional de la resta. Para ello, basta con seguir las reglas establecidas: escribir el minuendo y debajo el sustraendo de manera que coincidan unidades con unidades, decenas con decenas y centenas con centenas. Seguidamente, se comienza la sustracción por las unidades y de derecha a izquierda por columnas y tener en cuenta la descomposición del minuendo, y se procede a realizar la resta:

$$\begin{array}{r}
 2914 \\
 \cancel{3} \cancel{0} 4 \\
 - \quad 99 \\
 \hline
 205
 \end{array}$$

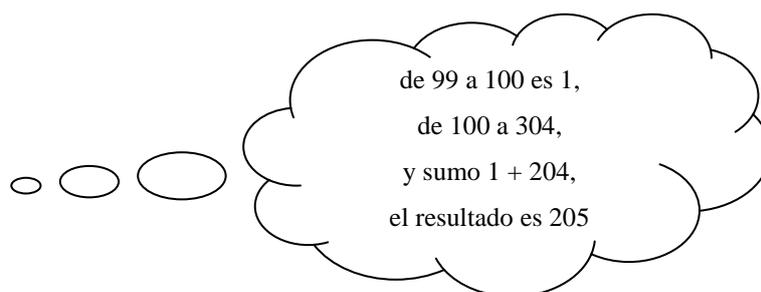
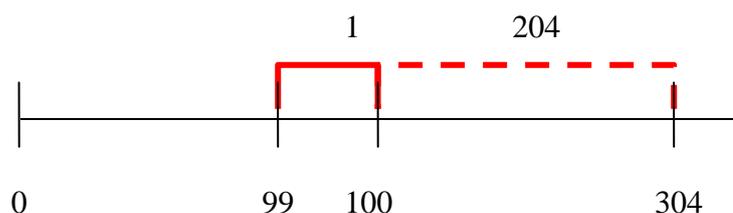
Este procedimiento lo podría realizar cualquier alumno, puesto que lo único que hay que conocer es el procedimiento de la resta y llevarlo a cabo sin cometer errores. Sin embargo, un alumno que tenga sentido numérico podría utilizar otros procesos basados en sus conocimientos sobre las relaciones entre los números, propiedades de las operaciones, etc, como por ejemplo: mediante estrategias de cálculo mental “completar el sustraendo a la decena siguiente”:



Otra estrategia de cálculo mental que permite resolver la operación está basada en las propiedades de las operaciones. En la resta conocemos que si sumamos el mismo número al minuendo y sustraendo, la diferencia es la misma. Por tanto, se puede resolver por compensación del siguiente modo:



Otro procedimiento sería pensar en la recta numérica del siguiente modo:



Estos ejemplos, ponen de manifiesto el uso flexible de los números, de algunas propiedades y las relaciones entre ellos. El uso del sentido numérico es el que permite la resolución flexible de problemas y cálculos aritméticos, entre otros.

Si el alumno no tiene claro las relaciones entre los números, el significado de las operaciones, las relaciones que se establecen entre ellas y no sabe interpretar el resultado obtenido, podemos decir, que no ha desarrollado el sentido numérico.

Si no hay enseñanza de las técnicas de cálculo mental el alumno tan sólo dispondrá del algoritmo escrito o de la calculadora, si se le permite utilizarla, para realizar el cálculo. Si esto es así, el alumno no desarrolla plenamente su sentido numérico y, en el caso de que no disponga de lápiz y papel o de una calculadora, se verá muy limitado para realizar un cálculo mental aunque éste sea elemental.

La comprensión de las relaciones entre los números, implica la habilidad para componer y descomponer los números. Es decir, saber cuando un número es mayor, menor o igual que otro, y saber componer y descomponer un número en sus respectivos órdenes de unidades de la base decimal. Por ejemplo: 120 se puede descomponer o componerse como $100 + 20$, $110 + 10$, $90 + 30$, etc. Consiste en identificar representaciones equivalentes para los mismos números y generarlos mediante composiciones y descomposiciones, así como, el conocimiento de hechos numéricos, dobles y mitades, etc.

Una mayor comprensión de los números permite al alumno establecer relaciones entre los diversos órdenes de unidades que configuran el número y relaciones entre los números naturales, decimales y las fracciones.

Esto implica por un lado, comprender la estructura del valor de posición del sistema de numeración decimal y por otro lado, favorecer la construcción de una red conceptual en la cual se contemplen relaciones como que dividir un número natural entre otro da lugar a una fracción o que los decimales son una prolongación de los naturales para aquellos números menores que la unidad. Además de otras relaciones como que los decimales pueden escribirse como fracciones con denominador 10, 100, etc.

Comprender las relaciones entre las operaciones consiste en comprender que la adición y sustracción son operaciones inversas, al igual, que la multiplicación y división. Además, la multiplicación puede considerarse una suma reiterada o la división puede resolverse por sustracciones reiteradas. Y esta última la división, se podría resolver buscando cuántas veces cabe el divisor en el dividendo o sumando varias veces el divisor.

En conclusión, en Educación Primaria el sentido numérico hace referencia a comprender el significado de los números, lo cual implica cómo está organizado el sistema de numeración decimal, las diferentes relaciones que se dan entre los números, comprender y manejar el valor posicional, así como, su aplicación en los números naturales y decimales y las diferentes representaciones de los números. Asimismo, descomponer números de forma natural, usar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar cálculos mentales, todo ello en diferentes contextos y seleccionando el método o estrategia personal más apropiado para cada caso y evaluar lo razonable de la respuesta.

Como consecuencia, un alumno con sentido numérico es capaz de seleccionar qué tipo de cálculo es el más adecuado (exacto, estimado, escrito o uso de calculadora) y las estrategias necesarias para resolver cualquier cálculo de un modo flexible.

1.2 Diferentes procedimientos de cálculo

Como vimos en el apartado anterior los diferentes procesos de cálculo aritmético son aquellos que se realizan con números y puede realizarse de cabeza,

por escrito, o con materiales manipulativos como el ábaco, la calculadora o el ordenador.

No cabe duda que en la resolución de problemas el cálculo es la parte cuantitativa que se extrae de la comprensión del enunciado, de la representación, de la situación y de la identificación de la operación aritmética cuya respuesta es un número, a calcular a partir de los datos.

A continuación, se exponen aquellos tipos de cálculos que favorecen el sentido numérico y viceversa, dado que sin sentido numérico el alumno no podrá optar por estrategias de cálculo mental (exacto, aproximado o estimado) o por métodos propios escritos inventados diferentes de los algoritmos clásicos.

El cálculo mental exacto es una serie de procedimientos mentales que realiza una persona sin la ayuda de papel ni lápiz y que le permite obtener la respuesta exacta de un cálculo aritmético. Interpretamos que los procedimientos mentales en este tipo de cálculo mental corresponden a estrategias de cálculo mental las cuales se desarrollan más adelante.

En cuanto al cálculo aproximado se trata del cálculo mental inexacto de una operación. “Es un cálculo que resulta muy útil, puesto que normalmente en la vida diaria, no se dispone de lápiz ni papel, ni de tiempo y muchas veces es suficiente con saber una respuesta aproximada.”. (Ortega y Ortiz, 2009, p. 4)

No se debe confundir cálculo aproximado con cálculo estimado. “El cálculo estimado trabaja con datos que proceden de un juicio o valoración. Suelen ser números redondos, acabados en cero, para aprovechar las ventajas de nuestro sistema de numeración. El cálculo aproximado trabaja con datos que proceden de la medición. Están condicionados por la inexactitud de los instrumentos de medida, lo que obliga a trabajar con números decimales”. (Gómez, 2006, p.4)

Estos procedimientos de cálculo exigen redes conceptuales del sistema de numeración decimal, las relaciones entre los números, las operaciones, las propiedades. Estas redes conceptuales contribuyen el sentido numérico.

En pro del sentido numérico para el cálculo aritmético, parece muy conveniente que durante el proceso de enseñanza los alumnos inventen sus propios algoritmos y comprendan y apliquen estrategias de cálculo mental y cálculo estimado.

En el caso del cálculo escrito consiste en que el alumno tiene libertad para seguir su propio camino, elabora sus algoritmos del modo que le parezca más oportuno, cómodo y atienda a la lógica respecto a su pensamiento.

Como se aprecia en las imágenes, el primer alumno dibuja 5 filas que corresponden a las 5 clases y en cada fila dibuja 23 rayas que representan a los niños de clase. Seguidamente, piensa en una adición reiterada para saber cuántos estudiantes hay en total. Este concepto es en el que se basa la multiplicación, por tanto, este alumno no tendrá dificultades en comprender el significado de la multiplicación.

El procedimiento seguido por el otro alumno consiste en dibujar 5 filas que representan a las 5 clases y 23 cuadrados que corresponden a los estudiantes pero con una diferencia respecto al alumno anterior que es la agrupación por decenas que realiza en cada clase. Supuestamente lo más sencillo después de representarlo de ese modo sería contar las decenas y después las unidades sueltas.

En ambos casos, los alumnos serían libres de seleccionar el camino más afín a su pensamiento. Los procedimientos siguen líneas de pensamiento diferente y sin embargo, son válidos matemáticamente. Puntualizar que aunque los dos procedimientos son correctos, el segundo es más rápido que el primero.

Los algoritmos tradicionales no son adecuados para fomentar el sentido numérico por diferentes motivos, por un lado; incitan al alumno a dejar de lado su propio pensamiento y hace que olvide el valor posicional de los números, por lo que el alumno pierde el sentido numérico y la enseñanza tiende a automatizar el algoritmo. Y, por otro lado, tiende a anular los procedimientos informales de los alumnos (Kamii y Dominick, 1998).

Todos estos argumentos coinciden en que la enseñanza de los algoritmos convencionales durante la etapa de Primaria es contraproducente en cuanto al desarrollo del sentido numérico. Nuestra propuesta es que antes de enseñar los algoritmos de cálculos los alumnos reciban enseñanza de estrategias de cálculo mental. Posteriormente, cuando los alumnos comprendan y utilicen los algoritmos deberán decidir cuál es el procedimiento de cálculo más adecuado en función del contexto y de los números implicados en la operación.

En este sentido, “el uso de la calculadora cuestiona la enseñanza de los algoritmos tradicionales y su papel en la escuela” (Barba y Calvo, 2011, citado por Bracho, 2013, p.71). Señalar que se trata de un recurso que los alumnos pueden seleccionar cuando la situación o los números involucrados en los cálculos lo requieren o justifican.

Además, es una herramienta que permite llevar a cabo prácticas anticipatorias e investigar propiedades de los números y de las operaciones, así como, verificar resultados obtenidos mediante otros procedimientos.

Por último, en cuanto a los algorítmicos históricos aunque en algunas ocasiones convendría llevarlos al aula porque permiten realizar la operación profundizando en la justificación del algoritmo. Sin embargo, consideramos que puede dificultar el sentido numérico dado que las justificaciones no son elementales, como se muestra en los dos ejemplos que se detallan a continuación.

Un claro ejemplo de lo citado se puede observar en el algoritmo de “celosía”, también conocido como multiplicación de rejilla, hindú o de Fibonacci. Fue un algoritmo de multiplicación utilizado entre los siglos XIV y XVI en Europa y el cual fue sustituido por el actual.

Se trata de un algoritmo que puede aplicarse también a las sumas. Es de fácil utilización ya que evita las llevadas hasta el final del proceso y permite multiplicar utilizando la descomposición de los números puesto que siempre se multiplican dos números de un solo dígito.

Se dibuja una rejilla con tantas celdillas como cifras tengan los números. Cada celdilla se divide con una diagonal por la mitad. Se coloca el multiplicando en la parte superior de la rejilla y el multiplicador a la derecha. Seguidamente, se comienza a multiplicar cada cifra, colocando las decenas en la parte superior de la celdilla y las unidades en la inferior. Finalmente se suma en diagonales y el resultado del producto aparece debajo y a la izquierda de la rejilla. En el siguiente ejemplo se muestra el procedimiento de la multiplicación 325×47 .

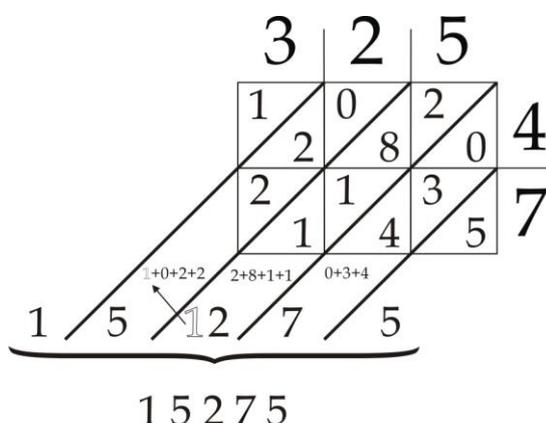


Figura 6. Multiplicación en “celosía”.

Asimismo, otro algoritmo histórico como la multiplicación china o también conocido como multiplicación Maya, aparentemente parece un algoritmo sencillo de utilizar pero que su esencia no favorece el sentido numérico.

Este algoritmo consiste en disponer las varillas de bambú en horizontal para representar el multiplicando y de forma vertical el multiplicador. En la actualidad se trazan líneas en una hoja, una vez realizada la cuadrícula se suman las intersecciones de cada varilla en diagonal, comenzando siempre desde la diagonal inferior. Obtenidos esos resultados, debemos sumar las unidades de cada número y de este modo se obtiene el resultado. En la siguiente imagen permite visualizar todo el proceso de la multiplicación 12×34 .

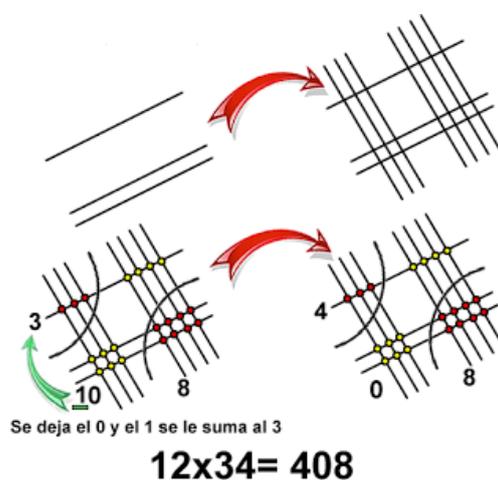


Figura 7. Multiplicación china.

Este tipo de procedimiento puede parecer muy apropiado para Primaria, puesto que prácticamente se les puede presentar como un juego. Sin embargo, al igual que en la multiplicación de celosía, el alumno no ve el número como un todo, sino como un conjunto de dígitos y el procedimiento de cálculo no es de fácil comprensión para los escolares.

Durante su desarrollo aparecen unos números independientes de los otros conduciendo al alumno a perder la perspectiva de la multiplicación de la que parte, ya que el resultado se obtiene de las diagonales de las intersecciones. Además, es de difícil gestión si intervienen factores que tienen ceros.

En conclusión, se puede decir que no todos los procedimientos de cálculo favorecen el sentido numérico. El desglose de cada tipo de procedimiento de cálculo realizado en este apartado ha puesto de manifiesto los cálculos que permiten un buen

sentido numérico como el cálculo mental (exacto, aproximado o estimado) y el cálculo escrito cuando se utilizan métodos propios inventados.

1.3 El cálculo mental y el cálculo algorítmico en las aulas de Educación Primaria

La implantación del cálculo mental como eje vertebrador de la enseñanza del cálculo implica definir unos nuevos contenidos centrados en estrategias y potenciar el aprendizaje de las propiedades de las operaciones y estructura del sistema posicional.

Cuando se utiliza el término cálculo algorítmico se hace referencia a los métodos de cálculo escritos correspondientes a las cuatro operaciones aritméticas básicas: la suma, resta, multiplicación y división.

Algunas de las diferencias del cálculo mental y cálculo algorítmico las podemos encontrar en las definiciones que se expone a continuación.

Un algoritmo es una sucesión finita de reglas elementales, regidas por una prescripción precisa y uniforme, que permite efectuar paso a paso, en un encadenamiento estricto y riguroso, ciertas operaciones de tipo ejecutable, con vistas a la resolución de los problemas pertenecientes a una misma clase. (Ifrah, 1998, citado por Gallardo 2014, p.1)

Como se observa las características entre ambos cálculos son contrarias. En el cálculo aritmético las reglas son cerradas y tienen un orden determinado y no se tiene en cuenta el significado de los datos numéricos, los algoritmos permiten operar sin reparar en los números con los que se está calculando. Solo se trata de seguir los pasos que aseguran llegar al resultado correcto si no se comete ningún error en el camino.

Por el contrario, el cálculo mental se basa en un método abierto basado en los conocimientos de los números y sus relaciones, así como, de las propiedades de las operaciones.

Puede decirse que una de las ventajas del algoritmo escrito es que se puede calcular sin comprender lo que subyace o las relaciones que se establecen entre los números implicados. Estas características lo convierten en una herramienta fiable, dado que funciona siempre.

A pesar de reconocer que la enseñanza de los algoritmos es un procedimiento mecánico, memorístico, que esconde la lógica del razonamiento y no contribuye al sentido numérico es al que más tiempo de enseñanza se le dedica en el aula.

Uno de los argumentos que encontramos del por qué se mantiene la enseñanza de los algoritmos es “porque favorece que el alumno tenga éxito en la enseñanza “ (Maier, 1987, citado en Bracho, 2013, p. 72)

Otro argumento a considerar es la figura del maestro, las causas que pueden explicar las reticencias de los maestros a la enseñanza del cálculo mental en el aula son las que detalla Gómez (2005, p. 12):

- Creencias inapropiadas que obstaculiza el aprendizaje de métodos generales, es una pérdida de tiempo porque la calculadora puede suplirlo, se necesita una buena memoria, etc.
- Los sentimientos negativos del profesor: su propia dificultad y el temor al fracaso ante sus alumnos.
- Viejas teorías obsoletas tal como que el cálculo mental se une con la inteligencia, o con la vieja teoría de "la disciplina mental", utilizada para identificar a los estudiantes brillantes con los rápidos y a los lentos con los torpes.
- El ambiente social que vincula el cálculo mental a profesiones poco consideradas.
- La falta de éxito de los estudiantes: desánimo, pérdida de interés, falta de concentración.
- La planificación oficial: masificación en el aula, presión de los programas, el escaso tiempo para la clase de matemáticas, el tratamiento del cálculo mental en "aparte" en los libros de texto.
- Algunas prácticas usuales “a ver lo que has hecho”, "a ver quién contesta antes", el énfasis en el cálculo estándar que no deja sitio para la intervención libre.
- Sobrevaloraciones equivocadas: el éxito, la rapidez.
- La falta de sugerencias y materiales didácticos bien fundamentados y actualizados.

Recapitulando lo citado hasta el momento se hace evidente la importancia que tiene en el aula el aprendizaje del cálculo mental para el desarrollo del sentido numérico. Sin embargo, no hay que olvidar que ambos cálculos, mental y escrito, se encuentran recogidos en el currículo nacional y son contenidos imprescindibles para la adquisición de la competencia matemática.

En los últimos años ha habido un largo debate respecto a lo más conveniente en cuanto a la enseñanza de los algoritmos estándar escritos para las cuatro operaciones aritméticas básicas o priorizar la enseñanza del cálculo mental en el aula. Sin embargo, en las aulas se sigue insistiendo en el cálculo algorítmico estándar en detrimento del cálculo mental.

A pesar de los beneficios del cálculo mental y estar presente en el currículo de Educación de Primaria, se puede decir que su enseñanza ésta actualmente en desventaja respecto a a la de los algoritmos escritos, los cuales siguen siendo los contenidos organizadores del currículum.

Se viene observando en las aulas un intento de enseñanza en cuanto a las estrategias de cálculo mental. Este hecho, se puede comprobar en las diferentes propuestas alternativas que existen en la actualidad de cálculo flexible y creativo (Martínez-Montero, 2011) bajo el nombre de “método ABN” (Algoritmo Abierto Basado en Números). Mediante este método el autor persigue prescindir de una enseñanza mecánica y memorística y apuesta por darle al alumno libertad en la toma de decisiones para realizar cálculos escritos alternativos a los algoritmos.

Actualmente, son minoritarias las propuestas de enseñanza basadas en el cálculo flexible como la del método ABN o en la del QUINZET centrada en el cálculo mental.

A pesar de que los documentos curriculares fijan como contenido el cálculo mental su incorporación a las aulas queda relegada a la memorización de los hechos numéricos. Las propuestas de las editoriales de libros de texto tampoco contribuyen a cambiar la tendencia apuntada. En efecto, las propuestas de los libros de texto no presentan una enseñanza lógica y sistematizada de cálculo mental como se puede observar en el análisis del libro de texto de Primaria llevado a cabo en este informe y que detallaremos en el siguiente capítulo .

Por tanto, podemos conjeturar que en la mayoría de las aulas en la actualidad no se lleva a cabo una adecuada intervención en el aula que permita al alumno alcanzar las suficientes habilidades para desplazar en la mayoría de los cálculos al algoritmo escrito, dado que una gran parte del profesorado sigue el libro de texto en su praxis diaria.

Cuando hablamos de cálculo mental aludimos a una manera de calcular sin ayuda externa, de modo que realiza mentalmente todos los pasos y cálculos

necesarios para el cálculo de cualquier operación sencilla, mediante estrategias personales basadas en los conocimientos previos.

Por ello, el cálculo mental en el aula requiere plantear una enseñanza sistemática basada en la búsqueda de estrategias de cálculo consensuadas en el aula mediante una metodología participativa de los alumnos. Un programa que integre el cálculo mental, no debe buscar la rapidez, la inmediatez, o la uniformidad en los procedimientos, sino el análisis de las situaciones numéricas, la comprensión y la adquisición de los conceptos relacionados con la operatoria y la numeración (Gómez, 1995)

En esta misma línea sería aconsejable estimular al alumno en la aplicación de procedimientos informales de cálculo puesto que contribuye a desarrollar en él la apreciación del significado y estructura de las operaciones aritméticas.

Si deseamos que el alumno desarrolle estrategias personales y adquiera sentido numérico sería deseable al principio trabajar con estrategias informales y finalizar con los procedimientos estándares más formales. (Meindert, 1997, citado en Ortega y Ortiz, 2005, p.4)

Como se ha ido confirmando a lo largo de todo este punto es necesario un cambio de enseñanza que abogue por la inclusión en el aula del cálculo mental puesto que permite el sentido numérico y posponga la enseñanza de los algoritmos escritos a un momento posterior, cuando los alumnos conozcan determinadas estrategias de cálculo mental.

Proponemos la enseñanza sistemática de estrategias de cálculo mental, dado que la matemática es una actividad humana, que se tiene que nutrir de la propia experiencia, que debe adaptarse a la idiosincrasia de los alumnos y que debe estar conectada con la vida y con las necesidades reales de los sujetos.

El cálculo mental debe tener un lugar destacado en el currículo de Educación Primaria porque se trata de una habilidad útil para los escolares que, además, propicia el sentido numérico.

CAPÍTULO II – ANÁLISIS DE LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO MENTAL

En este capítulo vamos a estudiar la situación actual de la enseñanza del cálculo mental en las aulas de Educación Primaria a partir de dos fuentes documentales: el currículo oficial nacional y autonómico y un libro de texto de una prestigiosa editorial que siguen en el aula dónde se va a realizar la fase experimental. Antes de realizar este análisis exponemos la importancia de enseñar estrategias de cálculo mental a los escolares de Educación Primaria.

2.1 Importancia de la enseñanza de estrategias de cálculo mental

Diferentes organismos señalan la necesidad de enseñar el cálculo mental en el aula. A medida que los niños de los niveles Pre-K-2 (5 a 8 años) van comprendiendo el significado de los números naturales y de las operaciones de adición y sustracción la enseñanza debería centrarse en las estrategias de cálculo que desarrollen la flexibilidad y la fluidez. (National Council of Teachers of Mathematics, 2003, p. 37, citado en Ortega y Ortiz, 2005, p. 3)

La LOMCE, también pone de manifiesto su importancia y en el currículo de Aragón se concreta del siguiente modo: “es imprescindible, desde los primeros niveles de la etapa, el desarrollo de estrategias personales de estimación y cálculo mental, que, una vez automatizadas, se utilizarán para la creación y práctica de algoritmos diversos para cada operación”. (BOA de 20 de junio de 2014, p. 19542).

La importancia de las estrategias de cálculo mental se basan en que permiten al alumno comprender mejor el sistema decimal, las relaciones entre los números, adquirir el sentido numérico, etc. Es decir, permite ir más allá de los cálculos convencionales.

Por tanto, para algunos autores el cálculo mental es un medio excepcionalmente adecuado para favorecer en los alumnos:

- el desarrollo de la atención, la concentración y la memoria
- la familiarización progresiva con los números, al punto de poder “jugar con ellos”, expresar un número de variadas maneras, según el contexto del cálculo, y aprovechar las propiedades algebraicas de las operaciones numéricas básicas (asociatividad, conmutatividad, distributividad)

- la expresión, puesta en común, discusión y comparación —en una dinámica colectiva— de una variedad de procedimientos y estrategias para calcular, en función de las relaciones entre los números con los que se está operando. (Lethielleux, 2005, p. 17-18, citado por Gálvez et al, 2011, p. 11)

Conviene señalar la influencia positiva del cálculo mental en el desarrollo del sentido del número. Además, el cálculo mental permite conocer las concepciones que tienen los estudiantes sobre los procedimientos de cálculo, proporciona la base para el cálculo aproximado, favorecer el desarrollo de capacidades intelectuales, proporciona versatilidad e independencia de procedimientos, fomentar la reflexión para decidir la mejor estrategia, favorecer la concentración, proporcionar confianza para realizar cálculos (Gómez-Alfonso, 1994).

Recapitulando todos estos beneficios, son muchos los que consideran que el cálculo mental debería ocupar un espacio importante dentro del aula. Dado que el cálculo mental da sentido al cálculo algorítmico, parece deseable comenzar la enseñanza del cálculo mental antes que la de los algoritmos.

Sin embargo, son pocas las propuestas de enseñanza del cálculo mental. Entre ellas cabe destacar la de Jiménez-Ibáñez (2010), la de Ortega y Ortiz (2002) o la de El Quinzet que es un centro de recursos matemáticos no institucional constituido en el año 1988.

Lo que se expone a continuación se deriva del estudio y valoración de dos fuentes: el currículo oficial de Educación Primaria y el libro de texto de la editorial Vicens Vives el cual siguen los alumnos implicados en la experimentación de esta memoria.

El análisis de ambas fuentes documentales permiten caracterizar la enseñanza del cálculo mental en las aulas de Educación Primaria.

2.2 El cálculo mental en el currículo de Educación Primaria.

Este punto recoge lo que el currículo nacional de Educación Primaria expone en cuanto al cálculo mental y la adaptación de dichos contenidos en el currículo de Aragón en Educación Primaria.

El currículo nacional se concreta en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria y uno de los objetivos a lograr en el área de matemáticas es “alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito”.

El currículo nacional alerta que “lograr una verdadera alfabetización numérica no es sinónimo de dominio de los algoritmos de cálculo escrito”. (MECD, BOE de 1 de marzo de 2014, p. 19386)

En este objetivo se refleja el nuevo enfoque que adopta el sistema educativo respecto al cálculo mental. Apuesta por una enseñanza matemática para la vida, donde la instrucción matemática permita al alumno dominar el sistema numérico y sus relaciones y generar estrategias que vayan más allá del algoritmo escrito.

Entendiendo el cálculo mental desde esta perspectiva el currículo autonómico de Aragón, recogido en la Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, expone lo siguiente: “es imprescindible, desde los primeros niveles de la etapa, el desarrollo de estrategias personales de estimación y cálculo mental, que, una vez automatizadas, se utilizarán para la creación y práctica de algoritmos diversos para cada operación” (BOA de 20 de junio de 2014, p. 19542).

En el currículo autonómico de Aragón los contenidos se organizan en cinco grandes bloques: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas. Números. Medida. Geometría. Estadística y probabilidad. El tema que nos ocupa se concreta en el Bloque: Números.

Los contenidos que se abarcan en primero de Primaria en relación al cálculo mental corresponden a la enseñanza de estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma y resta.

Los criterios de evaluación para este contenido son: Crit.MAT.2.4./Crit.MAT.2.6. Operar con los números aplicando las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (cálculo mental).

En segundo de Primaria en los contenidos se especifica la enseñanza de estrategias personales de cálculo mental en cálculos simples relativos a la suma, resta, dobles y mitades.

En cuanto a los criterios de evaluación para estos contenidos se establecen los mismos que en el curso anterior, siendo los siguientes: Crit.MAT.2.4./Crit.MAT.2.6.

En los siguientes cursos tercero, cuarto, quinto y sexto de Primaria se especifican los mismos contenidos: “Estrategias de cálculo mental”.

Al igual que los criterios de evaluación, siendo los siguientes: Crit.MAT.2.3. Realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental, haciendo referencia implícita a las propiedades de las operaciones, en situaciones de resolución de problemas de la vida cotidiana y el entorno inmediato y Crit.MAT.2.4./Crit.MAT.2.6. Operar con los números aplicando las estrategias personales y los diferentes procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (cálculo mental, tanteo), usando el más adecuado.

Por otro lado, el currículo establece que el cálculo mental fomenta el desarrollo de la competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT).

2.2.1 Valoración crítica de los documentos curriculares

Diariamente, nos vemos inmersos en numerosas situaciones que se requiere el cálculo de diferentes operaciones. Como muy bien se especifica en ambos currículos el conocimiento y aprendizaje de estrategias de cálculo mental son objetivos para el logro de la alfabetización numérica.

No podemos olvidar el papel que juega el cálculo mental en la adquisición de los conceptos relacionados con la operatoria, con la profundización de los conocimientos matemáticos intuitivos antes de su formalización y como medio para promover la reflexión de los estudiantes y la evaluación y reorientación del trabajo del profesor.

Sin embargo, conociendo la relevancia y repercusión que tiene la adquisición de estrategias de cálculo mental para la vida en general, no se refleja en los documentos analizados una sistematización en la enseñanza de las mismas. Por el contrario, los contenidos se especifican en primero y segundo de Primaria y se generalizan en los siguientes cursos sin presentar una ordenación de los contenidos por orden de dificultad en cuanto a las operaciones (suma, resta, multiplicación y división) ni en relación a los valores numéricos de las operaciones.

Por otro lado, en los criterios de evaluación sí que se infiere que debe de haber una enseñanza sistematizada de estrategias de cálculo mental, dado que se le solicita al alumno ser capaz de “realizar operaciones y cálculos numéricos mediante diferentes procedimientos, incluido el cálculo mental” (Crit.MAT.2.3) y “operar con los números aplicando las estrategias personales y los diferentes

procedimientos que se utilizan según la naturaleza del cálculo que se ha de realizar (cálculo mental, tanteo), usando el más adecuado” (Crit.MAT.2.4./Crit.MAT.2.6).

Para que el alumno responda positivamente a los criterios citados, previamente, ha tenido que producirse una enseñanza durante toda la Primaria de estrategias generales y particulares para sumar, restar, multiplicar y dividir.

El currículo no indica qué estrategias deberían ser objeto de enseñanza y mucho menos indica la secuencia para la enseñanza de éstas a lo largo de los cursos de la etapa. En estas condiciones, concluimos que el currículo no orienta al docente que pretenda introducir el cálculo mental en el aula de Educación Primaria.

2.3 Análisis del libro de texto

En este apartado se lleva a cabo el análisis de la propuesta didáctica del libro de texto de matemáticas, en relación a la enseñanza de estrategias de cálculo mental para la suma, resta, multiplicación y división.

Este libro es el que siguen los alumnos del curso 5º de Primaria, en la cual se lleva a cabo la experimentación de este informe. Los fragmentos del libro de textos analizados se muestran en el **anexo I**.

A continuación, se procede a concretar los contenidos en cada uno de los temas sobre cálculo mental y por otro lado, se compara con las estrategias de cada una de las operaciones.

Antes de comenzar, resaltar que la editorial trabaja el cálculo mental en todos sus libros, desde 1º de hasta 6º de Primaria. En cuanto al libro que nos atañe, éste consta de 15 temas, en los cuales al final de cada uno de ellos, hay un apartado que desarrolla la enseñanza de estrategias de cálculo mental. Para ello, realizan una breve explicación de la que se va a enseñar y posteriormente, proponen una serie de ejercicios para practicarla. A continuación se procede al análisis por temas:

En el **tema 1 Números naturales. Suma y resta** se presenta una estrategia de estimación que no es de cálculo mental que se denomina “estimar resultados de sumas y restas”. En primer lugar, aparece una breve explicación del redondeo para posterior realizar la estimación mediante dos ejemplos, en los cuales se resuelven una suma y una resta.

$$\begin{array}{r}
 1980 \\
 + 3270 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \xrightarrow{\text{redondeo}} \\
 \xrightarrow{\text{estimación}}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 2000 \\
 + 3000 \\
 \hline
 5000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 8270 \\
 - 3905 \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \xrightarrow{\text{redondeo}} \\
 \xrightarrow{\text{estimación}}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 8000 \\
 - 4000 \\
 \hline
 4000
 \end{array}$$

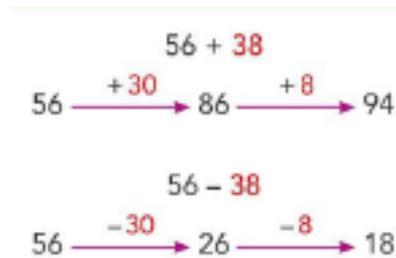
En el **tema 2 Multiplicación y división de números naturales** se presenta una estrategia para multiplicar varios números de una cifra. Inicialmente, aporta una breve explicación para aplicar la propiedad asociativa de la multiplicación, a pesar de que no la menciona. El texto propone como estrategia elegir dos factores cuyo producto termine en cero, cuando los alumnos tengan que realizar multiplicaciones de tres o más números naturales. El texto ejemplifica la aplicación de la propiedad asociativa de la multiplicación del siguiente modo:

$$\begin{array}{c}
 5 \times 7 \times 4 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 20 \times 7 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 140
 \end{array}$$

En relación con el **tema 3 Múltiplos y divisores** la estrategia a enseñar consiste en “omitir los ceros finales del dividendo” en el momento de realizar la división y, posteriormente, añadir los ceros omitidos a la derecha del cociente.

$$\begin{array}{l}
 15 : 3 = 5 \\
 150 : 3 = 50 \\
 1.500 : 3 = 500 \\
 15.000 : 3 = 5.000 \\
 150.000 : 3 = 50.000
 \end{array}$$

En el **tema 4 Fracciones** la estrategia que presenta es “sumar y restar números de dos cifras”. Para el cálculo de sumas y restas introduce dos estrategias muy básicas: la estrategia de la suma “descomponer uno o los dos sumandos” y la de la resta “descomponer el sustraendo”.



Nos llama la atención que el texto presente estas estrategias aditivas básicas después de haber presentado en el tema anterior una estrategia multiplicativa que conceptualmente es mucho más compleja. El libro de texto no presenta las estrategias siguiendo un criterio explícito que bien podría ser el de graduación de la dificultad conceptual de las estrategias a enseñar.

Otra cuestión a resaltar es que el texto no admite la posibilidad de utilizar otras estrategias más adecuadas que la descomposición aditiva de uno de los sumandos.

Por ejemplo, cuando el texto propone la operación $359 + 37$, propone como respuesta única de los alumnos piensen: $359 + 30 + 7$. Sin embargo, existen otras estrategias valiosas que merecerían ser exploradas como la de completar a una centena:

$$359 + 37 = 300 + 59 + 37 = 300 + 59 + 41 - 4 = 300 + 100 - 4 = 396$$

Al igual que en el caso de la suma, la presentación de una única estrategia para la resta nos parece conceptualmente pobre. Por ejemplo, cuando el texto propone la operación $752 - 28$, el texto propone como respuesta única:

$$752 - 20 - 8 = 732 - 8 = 724$$

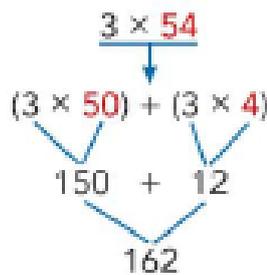
Sin embargo, existen otras estrategias valiosas que merecerían ser exploradas como la de completar el sustraendo a la decena siguiente:

$$752 - 28 = 752 - 30 + 2 = 722 + 2 = 724$$

Para realizar esta operación otra estrategia válida es la de compensar:

$$752 - 28 = (752 + 2) - (28 + 2) = 724$$

En cuanto al **tema 5 Operaciones con fracciones** se muestra la estrategia de cálculo mental para multiplicar un número de una cifra por otro de dos cifras y le acompaña las siguientes indicaciones; primero multiplico las decenas y luego, las unidades.



En la imagen se observa la descomposición del multiplicador. Sin embargo, no muestra ningún otro ejemplo, que permita ver la generalización de esta estrategia en ambos factores.

El texto ha tomado la decisión de presentar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma en el caso particular de que el multiplicando es de una cifra y el multiplicador es un número de dos cifras. Todos los ejercicios que propone siguen esta pauta.

El texto no se plantea ejemplificar la propiedad conmutativa dado que no propone multiplicaciones con números de dos cifras en el multiplicando y de una cifra en el multiplicador. En consecuencia, la presentación de esta estrategia es muy restrictiva porque se reduce a multiplicaciones particulares.

Al igual que hemos comentado en el análisis del tema anterior, la presentación de una única estrategia para la multiplicación nos parece conceptualmente muy pobre.

Por ejemplo, cuando el texto propone a los alumnos calcular 5×39 , nos parece que una estrategia más económica consiste en descomponer el multiplicador como $40-1$ y pensar del siguiente modo:

$$5 \times (40 - 1) = 200 - 5 = 195$$

Otra opción económica y valiosa es pensar en hacer la mitad de 39×10 , obteniendo 195.

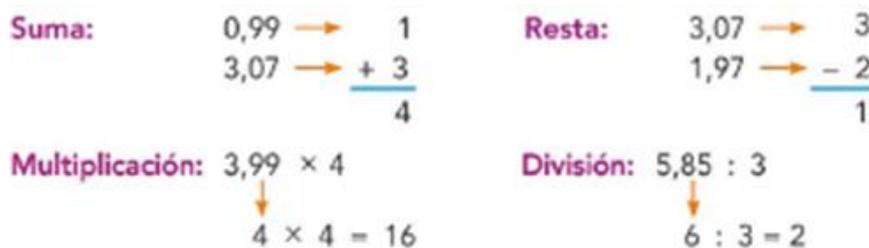
Sería deseable y muy conveniente presentar a los alumnos diferentes estrategias para realizar multiplicaciones, algo que no hace el libro de texto.

En el **tema 6 Números decimales** está dedicado a multiplicar un número por 11. Ofrece la siguiente explicación de la estrategia; es igual que multiplicar por 10 y, luego, sumar el número al resultado obtenido. En este caso, el texto presenta la estrategia de descomponer el multiplicador (11) como $10 + 1$ con la intención de aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.

Se trata de una estrategia muy particular. Se echa en falta la enseñanza de estrategias análogas para otro tipo de multiplicaciones donde el multiplicador sea un número de dos cifras distinto de 11.

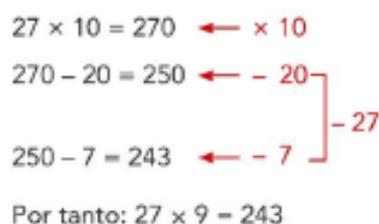


Respecto al **tema 7 Operaciones con números decimales**, introduce la estimación en el cálculo de la suma, resta, multiplicación y división de números naturales. Y, expone las siguientes instrucciones; redondear a las unidades y resolver. Los autores del texto presentan la técnica de redondeo para estimar cálculos operatorios. Al igual que hicieron en el tema 1, los autores del texto confunden las técnicas de estimación con las estrategias de cálculo mental



En el **tema 8 Longitud y Superficie** se desarrolla la estrategia “completar el multiplicador a la decena” en las multiplicaciones de números de dos cifras por el número 9. Es evidente que se trata de una estrategia de carácter particular porque tan sólo puede aplicarse en operaciones concretas. Sin embargo, es necesario enseñarla.

Realizan una breve explicación, siendo la siguiente; multiplicamos por 10 y luego restamos el número.



En cuanto al **tema 9 Masa y capacidad** se centra en dividir un número par de dos cifras entre 2. La estrategia se basa en descomponer: el dividendo como

suma de un múltiplo de 20 y otro número menor que 20 para, posteriormente, dividir entre 2 ambos sumandos.

Como en el tema anterior, se trata de una estrategia de carácter particular porque tan sólo puede aplicarse en operaciones muy concretas. Entendemos que este tipo de estrategias particulares deben ser enseñadas en el marco de una propuesta de enseñanza sistemática, gradual y que se desarrolle a lo largo de los cursos de la Educación Primaria.

a. Si las dos cifras son números pares, cada cifra se divide entre 2:

$$84 \xrightarrow{:2} 42$$

b. Si la cifra de las decenas es impar:

$$\begin{array}{ccc} 74 & \xrightarrow{:2} & 37 \\ \hline 60 + 10 + 4 & \xrightarrow{:2} & 30 + 5 + 2 \end{array}$$

En el **tema 10 Rectas y Ángulos** se propone una estrategia para casos particulares como “multiplicar por 5”. El texto deja bajo la responsabilidad del docente la justificación de porqué multiplicar primero por 10 y después dividir entre 2.

$$\begin{array}{ccccc} 24 & \xrightarrow{\times 10} & 240 & \xrightarrow{:2} & 120 \\ & & & & \uparrow \\ & & & & \times 5 \end{array}$$

Se presenta una estrategia particular para realizar multiplicaciones por 5. En este caso, el texto acierta cuando presenta la estrategia después de haber introducido la división entre 2, en el tema anterior.

Respecto al **tema 11 Sistema Sexagesimal** se centra en la estrategia para casos particulares “dividir un número entre 5”. La explicación que exponen es la siguiente: dividir entre 5 es lo mismo que dividir entre 10 y multiplicar el resultado por 2.

$$\begin{array}{ccccc} 70 & \xrightarrow{:10} & 7 & \xrightarrow{\times 2} & 14 \\ & & & & \uparrow \\ & & & & :5 \end{array}$$

Para aplicar esta estrategia sería conveniente recordar el criterio de divisibilidad entre 5, algo que el texto omite. Además, tal como se propone en el texto obliga a trabajar con decimales en los cálculos, como por ejemplo:

$$145 : 5$$

$$\text{primero divido entre 10} \longrightarrow 145:10= 14,5$$

$$\text{el resultado lo multiplico por 2} \longrightarrow 14,5 \times 2 = 29$$

Los autores del texto deberían presentar una estrategia más efectiva que consiste en multiplicar primero por 2 y el resultado se divide entre 10, como por ejemplo:

$$65 : 5 =$$

$$\text{primero multiplico por 2} \longrightarrow 65 \times 2 = 130$$

$$\text{el resultado lo divido entre 10} \longrightarrow 130 : 10 = 13$$

Esta segunda técnica permite eludir la presencia de números decimales.

En el **tema 12 Figuras planas** presentan la estrategia para sumar números que terminan en 9. Es decir, se aplica la estrategia “completar un sumando a la decena, centena siguiente”. El texto ejemplifica la estrategia para la suma $36 + 49$, diciendo “para sumar 49, sumamos 50 y restamos 1”. Sin embargo, elude generalizar la estrategia para otras sumas que propone realizar a los alumnos como, por ejemplo, $116 + 79$.

Consideramos que los alumnos de 5º curso son capaces de comprender una estrategia elemental como la que se presenta y hasta deberían ser invitados a que realizasen una formulación verbal de la misma, cuestión ésta que el texto no realiza ni propone a los alumnos.

$$\begin{array}{r}
 36 + 49 \\
 | \quad | \\
 36 + 50 - 1 \\
 | \quad / \\
 86 - 1 = 85
 \end{array}$$

En cuanto al **tema 13 Movimiento en el plano y áreas de figuras** se muestra el modo de multiplicar un número por 0,5. En la explicación únicamente se especifica que multiplicar por 0,5 es lo mismo que dividirlo entre 2. El texto no presenta una estrategia del cálculo mental, únicamente recuerda un hecho

numérico que los alumnos de 5° curso deberían conocer: que multiplicar por 0,5 es lo mismo que dividir entre 2.

$$\begin{array}{r}
 50 \\
 \times 0,5 \\
 \hline
 25,0
 \end{array}
 \longleftrightarrow
 \begin{array}{r}
 50 \overline{)2} \\
 10 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Parece conveniente establecer una relación entre ambas operaciones. En 5° de Primaria los alumnos tienen interiorizado que al dividir un número entre 2 se obtiene su mitad. Sin embargo, es probable que tengan dificultades en inferir que multiplicando por 0,5 se obtiene su mitad, puesto que los alumnos asocian la multiplicación con la suma reiterada.

Se podría proponer relacionar el número decimal con su fracción correspondiente, como por ejemplo;

$$0,5 = 1/2$$

Por tanto, si multiplicamos se comprueba que su resultado es la mitad.

$$50 \times 1/2 = 50/2 = 25$$

En el **tema14 Cuerpos Geométricos** se propone multiplicar por 0,25. Como en el tema anterior, la explicación que exponen es la siguiente: multiplicar por 0,25 es lo mismo que dividir entre 4. Resulta sorprendente que el texto enseñe esta estrategia particular para multiplicar por el decimal 0,25 sin haber presentado antes la estrategia particular de multiplicar un número natural por 25.

$$\begin{array}{r}
 36 \\
 \times 0,25 \\
 \hline
 180 \\
 72 \\
 \hline
 9,00
 \end{array}
 \longleftrightarrow
 \begin{array}{r}
 36 \overline{)4} \\
 0 \\
 \hline
 9
 \end{array}$$

Y por último, en el **tema 15 Estadística y Probabilidad** se muestra multiplicar un número por 0,1. La explicación que le acompaña es la siguiente; multiplicar un número por 0,1 equivale a dividirlo entre 10. Como ocurre en el tema 13, el texto no presenta una estrategia del cálculo mental, únicamente recuerda un hecho numérico que los alumnos de 5° curso deberían conocer: que multiplicar por 0,1 es dividir entre 10.

$$\begin{array}{r}
 32 \\
 \times 0,1 \\
 \hline
 3,2
 \end{array}
 \quad \longleftrightarrow \quad
 32 : 10 = 3,2$$

2.3.1 Valoración crítica del libro de texto

En un primer análisis de la secuencia didáctica que ofrece el libro en relación con estrategias de la suma, resta, multiplicación y división, se puede decir, que el libro no sigue un orden metodológico ni sistemático en la enseñanza de las mismas. Es más, podemos concretar que no hay una enseñanza sistemática de estrategias de cálculo mental.

En primer lugar, en los temas 1 y 7 el texto presenta dos técnicas de estimación que desarrolla competencias numéricas diferentes del cálculo mental.

En segundo lugar, la mayoría de los temas no guarda relación la estrategia propuesta con los contenidos que se trabajan en el tema. Constatamos que no hay una secuenciación en la presentación de las estrategias. Resulta sorprendente que se presenten, de modo aleatorio, estrategias para operar números naturales y números decimales.

Tampoco hay una secuenciación de las estrategias atendiendo a la operación aritmética, comenzando por la suma y resta y siguiendo por la multiplicación y división. El texto presenta las estrategias de la suma en los temas 4 y 12, después de haber presentado estrategias de la multiplicación y división.

La propuesta de enseñanza en cuanto a estrategias de la suma y resta de números naturales son las siguientes; sumar y restar números de dos cifras descomponiendo un sumando en el caso de la suma y el sustraendo en la resta; sumar números que terminan en 9, es decir, completar a la decena, centena siguiente.

El texto, desarrolla algunas de las estrategias para la suma, aunque no todas, puesto que no aparecen las siguientes estrategias: compensar, cambiar el orden de los sumandos, asociar sumandos y omitir ceros finales.

En cuanto a la resta, sucede lo mismo que en la suma. En el libro se trabajan algunas estrategias de la resta, excepto compensar y omitir ceros finales.

Respecto a las estrategias de la multiplicación se enseñan estrategias particulares, salvo la que presentan en el tema 5 y que consiste en multiplicar un número de una cifra por otro de dos cifras; multiplicar varios números de una cifra

(buscando dos factores cuyo producto termine en cero), multiplicar un número de una cifra por otro de dos cifras (descomponer el número de dos cifras), multiplicar por 11 (completar a la decena próxima) y multiplicar por 5.

En la multiplicación se enseñan diferentes estrategias, aunque falta la enseñanza de estrategias generales como completar el multiplicador a la decena siguiente, compensar y factorizar.

En cuanto a estrategias para casos particulares en la multiplicación, la estrategia que se aborda en el libro únicamente es multiplicar por 5. Sin embargo, esta enseñanza se queda escasa en este aspecto dada la variedad de estrategias para casos particulares, tales como; multiplicar por 10, 100, ..., multiplicar por 3, 6, 15 y 25.

Por otro lado, se ilustran relaciones entre la multiplicación y la división en los temas 13, 14 y 15, en las que se explica cómo multiplicar un número por 0,5, 0,25 o por 0,1. En estos temas no presentan estrategias del cálculo mental, únicamente recuerdan relaciones numéricas que los alumnos de 5º curso deberían conocer: que multiplicar por 0,5 es dividir entre 2, o que multiplicar por 0,1 es dividir entre 10.

En cuanto a la división, tan solo presenta estrategias particulares como dividir un número par de 2 cifras entre 2 (basada en descomponer el dividendo) y estrategias para casos particulares, tales como; dividir números acabados en 0 y dividir un número entre 5.

Aunque se abordan varias de las estrategias para dividir hay que señalar que no se enseñan estrategias generales como por ejemplo: descomponer el dividendo, compensar el dividendo y el divisor o factorizar el divisor.

La propuesta que realiza esta editorial es incompleta porque se circunscribe a estrategias particulares, eludiendo las estrategias generales, y porque deja sin enseñar muchas de las estrategias de las operaciones de números naturales. Se pone de manifiesto en su desarrollo a lo largo del texto que no guarda un orden metodológico ni una enseñanza sistematizada de las mismas. Por ello, no favorece la adquisición de los hechos numéricos ni la comprensión del sistema numérico que facilite el uso de estrategias de cálculo mental.

Como conclusión, podemos afirmar que las prácticas de enseñanza del cálculo mental en las aulas de educación Primaria son insatisfactorias porque el currículo, aunque reconoce la importancia del cálculo mental, no aporta orientaciones didácticas para llevarla a cabo en el aula y, por otra parte, la

enseñanza que proponen las editoriales de libros de texto es inadecuada porque no aborda de modo gradual ni sistemática la enseñanza de estrategias de cálculo mental a lo largo de la etapa de Educación Primaria.

CAPÍTULO III - MARCO EXPERIMENTAL: DISEÑO DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

3.1 Objetivos de la enseñanza del cálculo mental en Educación Primaria

Los objetivos que se pretenden conseguir mediante la propuesta de enseñanza de estrategias de cálculo mental que vamos a experimentar posteriormente en un aula de 5º de Educación Primaria son:

- Memorizar ciertos resultados de modo que los alumnos puedan recuperarlos fácilmente.
- Profundizar en la comprensión de los números, las relaciones que existen entre ellos y entre las diferentes operaciones. Como por ejemplo, que la multiplicación y división son operaciones inversas.
- Tomar conciencia de que determinados cálculos más sencillos posibilitan resolver otros más complejos.
- Conocer las propiedades de las operaciones, ya que el cálculo mental permite identificarlas y analizar su validez.
- Profundizar en los conocimientos sobre nuestro sistema de numeración.
- Construir procedimientos y estrategias personales que permitan al alumno realizar cálculo utilizando procedimientos personales y sea él quien decida los caminos más oportunos durante el cálculo.
- Comprender la riqueza que ofrece el cálculo mental, dado que permite diferentes modos o vías de “jugar” con los números.
- Ser capaz de justificar las estrategias utilizadas para la obtención del cálculo.

3.2 Contenidos para la enseñanza del cálculo mental

Compartimos con Sadovsky (2011) la necesidad de incluir dos tipos de conocimientos en la enseñanza del cálculo mental. De un lado la sistematización de un conjunto de resultados que nosotros vinculamos al conocimiento de los hechos numéricos y, de otra parte, a la construcción de procedimientos personales que nosotros vamos a denominar estrategias de cálculo mental.

3.2.1 Sistematización de un conjunto de resultados.

Es necesario que el alumno sistematice un conjunto de resultados el cual le permita la reconstrucción progresiva de un repertorio de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números naturales.

Estos resultados se recuperan de la memoria o se puede reconstruir a partir de los resultados memorizados cuando el cálculo a realizar lo exige. Es decir, el alumno utiliza sus conocimientos y los generaliza en otras situaciones de cálculo. En el siguiente ejemplo se aprecia como se aplica los conocimientos de la suma $3 + 8$ para resolver otras en las que los sumandos sean múltiplos de diez de dichos números, como $30 + 80$ dichos números como $30 + 80$.

Este conjunto de conocimientos a enseñar son fundamentales y su memorización debe apoyarse en la construcción e identificación de relaciones que conformen una red conceptual que les aporte sentido.

Coincidimos con Sadovsky (2011, p. 16) en que el conjunto de resultados a sistematizar sería el siguiente:

- Sumas de números de una cifra entre sí, por ejemplo: $5 + 5$; $5 + 6$, etc.; y restas asociadas a dichas sumas ($11 - 5$; $11 - 6$, etc).
- Identificar descomposiciones de 10 ($9 + 1$; $8 + 2$; $7 + 3$; etc) y de las restas asociadas a ellas; identificación de las descomposiciones aditivas del número 100 en números “redondos” ($70 + 30$; $60 + 40$; etc), y de las restas asociadas a ellas ($100 - 30$; $100 - 70$, etc).
- Sumas de números “redondos” de dos cifras más un número de una cifra, por ejemplo, $70 + 9$; y las restas vinculadas a dichas sumas, por ejemplo, $79 - 9$.
- Suma o resta de 10, 100 ó 1.000 a un número cualquiera y cálculos en los que se sumen o resten un número “redondo” a un número cualquiera. $8 + 10$, $47 + 100$, $54 + 200$, etc.
- Otras descomposiciones aditivas de los números vinculadas con la organización del sistema de numeración. Por ejemplo, $3.000 + 500 + 30 + 6$; $700 + 7$; $300 + 19$, etc., restas vinculadas a ellas, por ejemplo, $4.271 - 271$; $384 - 80$, etcétera.
- Cálculos de complementos de un número cualquiera respecto de un número “redondo” a través del análisis de las escrituras numéricas. Por ejemplo, cuánto es necesario sumarle a 578 para obtener 600.
- Resultados de la tabla pitagórica que es un cuadro de doble entrada en la que se sintetizan los productos de las tablas de multiplicar del 0 al 10, **anexo II**, los hechos numéricos de la tabla de la multiplicación y el uso de esos

conocimientos para conocer el cociente y el resto de dividendos menores que 100 y divisores de una cifra.

- Multiplicación y división por 10, 100, 1.000, etcétera.
- Descomposiciones multiplicativas de las escrituras numéricas y cálculos asociados a ellas, por ejemplo, $4 \times 1.000 + 3 \times 100 + 7 \times 10 + 8$; etcétera.
- Extensión de los conocimientos sobre la tabla de la multiplicación a multiplicaciones con números “redondos” de más de una cifra. Por ejemplo, usar que $4 \times 3 = 12$ para encontrar el resultado de 40×30 ; o usar que $2 \times 5 = 10$ para encontrar el resultado de 200×500 ; etc.
- Extensión de los conocimientos sobre las divisiones a partir de los resultados de la tabla de la multiplicación y de la división por 10, 100, 1.000, etc., para resolver otras divisiones que involucran números “redondos” como dividendos y divisores.
- Identificación de múltiplos y divisores de determinados números.

3.2.2 Construcción de estrategias de cálculo mental

Además de los hechos numéricos, nuestro objetivo es que los alumnos construyan estrategias de cálculo, que no son procesos automatizados sino que consisten en la selección de diferentes caminos a partir de decisiones que el alumno toma para realizar el cálculo.

Estas estrategias están basadas fundamentalmente en la comprensión del sistema de numeración, en otras descomposiciones de los números diferentes de la descomposición polinómica decimal, y en la aplicación de las propiedades de las operaciones y sus relaciones que se establecen entre sí, es decir, en la habilidades relacionadas con el sentido numérico.

Respecto a las estrategias para la **suma** de números naturales nos proponemos enseñar las siguientes:

- **Descomponer** uno o los dos sumandos, como por ejemplo:

$$16 + 68 = (10 + 6) + (60 + 8) = (10 + 60) + (6 + 8) = 70 + 14 = 84$$

- **Completar** un sumando a la decena, centena o unidad de millar siguiente (redondear), como por ejemplo:

$$16 + 68 = 16 + (70 - 2) = (16 + 70) - 2 = 86 - 2 = 84$$

- **Compensar:** lo que añadido a un sumando se lo quito al otro sumando, como por ejemplo:

$$16 + 68 = (16 - 2) + (68 + 2) = 14 + 70 = 84$$

- **Omitir ceros finales**, como por ejemplo:

En la suma $140 + 150$ se puede pensar del siguiente modo; primero sumamos $14 + 15 = 29$ y después se le añade el 0 a la derecha, cuyo resultado es 290.

- **Cambiar el orden** de los sumandos (propiedad conmutativa), como por ejemplo:

$$7 + 68 = 68 + 7 = 75$$

- **Asociar sumandos** (propiedad asociativa), como por ejemplo:

$$5 + 38 + 15 = (5 + 15) + 38 = 20 + 38 = 58$$

En cuanto a las estrategias para **la resta** de números naturales nos proponemos enseñar las siguientes:

- **Completar el sustraendo** a la decena siguiente (redondear), como por ejemplo:

$$46 - 28 = 46 - 30 + 2 = 16 + 2 = 18$$

- **Compensar:** sumar o restar al minuendo y sustraendo el mismo número, como por ejemplo:

$$46 - 19 = (46 + 1) + (19 + 1) = 47 - 20 = 27$$

- **Añadir un número al sustraendo hasta llegar al minuendo**, en esta estrategia la resta se convierte en una suma, como por ejemplo;

En la resta $46 - 28$ se puede pensar del siguiente modo: de 28 a 30 añado 2 y luego a 30, de 30 a 40 añado 10 y luego a 40, de 40 a 46 añado 6 y luego a 46. En total he añadido $2 + 10 + 6 = 18$

- **Omitir ceros finales**, como por ejemplo:

$$300 - 120 = (30 \times 10) - (12 \times 10) = (30 - 12) \times 10 = 18 \times 10 = 180$$

En cuanto a las estrategias para **la multiplicación** de números naturales nos proponemos enseñar las siguientes:

- **Descomponer el multiplicando o el multiplicador**, como por ejemplo:

- o **Si descomponemos el multiplicando:**

$$45 \times 9 = (40 + 5) \times 9 = (40 \times 9) + (5 \times 9) = 360 + 45 = 405$$

- o **Si descomponemos el multiplicador:**

$$35 \times 12 = 35 \times (10 + 2) = (35 \times 10) + (35 \times 2) = 350 + 70 = 420$$

- **Completar el multiplicador a la decena siguiente**, como por ejemplo:

$$45 \times 9 = 45 \times (10 - 1) = (45 \times 10) - (45 \times 1) = 450 - 45 = 405$$

- **Compensar:** multiplicar uno de los factores por un número y dividir el otro factor por el mismo número, como por ejemplo:

$$45 \times 12 = (45 \times 2) \times (12 : 2) = 90 \times 6 = 540$$

- **Factorizar:** buscar factores 2 y 5 en el multiplicando y/o en el multiplicador, como por ejemplo:

$$25 \times 32 = (5 \times 5) \times (2 \times 2 \times 8) = (5 \times 2) \times (5 \times 2) \times 8 = 10 \times 10 \times 8 = 100 \times 8 = 800$$

A continuación se detallan las estrategias **particulares** para la multiplicación:

- **Multiplicar por 10, 100, 1000, ...,** como por ejemplo:

$$23 \times 10 = 230; 23 \times 100 = 2300; 23 \times 1000 = 23000$$

- **Multiplicar por 5,** se puede realizar multiplicando el número por 10 y después dividir el resultado entre 2, como por ejemplo:

$$23 \times 5 = 23 \times (10 : 2) = (23 \times 10) : 2 = 230 : 2 = 115$$

- **Multiplicar por 3,** se puede realizar multiplicando el multiplicando por 2 y al resultado sumarle el multiplicando, como por ejemplo:

$$23 \times 3 = 23 \times (2 + 1) = (23 \times 2) + 23 = 46 + 23 = 69$$

- **Multiplicar por 6,** se puede realizar multiplicando el multiplicando por 3 y después por 2 o a la inversa (primero multiplicar por 2 y luego por 3), como por ejemplo:

$$23 \times 6 = 23 \times (2 \times 3) = (23 \times 2) \times 3 = 46 \times 3 = 138$$

- **Multiplicar por 15,** se puede realizar multiplicando el multiplicando por 10 y al resultado se le suma la mitad de éste resultado, como por ejemplo:

$$25 \times 15 = 25 \times (10 + 5) = (25 \times 10) + (25 \times 5) = (25 \times 10) + (25 \times 10) : 2 = 250 + 125 = 375$$

En cuanto a las estrategias para **la división** de números naturales nos proponemos enseñar las siguientes:

- **Descomponer el dividendo en sumandos que contengan el divisor,** como por ejemplo:

$$144 : 12 = (120 : 12) + (24 : 12) = 10 + 2 = 12$$

- **Factorizar el divisor,** como por ejemplo:

$$144 : 12 = 144 : (2 \times 6) = (144 : 2) : 6 = 72 : 6 = (72 : 2) : 3 = 36 : 3 = 12$$

- **Compensar:** multiplicar o dividir el dividendo y el divisor por un mismo número, como por ejemplo:

$$144 : 12 = (144 : 2) : (12 : 2) = 72 : 6 = (72 : 2) : (6 : 2) = 36 : 3 = 12$$

A continuación se detallan las estrategias **particulares** para la división:

- **Dividir por 10, 100, ...**, se suprimen los ceros que están a la derecha del dividendo, tantos ceros como tenga el divisor, como por ejemplo:

$$2500 : 10 = 250; 2500 : 100 = 25$$

- **Dividir por 5**, se puede realizar multiplicando el dividendo por 2 y después dividir el resultado por 10.

$$95 : 5 = 95 : (10 : 2) = (95 \times 2) : 10 = 190 : 10 = 19$$

En el diseño de la intervención docente que vamos a desarrollar y evaluar en este trabajo vamos a incorporar todos estos contenidos que acabamos de describir. Pretendemos que la introducción de estos contenidos sea gradual y sistemática enseñando, en primer lugar, las estrategias de la suma y resta de números naturales y, en segundo lugar, las estrategias de la multiplicación y división de números naturales. Además, dentro de las estrategias de la multiplicación y división, optamos por presentar, en primer lugar, las estrategias generales basadas en la descomposición aditiva que, a priori, son más elementales que la estrategia basada en factorizar uno o los dos números que intervienen en la operación.

3.3 Metodología y temporalización para la enseñanza del cálculo mental

Vamos a estudiar las orientaciones metodológicas generales que entendemos que tiene que tener una intervención didáctica de cálculo mental en el aula de Primaria.

En primer lugar, aceptamos el principio del paradigma del constructivismo que recoge el currículo de Educación Primaria: “Es fundamental partir de los aprendizajes previos del alumno. El docente deberá plantear actividades con diferente nivel de dificultad de manera que favorezca el desarrollo del aprendizaje matemático de todos sus alumnos atendiendo a la diversidad desde un planteamiento inclusivo”. (BOA, 20 de junio de 2014, p.19544).

En segundo lugar, hacemos nuestras las siguientes orientaciones metodológicas que proponen Ortega y Ortiz (2005, p. 18):

- Es necesario que el alumno descubra las reglas y procedimientos que el profesor desea enseñar.

- El profesor debe respetar la originalidad de las estrategias personales. Además, fomentar que el alumno que aplique una determinada estrategia la explique al resto de la clase para que sus compañeros la puedan aplicar, si la comprenden.
- El intercambio de ideas y estrategias en la corrección de los ejercicios que se propongan posibilita que los alumnos justifiquen ante los demás el porqué de sus cálculos, lo que se traducirá en el intercambio de estrategias y en la detección de las causas de los errores.
- Se puede presentar los ejercicios de una forma "deportiva", ya sea en equipos o individualmente, puesto que de esta forma estimula a los alumnos a superarse. Se debe de huir de una metodología machacona y aburrida, no se trata de hacer miles de operaciones, sino diversificar los ejercicios, inventar juegos apropiados, recurrir a la competitividad entre grupos, etc.
- Este tipo de cálculo se debe presentar bajo dos aspectos: visual y mental, puesto que ambos aportan facetas formativas diferentes y ambos contribuyen a la familiarización con nuestro sistema de numeración y con las operaciones. Parece más difícil realizar un cálculo cuando se dictan los datos y no existe ningún apoyo visual que cuando se presenta por escrito, no hay que abusar de la primera modalidad sobre todo en los primeros cursos.
- No hay que primar el éxito en el resultado y rapidez de la contestación, puesto que ha supuesto a los estudiantes más lentos o los que cometen más errores, desánimo y por tanto pérdida de interés.
- Como se requiere gran concentración y tensión, cansa rápidamente a los alumnos, de forma que si se trabaja mucho tiempo, la atención disminuye y los resultados empeoran. Por tanto las sesiones de cálculo mental deben ser breves, variadas y alrededor de diez minutos al día, todos los días de la semana.
- Es mejor enseñar el cálculo mental en un periodo extendido de tiempo y con una variedad de contextos y aplicaciones en lugar de enseñarlo aisladamente. Si después de un periodo planificado de adiestramiento, siguen los alumnos sin prever el resultado de una operación, si siguen utilizando la calculadora o el lápiz y papel para hacer cálculos sencillos, es un síntoma claro de no haberse alcanzado unos objetivos mínimos de capacitación de los alumnos. Hay que tener en cuenta, que dentro del grupo de clase, existirán distintas velocidades de aprendizaje, ya que no todo el mundo está igual capacitado y es el profesor el

que debe ser flexible y respetar esta diversidad, haciendo uso entonces de material de autoayuda.

En tercer lugar coincidimos con en la necesidad de que el aula sea un espacio de comunicación y debate de las estrategias de cálculo mental que vayan aplicando los alumnos.

El cálculo mental es un dominio privilegiado para el trabajo colectivo en clase. Discutir acerca de las ventajas e inconvenientes de un método u otro, poner de relieve el significado o el trasfondo de los pasos que se siguen, traducirlos al lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis para unificar la descripción, la explicación, y el ejemplo, facilitar el uso de los hechos del sistema de numeración, y aplicar las propiedades y alteraciones invariantes de las cuatro operaciones, son tareas que ofrecen la posibilidad de un acercamiento del conocimiento y a la actividad matemática, con una fuerte presencia de aspectos motivadores y tal vez recreativos. (Gómez-Alfonso, 2005, p.24)

En la intervención docente que vamos a desarrollar y evaluar en este trabajo vamos a intentar incorporar las orientaciones metodológicas que acabamos de mencionar. En concreto, durante la fase de enseñanza vamos a realizar 17 sesiones de clase con las siguientes pautas:

- En cada sesión se trabaja una ficha, la cual está formada por diez operaciones para las cuales se ofrecen a su lado una serie de estrategias. El alumno tiene que seleccionar una de ellas o especificarla, escribiendo al lado la empleada. Además, hay un tiempo determinado para su realización y, en caso necesario, se amplía para permitir que todos los alumnos la finalicen.
- El orden en el que se presentan las estrategias de las operaciones es el siguiente; suma, resta, multiplicación y división.
- El desarrollo de la intervención que se ha seguido con carácter general consiste en que la profesora presenta y explica las diferentes estrategias de cálculo mental correspondiente a las operaciones a trabajar. Posteriormente, se aclaran las dudas surgidas y se procede a la realización de la prueba.
- Inmediatamente después o bien al día siguiente se realiza un puesta en común de las estrategias empleadas el día anterior, con el fin que todos los alumnos sean conscientes de los diferentes modos de realizar un mismo cálculo. Asimismo, se les anima a compartir con el resto de los compañeros otras estrategias que no habían sido comentadas previamente en clase.

De este modo, se les invita a reflexionar sobre las relaciones que se establecen entre los números naturales, el uso flexible de los mismos, así como, de las propiedades. Con esto se pretende que haya un debate sobre las diferentes formas de operar con los números. En el fondo el objetivo es que los alumnos expliquen la manera en la que ha realizado el cálculo y que sean capaces de verbalizar las estrategias de cálculo mental que han aplicado.

Cronograma de la propuesta de enseñanza

La intervención se estructura en tres fases, cuya duración abarca desde 7 de marzo hasta el 26 de mayo. Se comienza mediante una prueba inicial, seguida de la propuesta de enseñanza de las estrategias de cálculo mental. El desarrollo de la propuesta se realiza los lunes y jueves con intervenciones de 15 minutos. Se concluye la intervención con una prueba final.

Con la prueba inicial se pretende evaluar el conocimiento que tiene el grupo-clase de estrategias para el cálculo mental, así como, si los alumnos saben aplicar éstas en las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números naturales.

En el segundo momento se desarrolla la propuesta de enseñanza que la conforman diecisiete fichas, las cuales permiten enseñar a los alumnos una serie de estrategias de manera sistematizada.

Y en último lugar, se realiza una prueba final, que tiene los mismos contenidos que la prueba inicial con el fin de valorar si hay un aumento en la aplicación de estrategias, así como, una mayor asimilación de las mismas.

En la siguiente tabla se detalla la secuenciación realizada durante la intervención, especificando los momentos y duración de los mismos:

Actividad	Día	Duración
- Prueba inicial	07/03/2016	- 15 minutos
- Enseñanza de estrategias de la suma - Ficha nº 1 (sumas de números terminados en 9)	10/03/2016	- 10 minutos - 5 minutos
- Puesta en común - Ficha nº 2 (sumas)	14/03/2016	- 5 minutos - 10 minutos
- Ficha nº 3 (sumas) - Puesta en común	17/03/2016	- 5 minutos - 5 minutos
- Enseñanza de estrategias de la resta - Ficha nº 4 (restas de números terminados en 9)	21/03/2016	- 10 minutos - 5 minutos
- Puesta en común - Ficha nº 5 (restas)	04/04/2016	- 10 minutos - 5 minutos
- Ficha nº 6 (restas) - Puesta en común	07/04/2016	- 5 minutos - 10 minutos
- Ficha nº 7 (sumas y restas) - Puesta en común	11/04/2016	- 5 minutos - 10 minutos
- Enseñanza de estrategias para multiplicar y dividir - Ficha nº 8 (multiplicar y dividir por 2)	15/04/2016	- 10 minutos - 5 minutos
- Puesta en común - Ficha nº 9 (multiplicar y dividir por 3 y 4)	18/04/2016	- 10 minutos - 5 minutos
- Enseñanza de estrategias para multiplicar y dividir - Ficha nº 10 (multiplicar y dividir por 5)	21/04/2016	- 10 minutos - 5 minutos
- Puesta en común - Ficha nº 11 (multiplicar por 8 y 9)	25/04/2016	- 10 minutos - 5 minutos

Actividad	Día	Duración
<ul style="list-style-type: none"> - Enseñanza de estrategias para multiplicar - Ficha nº 12 (multiplicaciones con el multiplicador de una cifra) 	28/04/2016	<ul style="list-style-type: none"> - 10 minutos - 5 minutos
<ul style="list-style-type: none"> - Enseñanza de estrategias para multiplicar - Ficha nº 13 (multiplicaciones con el multiplicador de dos cifras) 	06/05/2016	<ul style="list-style-type: none"> - 10 minutos - 5 minutos
<ul style="list-style-type: none"> - Puesta en común de estrategias - Ficha nº 14 (multiplicaciones con el multiplicador de dos cifras) 	09/05/2016	<ul style="list-style-type: none"> - 10 minutos - 5 minutos
<ul style="list-style-type: none"> - Enseñanza de estrategias para dividir - Ficha nº 15 (divisiones) 	16/05/2016	<ul style="list-style-type: none"> - 10 minutos - 5 minutos
<ul style="list-style-type: none"> - Puesta en común - Ficha nº 16 (divisiones) 	19/05/2016	<ul style="list-style-type: none"> - 10 minutos - 5 minutos
<ul style="list-style-type: none"> - Puesta en común - Ficha nº 17 (divisiones) 	23/05/2016	<ul style="list-style-type: none"> - 10 minutos - 5 minutos
<ul style="list-style-type: none"> - Prueba final 	26/05/2016	<ul style="list-style-type: none"> - 10 minutos

Comenzada la intervención se les facilita a los alumnos **un librito** elaborado por el director de este trabajo (ver **anexo III**) en el cual se ejemplifican las estrategias respecto a la suma, resta, multiplicación y división. De este modo, los alumnos pueden apoyarse en él, puesto que, contienen diferentes ejemplos en cada una de las estrategias trabajadas en el aula. Asimismo, se persigue favorecer e inducir a la reflexión de las relaciones que se establecen en los números y consolidar las estrategias a lo largo de la intervención.

3.4 Contexto del aula donde se desarrolla la experiencia

El aula es quinto A de Primaria del colegio público San Roque, ubicado en la población de María de Huerva de Zaragoza. El grupo-clase está compuesto por 15

alumnos/as, de los cuales cinco son niñas y diez son niños, estando en edades comprendidas entre los diez y once años.

Los alumnos que conforman el grupo viven en el pueblo, lo cual favorece las relaciones entre ellos y sus familias. La mayoría realizan actividades extraescolares favoreciendo generar lazos de amistad entre los mismos.

Todos ellos presentan una adecuada interacción entre iguales, así como, con el profesorado. La mayoría de los alumnos fueron escolarizados en el centro desde Infantil, esto permite que estén integrados en las rutinas del colegio y del aula. Sin embargo, este año ha habido una nueva incorporación en el grupo-clase y el alumno ha sido acogido de buen agrado por el grupo. Se trata de un alumno que por motivos de movilización familiar viene de otro centro de Zaragoza capital y presenta adaptaciones curriculares significativas en las áreas instrumentales de matemáticas, lengua castellana, así como, carencia de autocontrol emocional. Desde el colegio, la profesora de pedagogía terapéutica ha solicitado la colaboración de Salud Mental para su valoración.

Del mismo modo, hay otro alumno con necesidades educativas especiales por condiciones personales relacionadas con situación de desventaja socioafectiva y presenta una adaptación curricular significativa, en las áreas instrumentales de matemáticas y lengua castellana.

El centro orienta su respuesta educativa tanto en los recursos personales como materiales. En cuanto a los contenidos y exámenes en estas áreas, ambos alumnos están realizando una adaptación de 3º de Primaria. A su vez, la maestra les facilita resúmenes y esquemas que les faciliten el estudio.

Parece oportuno señalar en este punto, que uno de los alumnos que presentan adaptaciones curriculares significativas ha realizado la misma intervención que el grupo-clase. Sin embargo, no se han tenido en cuenta los resultados obtenidos en la realización de este informe. Por el contrario, el otro alumno con adaptaciones curriculares sí que se ha tenido en cuenta y tiene asignado el código A14 en este informe.

El ambiente en el aula es distendido, de participación y de trabajo. La interacción tanto entre ellos como con la maestra es cordial y de confianza y se muestran respeto mutuo. Los alumnos se encuentran seguros y participan muy activamente en las actividades de clase. Además, señalar que al ser un grupo reducido este hecho se ve muy favorecido.

Las normas del aula están puestas en un cartel “Plan de Convivencia” y todos los alumnos las respetan sin necesidad de recordarlas. No se aprecia ningún tipo de discriminación. Los únicos momentos que se generan pequeños conflictos son los que genera el alumno que carece de autocontrol emocional y que la maestra las reconduce, haciéndole ver las consecuencias de su conducta y ayudándole a cambiar ésta.

Otro aspecto a señalar es que la maestra cambia la posición de los alumnos en los pupitres cada mes, favoreciendo las interacciones entre ellos.

Respecto a la organización del espacio la clase cuenta con una superficie cuadrada de cuarenta metros cuadrados aproximadamente. Su diseño la forman quince pupitres dispuestos en tres filas. Las filas de los extremos los alumnos se colocan por parejas y en la fila central los pupitres son individuales. La mesa de profesora se encuentra situada enfrente de la puerta y dispuesta lateralmente a los alumnos. Su distribución favorece el tránsito y reduce los riesgos de caída, dado que, siempre se encuentra en la misma disposición. En el aula hay dos ordenadores y en la pared, enfrente de los niños, hay dos pizarras, una digital y otra para rotuladores y también cuenta un cañón. Además, el colegio dispone de *tablets* para utilizarlos durante las clases.

Las paredes laterales tienen grandes ventanales que dan por un lado al patio del recreo y por el otro, al pasillo. En la pared del fondo del aula se encuentra un corcho en el que se cuelgan las diferentes actividades que van realizando. Debajo de éste hay unas mesas con bandejas clasificadoras y cada alumno tiene una con su nombre. En ellas colocan todas las fichas que van trabajando en todas las áreas. Además, tienen diccionarios los cuales utilizan muy a menudo cuando no conocen una palabra. Junto a la mesa de la maestra hay una estantería donde se organiza todo el material escolar.

La decoración del aula la conforman desde las normas del aula, posters educativos, una pizarra para escribir los deberes y actividades realizadas por los alumnos en grupo, como por ejemplo, una de un calcetín en la cual los alumnos han inventado una breve historia para el suyo o una línea del tiempo que van completando en ciencias sociales.

CAPÍTULO IV - MARCO EXPERIMENTAL: DESARROLLO Y EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA DE ENSEÑANZA

4.1 Desarrollo y evaluación de la prueba inicial

La propuesta de enseñanza comienza el lunes 7 de marzo a las 9:30 h. Los alumnos no habían recibido ninguna enseñanza sobre estrategias de cálculo previas a la prueba, excepto las que se muestran en el análisis del libro de texto para 5º de Primaria, recogidas en el punto capítulo II de este informe.

Antes de realizar la prueba se proporciona una serie de instrucciones para su realización. Las operaciones únicamente se pueden realizar mentalmente, es decir, no se puede escribir el algoritmo. Además, deben escribir el resultado de la operación en el interior del recuadro contiguo a la misma. Asimismo, deben marcar con un cruz una de las opciones que se ofrece al lado de cada operación. En las opciones se facilita diferentes estrategias mediante las cuales se hace el cálculo de la operación.

Por otro lado, se especifica que no prima la rapidez, sino que deben de leer bien las estrategias propuestas para cada operación y que disfruten durante la realización de la misma. Asimismo, se resalta la idea de que todas las estrategias son válidas aunque haya alguna que permita economizar la realización del cálculo.

La prueba la forman 15 operaciones de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con una duración de 10 minutos. Sin embargo, se amplía hasta los 15 minutos con el fin que todos la puedan completar, puesto que, solo dos alumnos son capaces de realizarla en el tiempo estimado. El modelo de la prueba inicial y la tabla con la recogida de datos se muestra en el **anexo IV**.

La prueba inicial persigue **dos objetivos**; por un lado, poner de manifiesto si hay o no aplicación de estrategias en el cálculo. El segundo objetivo es conocer si los alumnos realizan correctamente el cálculo bien aplicando una estrategia de cálculo mental o bien pensando en el algoritmo escrito. A lo largo de este trabajo consideramos que el cálculo pensado visualizando el algoritmo escrito no es una estrategia de cálculo mental con independencia de que los alumnos utilicen con éxito el procedimiento de visualizar el algoritmo escrito. Adicionalmente, pretendemos mostrar a los alumnos diferentes estrategias de cálculo mental relacionadas con la suma, resta, multiplicación y división.

En relación a los resultados que arroja la prueba inicial, puede destacarse que la mayoría de los alumnos no utilizan estrategias de cálculo mental para la realización de las operaciones. Sin embargo, algunos de ellos sí que utilizaron alguna como se especifica a continuación:

En **la suma**, utilizan estrategias como asociar sumandos, la descomposición de uno de los sumandos, omisión de ceros o completar decenas y compensar a decenas. Por ejemplo, en el cálculo **19 + 34 + 11**, los alumnos marcan la estrategia:

- He buscado completar decenas.

En el cálculo **250 + 150**, los alumnos marcan las estrategias:

- He quitado los ceros finales.
- He sumado 50 a un sumando y le he restado 50 al otro sumando.

En el cálculo **47 + 43**, los alumnos marcan la estrategia:

- He descompuesto 47 como 40 + 7 y 43 como 40 + 3

En **la resta**, utilizan estrategias como completar el sustraendo a la decena siguiente, omitir los ceros finales o descomponer el sustraendo, tales como:

$$87 - 39$$

- He completado el sustraendo (39) a la decena siguiente.

$$800 - 350$$

- He omitido los ceros finales.
- He descompuesto el sustraendo como 300 + 50.

En **la multiplicación**, utilizan alguna estrategia como completar el multiplicador a la decena siguiente o estrategias para casos particulares como, multiplicar por 5. Por ejemplo:

$$34 \times 10$$

- He multiplicado por 10 y he restado una vez el multiplicando (34).

$$27 \times 5$$

- He multiplicado 27 por 10 y después he dividido por 2.

En **la división**, utilizan alguna estrategia como compensar o estrategias para casos particulares en el caso de la división entre 5.

$$110 : 5$$

- He dividido 110 por 10 y después he multiplicado por 2.
- He multiplicado el dividendo y el divisor por 2.

En un primer análisis, puede observarse que utilizan más estrategias para sumar y restar que para multiplicar y dividir.

En la siguiente tabla se muestran los porcentajes de alumnos que utilizan estrategias diferentes de la de pensar en el algoritmo escrito y los porcentajes de los alumnos que realizan correctamente la operación.

Operación	% que usan estrategias	% de acierto
19 + 34 + 11	57,1%	100%
250 + 150	57,1%	100%
800 – 350	57,1%	50%
27 x 5	28,6%	85,7%
110 : 5	42,8%	85,7%
40 + 50 + 3 + 60	42,8%	78,6%
87 + 89	71,4%	71,4%
320 – 99	71,4%	50%
34 x 9	28,6%	64,3%
128 : 8	35,7%	78,6%
47 + 43	50 %	92,9%
87 - 39	64,2 %	14,3%
60 x 15	7,1%	21,4%
25 x 4	28,6 %	92,9%
180 : 12	28,6 %	42,9%

Concretando, podemos señalar que la operación en la que menos estrategias se utilizan es la siguiente:

60 x 15

- La mayoría de los alumnos marcan la opción de “he pensado los números en vertical y he multiplicado”.

Respecto a la **suma y resta** y en relación a las estrategias, observamos que los alumnos han utilizado prácticamente todas. De ese modo, puede verificarse que están más familiarizados con las estrategias aditivas que las estrategias multiplicativas.

En cuanto a la multiplicación, las estrategias que utilizan son; descomponer el multiplicando, completar el multiplicador a la decena siguiente, la estrategia para multiplicar por 5 (multiplicar por 10 y dividir entre 2), multiplicar uno de los factores por un número y dividir el otro factor por el mismo número y multiplicar por 4 (multiplicar primero por 2 y el resultado multiplicarlo por 2).

Respecto a la **división**, aunque son muy pocos los alumnos que utilizan estrategias. Ahora bien, los pocos alumnos que las marcan utilizan la mayoría de ellas: descomponer en factores el divisor, descomponer el dividendo, dividir por 5 (dividir el dividendo entre 10 y multiplicar el resultado por 2), multiplicar el dividendo y el divisor por el mismo número y buscar un múltiplo del divisor.

En la siguiente tabla, se muestra el número de errores en los cálculos realizados:

Prueba inicial	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	0	0 %
1 fallo	1	7,1 %
2 fallos	2	14,3 %
3 fallos	1	7,1 %
4 fallos	3	21,4 %
5 fallos	2	14,3 %
6 fallos	3	21,4 %
9 fallos	2	14,3 %

Se observa que el rendimiento global de los 14 alumnos es bajo porque la mitad de los alumnos yerran en 5 o más cálculos.

Las operaciones que presentan más fallos fueron en las siguientes:

- en la resta **87 – 39**, con 12 fallos,
- en la multiplicación **60 x 15**, con 11 fallos
- en la división **180 : 12**, con 8 fallos.

Se puede decir que los alumnos conocen algunas de las estrategias utilizadas en el cálculo mental. Sin embargo, no las aplican correctamente. Asimismo, se puede apreciar que son más utilizadas en el cálculo de sumas y restas y menos utilizadas en el cálculo de multiplicaciones y divisiones.

Los alumnos comprenden y saben utilizar las estrategias de la operación suma porque un porcentaje elevado las utilizan y además las aplican con bastante éxito.

En el siguiente gráfico se muestra el uso de estrategias de cálculo mental y del recurso a pensar en el algoritmo escrito y el éxito con cada uno de estos procedimientos de cálculo al realizar sumas:

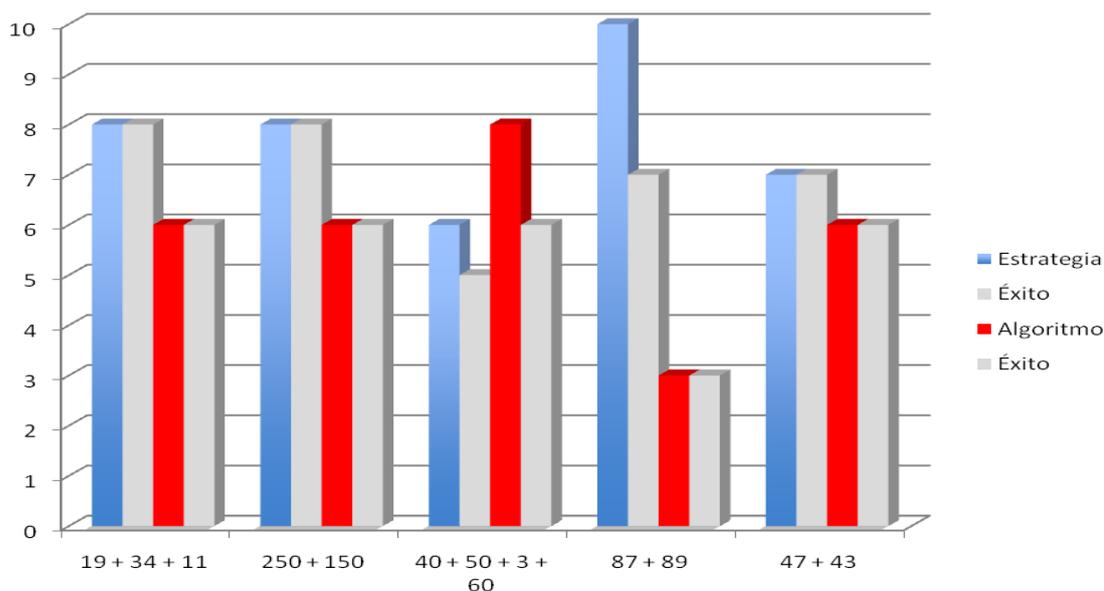


Gráfico 1. Resultados en la prueba inicial de la suma

En el caso de la resta los obtienen mejores resultados cuando piensan en el algoritmo escrito que cuando utilizan estrategias de cálculo mental. Resulta muy llamativo que tan solo cuatro alumnos de los diez que utilizan estrategias son capaces de aplicarlas con éxito para operar $320 - 99$, y que ninguno de los nueve alumnos que operan $87 - 39$ tenga éxito al aplicar estrategias de cálculo mental.

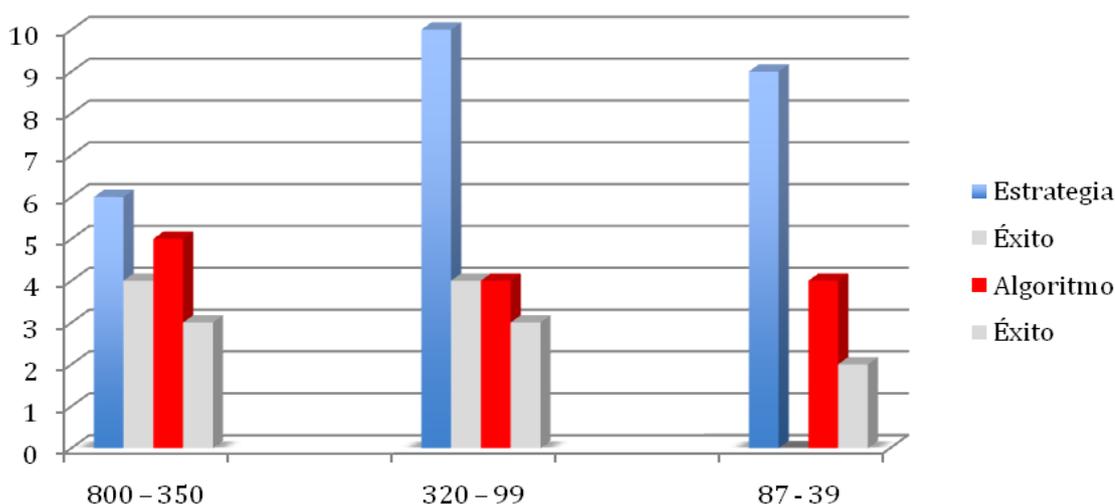


Gráfico 2. Resultados en la prueba inicial de la resta

En el caso de la multiplicación los alumnos desconocen las estrategias de cálculo mental que son diferentes de pensar en el algoritmo escrito. Apenas utilizan estrategias y cuando lo hacen tienen poco éxito salvo en los casos de multiplicaciones muy elementales como 27×5 y 25×4 .

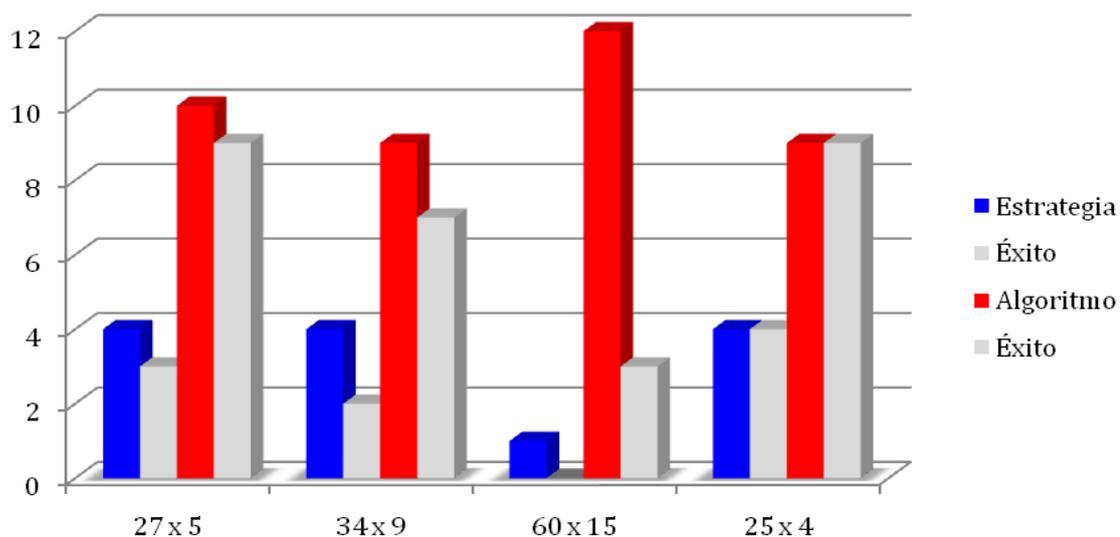


Gráfico 3. Resultados en la prueba inicial de la multiplicación

En el caso de la división los alumnos conocen pocas estrategias diferentes a la de visualizar en la mente el algoritmo escrito. En estas condiciones prefieren pensar en el algoritmo. No obstante, cabe indicar que la tasa de éxito en los cálculos de la división no son inferiores a las obtenidas en los cálculos de las multiplicaciones.

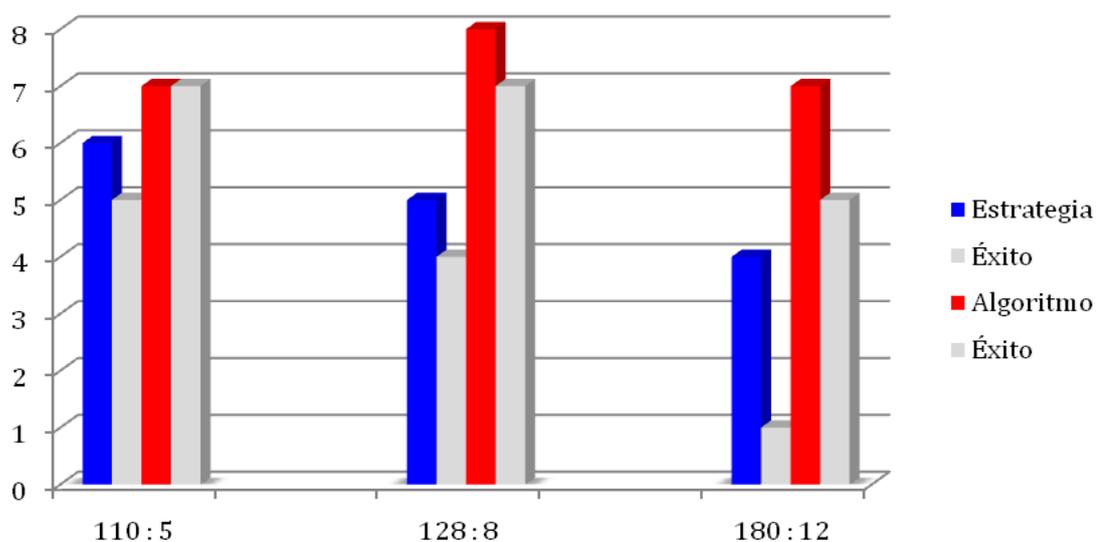


Gráfico 4. Resultados en la prueba inicial de la división

Podemos concluir que los alumnos desconocen las estrategias de cálculo mental y que únicamente muestran competencia en algunas estrategias que aplican para sumar números naturales. Asimismo, tienen memorizados los hechos numéricos de la suma y de la multiplicación, comprenden el sistema de numeración decimal y las relaciones entre las diferentes posiciones en la escritura numérica.

4.1.1 Perfil de los alumnos que han realizado la prueba inicial

Vamos a estudiar el comportamiento individual de cada uno de los alumnos del grupo experimental.

ALUMNO 1:

Ha obtenido resultados globales bajos porque ha hecho el cálculo correcto de 9 de las 15 operaciones de la prueba.

El alumno únicamente conoce estrategias de cálculo mental de la suma lo que le lleva a aplicar la estrategia de pensar en el algoritmo escrito de la resta, multiplicación y división. Se observa que se maneja bien con el algoritmo de la multiplicación y división; sin embargo fracasa en la operación resta.

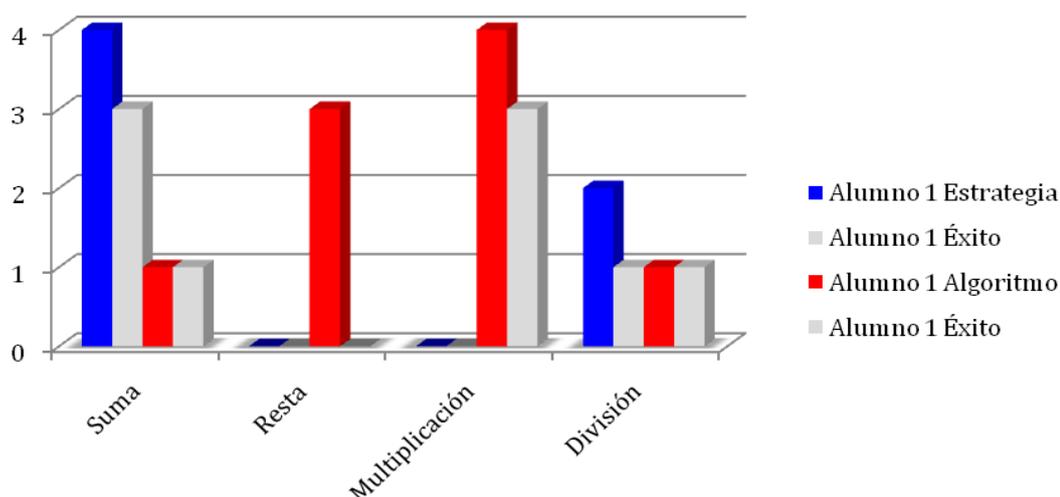


Gráfico 5. Resultados del alumno 1 en la prueba inicial

ALUMNO 2:

Se trata de uno de los dos alumnos que han obtenido peores resultados globales porque tan solo ha hecho el cálculo correcto de 6 de las 15 operaciones de la prueba.

Este alumno ha intentado aplicar estrategias diferentes a la de pensar en el algoritmo escrito. Sin embargo, apenas ha tenido éxito porque desconoce las estrategias de cálculo mental para la resta, multiplicación y división.

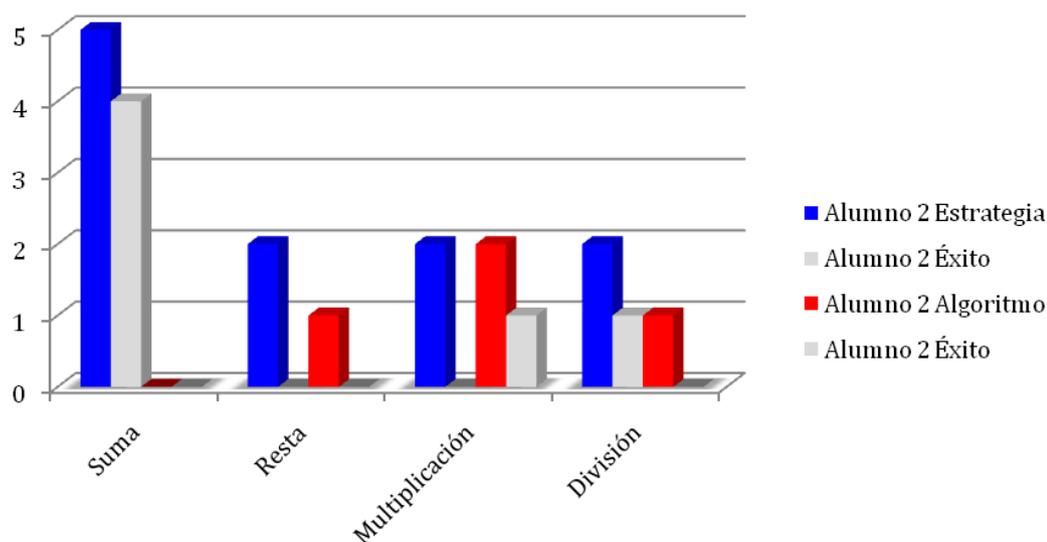


Gráfico 6. Resultados del alumno 2 en la prueba inicial

ALUMNO 3:

El alumno ha obtenido resultados globales aceptables dado que ha hecho el cálculo correcto en 12 de las 15 operaciones de la prueba.

Aplica con bastante éxito estrategias de cálculo mental de la suma. Sin embargo, el desconocimiento de las estrategias de la resta, multiplicación y división le lleva a aplicar la estrategia de pensar en el algoritmo escrito de estas operaciones. Ahora bien, el alumno aplica bien la estrategia de pensar en el algoritmo escrito lo que le permite obtener tasas altas de éxito.

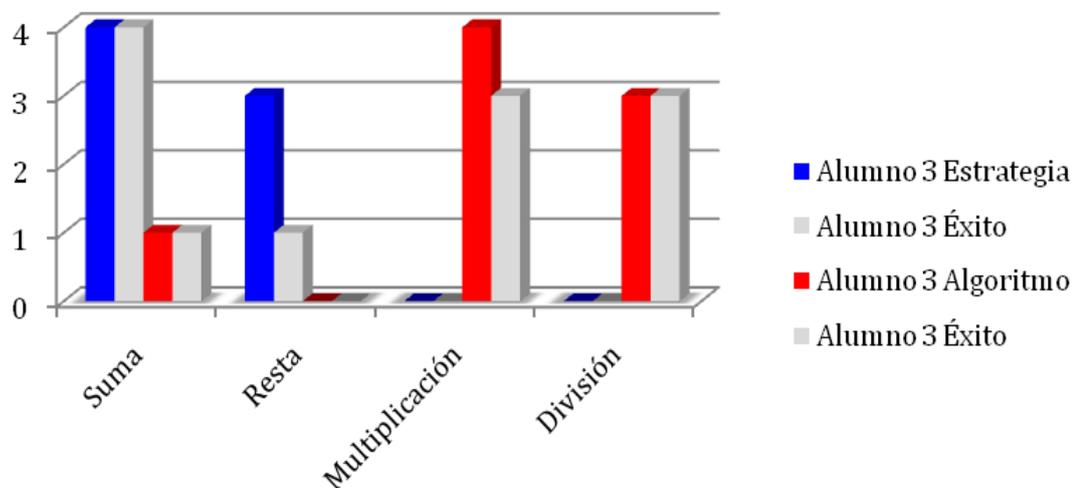


Gráfico 7. Resultados del alumno 3 en la prueba inicial

ALUMNO 4:

Ha obtenido resultados globales bajos puesto que ha hecho el cálculo correcto de 9 de las 15 operaciones de la prueba.

Se trata de un alumno con poca destreza en la realización de cálculos, puesto que, no le dio tiempo a terminar la prueba y dejó sin contestar los últimos 5 cálculos de la prueba.

Desconoce las estrategias de cálculo mental para la suma y la división y piensa en el algoritmo escrito. Ha intentado aplicar estrategias diferentes a la de pensar en el algoritmo escrito en el cálculo de la resta y multiplicación, teniendo más éxito en el cálculo de la multiplicación que en la resta.

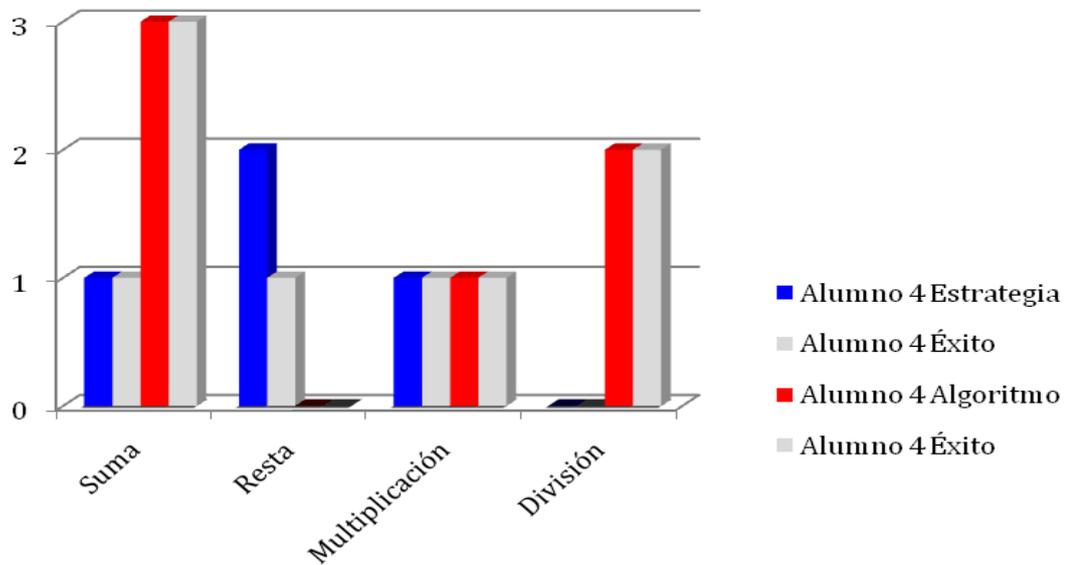


Gráfico 8. Resultados del alumno 4 en la prueba inicial

ALUMNO 5:

El alumno ha obtenido resultados globales elevados dado que ha hecho el cálculo correcto en 14 de las 15 operaciones de la prueba.

Ha intentado aplicar estrategias de cálculo mental en la mayoría de las operaciones, excepto en la división que prefiere pensar en el algoritmo escrito. Se observa que conoce estrategias de la suma y se maneja bien en el cálculo de las operaciones.

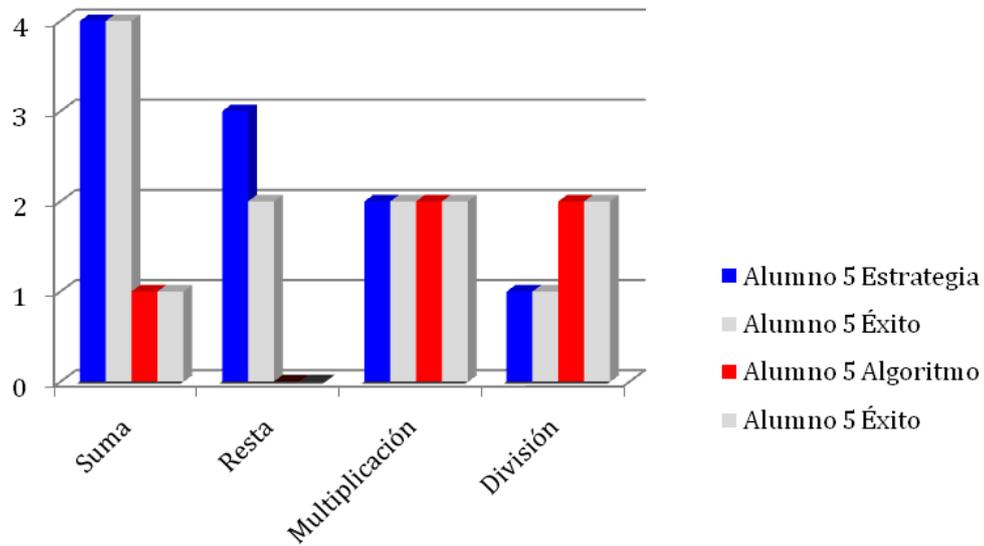


Gráfico9 . Resultados del alumno 5 en la prueba inicial

ALUMNO 6:

Este alumno ha obtenido resultados globales bajos porque ha hecho el cálculo correcto de 9 de las 15 operaciones de la prueba.

Ha intentado aplicar estrategias de cálculo mental en las operaciones. Sin embargo, tiene una mayor tasa de éxito cuando piensa en el algoritmo escrito. Por tanto, desconoce las estrategias de la suma, resta, multiplicación y división.

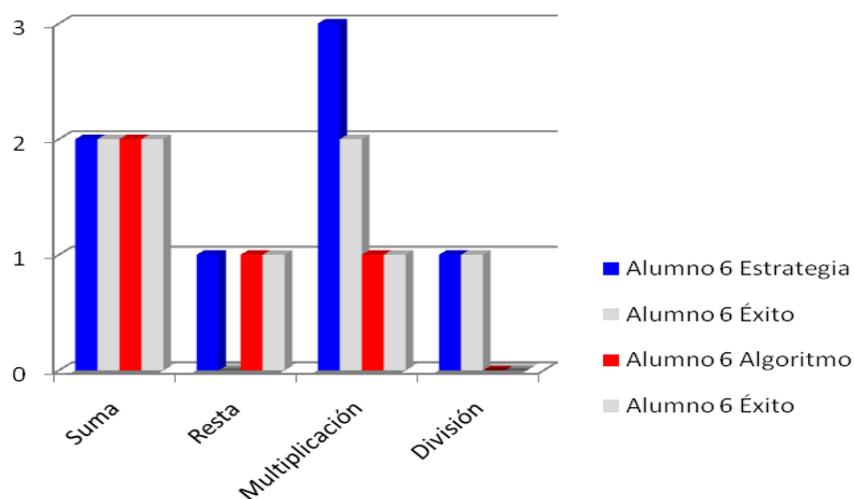


Gráfico 10. Resultados del alumno 6 en la prueba inicial

ALUMNO 7:

Ha obtenido resultados globales aceptables dado que ha hecho el cálculo correcto en 11 de las 15 operaciones de la prueba.

El alumno aplica con bastante éxito estrategias de cálculo mental de la suma y en la división y con poco éxito en la resta. En la multiplicación desconoce estrategias y prefiere pensar en el algoritmo escrito.

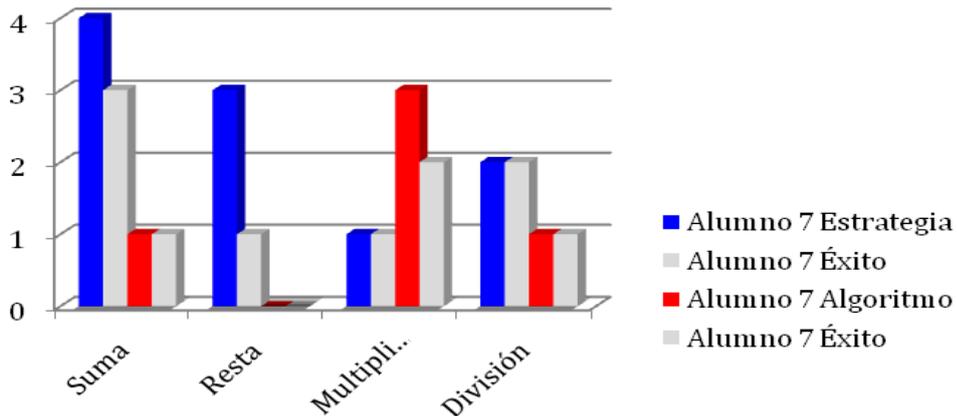


Gráfico 11. Resultados del alumno 7 en la prueba inicial

ALUMNO 8:

El alumno ha obtenido resultados globales aceptables dado que ha hecho el cálculo correcto en 11 de las 15 operaciones de la prueba.

Intenta aplicar estrategias de cálculo mental para la suma, resta y división pero sin mucho éxito. En la multiplicación únicamente piensa en el algoritmo escrito y en la división aplica estrategias con bastante éxito. En general, desconoce las estrategias de cálculo mental y aplica bien la estrategia de pensar en el algoritmo escrito lo que le permite obtener tasas altas de éxito.

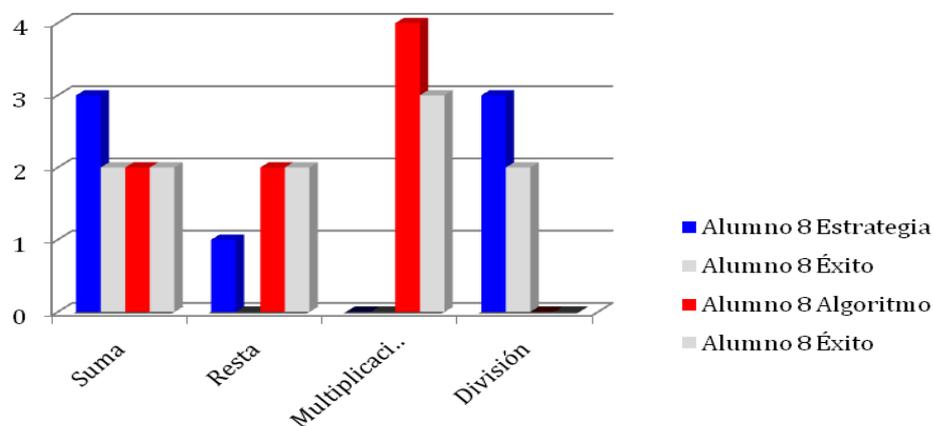


Gráfico 12. Resultados del alumno 8 en la prueba inicial

ALUMNO 9:

Ha obtenido resultados globales aceptables dado que ha hecho el cálculo correcto en 10 de las 15 operaciones de la prueba.

El alumno prefiere aplicar la estrategia de pensar en el algoritmo escrito en la resta, multiplicación y división. Desconoce las estrategias de cálculo mental de la suma, resta, multiplicación y división, dado que cuando las aplica no tiene demasiado éxito en el cálculo. Se observa que se maneja mejor en los cálculos de la resta que en el de la multiplicación y división.

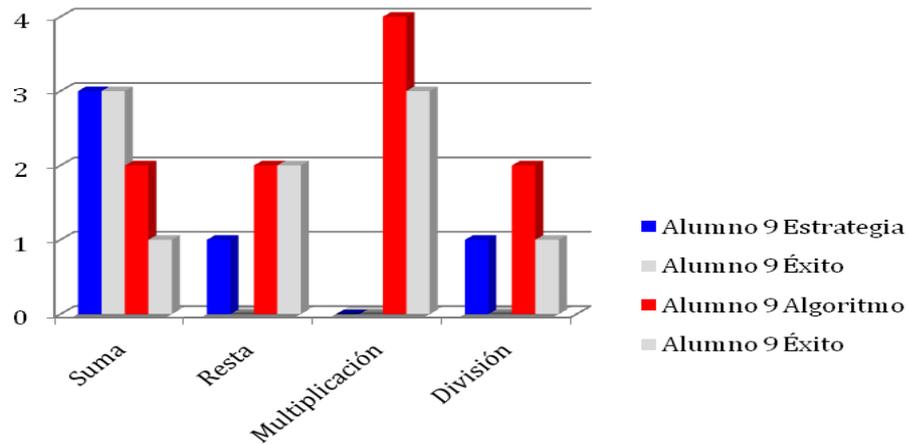


Gráfico 13. Resultados del alumno 9 en la prueba inicial

ALUMNO 10:

El alumno ha obtenido resultados globales elevados dado que ha hecho el cálculo correcto en 13 de las 15 operaciones de la prueba.

Desconoce las estrategias de cálculo mental de la suma, resta, multiplicación y división, lo que le lleva a pensar en el algoritmo escrito de estas operaciones. Se observa que tiene un buen manejo del algoritmo escrito para estas operaciones, lo que le permite tener un nivel elevado de éxito.

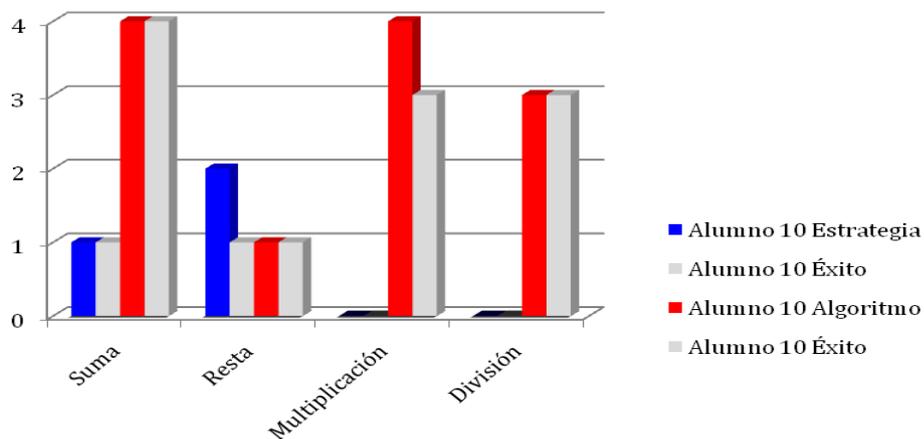


Gráfico 14. Resultados del alumno 10 en la prueba inicial

ALUMNO 11:

Ha obtenido resultados globales elevados dado que ha hecho el cálculo correcto en 13 de las 15 operaciones de la prueba.

El alumno desconoce las estrategias de cálculo mental y por ello tiende a pensar en el algoritmo escrito para la suma, resta, multiplicación y división. La tasa elevada de éxito se debe a que aplica bien la estrategia de pensar en el algoritmo escrito.

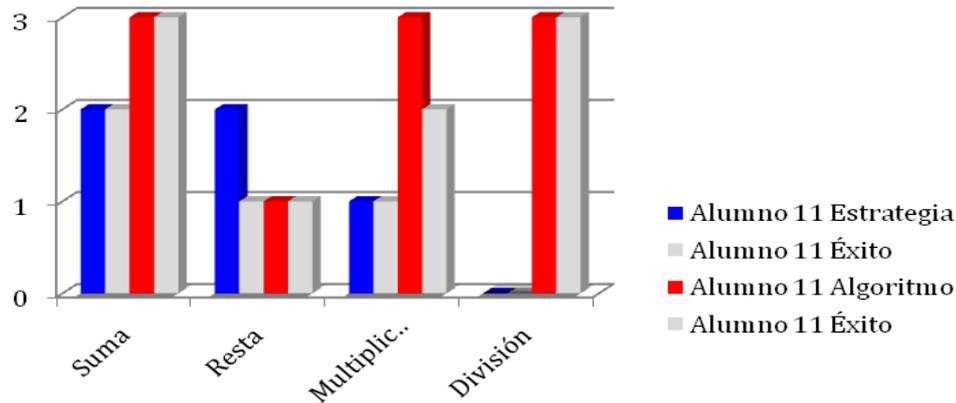


Gráfico 15. Resultados del alumno 11 en la prueba inicial

ALUMNO 12:

Este alumno ha obtenido resultados globales aceptables dado que ha hecho el cálculo correcto en 10 de las 15 operaciones de la prueba.

Aplica con éxito la estrategia de pensar en el algoritmo escrito en la suma, resta y división. Sin embargo, se observa que no tiene un buen manejo del algoritmo escrito en la multiplicación. No aplica estrategias de cálculo mental en la suma, multiplicación y división por desconocerlas. En la resta intenta aplicar estrategias de cálculo mental, sin éxito.

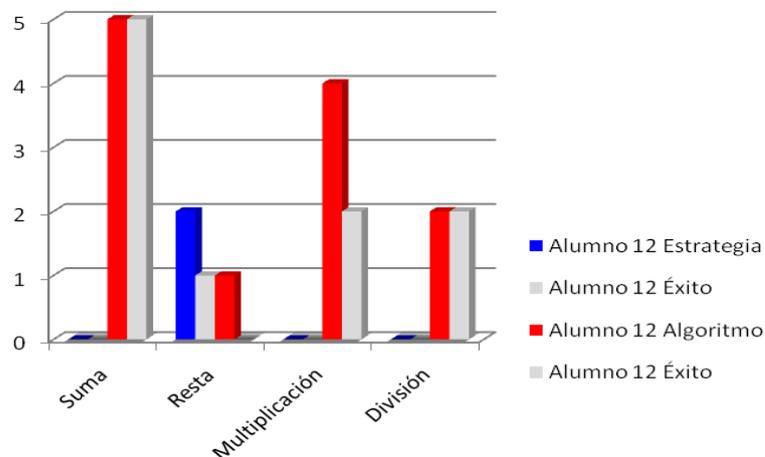


Gráfico 16. Resultados del alumno 12 en la prueba inicial

ALUMNO 13:

Ha obtenido resultados globales aceptables dado que ha hecho el cálculo correcto en 11 de las 15 operaciones de la prueba.

El alumno solo conoce estrategias de cálculo mental de la suma y aplica la estrategia de pensar en el algoritmo escrito de la suma, resta, multiplicación y división. Se observa que no tiene un buen manejo del algoritmo escrito de la multiplicación y división dado que yerra en ambas. Aplica estrategias de cálculo mental de la resta, sin ningún éxito.

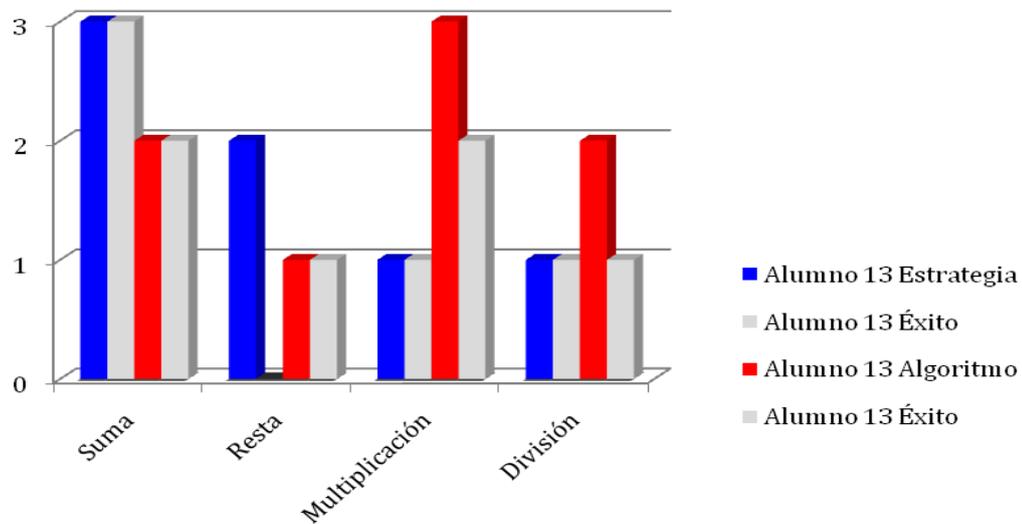


Gráfico 17. Resultados del alumno 13 en la prueba inicial

ALUMNO 14:

Se trata del otro alumno que ha obtenido los peores resultados globales porque tan solo ha hecho el cálculo correcto de 6 de las 15 operaciones de la prueba. Además, señalar que es uno de los alumnos que tienen adaptaciones curriculares significativas en el área de matemáticas. Como se cita anteriormente se tiene en cuenta en esta experimentación dada la mejora percibida por su tutora en dicha área.

Ha intentado aplicar estrategias de cálculo mental de la suma, resta, multiplicación y división. Sin embargo, el desconocimiento de éstas hace que yerre sobre todo en la resta, multiplicación y división. Se observa que no aplica bien la estrategia de pensar en el algoritmo escrito en la suma y multiplicación y por ello tiene bajas tasas de éxito.

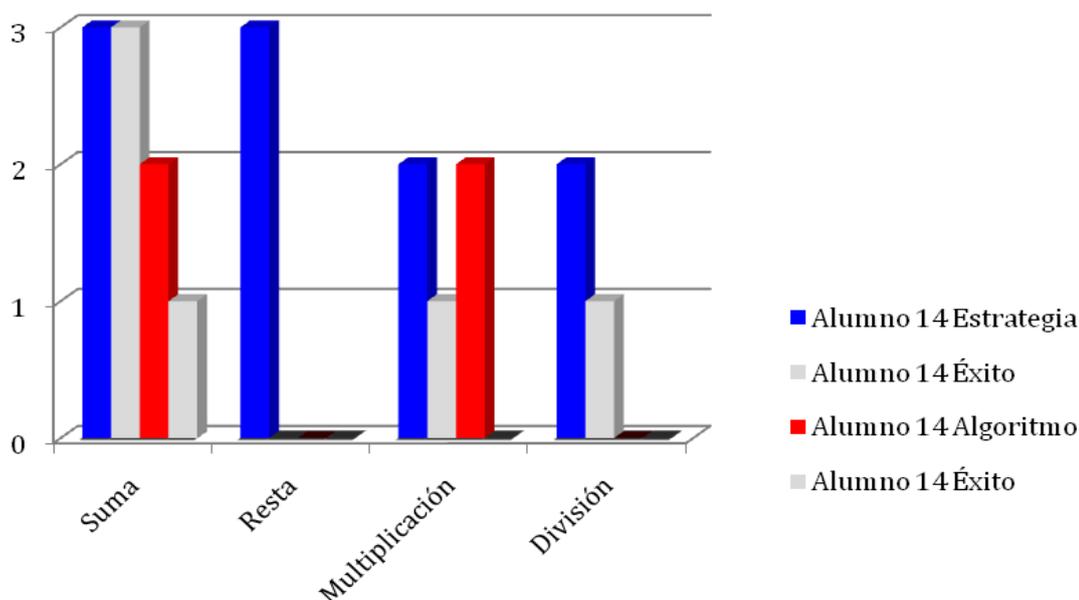


Gráfico 18. Resultados del alumno 14 en la prueba inicial

4.2 Desarrollo y evaluación de la propuesta de enseñanza

La propuesta se desarrolló los lunes y jueves lectivos durante el periodo comprendido entre el 7 de marzo y el 26 de mayo.

Como se ha dicho en el apartado de **contenidos**, la propuesta de enseñanza comienza con estrategias aditivas, de suma y resta, introduciendo posteriormente las estrategias de las operaciones multiplicativas, presentando éstas en un orden creciente de dificultad conceptual.

4.2.1 Enseñanza de estrategias de la suma de números naturales

Para la enseñanza de las estrategias de cálculo mental de la suma de números naturales se van a dedicar tres sesiones. En las cuales los alumnos van a realizar y comentar las estrategias que han aplicado al realizar los cálculos propuestos en las fichas 1, 2 y 3.

4.2.1.1 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 1.

Posterior a la prueba inicial se presenta la **ficha 1, anexo V**. Se realiza el día 10 de marzo a las 9:30 h y la realizan 13 alumnos.

Previamente, se explican las estrategias de la suma con uno o varios sumandos terminados en 9. Para ello, se escribe en la pizarra diferentes cálculos que se resuelven mediante estrategias, como por ejemplo;

43 + 9

- **Redondear.** Completar un sumando a la decena
Se puede pensar del siguiente modo; a 9 le falta 1 para ser 10, a 43 le sumo 10 y después le quito 1 y lo resuelvo $43 + 10 - 1 = 52$
- **Compensar.** Lo que se suma a un sumando se le quita al otro sumando
Se puede pensar así; a 43 le quito 1 y es 42 y a 9 se los doy 1 y es 10 y lo resuelvo $42 + 10 = 52$

50 + 70

- **Omitir ceros finales.**
Se puede pensar del siguiente modo; sumo $5 + 7$ y luego añado un 0 a la derecha y lo resuelvo $5 + 7 = 12$ y le añado el 0; $5 + 7 = 120$
- **Cambiar el orden de los sumandos** (propiedad conmutativa).
Se puede pensar así; $50 + 70 = 70 + 50$ y se resuelve $70 + 50 = 120$

152 + 145

- **Descomponer uno o los dos sumandos.**
Se puede pensar del siguiente modo; 152 es $150 + 2$ y 145 es $140 + 5$, así que $150 + 140 = 290$ y $2 + 5 = 7$ por tanto $290 + 7 = 297$
O también, así; 152 es $100 + 52$ y 145 es $100 + 45$, así que $100 + 100 = 200$ y $52 + 45 = 97$ por tanto $200 + 97 = 297$
O también, así: $150 + 2 + 150 - 5 = (150 + 150) - 3 = 300 - 3 = 297$

En la fase de enseñanza posterior a la realización de la ficha se anima a los alumnos a que verbalicen las diferentes estrategias que han utilizado. Y, dentro de cada estrategia, las diferentes formas que han descompuesto los números para realizar el cálculo.

Asimismo, se vuelve a recordar las reglas para hacer la prueba correctamente, como por ejemplo; no escribir el algoritmo, marcar una cruz en la estrategia utilizada, etc.

Seguidamente, los alumnos realizan la prueba, que está formada por 10 operaciones, en concreto, sumas con uno o varios sumandos terminados en 9. Y para ello, disponen de 5 minutos.

Con ello, se anima a los alumnos a participar en su resolución, favoreciendo activar sus conocimientos previos y tener una actitud activa ante las operaciones.

Con el objetivo de comparar el uso de estrategias y el éxito en el cálculo de las operaciones entre las diferentes fichas, hemos obtenido las medias globales

para que nos orienten en los resultados. Es decir, hemos extraído la media en cada ficha, con respecto a dos variables: el éxito en el cálculo de los cálculos de que consta la ficha y el uso de estrategias diferentes a la de pensar en el algoritmo escrito.

Somos conscientes de que ambas medias globales no explican el uso que los alumnos hacen de las diferentes estrategias y el éxito al aplicar una u otra. Las dos medidas de centralización tan solo indican un comportamiento global de los 14 alumnos que integran el grupo experimental.

Una vez detallado estos aspectos, del análisis de esta prueba se pueden extraer los siguientes resultados, cuyos datos se muestran en el **anexo V**:

- Todos los alumnos finalizan la prueba por debajo del tiempo establecido. En este aspecto, resaltar que uno de ellos, la realiza en un minuto y medio y sin errores.
- El éxito en las operaciones es de un 83,4%, puesto que, cometen pocos errores, como puede observarse en la tabla que se muestra a continuación:

Ficha 1	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	4	30,7%
1 fallo	4	30,7%
2 fallos	1	7,69%
3 fallos	1	7,69%
4 fallos	3	23,07%

- El porcentaje medio de alumnos que utilizan estrategias diferentes a la de pensar en el algoritmo escrito es del 98,46 %. A continuación, se detallan las estrategias que se trabajan en esta ficha; compensar (lo que le doy a un sumando se lo quito al otro) y completar un sumando a la decena siguiente. Ambas, son muy bien aceptadas por los alumnos, puesto que los porcentajes en el uso de estrategias es muy elevados, como se observa a continuación:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
28 + 9	100 %	100 %
95 + 9	92,3 %	92,3 %
9 + 48	92,3 %	100 %
35 + 19	76,9 %	100 %
86 + 19	92,3 %	100 %
110 + 39	76,9 %	100 %
506 + 49	92,3 %	100 %
39 + 666	38,5 %	100 %
456 + 99	100 %	92,3 %
99 + 891	76,9 %	100 %

Los datos aportan que todos los alumnos utilizan estrategias en todas las sumas.

Un aspecto a destacar es que la mayoría de los estudiantes utilizan la estrategia “completar un sumando a la decena siguiente (redondear)” para todas las sumas, excepto en las que se detallan a continuación:

En la suma **28 + 9**:

Estrategias utilizadas	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias
A 28 le sumo 10 y después quito una	12	92,3 %
He sumado 1 al 9 y restado 1 al 28	1	7,6 %
He pensado los números en vertical y he sumado	0	0%

En la suma **95 + 9**:

Estrategias utilizadas	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias
A 95 le sumo 10 y después quito una	12	92,3 %
He sumado 1 al 9 y restado 1 al 95	0	0%
He pensado los números en vertical y he sumado	1	7,6%

En la suma **35 + 19**:

Estrategias utilizadas	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 35 le sumo 20 y después quito una	12	92,3 %	2
He sumado 1 al 19 y restado 1 al 35	1	7,6 %	1
He pensado los números en vertical y he sumado	0	0%	0

En la suma **86 + 19**:

Estrategias utilizadas	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 86 le sumo 20 y después quito una	12	92,3 %	0
He sumado 1 al 19 y restado 1 al 86	1	7,6 %	1
He pensado los números en vertical y he sumado	0	0%	0

En la suma **456 + 99**:

Estrategias utilizadas	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias
A 456 le sumo 100 y después quito una	12	92,3 %
He sumado 1 al 99 y restado 1 al 456	0	0%
He pensado los números en vertical y he sumado	1	7,6%

En conclusión, puede decirse que los alumnos aceptan muy bien todas las estrategias de la suma, son capaces de aplicarlas y tienen un elevado porcentaje de éxito en los cálculos de esta prueba.

4.2.1.2 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 2.

La siguiente prueba es la **ficha 2, anexo VI**, se realiza el día 14 de marzo a las 9:30 h. Asisten a clase y realizan la ficha 14 alumnos.

Antes de comenzar la prueba, se realiza una puesta en común de las estrategias expuestas el día anterior. Se solicita a los alumnos que salgan a la

pizarra y participen en la explicación de las estrategias utilizadas. Con esta puesta en común se persigue por un lado captar su atención y activar sus conocimientos previos, y por otro lado, repasar las estrategias implicadas en el cálculo de sumas, utilizar las estrategias libremente y hacerles conscientes de lo que saben y de lo que no conocen, así como, de lo que utilizan o no en el cálculo de las operaciones.

Asimismo, se recuerdan las estrategias “asociar sumandos” y “cambiar el orden los sumandos” con los ejemplos que se muestran a continuación:

Para asociar sumandos

$$5 + 43 + 15 = (5 + 15) + 43 = 20 + 43 = 63$$

Para cambiar el orden de los sumandos

$$6 + 29 = 29 + 6 = 35$$

Posteriormente, realizan la prueba la cual está formada por 10 operaciones de sumas y disponen 5 minutos para su realización.

Como se comentó inicialmente, va aumentando progresivamente la dificultad. Por ello, en esta prueba los sumandos son más elevados. Asimismo, se amplía la cantidad de estrategias que se pueden utilizar.

Del análisis de la prueba se extraen los siguientes resultados, cuyos datos se muestran en el **anexo VI**:

- La mayoría de los alumnos no terminan la prueba en el tiempo establecido, solo cuatro de ellos, lo realizan. Por esta razón, se amplía el tiempo de la misma.
- El porcentaje medio de éxito en las operaciones es de un 87,8 %.
- El porcentaje medio de alumnos que utilizan estrategias diferentes a la de pensar en el algoritmo escrito es del 60%

A continuación, en la siguiente tabla, se detallan la relación entre el porcentaje de aciertos y las estrategias utilizadas:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
99 + 54	92,9 %	78,6 %
550 + 750	85,7 %	57,1 %
76 + 74	92,9 %	57,1 %
59 + 61	85,7 %	64,3 %
87 + 83	100 %	78,6 %
245 + 255	92,9 %	78,6 %
900 + 250	85,7 %	50 %
427 + 95	71,4 %	71,4 %
999 + 99	92,9 %	50 %
1750 + 350	78,6 %	57,1 %

Como se muestra, los números de los sumandos son más altos que en la ficha anterior. Este hecho, puede justificar que la mayoría de los alumnos precise más tiempo para realizarla.

Respecto a la ficha anterior y en relación al uso de estrategias, se aprecia una menor aplicación de las mismas, puesto que de un 98,46 % en la anterior prueba ha bajado a un 60,2 %. Este hecho puede justificarse por el aumento del valor numérico de los sumandos y un mayor número de estrategias a utilizar.

Mientras que en la ficha 1 aparecen estrategias; completar a la decena, centena siguiente y compensar (añadir a un sumando y quitarle al otro sumando el mismo número); en la ficha 2 aparecen además de las citadas; omitir ceros finales y descomponer uno o los dos sumandos.

La tasa de éxito es elevada, puesto que 10 de los 14 alumnos hacen todas las operaciones correctamente o bien yerran un solo cálculo. El número y porcentaje de errores en los cálculos se puede observar en la siguiente tabla:

Ficha 2	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	6	42,8 %
1 fallo	4	28,5 %
2 fallos	1	7,1 %
3 fallos	1	7,1 %
4 fallos	1	7,1 %
5 fallos	1	7,1 %

A continuación se procede a un análisis más detallado de las operaciones En la suma $76 + 74$, $59 + 61$, $87 + 83$ y $245 + 255$ se favorece buscar el doble (el 75, 60, 85 y 250 respectivamente), utilizando la estrategia de compensación Sin embargo, la estrategia de buscar el doble no ha sido la más utilizada, como se especifica a continuación:

En la suma, $76 + 74$

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto 76 como 70+6 y 74 como 70+4	7	50 %	0
He sumado 1 a 74 y restado 1 a 76	2	14,2 %	1
He pensado los números en vertical y he sumado	4	28,5%	0

Como se aprecia, el 50% de los alumnos optan por descomponer el número, en vez de buscar el doble. Al proponer este cálculo pretendemos que los alumnos conozcan y apliquen la estrategia de compensación. Lo que observamos es que, a fecha de hoy, la mayoría se sienten más seguros con la estrategia de descomponer los sumandos. Esto es razonable en este momento de la enseñanza porque los alumnos tienden a utilizar las estrategias con las que se sienten más seguros.

Por otro lado, uno de los alumnos no interpreta bien la lectura de las estrategias, puesto que, la estrategia “He descompuesto 76 como $70 + 6$ y 74 como $70 + 4$ ” la escribe como una nueva estrategia, como puede observarse en la siguiente imagen:

✓3) $76 + 74 =$ 150

- He descompuesto 76 como 70+6 y 74 como 70+4
- He sumado 1 a 74 y restado 1 a 76.
- He pensado los números en vertical y he sumado.
- He sumado 70+70 y luego 6+4

En la suma, **59 + 61**:

Estrategia	N° de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	N° de errores
He completado 59 a 60 y después resto 1	5	35,7 %	2
He sumado 1 a 59 y restado 1 a 60	5	35,7 %	0
He pensado los números en vertical y he sumado	2	14,2 %	0
Otras estrategias “descomponer uno o los sumandos”. He descompuesto 59 como $50 + 9$ y 61 como $60 + 1$	1	7,1 %	0

En esta suma, se aprecia una mayor búsqueda por el doble. Otro dato relevante, es que el mismo porcentaje de estudiantes selecciona una estrategia utilizada en la prueba anterior “completar a la decena siguiente”. Este hecho, revela que los alumnos están más familiarizados con ella o la han interiorizado.

En la suma, **87 + 83**:

Estrategia	N° de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias
He descompuesto 87 como $80+7$, y 83 como $80+3$, y he sumado	9	64,2 %
He sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar un doble.	2	14,2 %
He pensado los números en vertical y he sumado.	3	21,4 %

Como se observa en esta suma, los alumnos ven más factible la estrategia “descomponer los sumandos” que buscar el doble, utilizando la estrategia de compensación.

En la suma, **245 + 255**:

Estrategia	N° de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	N° de errores
He descompuesto viendo que 45 +55 son 100, después he sumado 400	4	28,5 %	0
He compensado añadiendo 5 al 245 y quitado 5 al 255	3	21,4 %	0
He pensado los números en vertical y he sumado	6	42,8 %	1

En esta suma la mayoría piensa en el algoritmo tradicional y en la descomposición de los sumandos. Y solo la quinta parte, piensa en buscar el doble aplicando la estrategia de compensación.

Todos estos datos muestran que los estudiantes no están muy familiarizados con la búsqueda de dobles para realizar las sumas y que se encuentran más seguros utilizando “descomponer los sumandos”.

Por otro lado, en la suma **550 + 750** solo utilizan estrategias un 50 % como se muestra a continuación:

Estrategia	N° de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias
He quitado los ceros finales	1	7,1 %
He completado un sumando a la centena siguiente	1	7,1 %
He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando	2	14,2 %
He pensado los números en vertical y he sumado	6	42,8 %
Otras estrategias “descomponer uno o los dos sumandos”	3	21,4 %

Como se puede observar, en esta suma la mayoría de los estudiantes se decantan por el uso del algoritmo tradicional seguido de estrategias tales como “descomponer los sumandos”, como se observa en la imagen:

✓ 2) $550 + 750 =$ 1.300

- He quitado los ceros finales.
- He completado un sumando a la centena siguiente.
- He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.
- He pensado los números en vertical y he sumado.
- He descompuesto 500+50 y 700+50.

Asimismo, en la suma $999 + 99$ las estrategias que utilizan son muy diversas, siendo las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias
He completado 99 a la centena siguiente (100) y que quitado 1	6	42,8 %
He pensado los números en vertical y he sumado	6	42,8 %
Otras estrategias “descomponer uno o los dos sumandos”	1	7,1 %

En esta suma, se invita al uso de la estrategia “completar a la centena o unidad de millar siguiente”. Sin embargo, hay un porcentaje elevado de estudiantes que deciden pensar en el algoritmo escrito.

A pesar de que los resultados son buenos los alumnos tienden a pensar en el algoritmo escrito cuando aumenta el valor numérico de los sumandos.

Como conclusión, puede decirse que hay un leve descenso de uso de estrategias respecto a la ficha anterior, pudiendo deberse al aumento del valor numérico de los sumandos.

4.2.1.3 Diseño, desarrollo y evaluación de la ficha 3.

La siguiente prueba se trata de la **ficha 3**, (ver **anexo VII**), la cual se realiza el día 17 de marzo a las 9:30 h. Asisten a clase y realizan la ficha 14 alumnos.

Al comienzo de la sesión, no se hace ningún recordatorio de las estrategias y se inicia con la realización de la prueba formada por 10 operaciones de sumas y

disponen de 5 minutos para finalizarla. Posteriormente, se hace una puesta en común de las estrategias utilizadas y de las diferentes posibilidades de cálculo.

Los resultados de la ficha, cuyos datos se detallan en el **anexo VII** son:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
610 + 390	100 %	85,7 %
269 + 141	71,4 %	64,3 %
199 + 176	78,6 %	64,3 %
345 + 355	78,6 %	64,3 %
1850 + 250	57,1 %	85,7 %
556 + 95	71,4 %	57,1 %
251 + 129	85,7 %	50 %
47 + 253	92,9 %	64,29 %
1250 + 450	71,4 %	78,6 %
399 + 56	78,6 %	71,4 %

En relación al número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos, se observa lo siguiente:

Ficha 3	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	4	28,5 %
1 fallo	2	14,2 %
2 fallos	2	14,2 %
3 fallos	2	14,2 %
4 fallos	2	14,2 %
5 fallos	2	14,2 %

Por tanto, se puede decir lo siguiente:

- La mayoría de los alumnos terminan la prueba en el tiempo establecido, solo tres de ellos, precisan más tiempo para finalizarla.
- El porcentaje de éxito en las operaciones es de un 78,5 %.
- El porcentaje medio de alumnos que utilizan estrategias diferentes a la de pensar en el algoritmo escrito es del 68,5 %. A continuación se procede a un análisis más detallado de las operaciones.

En la suma **610 + 390** el 100% de los estudiantes la realizan adecuadamente y las estrategias utilizadas son:

Estrategia	N° de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias
He quitado los ceros finales	2	14,2 %
He descompuesto 610 como 600 + 10 y 390 como 300 + 90	7	50 %
He completado 390 a la centena 400	3	21,4 %
He pensado los números en vertical y he sumado	2	14,2 %

En la suma, **1850 + 250** las estrategias que utilizan los alumnos son:

Estrategia	N° de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias
He quitado los ceros finales.	2	14,2 %
He descompuesto 1850 como 1800 + 50 y 250 como 200 + 50	4	28,5 %
He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.	4	28,5 %
He descompuesto 250 como 150 + 100	2	14,2 %
He pensado los números en vertical y he sumado.	2	14,2 %

En la suma **251 + 129** es en la que menos estrategias utilizan los alumnos. Como se puede apreciar el 50 % de los alumnos no utilizan ninguna estrategia en su cálculo y las utilizadas son las siguientes:

Estrategia	N° de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias
He sumado 1 a 129 y restado 1 a 251	3	21,4 %
He descompuesto 251 como 250 + 1 y 129 como 120 + 9	4	28,5 %
He pensado los números en vertical y he sumado	7	50 %

En la suma $47 + 253$ alguno de los alumnos usa la propiedad conmutativa en el cálculo, las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias
He cambiado el orden de los sumandos $253+47$	3	21,4 %
He buscado completar 47 a la decena 50	2	14,2 %
He sumado 3 a 47 y restado 3 a 253	3	21,4 %
He pensado los números en vertical y he sumado	3	21,4 %
Otras estrategias “descomponer uno o los dos sumandos”	1	7,1 %

Una de las alumnas realiza todas las operaciones con éxito, en el tiempo estipulado, y sin embargo, no utiliza ninguna estrategia. Esto quiere decir que hay alumnos que se sienten más seguros aplicando mentalmente el algoritmo escrito.

Finalizada la prueba, se realiza una puesta en común sobre las operaciones que la forman y las diferentes estrategias que han utilizado para su cálculo. Se solicita a los alumnos que salgan a la pizarra para que indiquen al resto de compañeros cómo han resuelto las sumas y se les invita a realizar más aportaciones.

Mediante la puesta en común, se persigue ver diferentes modos de resolver la misma operación. Además, se incide constantemente en la importancia de esa diversidad y en que cada uno tiene que buscar sus propias estrategias, es decir, que se prima el uso de estrategias antes que la rapidez en el cálculo.

Respecto a la ficha anterior, ha habido un ligero aumento en el uso de estrategias, sin embargo, ha bajado la tasa de éxito. La siguiente tabla muestra la relación entre el porcentaje de aciertos y las estrategias utilizadas en las fichas correspondientes a la enseñanza de las estrategias de la suma:

Ficha	% de aciertos	% de estrategias
1	83,4 %	98,4 %
2	87,8 %	60 %
3	78,5 %	68,5%

4.2.1.4 Resultados obtenidos en las estrategias de la suma

De la enseñanza de estrategias de la suma podemos decir que los alumnos han aceptado de buen grado las estrategias de la suma, son capaces de aplicarlas y tienen un elevado porcentaje de éxito en los cálculos de las fichas.

Hemos observado una menor aplicación de estrategias cuando se ha visto aumentado el valor numérico de los sumandos, como consecuencia, los alumnos han mostrado una preferencia a pensar en el algoritmo escrito.

A su vez, cuando el valor numérico de los sumandos ha aumentado, los alumnos han precisado más tiempo para el cálculo las operaciones como se ha puesto de manifiesto en la ficha 2.

Asimismo, hemos percibido que los alumnos no están muy familiarizados en la búsqueda de dobles para realizar las operaciones de suma, ya que, se ha observado en las sumas que se prestaban a la búsqueda de dobles que los alumnos se encuentran más seguros utilizando la estrategia “descomponer los sumandos”.

Por último, las estrategias más utilizadas en el cálculo de las sumas han sido completar a la decena o centena siguiente, descomponer uno o los dos sumandos y compensar.

4.2.2 Enseñanza de estrategias de la resta de números naturales

Ese punto se aborda la enseñanza de estrategias para la resta de números naturales. Para ello, vamos a dedicar y trabajar las estrategias en cuatro sesiones. Los alumnos van a realizar y comentar las estrategias que han aplicado al realizar los cálculos propuestos en las fichas 4, 5, 6 y 7.

4.2.2.1 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 4.

La **ficha 4, anexo VIII**, se lleva a cabo el día 21 de marzo a las 9:00 h, asisten al aula y realizan la ficha 13 alumnos.

Antes de comenzar la prueba se hace una intervención sobre las estrategias de cálculo mental para la resta. En primer lugar, se recuerdan oralmente alguna de las estrategias de la suma para introducir las de la resta y se recuerdan los términos de una resta (minuendo, sustraendo y diferencia). Las estrategias y ejemplos presentados son los siguientes:

- **Completar el sustraendo a la decena, centena siguiente (redondear)**

$$50 - 19 = 50 - 20 + 1 = 31$$

Se puede pensar del siguiente modo: Al 19 le falta 1 para llegar a 20, entonces, resto primero 20 y después sumo 1. Por tanto, 50 menos 20 son 30, pero como previamente he quitado 1, ahora tengo que sumárselo. Entonces la resta es $30 + 1 = 31$

- **Sumar o restar al minuendo y sustraendo el mismo número (compensar)**

$$50 - 19 = (50 + 1) - (19 + 1) = 51 - 20 = 31$$

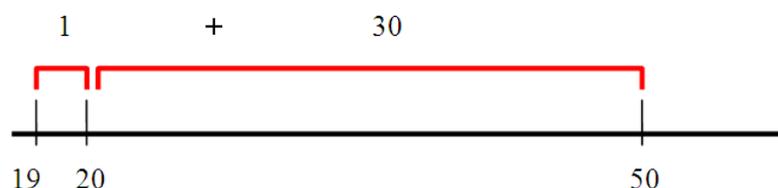
Se puede pensar así: Como a 19 le falta 1 para 20, sumo uno a 50 y 1 a 19, a la vez y hago el cálculo, 51 menos 20 son 31.

- **Añadir un número al sustraendo hasta llegar al minuendo**

$$50 - 19$$

La cual se puede pensar del siguiente modo: Si añado 1 llego al 20, si añado 30 llego hasta el 50. He añadido 31.

Además, en la pizarra se realiza la siguiente representación visual:



Es decir, la resta se convierte en una suma.

- **Omitir ceros finales**

$$600 - 250 = 60 \times 10 - 25 \times 10 = (60 - 25) \times 10 = 35 \times 10 = 350$$

Se puede pensar así: Resto 60 menos 25 y después añado un 0 a la derecha. Como 60 menos 25 es 35, el resultado de la resta es 350.

Posteriormente, se procede a realizar la **ficha 4** que está formada por 10 restas con el sustraendo terminado en 9 y disponen de 5 minutos para realizarla.

Analizada la prueba, se ponen de manifiesto los siguientes resultados, cuyos datos se muestran en el **anexo VIII**:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
28 – 9	76,9 %	100 %
38 – 9	76,9 %	92,3 %
103 – 9	61,5 %	100 %
50 – 19	76,9 %	92,3 %
60 – 29	84,6 %	92,3 %
89 – 19	54 %	92,3 %
111 – 29	46,2 %	92,3 %
121 – 39	46,2 %	92,3 %
225 – 49	46,2 %	92,3 %
225 – 99	46,2 %	92,3 %

Se observa que el 93,8 % de los alumnos aplican estrategias en el cálculo de las restas. Sin embargo, cometen más errores en el cálculo de las restas que en el de las sumas como muestra la tabla.

Como consecuencia, la tasa de éxito ha bajado, ya que del 87,8 % en la prueba anterior pasa a un 61,5 %. Por lo que se puede deducir que los alumnos tienen más dificultades en las restas que en las sumas, como se muestra a continuación:

Ficha 4	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	2	15,3 %
1 fallo	3	23 %
2 fallos	2	15,3 %
3 fallos	1	7,6 %
6 fallos	2	15,3 %
9 fallos	2	15,3 %
10 fallos	1	7,6 %

Prosiguiendo el análisis, cabe señalar que uno de los alumnos no es capaz de realizar ningún cálculo correctamente y dos de ellos únicamente realizan un cálculo correcto.

Por otro lado, todos los alumnos acabaron la prueba en el tiempo estipulado.

La siguiente resta **60 – 29** es en la que menos errores cometen y las estrategias utilizadas son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 60 le resto 30 y después le sumo 1	11	84,6 %	1
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.	1	7,6 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	1	7,6 %	1

Las estrategias más utilizadas en la resta **28 – 9** son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 28 le resto 10 y después le sumo 1	11	84,6 %	3
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	1	7,6 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	1	7,6 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	0	0 %	0

Respecto a las estrategias utilizadas en la resta **111 – 29** son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 111 le resto 30 y después le sumo 1	8	61,5 %	4
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	3	23 %	2
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	2	15,3 %	1
He pensado los números en vertical y he restado	0	0 %	0

En la resta **121 – 39** las estrategias utilizadas son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 121 le resto 40 y después le sumo 1	9	69,2 %	5
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	2	15,3 %	1
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	1	7,6 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	1	7,6 %	1

En la resta **225 – 49** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 225 le resto 50 y después le sumo 1	10	76,9 %	5
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	1	7,6 %	1
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	2	15,3 %	1
He pensado los números en vertical y he restado	0	0%	0

Las estrategias más utilizadas en la resta **225 – 99** son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 225 le resto 100 y después le sumo 1	9	69,2 %	4
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	2	15,3 %	2
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	1	7,6 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	1	7,6 %	1

Como conclusión, puede decirse que el cálculo de las restas les resulta más difícil a la mayoría de los alumnos, dado que, cometen más errores. Y en especial, cuando hay un aumento de los valores de los minuendos y sustraendos.

La estrategia más utilizada es completar el sustraendo a la decena o centena siguiente (redondear). Sin embargo, los alumnos tienen dificultades para aplicarla con éxito, particularmente cuando aumenta el valor numérico del sustraendo.

Aunque la tasa de aplicación de estrategias es elevada, podemos afirmar que no las dominan al errar en el cálculo de las restas cuando utilizan estrategias.

4.2.2.2 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 5.

La **ficha 5, anexo IX**, se realiza el día 4 de abril a las 9:00 h, asisten al aula y realizan la prueba 12 alumnos.

Antes de comenzar la prueba se hace una puesta en común de las estrategias de cálculo mental para la resta. Unos cuantos alumnos salen a la pizarra escriben y explican cómo aplican las estrategias en diferentes restas.

Mediante estas intervenciones públicas todos los alumnos se benefician de las explicaciones y en especial, los alumnos que presentan mayores dificultades para aplicarlas.

Además, hemos explicado la diferencia que hay en la estrategia de “compensar” de la suma y de la resta. Para ello, con la ayuda de los alumnos se realizan los siguientes ejemplos en la pizarra:

En la **suma**, lo que le sumo a un sumando se lo quito al otro sumando.

$$51 + 29 = (51 - 1) + (29 + 1) = 50 + 30 = 80$$

En la **resta**, le sumo o resto lo mismo al minuendo y al sustraendo.

$$51 - 29 = (51 + 1) - (29 + 1) = 52 - 30 = 22$$

A continuación, se detallan la relación entre el porcentaje de aciertos y las estrategias utilizadas en esta ficha:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
94 – 39	58,3 %	83,3 %
140 - 28	66,7 %	75 %
655 –195	66,7 %	75 %
270 – 99	66,7 %	83,3 %
800 – 330	25 %	66,7 %
263 – 48	66,7 %	83,3 %
252 – 127	58,3 %	58,3 %
80 – 41	58,3 %	75 %
1250 – 750	25 %	58,3 %
412 – 99	66,7 %	83,3 %

En un primer análisis se extrae los siguientes resultados de los datos que se muestran en el **anexo IX**:

- El porcentaje medio de éxito en el cálculo de las restas ha sido 55,8 %.
- El porcentaje medio en el uso de estrategias de la resta es 74,1 %.

Respecto a la ficha anterior, los resultados han sido menos satisfactorios. La tasa de éxito ha bajado de un 61,5 % de la anterior a un 55,8 % en esta ficha la tasa de éxito de las restas cuyo sustraendo terminado en 9, ha bajado de un 93,3% a un 74,1%

Asimismo, se observan diferencias en relación con el tiempo empleado. En la ficha anterior todos los alumnos fueron capaces de terminarla en el tiempo estipulado. Sin embargo, en esta prueba únicamente un alumno es capaz de realizarla en el tiempo estipulado. Por ello, se aumenta el tiempo con el fin que todos puedan acabarla.

Con esta ficha se vuelve a confirmar que los alumnos tienen más dificultades en la aplicación de las estrategias de la resta, así como, en el cálculo de las mismas, como se muestra a continuación:

Ficha 5	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	0	0 %
1 fallo	3	25 %
2 fallos	1	8,3 %
3 fallos	2	16,6 %
4 fallos	1	8,3 %
5 fallos	1	8,3 %
6 fallos	1	8,3 %
8 fallos	1	8,3 %
9 fallos	1	8,3 %
10 fallos	1	8,3 %

Las restas en las cuales los alumnos han cometido más errores, coincide con las de mayor valor numérico en el minuendo y sustraendo. En concreto, el 75 % de los alumnos han errado en las restas $800 - 330$ y $1250 - 750$.

Las estrategias utilizadas en la resta $800 - 330$ son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He omitido los ceros finales	2	16,6 %	2
He descompuesto el sustraendo como $300 + 30$	6	50 %	4
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	
He pensado los números en vertical y he restado	4	33,3 %	3

En la resta $1250 - 750$ son las detalladas a continuación:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He omitido los ceros finales	1	8,3 %	1
He descompuesto el sustraendo como $700 + 50$	6	50 %	6
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	5	41,6 %	2

Para la resta **252 – 127** las estrategias utilizadas por los alumnos en su cálculo han sido las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He sumado 3 al minuendo y 3 al sustraendo	4	33,3 %	2
He restado 2 al minuendo y 2 al sustraendo	3	25 %	2
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	5	41,6 %	1

En relación con las restas cuyo sustraendo acaba en 9, las estrategias utilizadas en la resta **94 – 39**:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 94 le resto 40 y después le sumo 1	8	66,6 %	4
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	2	16,6 %	1
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	2	16,6 %	0

Las utilizadas en la resta **270 – 99** son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 270 le resto 100 y después le sumo 1	9	75 %	3
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	1	8,3 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	2	16,6 %	1

En la resta **412 – 99** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 412 le resto 100 y después le sumo 1	9	75 %	3
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	0	0 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	3	25 %	1

En las siguientes restas, al igual que en las restas cuyo sustraendo termina en 9, se puede observar la preferencia de los alumnos por la estrategia de completar el sustraendo a la decena o centena siguiente:

En la resta **140 – 28** son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 140 le resto 30 y después le sumo 2	9	75 %	3
He sumado 2 al minuendo y 2 al sustraendo	0	0 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	3	25 %	1

Las más utilizadas en la resta **263 – 48** son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 263 le resto 50 y después le sumo 2	8	66,6 %	2
He sumado 2 al minuendo y 2 al sustraendo	2	16,6 %	2
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	2	16,6 %	0

Para finalizar, podemos decir que los alumnos se sienten más seguros utilizando la estrategia “completar el sustraendo a la decena o centena siguiente”, le sigue la estrategia de “compensar” y la menos utilizada es “añadir números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo”, los alumnos no comprenden esta última estrategia.

4.2.2.3 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 6.

La **ficha 6, anexo X**, se realiza el día 7 de abril a las 11:00 h y asisten al aula y realizan la prueba 14 alumnos.

En esta sesión se comienza haciendo la prueba, la cual está formada por 10 operaciones de restas y disponen 5 minutos para su realización.

Posteriormente, se desarrolla una puesta en común de algunas de las restas de la ficha, que consiste en salir a la pizarra voluntariamente para compartir con los compañeros las estrategias que han aplicado en el cálculo de algunas de las restas. A su vez, se invita a los alumnos a que aporten otras estrategias distintas a las expuestas.

La siguiente tabla muestra la relación entre el porcentaje de aciertos y el de aplicación de estrategias en la prueba, siendo:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
84 – 39	85,7 %	92,9 %
100 - 28	64,3 %	85,7 %
90 –19	85,7 %	92,8 %
200 – 99	92,9 %	92,8 %
500 – 210	71,4 %	78,5 %
75 –25	57 %	71,4 %
250 – 105	78,6 %	64,2 %
110 – 41	71,4 %	78,6 %
125 – 9	64,2 %	64,2 %
400 – 99	92,8 %	78,5 %

Del estudio de los datos que se muestran en el **anexo X** obtenemos los siguientes resultados:

- El porcentaje medio de éxito en esta ficha de restas es 76,4 %

- El porcentaje medio en el uso de estrategias es 79,9 %

Podemos destacar una mejora en la tasa de éxito, puesto que en la ficha anterior fue 55,8% Sin embargo, respecto al uso de estrategias los valores se mantienen puesto que en la ficha anterior fue 74,1 %

Otro aspecto que mejora es el tiempo que emplean los alumnos para realizar la ficha. Resaltar que en la ficha anterior únicamente un alumno fue capaz de terminarla en el tiempo establecido. Sin embargo, en esta ficha, 9 de los 14 alumnos son capaces de terminarla en el tiempo estipulado.

En relación al número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos, se detallan en la siguiente tabla:

Ficha 6	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	4	28,5 %
1 fallo	4	28,5 %
3 fallos	3	21,4 %
5 fallos	1	7,1 %
7 fallos	1	7,1 %
8 fallos	1	7,1 %

Sobre la aplicación de estrategias en el cálculo de la resta, los alumnos parecen sentirse más cómodos y seguros aplicando la estrategia “completar el sustraendo a la decena siguiente”. A continuación, se detallan las utilizadas por los alumnos en el cálculo de las restas.

Las utilizadas en **84 – 39** son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 84 le resto 40 y después le sumo 1	12	85,7 %	2
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	1	7,1 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	1	7,1 %	0

Para la resta **100 – 28** las estrategias más utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 100 le resto 30 y después le sumo 2	9	64,2 %	2
A 100 le resto 20 y después le resto 8	3	21,4 %	1
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	2	14,2 %	2

En la resta **90 – 19** las estrategias que utilizan los alumnos son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 90 le resto 20 y después le sumo 1	12	85,7 %	1
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	1	7,1 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	1	7,1 %	1

En la resta **200 – 99** son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 200 le resto 100 y después le sumo 1	13	92,8 %	0
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	0	0 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	1	7,1 %	1

Ha habido una mejora en el uso y éxito al aplicar la estrategia “completar el sustraendo a la decena siguiente”. Los alumnos siguen sin utilizar la estrategia “añadir números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo”.

En la resta **250 – 105** las estrategias aplicadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 250 le resto 100 y después le resto 5	8	57,1 %	0
He restado 5 al minuendo y 5 al sustraendo	1	7,1 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	5	35,7 %	3

Las estrategias utilizadas en la resta **110 – 41** son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 110 le resto 40 y después le resto 1	11	78,5 %	2
He restado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	0	0 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	3	21,4 %	2

En esta resta **500 – 210** los alumnos utilizan las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He omitido los ceros finales	6	42,8 %	2
He descompuesto el sustraendo como 200 + 10	5	35,7 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	2	21,4 %	1
No realiza el cálculo	1	7,1 %	-

En la resta $75 - 25$ son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 75 le resto 20 y después le resto 5	7	50 %	5
He sumado 5 al minuendo y 5 al sustraendo	3	21,4 %	0
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	4	28,5 %	1

Como conclusión, podemos señalar que los alumnos han aprendido y se sienten más seguros aplicando la estrategia “completar el sustraendo a la decena siguiente”. Asimismo, han mejorado en la aplicación de la misma, dado que comenten pocos fallos en el cálculo de la resta cuando utilizan esta estrategia.

Por otro lado, la estrategia menos utilizada por los alumnos ha sido “añadir números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo”.

Todo lo expuesto hasta aquí nos permite inferir que los alumnos presentan más dificultades en el cálculo y aplicación de estrategias de la resta que de la suma. En general, los resultados obtenidos en las fichas dedicadas a la enseñanza de las estrategias de la resta no fueron tan satisfactorios como los obtenidos en las fichas dedicadas a la suma.

4.2.2.4 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 7.

La **ficha 7, anexo XI**, se realiza el día 11 de abril a las 9:00 h y asisten al aula y realizan la prueba 14 alumnos.

Esta ficha combinada de sumas y restas se realiza como respuesta a las dificultades observadas en la aplicación de estrategias en el cálculo de la resta. Por este motivo, se diseña una ficha en la que se combinan ambas operaciones con la finalidad de mejorar la aplicación de estrategias de la suma y resta.

En esta sesión se comienza haciendo la prueba, la cual está formada por 10 operaciones de sumas restas y disponen 5 minutos para su realización.

Seguidamente, se procede a realizar una puesta en común donde los alumnos exponen en la pizarra algunas de las estrategias utilizadas en algunas de

las operaciones que aparecen en la prueba. Asimismo, se solicita a los alumnos que expliquen si han utilizado alguna otra estrategia para calcular la misma operación.

Tras su análisis podemos observar que solo 4 de los 14 alumnos que realizan la prueba son capaces de terminarla en el tiempo estipulado.

En cuanto a la relación de aciertos y estrategias utilizadas, en la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos en esta ficha:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
700 + 650	78,5 %	64,3 %
900 - 450	57,1 %	85,7 %
1880 + 1220	71,4 %	57,1 %
106 - 59	57,1 %	71,4 %
87 + 399	71,4 %	78,5 %
111 - 39	50 %	64,2 %
324 - 122	71,4 %	71,4 %
238 + 398	50 %	71,4 %
600 - 230	50 %	64,2 %
369 + 241	64,2 %	57,1 %

Los datos que se muestran en el **anexo XI**, nos revelan que la tasa de éxito general en esta ficha de sumas y restas es 62,1 % y el porcentaje medio en la aplicación de estrategias es 68,5 %.

Con el objetivo de conocer las estrategias por los alumnos, parece adecuado el agrupar por un lado las sumas y por otro, las restas. Comparando ambas en esta ficha, se aprecia un cambio positivo de los alumnos respecto al uso de estrategias de la resta dado que se aprecia un ligero aumento de éstas respecto a la suma.

Operación	% de aciertos	% de estrategias
700 + 650	78,5 %	64,3 %
1880 + 1220	71,4 %	57,1 %
87 + 399	71,4 %	78,5 %
238 + 398	50 %	71,4 %
369 + 241	64,2 %	57,1 %

Operación	% de aciertos	% de estrategias
900 - 450	57,1 %	85,7 %
106 - 59	57,1 %	71,4 %
111 - 39	50 %	64,2 %
324 - 122	71,4 %	71,4 %
600 - 230	50 %	64,2 %

Se mantienen los resultados obtenidos en las fichas anteriores en el sentido de que los porcentaje de éxito son mayores en el cálculo de sumas que en el de restas.

En relación al número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos, se muestran en la tabla:

Ficha 7	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	0	0 %
1 fallo	2	14,2 %
2 fallos	4	28,5 %
3 fallos	3	21,4 %
4 fallos	1	7,1 %
5 fallos	1	7,1 %
6 fallos	1	7,1 %
9 fallos	1	7,1 %
10 fallos	1	7,1 %

La suma en la que más éxito han tenido los alumnos es la **700 + 650** y las estrategias utilizadas por éstos han sido las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He quitado los ceros finales	0	0 %	0
He completado 650 a la centena siguiente (700) y después he restado 50	5	35,7 %	1
He descompuesto 650 como 600 + 50	4	28,5 %	1
He pensado los números en vertical y he restado	5	35,7 %	1

Por otro lado, en la suma en la que menos éxito han tenido los alumnos ha sido en **238 + 398** y las estrategias utilizadas han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He completado 398 a la centena siguiente (400) y después he restado 2	5	35,7 %	2
A 238 le he quitado 2 y a 398 le he sumado 2	5	35,7 %	3
He pensado los números en vertical y he restado	4	28,5 %	2

En cuanto a las restas, en la que más éxito han tenido los alumnos es en **324 – 122** y las estrategias aplicadas para su cálculo son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He restado 2 al minuendo y 2 al sustraendo	4	28,5 %	2
He descompuesto el sustraendo en 100 + 22	6	42,8 %	1
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	4	28,5 %	1

Las restas en las que más yerran los alumnos son **111 – 39** y **600 – 230**. En ambas, un 50 % de los alumnos no fueron capaces de realizar el cálculo adecuadamente. En el caso de **111 – 39**, las estrategias utilizadas han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
A 111 le resto 40 y después le sumo 1	8	57,1%	2
He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo	1	7,1 %	1
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	4	28,5 %	3

En la resta **600 – 230** las estrategias han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje	Nº de errores
He omitido los ceros finales	3	21,4 %	2
He descompuesto el sustraendo como 200 + 30	6	42,8 %	4
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	3	21,4 %	2

Llegados a este punto de la enseñanza de estrategias de cálculo mental, se observa que este grupo de 5º de Primaria, utilizan en muy pocas ocasiones estrategias como: “omitir ceros” tanto en la suma como en la resta; y la estrategia “añadir números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo” para la resta, como viene confirmándose en las anteriores fichas.

En la resta **900 – 450** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He quitado los ceros finales	4	28,5 %	1
He descompuesto el sustraendo como 400 + 50	4	28,5 %	2
He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo	3	21,4 %	1
He pensado los números en vertical y he restado	2	14,2 %	1

En la suma **1880 + 1220** han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He quitado los ceros finales	1	7,1 %	1
He descompuesto 1880 como 1800 + 80 y 1220 como 1200 + 20	5	35,7 %	1
He sumado 20 a 1880 y he completado a 1900 y le he restado 20 a 1220	2	14,2 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	4	28,5 %	1

En resumen, los alumnos comprenden mejor las estrategias de la suma que las de la resta, y obtienen porcentajes elevados cuando suman que cuando restan.

Los alumnos han aceptado de buen grado las estrategias de la suma. Las más utilizadas han sido completar a la decena o centena siguiente, descomponer uno o los dos sumandos y compensar.

Cuando los términos de suma aumentan los alumnos tienden a pensar en el algoritmo escrito. Al resolver estas sumas baja el porcentaje de éxito.

Los alumnos muestran más dificultades en el cálculo y aplicación de estrategias de la resta que de la suma.

4.2.2.5 Resultados obtenidos en las estrategias de la resta

Del análisis de las fichas de la enseñanza de estrategias de la resta conjeturamos que el cálculo de las restas les resulta más difícil a la mayoría de los alumnos, dado que, cometen más errores. Y en especial, cuando hay un aumento de los valores de los minuendos y sustraendos.

En general, los resultados obtenidos en las fichas dedicadas a la enseñanza de las estrategias de la resta no fueron tan satisfactorios como los obtenidos en las fichas dedicadas a la suma. Por tanto, inferimos que los alumnos presentan más dificultades en el cálculo y aplicación de estrategias de la resta que de la suma y comprenden mejor las estrategias de la suma.

Durante la enseñanza de las estrategias de la resta se ha comprobado una ligera mejora en el aprendizaje de las estrategias puesto que los resultados de las fichas 5 y 6 son más satisfactorios que los obtenidos en la ficha 4.

En las cuatro sesiones de trabajo de estrategias de cálculo mental de la resta los alumnos han mejorado en el uso de la estrategia “completar el sustraendo a la decena o centena siguiente”. En efecto, hemos detectado una mejora progresiva en la aplicación y porcentaje de éxito de esta estrategia que ha sido bien acogida por los escolares. También hemos detectado una progresión más moderada en el uso de las estrategias de “descomponer el sustraendo” y “compensación” para calcular restas.

Sin embargo, no hemos visto progresión en el uso de la estrategia “añadir números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo”. Este hecho, puede deberse a varias causas, como es que los alumnos no comprendan esta estrategia y se muestran reacios a utilizarla y que se sienten cómodos con las estrategias conocidas y se resisten al uso de estrategias nuevas que le generan inseguridad en el cálculo mental de las restas.

A su vez, utilizan en muy pocas ocasiones la estrategia: “omitir ceros” tanto en la suma como en la resta.

4.2.3 Enseñanza de estrategias de la multiplicación y división de números naturales

Para la enseñanza de las estrategias de cálculo mental de la multiplicación y división de números naturales se han dedicado 10 sesiones para las cuales se han diseñado las fichas 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 y 17.

Del mismo modo, que en la enseñanza de las estrategias para la suma y resta, en las multiplicaciones y divisiones se mantiene un aumento progresivo en cuanto a la dificultad. Esto se lleva a cabo mediante el incremento de los valores numéricos en ambos factores en el caso de la multiplicación y en el dividendo y divisor en la división.

En primer lugar se repasan las tablas de multiplicar del 2, 3, 4, 5 y posteriormente se enseñan estrategias generales.

En la ficha 8, 9 y 10 se abordan estrategias de casos particulares de multiplicaciones y divisiones. En la ficha 8 multiplicaciones y divisiones por 2 (doble y mitad); en la ficha 9 multiplicaciones y divisiones por 3 y 4; en la ficha 10 multiplicar y dividir por 5.

Las fichas 11, 12, 13 y 14 se centran únicamente en la enseñanza de estrategias generales de la multiplicación y las fichas 15, 16 y 17 en la enseñanza de estrategias para la división.

Respecto a la multiplicación, en la ficha 11 se abordan estrategias para multiplicar por 8 y 9 y en la ficha 12 se vuelven a abordar las estrategias trabajadas hasta ese momento para la multiplicación. En la ficha 13 se enseñan estrategias para casos particulares para multiplicar como son; multiplicar por 15 y 25. En la ficha 14 se trabajan estrategias con ambos factores de dos cifras, mezclando estrategias de aplicación general y para casos particulares.

En relación con la división en las fichas 15, 16 y 17 se enseñan estrategias generales.

4.2.3.1 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 8.

La **ficha 8, anexo XII**, se realiza el día 15 de abril a las 9:30 h y asisten al aula y realizan la prueba 14 alumnos.

Esta ficha combina 6 multiplicaciones y 6 divisiones con total de 12 operaciones, mediante la cual se repasa la tabla de multiplicar del 2 (dobles y mitades).

Esta sesión comienza con la explicación de las estrategias que se ponen en juego en la realización de la ficha 8 y 9. Inicialmente, la maestra presenta los siguientes ejemplos que se muestran a continuación y corresponden a la ficha 8:

Para la multiplicación **56 x 2**:

- **Sumar al multiplicando, el multiplicando**

$$56 + 56 = 112$$

- **Descomponer el multiplicando**

$$56 \times 2 = (50 \times 2) + (6 \times 2) = 100 + 12 = 112$$

Se puede pensar del siguiente modo: el multiplicando 56 lo descompongo en 50 + 6 y multiplico 50 x 2 y 6 x 2. Ambos resultados los sumo y obtengo el resultado de la operación.

Para la división **56 : 2**:

- **Descomponer el dividendo**

$$56 : 2 = (50 : 2) + (6 : 2) = 25 + 3 = 28$$

Se puede pensar del siguiente modo: el dividendo 56 lo descompongo como 50 + 6 y divido 50 : 2 y 6 : 2 y sumo los resultados.

Otro modo de pensar sería el siguiente: el dividendo 56 lo descompongo como 40 + 16 y divido 40 : 2 y 16 : 2 y sumo los resultados.

$$56 : 2 = (40 : 2) + (16 : 2) = 20 + 8 = 28$$

Seguidamente, se procede a la explicación de la estrategia multiplicar y dividir un número entre 3 que corresponde a la ficha 9 mediante los siguientes ejemplos:

Para la multiplicación **12 x 3**:

- **Descomponer el multiplicador**

$$12 \times 3 = 12 \times (2 + 1) = (12 \times 2) + 12 = 24 + 12 = 36$$

Se puede pensar del siguiente modo: al multiplicando 12 multiplicarlo por 2 y sumarle el multiplicando 12.

- **Descomponer el multiplicando**

$$12 \times 3 = (10 \times 3) + (2 \times 3) = 30 + 6 = 36$$

Otra forma de calcularlo sería la siguiente: el multiplicando lo descompongo como 10 + 2 y multiplico 10 x 3 y 2 x 3 y sumo los resultados.

Para la división **45 : 3** varios alumnos levantaron la mano para salir a la pizarra. Uno de ellos sale y realiza la siguiente estrategia.

- **Descomponer el dividendo**

$$45 : 3 = (30 : 3) + (15 : 3) = 10 + 5 = 15$$

Lo piensa del siguiente modo: el dividendo 45 lo descompone como 30 + 15 y divide 30 : 3 y 15 : 3. Después, suma ambos resultados.

Seguidamente, se procede a realizar la ficha 8 para la que disponen 5 minutos.

Tras su análisis podemos decir que 12 de los 14 alumnos terminan la ficha en el tiempo estipulado, tan solo dos (A5 y A14) necesitan 1 minutos más para finalizarla.

En cuanto a la relación de aciertos y estrategias utilizadas, en la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
35 x 2	100 %	57,1 %
57 x 2	92,9 %	71,4 %
79 x 2	92,9 %	57,1 %
105 x 2	92,9 %	64,3 %
99 x 2	85,7 %	64,3 %
998 x 2	78,5 %	64,3 %
68 : 2	100 %	64,3 %
84 : 2	100 %	64,3 %
106 : 2	92,8 %	64,3 %
52 : 2	78,6 %	64,3 %
98 : 2	85,7 %	64,3 %
190 : 2	78,5 %	64,3 %

De los datos que se muestran en el **anexo XII** se obtienen los siguientes resultados:

- El porcentaje medio de éxito en esta ficha de multiplicaciones y divisiones es de un 89,8 %.
- El porcentaje medio en el uso de estrategias es de un 63,6 %.

De los datos se puede interpretar que los alumnos aceptan de buen grado las estrategias para ambas operaciones, dado que aplican estrategias para el cálculo de las operaciones y los resultados en general son aceptables.

Sin embargo, hay que destacar que 4 de los 14 alumnos (A4, A10, A12 y A14), no aplican ninguna estrategia en el cálculo de ninguna operación. Se puede intuir que estos alumnos no comprenden las estrategias empleadas, se sienten más inseguros o les supone un esfuerzo añadido el aplicarlas. Como consecuencia, deciden realizar el cálculo pensando en el algoritmo escrito.

En relación al número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos, se muestran en la siguiente tabla:

Ficha 8	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	6	42,8 %
1 fallo	4	28,5 %
2 fallos	1	7,1 %
3 fallos	2	14,2 %
5 fallos	1	7,1 %

En la multiplicación 57×2 es en la operación en la que más estrategias han aplicado los alumnos, siendo las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He sumado al multiplicando (57) el multiplicando	5	35,7 %	0
He descompuesto el multiplicando como $50+7$	5	35,7 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	4	28,5 %	1

Para la multiplicación 105×2 las estrategias utilizadas han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He sumado al multiplicando (105) el multiplicando	5	35,7 %	0
He descompuesto el multiplicando como $100 + 5$	4	28,5 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	5	35,7 %	1

Las estrategias utilizadas en la multiplicación **99 x 2** son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He sumado al multiplicando (99) el multiplicando	5	35,7 %	0
He descompuesto el multiplicando como 100 - 1	3	21,4 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	5	35,7 %	1
Otra estrategia utilizada de las facilitadas. He descompuesto el multiplicando como 90 + 9	1	7,1 %	0

En la multiplicación **998 x 2** las estrategias utilizadas han sido las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He sumado al multiplicando (998) el multiplicando	7	50 %	2
Descompuesto el multiplicando como 1000 - 2	1	7,1 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	5	35,7 %	0
Estrategia diferente a las facilitadas. He descompuesto el multiplicando 998 como 900 + 90 + 8	1	7,1 %	0

Para la división **84: 2** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo (84) como 80 + 4	9	64,3 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	5	35,7 %	0

En la división **106 : 2** las estrategias utilizadas han sido las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo (106) como $100 + 6$	8	57,1 %	1
He pensado en la división hecha con la caja	6	42,8 %	0

Para la división **98 : 2** los alumnos utilizan las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo (98) como $80 + 18$	6	42,8 %	0
He descompuesto el dividendo (98) como $100 - 2$	3	21,4 %	1
He pensado en la división hecha con la caja	5	35,7 %	1

En la división **190 : 2** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo (190) como $180 + 10$	7	50 %	2
He descompuesto el dividendo (190) como $200 - 10$	2	14,2 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	5	35,7 %	1

En resumen, podemos decir que los alumnos han aceptado de buen grado las estrategias para el cálculo de multiplicaciones y divisiones. Además, los resultados generales son buenos. En las divisiones cuyo dividendo tiene un número de decenas impar los alumnos tienden a utilizar la estrategia más eficaz que consiste en descomponer el dividendo en dos sumandos uno de los cuales tiene un número de decenas par, lo que facilita la división entre 2.

No obstante, puntualizar que 4 de los 14 alumnos (A4, A10, A12 y A14) no han utilizado ninguna estrategia para el cálculo de ninguna de las de

multiplicaciones y divisiones. Este hecho puede deberse a que los alumnos se sienten inseguros en el uso de estas estrategias, no las comprenden o les supone un esfuerzo mental añadido.

4.2.3.2 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 9.

La **ficha 9, anexo XIII**, se realiza el día 18 de abril a las 9:30 h y asisten al aula y realizan la ficha 12 alumnos.

Se comienza con una puesta en común de las estrategias utilizadas en la ficha 8. Para ello, se escriben en la pizarra dos de las operaciones de la ficha 8 y los alumnos salen a resolverlas y explican la estrategia que utilizan para su cálculo. Los ejemplos utilizados fueron **57 x 2** y **98 : 2**.

En esta la ficha 9 se ponen en juego las estrategias para multiplicar por 3 y 4. En cuanto a las estrategias para multiplicar y dividir por 3 se pueden aplicar las que se detallan a continuación.

Para multiplicar por 3:

- **Multiplicar el multiplicando por 2 y al resultado se le suma el multiplicando.**

$$35 \times 3 = 35 \times (2 + 1) = (35 \times 2) + 35 = 70 + 35 = 105$$

Se puede pensar del siguiente modo: primero multiplico el multiplicando (35) por 2 y al resultado le sumo el multiplicando.

- **Descomponer el multiplicando**

$$35 \times 3 = (30 + 5) \times 3 = (30 \times 3) + (5 \times 3) = 90 + 15 = 105$$

Se puede pensar así; el multiplicando (35) lo descompongo como 30 + 5, multiplico 30 x 3 y 5 x 3, después sumo ambos productos.

Para dividir entre 3:

$$48 : 3$$

- **Descomponer el dividendo**

$$48 : 3 = (30 + 18) : 3 = (30 : 3) + (18 : 3) = 10 + 6 = 16$$

Se puede pensar del siguiente modo: el divisor (48) lo descompongo como 30 + 18, y divido 30 : 3 y 18 : 3, después sumo ambos resultados.

Para multiplicar por 4:

$$35 \times 4$$

- **Duplicar dos veces consecutivas el multiplicando.**

Se trata de la estrategia más eficaz para multiplicar por 4 y consiste en duplicar dos veces consecutivas el multiplicando como se muestra en el ejemplo:

$$35 \times 4 = (35 \times 2) \times 2 = 70 \times 2 = 140$$

Se puede pensar así: al multiplicando (35) lo multiplico por 2 y lo vuelvo a multiplicar por 2.

- **Descomponer el multiplicando**

$$35 \times 4 = (30 \times 4) + (5 \times 4) = 120 + 20 = 140$$

Se puede pensar del siguiente modo: el multiplicando (35) lo descompongo como (30 + 5). Y multiplico 30 x 4 y 5 x 4, después, sumo los productos de ambas operaciones.

- **Compensar “multiplicar un factor por un número y dividir el otro factor por el mismo número”**

$$35 \times 4 = (35 \times 2) \times (4 : 2) = 70 \times 2 = 140$$

Se puede pensar así: al multiplicando (35) lo multiplico por 2 y el multiplicador lo divido entre 2.

Para dividir entre 4:

$$52 : 4$$

- **Descomponer el dividendo**

$$52 : 4 = (40 + 12) : 4 = (40 : 4) + (12 : 4) = 10 + 3 = 13$$

Se puede pensar del siguiente modo: el dividendo (52) lo descompongo como 40 + 12, y divido 40 : 4 y 12 : 4, después sumo ambos resultados.

- **Factorizar el divisor**

$$52 : 4 = 52 : (2 \times 2) = (52 : 2) : 2 = 26 : 2 = 13$$

Se puede pensar así: el dividendo (52) lo divido entre 2, el resultado lo vuelvo a dividir entre 2.

Seguidamente, se procede a realizar la ficha 9 la cual está formada por 6 multiplicaciones y 6 divisiones, con total de 12 operaciones para aplicar estrategias para casos particulares de multiplicaciones y divisiones por 3 y 4. Para su realización disponen 5 minutos.

En esta ficha se amplía el tiempo estipulado, dado que solo 5 de los 14 alumnos son capaces de acabarla a tiempo.

En cuanto a la relación de aciertos y estrategias utilizadas, en la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
15 x 3	100 %	75 %
26 x 3	91,7 %	58,3 %
39 x 3	91,7 %	50 %
36 : 3	100 %	66,7 %
42 : 3	66,7 %	50 %
84 : 3	91,6 %	50 %
25 x 4	83,3 %	66,7 %
53 x 4	91,6 %	75 %
59 x 4	75 %	41,7 %
56 : 4	75 %	66,6 %
92 : 4	83,3 %	50 %
500 : 4	75 %	66,6 %

De los datos que se muestran en el **anexo XIII** podemos concretar que:

- El porcentaje medio de éxito en esta ficha de multiplicaciones y divisiones es de un 85,4 %.
- El porcentaje medio en el uso de estrategias es de un 59,7%.

Los datos nos permiten intuir que los alumnos aceptan de buen grado las estrategias sobre casos particulares de multiplicaciones y divisiones por 3 y 4.

Por otro lado, 3 de los 12 alumnos (A4, A10 y A12) no utilizan ninguna estrategia para el cálculo de las operaciones. Comentar que A14 no ha asistido a clase, por tanto, no ha realizado la ficha 9. En la ficha anterior (ficha 8) A14 no empleo ninguna estrategia para el cálculo de las operaciones.

En relación al número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos, se muestran en la siguiente tabla:

Ficha 9	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	1	8,3 %
1 fallo	7	58,3 %
2 fallos	1	8,3 %
3 fallos	1	8,3 %
5 fallos	1	8,3 %
6 fallos	1	8,3 %

A continuación se detallan las estrategias utilizadas por los alumnos en algunas multiplicaciones y divisiones. Las operaciones en las que más estrategias aplican son en las multiplicaciones siguientes **15 x 3** y **53 x 4**.

En la multiplicación **15 x 3** las estrategias más utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado (15) por 2 y después he sumado 15	4	33,3 %	0
He descompuesto el multiplicando como 10 + 5	5	41,6 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	3	25 %	0

En la multiplicación **53 x 4** las estrategias más utilizadas han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el multiplicando (53) como 50 + 3	3	25 %	0
He multiplicado (53) por 2 y el resultado lo he multiplicado por 2	6	50 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	3	25 %	0

La operación en la que menos estrategias han aplicado los alumnos para el cálculo es la multiplicación 59×4 y las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el multiplicando (59) como $60 - 1$	2	16,6 %	1
He multiplicado (59) por 2 y el resultado después lo he multiplicado por 2	3	25 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	5	41,6 %	1

Son muy pocos los alumnos que utilizan la estrategia óptima “He descompuesto el multiplicando (59) como $60 - 1$ ”

Para la multiplicación 39×3 las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado (39) por 2 y después he sumado 39	2	16,6 %	1
He descompuesto el multiplicando como $40 - 1$	4	33,3 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	6	50 %	0

Para la división $42 : 3$ las estrategias utilizadas han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 42 como $30 + 12$	6	50 %	3
He pensado en la división hecha con la caja	6	50 %	1

En la división **84 : 3** las estrategias utilizadas por los alumnos han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 84 como $60 + 24$	6	50 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	6	50 %	1

En la división **92 : 4** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo (92) como $80 + 12$	5	41,6 %	1
He dividido (92) entre 2 y el resultado después lo he dividido entre 2	1	8,3 %	1
He pensado en la división hecha con la caja	6	50 %	0

En la división **500 : 4** las estrategias utilizadas han sido las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo (500) como $400 + 100$	4	33,3 %	1
He dividido (500) entre 2 y el resultado después lo he dividido entre 2	4	33,3 %	1
He pensado en la división hecha con la caja	4	33,3 %	1

En resumen, podemos decir que al igual que en la ficha anterior (estrategias para casos particulares de multiplicaciones y divisiones por 2) los alumnos han aceptado de buen grado las estrategias para los casos particulares de multiplicaciones y divisiones por 3 y 4, puesto que los resultados obtenidos han sido buenos y los alumnos intentan aplicar estrategias en el cálculo de las operaciones.

No obstante, los alumnos A4, A10 y A12 como en la ficha anterior no han aplicado ninguna de las estrategias y han optado para el cálculo de las operaciones pensar en el algoritmo escrito.

4.2.3.3 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 10.

La **ficha 10, anexo XIV**, se lleva a cabo el día 21 de abril a las 11,30h y asisten al aula y realizan la prueba 14 alumnos.

Antes de comenzar la ficha la maestra explica las estrategias para multiplicar y dividir por 5 mediante los siguientes ejemplos:

$$16 \times 5$$

- **Descomponer el multiplicando**

$$16 \times 5 = (10 \times 5) + (6 \times 5) = 50 + 30 = 80$$

Se puede pensar así: el multiplicando 16 lo descompongo como 10 + 6 y multiplico 10 x 5 y 6 x 5, luego, sumo ambos productos.

- **Multiplicar el multiplicando por 10 y después dividir entre 2.**

$$16 \times 5 = (16 \times 10) : 2 = 160 : 2 = 80$$

Se puede pensar del siguiente modo: el multiplicador 16 lo multiplico por 10 y luego, lo divido entre 2.

$$75 : 5$$

- **Descomponer el dividendo con un sumando que sea múltiplo de 5**

$$75 : 5 = (50 : 5) + (25 : 5) = 10 + 5 = 15$$

Se puede pensar del siguiente modo: el dividendo 75 lo descompongo como 50 + 25 y divido 50 : 5 y 25 : 5, después sumo ambos resultados.

- **Otra estrategia consiste en multiplicar el dividendo por 2 y después dividir entre 10.**

$$75 : 5 = (75 \times 2) : 10 = 150 : 10 = 15$$

Se puede pensar así: el dividendo 75 lo multiplico por 2 y después lo divido entre 10.

Seguidamente, se procede a realizar la ficha 10 que está formada por 6 multiplicaciones y 6 divisiones para la cual disponen de 5 minutos para realizarla.

La mayoría de los alumnos son capaces de terminar la ficha en el tiempo establecido, tan solo 4 de los 14 alumnos solo precisan un minuto más para realizarla.

En cuanto a la relación de aciertos y estrategias utilizadas, en la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
18 x 5	92,9 %	57,1 %
21 x 5	100 %	50 %
25 x 5	100 %	57,1 %
28 x 5	100 %	42,9%
31 x 5	100 %	64,3 %
42 x 5	100 %	50 %
60 : 5	100 %	64,3 %
70 : 5	92,8 %	57,1 %
85 : 5	92,8 %	50 %
125 : 5	78,6 %	64,2 %
150 : 5	85,7 %	57,1 %
175 : 5	78,6 %	50 %

De su análisis podemos concretar los siguientes resultados, cuyos datos se muestra en el **anexo XIV**:

- El porcentaje medio de éxito en esta ficha es 93,45 %
- El porcentaje medio en el uso de estrategias es 55,3 %
- En cuanto a las multiplicaciones
 - El porcentaje medio de éxito en las multiplicaciones es 98,8 %
 - El porcentaje medio en el uso de estrategias es 53,5 %
- Respecto a las divisiones
 - El porcentaje medio de éxito en las divisiones es 88 %
 - El porcentaje medio en el uso de estrategias es 57,1 %

Como puede apreciarse los alumnos utilizan similares porcentajes en la aplicación de estrategias para el cálculo de multiplicaciones y divisiones.

Para poder interpretar si los alumnos están aceptando las estrategias para casos particulares en las multiplicaciones y divisiones, parece oportuno recordar los datos de los porcentajes medios del uso de estrategias de fichas anteriores, con

el fin de comprobar el uso de las mismas. En la siguiente tabla se muestran los porcentajes medio de uso de estrategias de las fichas realizadas.

Ficha	Estrategias utilizadas para estas operaciones	Porcentaje medio de uso de estrategias
Ficha 1	Sumas con uno sumando terminado en 9	98,4 %
Ficha 2	Sumas	60,2 %
Ficha 3	Sumas	68,5 %
Ficha 4	Restas con el sustraendo terminado en 9	61,5 %
Ficha 5	Restas	74,1 %
Ficha 6	Restas	79,9 %
Ficha 7	Sumas y restas	68,5 %
Ficha 8	Multiplicaciones y divisiones por 2	63,6 %
Ficha 9	Multiplicaciones y divisiones por 3 y 4	59,7 %
Ficha 10	Multiplicaciones y divisiones por 5	55,3 %

De estos datos se puede interpretar que los alumnos intentan aplicar las estrategias para casos particulares de multiplicaciones y divisiones. Sin embargo, el porcentaje medio de aplicación de estrategias va disminuyendo, pudiéndose inferir que los alumnos no las comprenden o les resulta más difícil aplicarlas o se sienten más inseguros.

En relación al número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos, se muestran en la siguiente tabla:

Ficha 10	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	9	64,2 %
1 fallo	2	12,2 %
2 fallos	1	7,1 %
3 fallos	1	7,1 %
6 fallos	1	7,1 %

Respecto a las estrategias que utilizan los alumnos para el cálculo de las operaciones se desarrollan a continuación.

En la multiplicación 18×5 son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y el resultado lo he dividido entre 2	6	42,8 %	1
He descompuesto el multiplicando (18) como $10 + 8$	2	14,2 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	6	42,8 %	0

La multiplicación 28×5 es la operación que menos estrategias utilizan y son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y el resultado lo he dividido entre 2	3	21,4 %	0
He descompuesto el multiplicando (28) como $20 + 8$	3	21,4 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	8	57,1 %	0

En la multiplicación 31×5 utilizan las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y el resultado lo he dividido entre 2	5	35,7 %	0
He descompuesto el multiplicando (31) como $30 + 1$	4	28,5 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	5	35,7 %	0

En la multiplicación 42×5 las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y el resultado lo he dividido entre 2	4	28,5 %	0
He descompuesto el multiplicando (42) como $40 + 2$	3	21,4 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	7	50 %	0

En la división $60 : 5$ las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado el dividendo por 2 y el resultado lo he dividido entre 10	7	50 %	1
He descompuesto 60 como $50 + 10$	2	14,2 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	5	35,7 %	1

En la división $85 : 5$ las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado el dividendo por 2 y el resultado lo he dividido entre 10	4	28,5 %	0
He descompuesto 85 como $50 + 35$	3	21,4 %	1
He pensado en la división hecha con la caja	7	50 %	0

En la división **125 : 5** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado el dividendo por 2 y el resultado lo he dividido entre 10	7	50 %	2
He descompuesto 125 como 100 + 25	2	14,2 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	5	35,7 %	1

En la división **175 : 5** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado el dividendo por 2 y el resultado lo he dividido entre 10	5	35,7 %	1
He descompuesto 175 como 200 - 25	2	14,2 %	1
He pensado en la división hecha con la caja	7	50 %	1

En resumen, podemos decir que los alumnos intentan aplicar las estrategias para casos particulares de multiplicaciones y divisiones por 5. Sin embargo, casi la mitad de los alumnos rehúsan utilizar alguna de las estrategias para el cálculo de las multiplicaciones y divisiones, teniendo en cuenta a los alumnos A4, A10, A12 y A14 que siguen sin aplicar ninguna estrategia en el cálculo de las operaciones.

El no aplicar estrategias para calcular multiplicaciones y divisiones puede deberse a que suponga un esfuerzo mental a los alumnos o tengan inseguridad en su uso. Por ello, es probable que opten por utilizar el algoritmo escrito, el cual les aporta seguridad.

En cuanto a las estrategias utilizadas para el cálculo de las multiplicaciones, los alumnos no se decantan por ninguna en particular, utilizando todas las estrategias de un modo similar.

Sin embargo, en las estrategias para la división los alumnos parecen aceptar con mayor agrado la estrategia particular para dividir por 5 (multiplicar por 2 y después dividir el resultados entre 10).

A continuación, se desarrollan las fichas 11, 12, 13 y 14 las cuales se centran únicamente en la enseñanza de estrategias para multiplicar.

4.2.3.4 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 11.

La **ficha 11, anexo XV**, se realiza el día 25 de abril a las 9:30 h y asisten al aula y realizan la ficha 14 alumnos.

Inicialmente, se hace una puesta en común de la multiplicación **31 x 5** y la división **70 : 5**. Para ello, salen varios alumnos a la pizarra y aplican diferentes estrategias para su cálculo. En la división, un alumno la realiza de un modo incorrecto como se detalla a continuación:

$$70 : 5 = (70 : 2) : 3 = 35 : 3 = 11,6$$

Lo piensa del siguiente modo: el divisor lo descompongo como $2 + 3$ y divido $70 : 2$ y el resultado lo vuelve a dividir entre 3.

El alumno intenta aplicar, de modo erróneo, la estrategia de factorizar el divisor.

Seguidamente, la maestra expone la estrategia de completar el multiplicador a la decena siguiente mediante el siguiente ejemplo:

$$35 \times 9 = 35 \times (10 - 1) = (35 \times 10) - (35 \times 1) = 350 - 35 = 315$$

En la enseñanza de estrategias para multiplicar por 8 no se realiza ningún ejemplo en la pizarra por falta de tiempo. Por ello, se les dice a los alumnos que lean atentamente las estrategias para multiplicar por 8.

A continuación, se procede a realizar la ficha que consta de 12 multiplicaciones cuyo multiplicador es de una cifra; por 8 o por 9. El tiempo que disponen para realizarla es de 5 minutos.

Respecto a la duración de la ficha decir que solo 4 de los 14 alumnos son capaces de realizar en el tiempo establecido, éste se amplía con el fin de poder terminarla.

En la tabla que se muestran a continuación se exponen los resultados obtenidos en relación a los aciertos y estrategias utilizadas:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
12 x 9	100 %	50 %
15 x 9	93 %	50 %
18 x 9	93 %	57,1 %
19 x 9	57,1 %	57,1 %
21 x 9	100 %	50 %
25 x 9	85,7 %	57,1%
30 x 9	100 %	50 %
35 x 9	92,9 %	50 %
15 x 8	85,7 %	64,2 %
18 x 8	64,2 %	64,2 %
25 x 8	85,7 %	50 %
29 x 8	71,4 %	42,8 %

Del análisis de los datos de la ficha, que se muestran en el **anexo XV**, podemos afirmar que:

- El porcentaje medio de éxito es de un 85,7 %
- El porcentaje medio en el uso de estrategias es 53,5 %

En cuanto al uso de estrategias para el cálculo de multiplicaciones se mantiene lo dicho hasta ahora, puesto que el 50 % de los alumnos no utilizan ninguna estrategia para el cálculo de las multiplicaciones. Además, el alumno A2 se une a los alumnos (A4, A10, A12 y A14) los cuales no las utilizan en las operaciones multiplicativas.

En relación al número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos, se muestran a continuación:

Ficha 11	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	3	21,4 %
1 fallo	7	50 %
2 fallos	1	7,1 %
3 fallos	1	7,1 %
4 fallos	1	7,1 %
7 fallos	1	7,1 %

Las estrategias utilizadas por los alumnos para el cálculo de 12×9 son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 12	5	35,7 %	0
He descompuesto el multiplicando (12) como $10 + 2$	2	14,2 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	7	50 %	0

En la multiplicación 18×9 las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 18	7	50 %	0
He descompuesto el multiplicando (18) como $10 + 8$	0	0 %	0
He descompuesto el multiplicando (18) como $20 - 2$	1	7,1 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	6	42,8 %	1

En la multiplicación 21×9 las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 21	7	50 %	0
He descompuesto el multiplicando (21) como $20 + 1$	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	7	50 %	0

En la multiplicación 30×9 las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 30	7	50 %	0
He multiplicado 3×9 y he añadido un cero a la derecha	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	7	50 %	0

Resulta sorprendente que ninguno de los alumnos utilicen la estrategia “He multiplicado 3×9 y he añadido un cero a la derecha”

En la multiplicación 15×8 son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 30	4	28,5 %	1
He descompuesto el multiplicando (15) como $10 + 5$	4	28,5 %	1
He multiplicado por 2 y el resultado lo he multiplicado de nuevo por 2 y el resultado lo he vuelto a multiplicar por 2	1	7,1 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	5	35,7 %	0

En la multiplicación 25×8 las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 50	4	28,5 %	0
He descompuesto el multiplicando (25) como $20 + 5$	3	21,4 %	1
He multiplicado por 2 y el resultado lo he multiplicado de nuevo por 2 y el resultado lo he vuelto a multiplicar por 2	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	7	50 %	1

En la multiplicación 29×8 las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 58	5	35,7 %	1
He descompuesto el multiplicando (29) como $30 - 1$	1	7,1 %	1
He multiplicado por 2 y el resultado lo he multiplicado de nuevo por 2 y el resultado lo he vuelto a multiplicar por 2	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	8	57,1 %	0

En resumen, se puede decir que 9 de los 14 alumnos intentan aplicar estrategias para multiplicar puesto que los alumnos A2, A4, A10, A12 Y A14 optan por no utilizar ninguna estrategia para el cálculo de las operaciones.

Señalar que la estrategia “completar el multiplicador a la decena siguiente” es bien aceptada por los alumnos y, además, la aplican con éxito dado que yerran pocas veces cuando las utilizan.

4.2.3.5 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 12.

La **ficha 12, anexo XVI**, se realiza el día 28 de abril a las 11:30 h y asisten al aula y realizan la prueba 14 alumnos.

Inicialmente, se realiza una puesta en común sobre la estrategia “completar el multiplicador a la decena siguiente” vista en la ficha anterior. Los alumnos salen a la pizarra para calcular la multiplicación **15 x 9**, cada uno aplica una estrategia diferente.

Seguidamente, se procede a la enseñanza de la estrategia para el caso particular de multiplicar por 6. Para ello, se solicita a los alumnos su colaboración y tan solo dos alumnos se prestan a salir a la pizarra para el cálculo de la siguiente operación:

$$14 \times 6$$

- Un alumno propone la estrategia “descomponer el multiplicando” para su cálculo:

$$14 \times 6 = (10 + 4) \times 6 = (10 \times 6) + (4 \times 6) = 60 + 24 = 84$$

Lo piensa del siguiente modo: el multiplicando 14 lo descompongo como 10 + 4 y lo multiplico 10 x 6 y 4 x 6, ambos resultados los sumo.

- Otro alumno aplica de modo incorrecto la propiedad distributiva en lugar de aplicar la propiedad asociativa de la multiplicación:

$$14 \times 6 = 14 \times (2 \times 3) = (14 \times 2) + (14 \times 3) = 28 + 42 = 80$$

$$14 \times 6 = (14 \times 2) \times 3 = 28 \times 3 = 84$$

- Por último, la maestra recuerda oralmente las siguientes estrategias:
 - multiplicar primero por 3 y el resultado multiplicarlo por 2
 - Multiplicar por 5 y sumarle al resultado el multiplicando (14)

Seguidamente, se procede a realizar la ficha 12 que la conforman 12 multiplicaciones cuyo multiplicador es de una cifra y se combinan estrategias generales, así como, para casos particulares. Para ello, disponen de 5 minutos.

Esta ficha en general los alumnos la realizan en el tiempo establecido, excepto, 2 de los 14 alumnos que precisan 30 segundo más y otros 2 que necesitan 2 minutos más para terminarla.

En la tabla que se muestran a continuación se exponen los resultados obtenidos en relación a los aciertos y estrategias utilizadas:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
15 x 6	100 %	57,1 %
19 x 6	86 %	57,1 %
25 x 6	100 %	50 %
28 x 6	86 %	57,1 %
50 x 6	100%	50 %
45 x 3	100 %	50 %
45 x 6	92,9 %	42,9 %
45 x 8	85,7 %	42,9 %
45 x 9	92,9 %	35,7 %
49 x 4	100 %	42,9 %
49 x 6	78,5 %	50 %
99 x 6	92,9 %	28,6 %

De los datos que se detallan en el **anexo XVI**, podemos afirmar que:

- El porcentaje medio de éxito en esta ficha de multiplicaciones es de un 92,9 %
- El porcentaje medio en el uso de estrategias es 47%

Podemos inferir que tanto los alumnos que utilizan el algoritmo escrito como aquellos que utilizan las estrategias para el cálculo de las multiplicaciones lo realizan bien, dada la tasa de éxito general en esta ficha.

Por otro lado y respecto a la ficha anterior se observa un ligero descenso en el uso de estrategias para el cálculo de multiplicaciones. Los alumnos A1, A2, A4, A10, A12 y A14 no utilizan ninguna estrategia para el cálculo de las multiplicaciones.

La siguiente tabla muestra el número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos:

Ficha 12	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	8	57,1 %
1 fallo	3	21,4 %
2 fallos	1	7,1 %
3 fallos	1	7,1 %
4 fallos	1	7,1 %

A continuación, se procede al análisis de las estrategias utilizadas por los alumnos.

En la multiplicación **15 x 6** las estrategias utilizadas son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 15 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3	4	28,5 %	0
He multiplicado 15 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (15)	3	21,4 %	0
He descompuesto el multiplicando (15) como 10 + 5	1	7,1 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	6	42,8 %	0

En la multiplicación **25 x 6** las utilizadas estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 25 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3	2	14,2 %	0
He multiplicado 25 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (25)	2	14,2 %	0
He descompuesto el multiplicando (25) como 20 + 5	3	21,4 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	7	50 %	0

En la multiplicación **50 x 6** las estrategias utilizadas son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 50 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3	3	21,4 %	0
He multiplicado 50 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (50)	2	14,2 %	0
He multiplicado 5 x 6 y he añadido un 0	2	14,2 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	7	50 %	0

En la multiplicación **45 x 3** utilizan las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 45 por 2 y al resultado le he sumado el multiplicando (45)	3	21,4 %	0
He descompuesto el multiplicando (45) como 40 + 5	4	28,5 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	7	50 %	0

Para la multiplicación **45 x 6** han utilizado las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 45 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3	2	14,2 %	0
He multiplicado 45 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (45)	1	7,1 %	0
He descompuesto el multiplicando (45) como 40 + 5	3	21,4 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	8	57,1 %	0

En la multiplicación **45 x 8** las estrategias utilizadas han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 45 por 10 y al resultado le he restado 90	4	28,5 %	1
He descompuesto el multiplicando (45) como 40 + 5	2	14,2 %	1
He multiplicado 45 por 2, y el resultado lo he multiplicado de nuevo por 2 y el resultado lo he vuelto a multiplicar por 2	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	8	57,1 %	0

La estrategia de duplicar tres veces consecutivas “He multiplicado 45 por 2, y el resultado lo he multiplicado de nuevo por 2 y el resultado lo he vuelto a multiplicar por 2” no es usada por los alumnos.

Para la multiplicación **45 x 9** han utilizado:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 45 por 10 y al resultado le he restado el multiplicando (45)	5	35,7 %	1
He descompuesto el multiplicando (45) como 40+5	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	9	64,2 %	0

En la multiplicación **49 x 4** las estrategias utilizadas han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 49 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 2	3	21,4 %	0
He descompuesto el multiplicando (49) como 40 + 9	1	7,1 %	0
He descompuesto el multiplicando (49) como 50 - 1	2	14,2 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	8	57,1 %	0

Para la multiplicación **99 x 6** han utilizado:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 99 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3	2	14,2%	1
He multiplicado 99 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (99)	1	7,1 %	0
He descompuesto el multiplicando (99) como 100 - 1	1	7,1 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	10	71,4	0

Los alumnos tienen dificultades para elegir la estrategia óptima que en este caso es descomponer 99 como 100-1.

Como conclusión del análisis, se puede decir que los alumnos se muestran menos receptivos en el uso de estrategias para la multiplicación, puesto que se observa un descenso progresivo en el uso de las mismas. Tan solo un 47% de los alumnos aplican alguna estrategia para el cálculo de las multiplicaciones.

Los alumnos tienden a reproducir mentalmente el algoritmo escrito de la multiplicación cuando el multiplicando es un número menor que 100 y el multiplicador es un número de un dígito.

Sin embargo, los alumnos tienen éxito en los cálculos puesto que el porcentaje medio de éxito rendimiento en esta ficha es elevado.

En cuanto a las estrategias empleadas, los alumnos han utilizado todas de forma similar, sin apreciarse ninguna preferencia por alguna de ellas. En las multiplicaciones por 8 no aplican la estrategia de duplicar tres veces consecutivas, todo puede ser debido a que no se pudo ejemplificar suficientemente en clase antes de realizar la ficha.

4.2.3.6 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 13.

La **ficha 13, anexo XVII**, se realiza el día 6 de mayo a las 09:30 h y asisten al aula y realizan la prueba 14 alumnos.

Antes de realizar la ficha se explica las estrategias para multiplicar números de dos cifras por 15 y 25 mediante los siguientes ejemplos:

$$12 \times 15$$

- **Descomponer el multiplicando o el multiplicador**

$$12 \times 15 = (10 + 2) \times 15 = (10 \times 15) + (2 \times 15) = 150 + 30 = 180$$

Se puede pensar así: el multiplicando lo descompongo 12 como 10 + 2 y multiplico 10 x 15 y 2 x 15, después sumo ambos productos.

$$12 \times 15 = 12 \times (10 + 5) = (12 \times 10) + (12 \times 5) = 120 + 60 = 180$$

Se puede pensar del siguiente modo: el multiplicador 15 lo descompongo como 10 + 5 y multiplico 12 x 10 y 12 x 5, después sumo los productos.

- **Compensar. Multiplicar uno de los factores por un número y dividir el otro factor por el mismo número.**

$$12 \times 15 = (12 : 2) \times (15 \times 2) = 6 \times 30 = 180$$

Se puede pensar del siguiente modo: multiplico el 15 x 2 buscando la decena completa. Después divido 12 entre 2 y multiplico los resultados obtenidos en ambas operaciones.

- **Multiplicar por 10 y sumar la mitad del resultado parcial anterior cuando el multiplicador es 15.**

$$12 \times 15 = (12 \times 10) + (12 \times 10) : 2 = 120 + 60 = 180$$

Se puede pensar así: el multiplicador lo descompongo como 10 + 5. Sabemos que 5 es la mitad de 10, por tanto, podemos pensar en multiplicar el multiplicando por 10 y después sumarle la mitad del resultado.

Seguidamente, se procede a realizar la ficha que consta de 10 cálculos cuyos multiplicadores son de dos cifras y para la que disponen de 5 minutos.

En cuanto a la relación de aciertos y estrategias utilizadas, en la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
12 x 15	100 %	50 %
14 x 15	50 %	50 %
16 x 15	35,7 %	50 %
18 x 15	42,9 %	50 %
20 x 15	50%	35,7 %
20 x 25	42,9 %	42,9 %
15 x 25	42,9 %	42,9 %
25 x 25	21,4 %	28,6 %
15 x 15	28,5 %	42,9 %
25 x 24	28,5 %	42,9 %

Del análisis de los datos que se detallan en el **anexo XVII** obtenemos los siguientes resultados:

- El porcentaje medio de éxito es de un 44,2 %
- El porcentaje medio en el uso de estrategias es 43,5 %

Respecto a las fichas anteriores en la que se trabajan estrategias para casos particulares en el cálculo de multiplicaciones cuyos multiplicadores son de una cifra se observa que la tasa media de éxito ha bajado en esta ficha que se trabajan estrategias generales cuyo multiplicador es de dos cifras, como se muestra en la siguiente tabla:

Ficha	Porcentaje medio de éxito
Ficha 8	89,8 %
Ficha 9	85,4 %
Ficha 10	93,45 %
Ficha 11	85,7 %
Ficha 12	92,9 %
Ficha 13	44,2 %

En relación al porcentaje medio de uso de estrategias, se observa que la mayoría de los alumnos rehúsan utilizar estrategias para el cálculo de las multiplicaciones, como se detalla en la siguiente tabla:

Ficha	Operaciones	Porcentaje medio de uso de estrategias
Ficha 8	Multiplicaciones y divisiones por 2	63,6 %
Ficha 9	Multiplicaciones y divisiones por 3 y 4	59,7 %
Ficha 10	Multiplicaciones y divisiones por 5	55,3 %
Ficha 11	Multiplicaciones por 8 y 9	53,5 %
Ficha 12	Multiplicaciones combinación de las anteriores	47 %
Ficha 13	Multiplicaciones con multiplicador de dos cifras	43,5%

Los alumnos tienden a seguir pensando en el algoritmo escrito a pesar de ser una estrategia inadecuada para resolver con éxito multiplicaciones de dos cifras.

En la tabla siguiente se muestra el número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos:

Ficha 13	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	1	7,1 %
1 fallo	3	21,4 %
4 fallos	1	7,1 %
6 fallos	2	14,2 %
8 fallos	4	28,5 %
9 fallos	3	21,4 %

Las estrategias utilizadas por los alumnos para el cálculo de las multiplicaciones de esta ficha son las que se detallan a continuación.

En la multiplicación **16 x 15** las estrategias utilizadas son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 16 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 16×10	2	14,2 %	1
He descompuesto el multiplicando (16) como $10 + 6$	1	7,1 %	0
He compensado, he dividido 16 entre 2 y he multiplicado 15 por 2	2	14,2 %	2
He descompuesto en factores 16 y 15 buscando multiplicaciones 2×5	1	7,1 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	8	57,1 %	5

En la multiplicación **20 x 15** han utilizado las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 2 por 15 y añadido un 0 a la derecha del resultado	3	21,4 %	2
He descompuesto el multiplicando (15) como $10 + 5$	1	7,1 %	0
He compensado, he dividido 18 entre 2 y he multiplicado 15 por 2	0	0 %	0
He descompuesto en factores 20 y 15 buscando multiplicaciones 2×5	1	7,1 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	9	64,2 %	6

Para la multiplicación **20 x 25** han utilizado las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 2 por 25 y añadido un 0 a la derecha del resultado	3	21,4 %	2
He descompuesto el multiplicador (25) como $20 + 5$	2	14,2 %	0
He compensado, he dividido 20 entre 2 y he multiplicado 25 por 2	0	0 %	0
He descompuesto en factores 20 y 25 buscando multiplicaciones 2×5	1	7,1 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	8	57,1 %	5

En la multiplicación **15 x 25** han utilizado las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He pensado en 25×15 , he multiplicado 25 por 10 y al resultado le sumo la mitad de 25×10	4	28,5 %	2
He pensado en 25×15 , y he descompuesto el multiplicando (25) como $20 + 5$	2	14,2 %	1
He compensado, he dividido 15 entre 5 y he multiplicado 25 por 5	1	7,1 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	7	50 %	5

En la multiplicación **25 x 25** son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el multiplicando (25) como $20+5$	3	21,4 %	2
He compensado, he dividido 25 entre 5 y he multiplicado 25 por 5	1	7,1 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	10	78,5 %	8

En la multiplicación **25 x 24** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el multiplicando (25) como $20 + 5$	3	21,4 %	1
He descompuesto el multiplicador (24) como $20 + 4$	0	0 %	0
He compensado, he multiplicado 25 por 4 y he dividido 24 entre 4	2	14,2 %	2
He descompuesto en factores 25 y 24 buscando multiplicaciones 2×5	1	7,1 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	8	57,1 %	7

Como conclusión, se puede decir que los alumnos encuentran difícil el uso de estrategias para multiplicar números de dos cifras, como se puede apreciar en los datos de la siguiente tabla:

Alumnos	Total de operaciones correctas	Total de estrategias utilizadas
A1	1	0
A2	2	1
A3	9	10
A4	4	0
A5	10	10
A6	2	8
A7	2	9
A8	9	9
A9	4	1
A10	2	0
A11	9	4
A12	6	0
A13	1	10
A14	1	0

Respecto a los porcentajes de éxito se observa que la mitad de los alumnos (A1, A2, A6, A7, A10, A13 y A14) hacen sólo una o dos operaciones bien.

Asimismo, en relación con el uso de estrategias se observa que la mitad de los alumnos (A1, A2, A4, A9, A10, A12 y A14) aplican una o ninguna estrategias para el cálculo de las multiplicaciones.

Los alumnos que no utilizan estrategias diferentes a la pensar el algoritmo escrito obtienen tasas de éxito bajas o muy bajas.

Todos estos resultados nos orientan a pensar que los alumnos han rehusado a hacer la tarea, dado la complejidad que supone pensar en el algoritmo escrito en las multiplicaciones cuyo multiplicador es de dos cifras.

Por otro lado, se observa que la mayoría de los alumnos que utilizan estrategias en el cálculo de las multiplicaciones (A3, A5 y A8) obtienen tasas de

éxito elevadas. Todos ellos utilizan diferentes estrategias. Únicamente se muestran reacios a utilizar la estrategia de compensar.

Otro dato a destacar es que la maestra en la explicación previa a realizar la ficha, lo hace mediante uno de los cálculos propuestos en la ficha 12 x 15 con el fin de ejemplificar las estrategias a enseñar y animar a los alumnos a su uso. Sin embargo, a pesar que todos la resuelven con éxito, solo la mitad de los alumnos utilizan alguna de las estrategias enseñadas para ese ejemplo concreto.

Constatamos que a los alumnos les supone un esfuerzo mental o no comprenden la aplicación de las estrategias enseñadas para el cálculo de las multiplicaciones en las que el multiplicando y el multiplicador son números de dos cifras.

Aunque ya estaba prevista en la planificación inicial la realización de una ficha análoga a la ficha 13 se confirma la necesidad de incidir en la enseñanza de estrategias de la multiplicación después de constatar los resultados pobres obtenidos por los alumnos en esta ficha.

4.2.3.7 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 14.

La **ficha 14, anexo XVIII**, se realiza el día 9 de mayo a las 09:30 h y asisten al aula y realizan la prueba 13 alumnos.

Inicialmente, se realiza una puesta en común de una de las multiplicaciones de la ficha anterior 14 x 15 con el fin de recordar las estrategias para multiplicar y propiciar el aprendizaje de las mismas.

Seguidamente, se procede a realizar la ficha 14, la cual está formada por 10 multiplicaciones cuyo multiplicador tiene dos cifras. Para ello, disponen de 5 minutos.

Respecto al tiempo que utilizan los alumnos, señalar que la mayoría de alumnos precisan más tiempo que el estipulado y emplean más tiempo en esta ficha que para la ficha anterior, en la cual los multiplicadores también son de dos cifras, es decir, presentan una dificultad equiparable.

En cuanto a la relación de aciertos y estrategias utilizadas, en la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
24 x 15	46,2 %	69,2 %
28 x15	53,8 %	61,5 %
35 x15	15,4 %	69, 2 %
50 x15	53,8 %	61,5 %
48 x 15	61,5 %	46, 2 %
15 x 12	76,9 %	61,5 %
16 x 14	30,8 %	61, 5 %
21 x19	38,4 %	53, 8 %
22 x 18	23 %	23 %
24 x 16	30,8 %	30,8 %

Del análisis de los datos que se detallan en el **anexo XVIII** se obtienen los siguientes resultados:

- El porcentaje medio de éxito es de un 43 %
- El porcentaje medio en el uso de estrategias es 53,8 %

Tomando como referencia la ficha anterior, ya que es similar en cuanto a dificultad, respecto a su cálculo, pensando en el algoritmo escrito o en el tipo de las estrategias para multiplicar, se observa que hay una ligero aumento en el uso de estrategias.

Ficha	% de aciertos	% de estrategias
Ficha 13	44,2 %	43,5 %
Ficha 14	43 %	53,8 %

Respecto al número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos, se muestran en la siguiente tabla:

Ficha 14	Nº de estudiantes	Porcentaje
1 fallo	1	7,6 %
3 fallos	3	23 %
4 fallos	1	7,6 %
5 fallos	1	7,6 %
6 fallos	1	7,6 %
7 fallos	2	15,3 %
8 fallos	2	15,3 %
9 fallos	1	7,6 %
10 fallos	1	7,6 %

Si se compara con los resultados de la ficha anterior baja el número de alumnos que realizan con éxito los cálculos y también el de los que yerran en casi todos los cálculos. No obstante, la tasa de éxito en ambas fichas es muy similar, lo que indica que los alumnos no saben gestionar las estrategias de carácter general de la multiplicación.

En cuanto a las estrategias que utilizan para la multiplicación **24 x 15** utilizan las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 24 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 24 x 10	4	30,7 %	3
He descompuesto el multiplicando (24) como 20 + 4	3	23 %	1
He compensado, he dividido 24 entre 2 y he multiplicado 15 por 2	1	7,6 %	0
He descompuesto en factores 25 y 24 buscando multiplicaciones 2 x 5	1	7,6 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	4	30,7 %	2

En la multiplicación **35 x 15** utilizan las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 35 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 35 x 10	2	15,3 %	1
He descompuesto el multiplicando (35) como 30 + 5	5	38,4 %	4
He compensado, he multiplicado 35 por 5 y he dividido 15 entre 5	2	15,3 %	2
He pensado los números en vertical y he multiplicado	4	30,7 %	4

En la multiplicación **50 x 15** utilizan las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado 15 por 5 y añadido un 0 a la derecha del resultado	2	15,3 %	0
He multiplicado 50 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 50 x 10	2	15,3 %	1
He compensado, he dividido 50 entre 5 y he multiplicado 15 por 5	3	23 %	2
He descompuesto en factores 50 y 15 buscando multiplicaciones 2x5	1	7,6 %	0
He pensado los números en vertical y he multiplicado	5	38,4 %	3

Es llamativo que esta estrategia “He multiplicado 15 por 5 y añadido un 0 a la derecha del resultado” la utilicen tan solo dos alumnos.

En la multiplicación **15 x 12** utilizan:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el multiplicando (12) como 10 + 2	2	15,3 %	1
He compensado, he dividido 12 entre 2 y he multiplicado 15 por 2	7	53,5 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	4	30,7 %	1

En la multiplicación **16 x 14** utilizan las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el multiplicando (16) como 10 + 6	4	30,7 %	2
He descompuesto el multiplicador (14) como 10 + 4	1	7,6 %	0
He compensado, he dividido 16 entre 2 y he multiplicado 14 por 2	3	23 %	2
He pensado los números en vertical y he multiplicado	4	30,7 %	4
Sin calcular	1	7,6 %	-

Para la multiplicación **21 x 19** las estrategias utilizadas han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el multiplicando (21) como $20 + 1$	4	30,7 %	1
He descompuesto el multiplicador (19) como $20 - 1$	3	23 %	2
He descompuesto en factores 21 buscando una multiplicación más sencilla	1	7,6 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	4	30,7 %	3
No responde. Lo deja en blanco.	1	7,6 %	-

En la multiplicación **22 x 18** utilizan las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el multiplicando (22) como $20 + 2$	5	38,4 %	3
He descompuesto el multiplicando (18) como $20 - 2$	2	15,3 %	2
He compensado, he dividido 22 entre 2 y he multiplicado 18 por 2	1	7,6 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	3	23 %	2
Una estrategia errónea: “He multiplicado 18×2 y el resultado (36) lo he multiplicado por 2	1	7,6 %	1
No responde. Lo deja en blanco.	1	7,6 %	-

Se constata que los alumnos tienen éxito cuando aplican la estrategia de descomponer un factor, si después queda una multiplicación relativamente sencilla. Sin embargo, éste no es el caso de la siguiente multiplicación: $22 \times 18 = (20 + 2) \times 18$. Los alumnos yerran al sumar mentalmente $360 + 36$

Por otro lado, se detecta una mejora importante en el uso de la estrategia de compensar.

En resumen, constatamos que en la realización de esta ficha hay un ligero aumento en el uso de estrategias. Además, se observa que los alumnos que han utilizado estrategias en el cálculo de las multiplicaciones han obtenido mejores resultados que los alumnos que han pensado en el algoritmo escrito.

Los alumnos A1, A2, A4 y A10 no utilizan ninguna estrategia para el cálculo de multiplicaciones. Como consecuencia, estos alumnos no obtienen buenos resultados en el cálculo de las multiplicaciones dado que resulta muy complejo realizar el cálculo pensando en el algoritmo escrito.

Las estrategias más utilizadas por los alumnos han sido las siguientes “descomponer el multiplicando o el multiplicador” y “compensar: multiplicar uno de los factores por un número y dividir el otro factor por el mismo número”

Tal y como era previsible disminuye tanto el rendimiento como el uso de estrategias cuando se incrementa la dificultad en las fichas cuyo multiplicador era de dos cifras.

En la enseñanza de estrategias para multiplicar observamos que la mitad de los alumnos no utilizan estrategias en el cálculo de multiplicaciones porque se sienten inseguros cuando las utilizan, no las comprenden o les supone un esfuerzo mental añadido el utilizarlas.

La tasa de éxito de los alumnos que utilizan estrategia baja si se compara con las multiplicaciones en las que un factor es de un dígito. Conjeturamos que esto ocurre porque los alumnos se sienten inseguros al aplicar estrategias de carácter general como compensar, factorizar, o descomponer uno o dos de los factores y aplicar la propiedad distributiva.

Constatamos que no se observa progresión en el aprendizaje de estrategias generales de la multiplicación, después de realizar las fichas 13 y 14.

A continuación, se desarrollan las fichas 15, 16, y 17 las cuales se centran únicamente en la enseñanza de estrategias para dividir.

4.2.3.8 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 15.

La **ficha 15, anexo XIX**, se realiza el día 16 de mayo a las 09:30 h y asisten al aula y realizan la prueba 13 alumnos.

Inicialmente, se comienza con la enseñanza de estrategias para dividir y se lleva a cabo mediante el siguiente ejemplo:

$$96 : 6$$

- **Descomponer el dividendo (en sumandos múltiplos del divisor)**

$$96 : 6 = (60 + 36) : 6 = (60 : 6) + (36 : 6) = 10 + 6 = 16$$

- **Factorizar el divisor**

$$96 : 6 = 96 : (2 \times 3) = 96 : 2 : 3 = 48 : 3 = 16$$

- **Compensar “multiplicar o dividir, dividendo y divisor por el mismo número”**

$$96 : 6 = (96 : 2) : (6 : 2) = 48 : 3 = 16$$

A continuación se procede a realizar la ficha 15 que consta de 10 divisiones y para la cual disponen de 5 minutos.

Únicamente 3 de los 13 alumnos que realizan la ficha son capaces de terminarla en el tiempo estipulado. Sin embargo, el resto no tarda mucho más en finalizarla.

Analizada la prueba, **anexo XIX** se ponen de manifiesto los siguientes datos:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
84 : 6	100 %	53,8 %
96 : 8	100 %	69,2 %
128 : 8	61,5 %	69,2 %
135 : 9	92,3 %	69,2 %
156 : 12	46,2 %	53,8 %
168 : 14	53,8 %	61,5 %
180 : 12	53,8 %	69,2 %
192 : 16	76,9 %	69,2 %
182 : 14	53,8 %	69,2 %
208 : 16	76,9 %	61,5 %

De la tabla se extraen los siguientes resultados:

- El porcentaje medio de éxito es de un 71,5 %
- El porcentaje medio en el uso de estrategias es 64,5 %

Ficha	% de aciertos	% de estrategias
Ficha 14	43 %	53,8 %
Ficha 15	71,5 %	64,5 %

Puntualizar, que la ficha 14 corresponde a estrategias para multiplicar números de dos cifras, es decir, no es análoga a la ficha 15. Sin embargo, esta comparativa nos permite inferir un cambio de postura de los alumnos respecto a las estrategias de la división.

De este primer análisis, constatamos que los alumnos han aceptado de buen grado las estrategias para las divisiones, pudiendo deberse a diferentes motivos como, por ejemplo, que comprenden mejor el cálculo mental de las divisiones porque no les supone tanto esfuerzo mental como en las multiplicaciones de números de dos cifras.

Este hecho, se puede observar en el aumento del porcentaje medio de uso de estrategias, en el rendimiento medio y en la disminución del tiempo invertido para la realización de la ficha.

Respecto al número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos, se muestran en la siguiente tabla:

Ficha 15	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	2	15,3 %
1 fallo	4	30,7 %
2 fallos	2	15,3 %
4 fallos	1	7,6 %
5 fallos	1	7,6 %
6 fallos	1	7,6 %
7 fallos	2	15,3 %

Las divisiones en las que menos estrategias utilizan los alumnos para el cálculo de las mismas son **84 : 6** y **156 : 12**

En la división **84 : 6** los alumnos utilizan las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 84 como 60 + 24	3	23 %	0
He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 3	2	15,3 %	0
He dividido el dividendo y divisor entre 2	2	15,3 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	6	46,1 %	0

En la división las utilizadas **156 : 12** son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 156 como $120 + 36$	3	23 %	1
He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2 y lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 3	3	23 %	2
He dividido el dividendo y divisor entre 2	1	7,6 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	6	46,1 %	4

Para la división **135 : 9** las estrategias utilizadas han sido las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 135 como $90 + 45$	5	38,4 %	0
He dividido entre 3 y el resultado lo he dividido entre 3	1	7,6 %	0
He dividido el dividendo y divisor entre 3	3	23 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	4	30,7 %	1

En la división **168 : 14** utilizan las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 168 como $140 + 28$	3	23 %	1
He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 7	2	15,3 %	0
He dividido el dividendo y divisor entre 2	3	23 %	2
He pensado en la división hecha con la caja	5	38,4 %	3

En la división **192 : 16** las estrategias utilizadas han sido las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 192 como $160 + 32$	8	61,5 %	1
He dividido el dividendo y divisor entre 2	1	7,6 %	1
He pensado en la división hecha con la caja	4	30,7 %	1

En la división **208 : 16** han utilizado las siguientes estrategias:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 208 como $160 + 48$	4	30,7 %	1
He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 2, lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 2, y he vuelto a dividir entre 2	2	15,3 %	0
He dividido el dividendo y divisor entre 2	2	15,3 %	1
He pensado en la división hecha con la caja	5	38,4 %	1

Los alumnos tienden a utilizar la estrategia de descomponer el dividendo como suma de un múltiplo del divisor y otro número.

En resumen, podemos decir que los alumnos han aceptado las estrategias para dividir dado que ha aumentado el porcentaje medio de uso de las mismas.

Asimismo, se infiere que a los alumnos les resulta más sencillo el cálculo de las divisiones que de las multiplicaciones de números de dos cifras, dado que, realizan la ficha en menos tiempo que en las multiplicaciones y ha aumentado su rendimiento.

Sin embargo, los alumnos A4, A10, A12 y A14 mantienen su postura respecto al uso de estrategias en el cálculo mental. En esta ficha ninguno de ellos utiliza estrategias para el cálculo de divisiones. La tasa de éxito cuando dividen es mejor que cuando multiplican números de dos cifras porque los alumnos que

piensan en el algoritmo de la división lo hacen con más facilidad que los que intentan reproducir mentalmente el algoritmo escrito de multiplicaciones con dos dígitos.

Por otro lado, los alumnos que utilizan estrategias en el cálculo de las divisiones, las aplican bien, como se puede observar en las tablas hay un elevado porcentaje de éxito cuando las utilizan.

A su vez, se aprecia una ligera inclinación por la estrategia “descomponer el dividendo” en relación al resto de estrategias utilizadas, como “compensar” y “factorizar el divisor”. Es decir, los alumnos prefieren las estrategias de compensación aditiva que las de factorización multiplicativa.

4.2.3.9 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 16.

La **ficha 16, anexo XX**, se realiza el día 19 de mayo a las 11:30 h y asisten al aula y realizan la prueba 13 alumnos.

Previo a la ficha se realiza una puesta en común de la división **180 : 12** en la pizarra con el fin de que los alumnos apliquen las estrategias enseñadas para las divisiones.

Una vez recordadas las estrategias se procede a realizar la ficha 16, la cual está formada por 10 divisiones y para su realización disponen 5 minutos.

En esta ficha 12 de los 13 alumnos que realizan la ficha son capaces de hacerla en el tiempo estipulado. Este hecho, ya nos hace presuponer que a los alumnos les resulta más sencillo la aplicación de estrategias de división y su cálculo.

Por otro lado, solo dos alumnos A1 y A10 no utilizan ninguna estrategia en el cálculo de divisiones. La alumna A4 que rehusó utilizar estrategias ha comenzado a utilizarlas en esta ficha, pudiendo interpretarse que las utiliza porque las comprende, se siente más segura o no le supone tanto esfuerzo mental como en el caso de otras operaciones, como por ejemplo; en restas y multiplicaciones.

Señalar que el alumno A14 no participa en esta ficha por no asistir a clase el día en la que se realiza.

En cuanto a la relación de aciertos y estrategias utilizadas, en la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
78 : 6	100 %	61,5 %
104 : 8	100 %	76,9 %
153 : 9	100 %	76,9 %
144 : 12	84,6 %	76,9 %
182 : 14	38,5 %	84,6 %
192: 16	69,2 %	76,9 %
216 : 18	100 %	76,9 %
168 : 12	76,9 %	84,6 %
196 : 14	46,1 %	69,2 %
176 :16	92,3 %	69,2 %

Del análisis de los datos que se detallan en el **anexo XX** obtenemos los siguientes resultados:

- El porcentaje medio de éxito es de un 80,7 %
- El porcentaje medio en el uso de estrategias es 75,3 %

Ficha	% de aciertos	% de estrategias
Ficha 15	71,5 %	64,5 %
Ficha 16	80,7 %	75,3 %

Comparando con la ficha anterior, dado que es análoga a esta ficha 16, se observa un ligero aumento tanto en la aplicación de estrategias como en el porcentaje medio de éxito.

En la siguiente tabla se muestran el número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos:

Ficha 16	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	4	30,7 %
1 fallo	2	15,3 %
2 fallos	2	15,3 %
3 fallos	2	15,3 %
4 fallos	2	15,3 %
5 fallos	1	7,6 %

A continuación, se detallan las estrategias que utilizan los alumnos para el cálculo de las divisiones.

En la división **78 : 6** es en la que menos estrategias utilizaron los alumnos siendo las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 78 como 60 + 18	6	46,1 %	0
He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 3	2	15,3 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	5	38,4 %	0

En la división **104 : 8** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 104 como 80+24	7	53,8 %	0
He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2	3	23 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	3	23 %	0

En la división **153 : 9** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 153 como 90 + 63	8	61,5 %	0
He dividido entre 3 y el resultado lo he dividido entre 3	1	7,6 %	0
He dividido el dividendo y divisor entre 3	1	7,6 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	3	23 %	0

En la división **144 : 12** las estrategias utilizadas han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 144 como $120 + 24$	8	61,5 %	0
He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2 y lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 3	1	7,6 %	1
He dividido el dividendo y divisor entre 2	1	7,6 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	2	15,3 %	0
No responde. Lo deja en blanco.	1	7,6 %	-

En la división **192 : 16** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 192 como $160 + 32$	6	46,1 %	1
He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 2, lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 2, y he vuelto a dividir entre 2	3	23 %	1
He dividido el dividendo y divisor entre 2	1	7,6 %	1
He pensado en la división hecha con la caja	3	23 %	1

En la división **216 : 18** las estrategias utilizadas son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 216 como $180 + 36$	6	46,1 %	0
He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 3 y lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 3	2	15,3 %	0
He dividido el dividendo y divisor entre 2	2	15,3 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	3	23 %	0

En la división **196 : 14** las estrategias utilizadas son las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He descompuesto el dividendo 196 como 140 + 56	6	46,1 %	4
He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 7	1	7,6 %	1
He dividido el dividendo y divisor entre 2	2	15,3 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	3	23 %	1
No responde. Lo deja en blanco	1	7,6 %	-

Como se aprecia en esta ficha hay un aumento del uso con éxito de la estrategia de descomponer el dividendo.

En conclusión, podemos decir que se aprecia un aumento en el uso de estrategias para dividir y una mejora en los resultados.

Los alumnos A2, A3, A4, A5, A7, A9 y A13 utilizan estrategias para el cálculo de todas las divisiones. Sin embargo, A1 y A10 no utilizan ninguna estrategia y A12 solo las utiliza en dos ocasiones. Los alumnos que utilizan estrategias obtienen mejores tasas de éxito que los que no las utilizan.

Por otro lado, como en la ficha anterior, se observa una preferencia por la estrategia “descomponer el dividendo” respecto a las estrategias de “compensar” o “factorizar el divisor”. Además, en general cuando los alumnos utilizan estrategias para el cálculo de las divisiones en la mayoría de las ocasiones obtienen buenos resultados.

4.2.3.10 Diseño, desarrollo y evaluación de la prueba de la ficha 17.

La **ficha 17, anexo XXI**, se realiza el día 23 de mayo a las 09:30 h y asisten al aula y realizan la prueba 12 alumnos.

Inicialmente, se realiza una puesta en común de la división $182 : 14$ con el fin de repasar las estrategias para dividir y favorecer su aprendizaje.

Posteriormente, se procede a realizar la ficha que consta de 10 divisiones y para la cual disponen de 5 minutos.

Respecto al tiempo, señalar que solo 3 de los 13 alumnos que realizan la prueba la terminan en el tiempo establecido. Este hecho, puede deberse a que los valores tanto de los dividendos como divisores han aumentado en esta ficha.

En cuanto a la relación de aciertos y estrategias utilizadas, en la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

Operación	% de aciertos	% de estrategias
120 : 5	100 %	66,7 %
136 : 8	100 %	83,3 %
144 : 6	100 %	75 %
225 : 9	91,7 %	75 %
600: 12	83,3 %	41,7 %
600: 25	58,3 %	75 %
375 : 15	41,7 %	41,7 %
276 : 12	58,3 %	50 %
500 : 25	83,3 %	33,3 %
270 : 18	33,3 %	41,7 %

Del análisis de los datos que se detallan en el **anexo XXI** se obtienen los siguientes resultados:

- El porcentaje medio de éxito es de un 74,9 %
- El porcentaje medio en el uso de estrategias es 58,3 %

Si se hace una comparación con las fichas anteriores, que son análogas a ésta, se aprecia un ligero descenso en el uso de estrategias.

Ficha	% de aciertos	% de estrategias
Ficha 15	71,5 %	64,5 %
Ficha 16	80,7 %	75,3 %
Ficha 17	74,9 %	58,3 %

Conjeturamos que este descenso se debe al aumento de los valores de los dividendos y divisores en las divisiones planteadas en la ficha 17.

En la ficha anterior los alumnos A2 y A13 utilizan estrategias en todas las divisiones. Este hecho nos hace conjeturar que rehúsan hacer el cálculo de las siguientes divisiones, al ser el dividendo mayor los alumnos tienen dificultades para aplicar su estrategia favorita que consiste en descomponer el dividendo, y esto les resulta ahora más complejo. Por ejemplo, en la división $375 : 15$ no son capaces de descomponer 375 como $300 + 75$ para obtener el cociente $20 + 5$. Mostramos a continuación los cálculos que los alumnos A2, A6 y A13 dejan sin responder:

Alumno	Divisiones sin calcular	Alumno	Divisiones sin calcular	Alumno	Divisiones sin calcular
A13	$375 : 15$	A2	$375 : 15$	A6	$375 : 15$
	$276 : 12$		$276 : 12$		$276 : 12$
	$270 : 18$		$500 : 25$		$500 : 25$
			$270 : 18$		$270 : 18$
					$600 : 12$

Respecto al número y porcentaje de alumnos que yerran en los cálculos, son los siguientes:

Ficha 17	Nº de estudiantes	Porcentaje
Ningún fallo	3	25 %
2 fallos	1	8,3 %
3 fallos	5	41,6 %
4 fallos	2	16,6 %
5 fallos	1	8,3 %

A continuación, mostramos las estrategias que utilizan los alumnos en el cálculo de las divisiones.

En la división **120 : 5** las estrategias que utilizan los alumnos son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He dividido 120 entre 10 y después he multiplicado entre 2	2	16,6 %	0
He descompuesto el dividendo 120 como 100 + 20	3	25 %	0
He multiplicado el dividendo y el divisor por 2	3	25 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	4	33,3 %	0

En la división **225 : 9** las estrategias utilizadas han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He dividido el dividendo (225) entre 3, y después he dividido el resultado entre 3	4	33,3 %	0
He descompuesto el dividendo 225 como 180 + 45	5	41,6 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	3	25 %	1

La división **136 : 8** es en la que más estrategias han utilizado los alumnos, siendo las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He dividido 136 tres veces consecutivas entre 2	1	8,3 %	0
He descompuesto el dividendo (136) como 80 + 56	5	41,6 %	0
He dividido el dividendo (136) y divisor (8) entre 2	3	25 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	3	25 %	0

La división **500 : 25** es en la que menos estrategias han utilizado los alumnos, siendo las siguientes:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He dividido primero entre 5, y después he dividido el resultado entre 5	1	8,3 %	0
He descompuesto el dividendo como 250 + 250	3	25 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	6	50 %	0
No responde. Lo deja en blanco	2	16,6 %	-

En la división **375 : 15** las estrategias utilizadas han sido:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He dividido primero entre 5, y después he dividido el resultado entre 3	2	16,6 %	0
He multiplicado el dividendo y el divisor por 2	1	8,3 %	1
He descompuesto el dividendo 375 como 300 + 75	2	16,6 %	1
He pensado en la división hecha con la caja	4	33,3 %	2
No responde. Lo deja en blanco	3	25 %	-

En la división **600 : 25** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He dividido el dividendo (600) entre 5, y después he dividido el resultado entre 5	2	16,6 %	0
He descompuesto el dividendo 600 como 500 + 100	6	50 %	3
He multiplicado el dividendo y el divisor por 4	1	8,3 %	0
He pensado en la división hecha con la caja	3	25 %	2

En esta división los alumnos aplican por primera vez esta estrategia particular correctamente.

En la división **270 : 18** las estrategias utilizadas son:

Estrategia	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He dividido primero entre 9, y después he dividido el resultado entre 2	1	8,3 %	0
He descompuesto el dividendo (270) como 180 + 90	4	33,3 %	2
He pensado en la división hecha con la caja	4	33,3 %	2
No responde. Lo deja en blanco	3	25 %	-

En resumen, se ve un ligero aumento en el uso de estrategias, dado que en la ficha 15, los alumnos A4, A10, A12 y A14 no utilizan ninguna estrategia para el cálculo de las divisiones. Añadir que el alumno A1 estuvo ausente en la realización de esta ficha, el cual por norma general, no utiliza estrategias de cálculo mental y se añadiría a este grupo de alumnos. En la división, únicamente los alumnos A1 y A10 no aplican ninguna estrategia y en la ficha 17, los alumnos A1, A10 y A12 siguen sin utilizarlas.

Asimismo, se puede decir que en la ficha 17 disminuye el uso de estrategias en el cálculo de las divisiones. Este hecho, se vincula a la dificultad añadida que supone el aumento de los valores numéricos tanto en los dividendos como los divisores para el cálculo de las divisiones. Además, en esta ficha la aplicación de la estrategia preferida de los alumnos, la de descomponer el dividendo, se torna más compleja.

Estos datos nos hacen pensar que a los alumnos les ha resultado más difícil aplicar las estrategias para dividir o les ha exigido un mayor esfuerzo mental cuando han incrementado los valores numéricos.

En cuanto a las estrategias utilizadas los alumnos han aplicado todas de un modo similar, pero se constata una ligera preferencia por “descomponer el dividendo” frente a “compensar”, “factorizar el divisor” o “estrategias para casos particulares”, como ya se percibió en las fichas anteriores.

En conclusión, los alumnos comprenden mejor las estrategias de la división que la multiplicación, cuando en esta última operación intervienen factores de dos

cifras. Puede decirse que han aceptado de buen grado las estrategias de la división.

Cuando los términos de la división aumentan los alumnos tienden a pensar en el algoritmo escrito o rehúsan hacerlas y, como consecuencia, baja el porcentaje de éxito.

4.2.3.11 Resultados obtenidos en las estrategias de la multiplicación

Finalizada la enseñanza de estrategias para multiplicar podemos decir que a la mayoría de alumnos les resulta más difícil aplicar las estrategias de cálculo mental para multiplicar puesto que en general, han necesitado más tiempo para el cálculo de multiplicaciones, ha disminuido la aplicación de estrategias y ha disminuido la tasa de éxito en relación con la aplicación de estrategias para el cálculo de sumas y restas.

Por otro lado, hemos observado que aceptan de buen grado las estrategias para multiplicar y dividir por 2, 3 y 4 dado que aplican estrategias para el cálculo de las operaciones y los resultados en general son aceptables.

Asimismo, hemos constatado que los alumnos intentan aplicar las estrategias para casos particulares de multiplicaciones y divisiones por 5. Sin embargo, el porcentaje medio de aplicación de estrategias va disminuyendo hasta el 55 %

Respecto a las estrategias utilizadas para el cálculo de las multiplicaciones por 5, los alumnos no se decantan por ninguna en particular, utilizando todas las estrategias de un modo similar.

La tasa de aplicación de estrategias de cálculo mental para multiplicar por 8 y por 9 son análogas a las estrategias aplicadas para multiplicar por 5 y los porcentajes de éxito son altos.

Señalar que la estrategia “completar el multiplicador a la decena siguiente” en el cálculo de multiplicar por 8 y 9 es bien aceptada por los alumnos y, además, la aplican con éxito dado que yerran pocas veces cuando las utilizan.

La tasa de aplicación de estrategias de cálculo mental para multiplicar por 6 desciende hasta el 47 %. Sin embargo, el porcentaje de éxito es alto y aumenta respecto al de los cálculos de multiplicaciones por 8 y por 9.

En el caso de multiplicaciones donde uno de los factores es de una sola cifra constatamos que los alumnos prefieren utilizar estrategias de descomposición

aditiva en detrimento de las estrategias multiplicativas como la compensación y factorización.

Constatamos un menor uso de estrategias en las multiplicaciones por números de una cifra. A modo de ejemplo, los alumnos apenas utilizan la estrategia de “duplicar tres veces consecutivas” para multiplicar por 8.

Respecto a las estrategias que los alumnos aplican para calcular multiplicaciones de dos cifras podemos decir que tienden a seguir pensando en el algoritmo escrito a pesar de ser una estrategia inadecuada para resolver con éxito multiplicaciones de dos cifras.

Consideramos que los alumnos encuentran difícil el uso de estrategias para multiplicar números de dos cifras dado que los porcentajes de éxito desciende hasta el 44 % aproximadamente, la mitad del porcentaje de éxito de las multiplicaciones por 2, 3, 4, 5, 6, 8 o 9.

Los alumnos que no utilizan estrategias diferentes a la de pensar el algoritmo escrito obtienen tasas de éxito bajas o muy bajas.

Por el contrario, se observa que los alumnos que han utilizado estrategias en el cálculo de las multiplicaciones de dos cifras (A3, A5 y A8) han obtenido mejores resultados que los alumnos que han pensado en el algoritmo escrito.

Asimismo, en relación con el uso de estrategias se observa que la mitad de los alumnos (A1, A2, A4, A9, A10, A12 y A14) apenas aplican estrategias para el cálculo de las multiplicaciones de dos cifras. Conjeturamos que los alumnos han rehusado a hacer la tarea, dado la complejidad que supone pensar en el algoritmo escrito en las multiplicaciones cuyo multiplicador es de dos cifras.

Se constata que los alumnos tienen éxito cuando aplican la estrategia de descomponer un factor, si después queda una multiplicación relativamente sencilla.

Era previsible y se confirmó que disminuyera tanto el rendimiento como el uso de estrategias cuando se incrementó la dificultad en las fichas al introducir cálculos cuyos factores son de dos cifras.

La tasa de éxito en el uso de estrategias para el cálculo de multiplicaciones de dos cifras de alumnos baja si se compara con las multiplicaciones en las que un factor es de un dígito. Conjeturamos que esto ocurre porque los alumnos se sienten inseguros al aplicar estrategias de carácter general como compensar,

factorizar, o descomponer uno o dos de los factores y aplicar la propiedad distributiva.

Las estrategias más utilizadas por los alumnos para multiplicaciones de dos cifras han sido las siguientes: “descomponer el multiplicando o el multiplicador” y “compensar”. Inicialmente se muestran reacios a utilizar la estrategia de compensar aunque posteriormente, se detecta una mejora importante en el uso de la misma.

Destacar que 5 de los 14 alumnos (A1, A4, A10, A12 y A14), no aplican ninguna estrategia en el cálculo de ninguna operación, lo cual se mantiene a lo largo de toda la enseñanza de estrategias de la multiplicación. Como consecuencia, deciden realizar el cálculo pensando en el algoritmo escrito.

En conclusión, se observa progresión en el aprendizaje de estrategias generales de la multiplicación cuando uno de los factores es de una sola cifra pero apenas se detecta progresión en las últimas fichas 13 y 14 donde los alumnos realizan multiplicaciones con números de dos cifras.

4.2.3.12 Resultados obtenidos en las estrategias de la división

Los alumnos en general han aceptado de buen grado las estrategias para las divisiones dado que ha aumentado el porcentaje medio de uso de las mismas. Este hecho puede deberse a diferentes motivos como, por ejemplo, que comprenden mejor el cálculo mental de las divisiones porque no les supone tanto esfuerzo mental como en las multiplicaciones de números de dos cifras.

En general, los alumnos realizan las fichas en menos tiempo que en las multiplicaciones y además, los alumnos que utilizan estrategias en el cálculo de las divisiones las aplican bien puesto que alcanzan un porcentaje de éxito alto, próximo al 70 %, cuando las utilizan. Asimismo, los alumnos que utilizan estrategias para el cálculo de las divisiones obtienen mejores tasas de éxito que los que no las utilizan.

Además, cuando incrementan los valores numéricos tanto en los dividendos como en los divisores (ficha 17) se observa que a los alumnos les ha resultado más difícil aplicar las estrategias para dividir o les ha exigido un mayor esfuerzo mental dado que disminuye el uso de estrategias en el cálculo de las divisiones. En la ficha 17, que es la tercera dedicada a la división, la aplicación de la

estrategia preferida de los alumnos “descomponer el dividendo” se torna más compleja.

En cuanto al uso de estrategias, se aprecia una clara preferencia por la estrategia “descomponer el dividendo” en relación al resto de estrategias utilizadas, como “compensar” y “factorizar el divisor”. A su vez, se ha observado un aumento del uso con éxito de la estrategia de descomponer el dividendo, lo que muestra una progresión clara de aprendizaje de los alumnos.

Por otro lado, los alumnos A1, A4, A10, A12 y A14 mantienen su postura de rechazo respecto al uso de estrategias en el cálculo mental, a pesar de que la alumna A4 que rehusó de utilizar estrategias ha comenzado a utilizarlas en la ficha 15.

En conclusión, los alumnos comprenden mejor las estrategias de la división que la multiplicación cuando en esta última operación intervienen factores de dos cifras. Constatamos que han aceptado de buen grado las estrategias de la división y que ha habido una progresión en los aprendizajes de los alumnos.

Cuando los términos de la división aumentan los alumnos tienden a pensar en el algoritmo escrito o rehúsan hacerlas. Como consecuencia, baja el porcentaje de éxito, si bien los porcentajes de éxito se mantienen altos, en torno al 75 %

4.3 Desarrollo y evaluación de la prueba final

La prueba final de cálculo mental, **anexo IV**, se lleva a cabo el día 26 de mayo a las 11,30 h y asisten y la realizan 14 alumnos.

Esta prueba es la misma que la prueba inicial, la cual está formada por 15 operaciones de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Los alumnos disponen 10 minutos para realizarla.

La prueba final persigue los siguientes objetivos;

- Verificar si los alumnos aplican estrategias en el cálculo mental de operaciones de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones y las realizan con éxito.
- Comprobar si la enseñanza de estrategias de cálculo mental ha favorecido el uso de estrategias para el cálculo de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

En la siguiente tabla se muestran la relación de los porcentajes de alumnos que utilizan estrategias diferentes de la de pensar en el algoritmo escrito y el porcentaje de éxito en el cálculo de la operación.

Operación	Porcentaje de uso de estrategias	Porcentaje de aciertos
19 + 34 + 11	64 %	78,6 %
250 + 150	64 %	100 %
800 – 350	50 %	86 %
27 x 5	43 %	100 %
110 : 5	57 %	79 %
40 + 50 + 3 + 60	64 %	92,8 %
87 + 89	57 %	71,4 %
320 – 99	64 %	71,4 %
34 x 9	50 %	64,2 %
128 : 8	57 %	79 %
47 + 43	64 %	100 %
87 - 39	50 %	43 %
60 x 15	36 %	29 %
25 x 4	57 %	100 %
180 : 12	57 %	43 %

Del análisis de los datos que se detallan en el **anexo IV** se obtienen los siguientes resultados:

- El porcentaje medio de uso de estrategias es 55,6 %
- El porcentaje medio de éxito es 75,8 %

La mitad de los alumnos aplican estrategias para el cálculo de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Sin embargo, hay que añadir que durante el desarrollo de la enseñanza de estrategias de cálculo mental, se ha observado que los alumnos A1, A4, A10, A12 y A14 han rehusado utilizar estrategias de cálculo mental y esto se confirma en la prueba final.

Por otro lado, la siguiente tabla, permite observar el número y porcentaje de alumnos que yerran en el cálculo de las operaciones:

Prueba inicial	Nº de estudiantes	Porcentaje
2 fallos	3	21,4 %
3 fallos	4	28,5 %
4 fallos	4	28,5 %
5 fallos	1	7,1 %
6 fallos	1	7,1 %
9 fallos	1	7,1 %

En cuanto a las operaciones que menos estrategias han utilizado los alumnos son en las multiplicaciones 27×5 y 60×15

Respecto a las estrategias que utilizan para el cálculo de las sumas, el gráfico muestra que los alumnos comprenden y saben utilizar las estrategias de la suma porque un porcentaje elevado las utilizan y las aplican con bastante éxito.

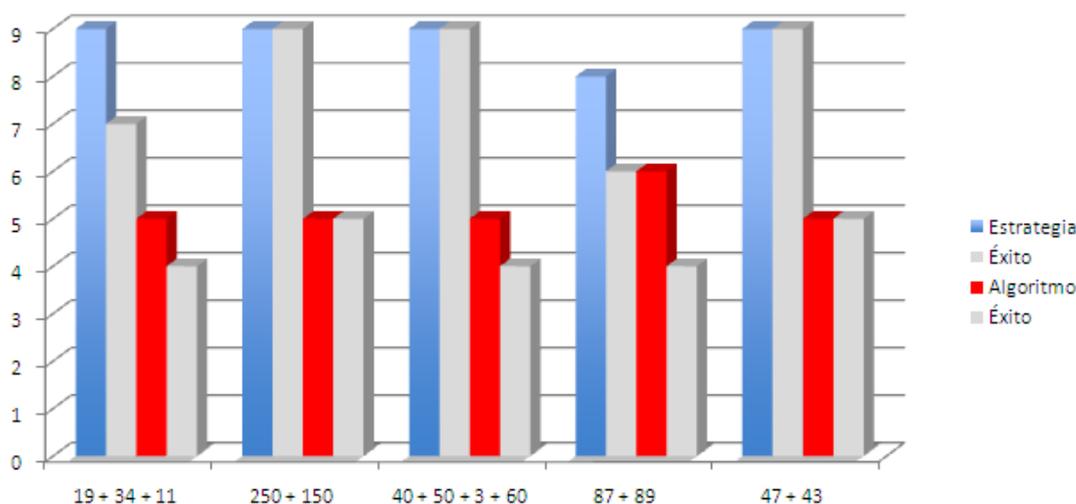


Gráfico 19. Resultados en la prueba final de la suma

La estrategia más utilizada en las sumas $19 + 34 + 11$ y $40 + 50 + 3 + 60$ ha sido “completar un sumando a la decena siguiente”.

En la suma $250 + 150$ los alumnos han utilizado de modo muy similar las estrategias “compensar” y “completar un sumando a la decena siguiente” y en menor medida “omitir los ceros finales”.

En la suma $87 + 89$ la mayoría han utilizado la estrategia “compensar” y solo en dos casos la estrategia “completar un sumando a la decena siguiente”.

Por último, en la suma $47 + 43$ la más utilizada ha sido “descomponer uno o los dos sumandos” y solo en dos casos la estrategia “compensar”.

En el caso de las restas, el gráfico nos permite observar que en la resta **800 – 350** los alumnos que utilizan estrategias obtienen mejores resultados. La mayoría de alumno en la resta **320 – 99** utilizan estrategias para su cálculo y obtienen mejores resultados que los que piensan en el algoritmo escrito. En la resta **87 – 39** la mitad de los alumnos utilizan estrategias y obtienen los mismos resultados que los que piensan en el algoritmo escrito.

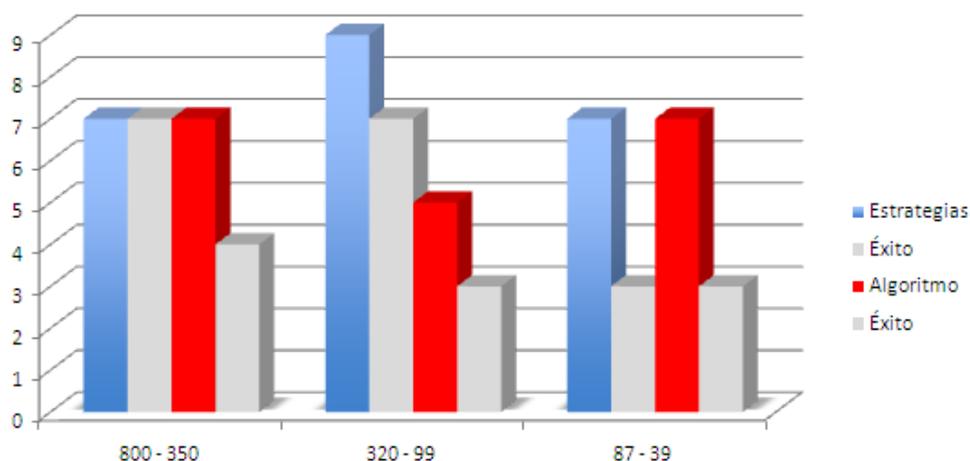


Gráfico 20. Resultados en la prueba final de la resta

Las estrategias que utilizan los alumnos para el cálculo de la resta **800 – 350** son: “descomponer el sustraendo” y “omitir los ceros finales”.

En la resta **320 – 99** de un modo semejante se han utilizado las estrategias: “completar el sustraendo a la decena siguiente”, “descomponer el sustraendo” y “compensar”.

En la resta **87 - 39** han sido: “compensar” y “completar el sustraendo a la decena siguiente”.

Con el objetivo de conocer el grado de influencia de la enseñanza de estrategias de cálculo mental en los alumnos, se procede a analizar y comparar las estrategias utilizadas por los alumnos en el cálculo de la resta **320 – 99** en la prueba inicial y prueba final.

Las estrategias utilizadas por los alumnos en la prueba inicial para la resta **320 – 99** han sido las siguientes:

Estrategia en la prueba inicial	N° de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	N° de errores
He completado el sustraendo (99) a la centena siguiente.	9	64,2 %	5
He sumado una unidad al minuendo y al sustraendo	1	7,1 %	1
He descompuesto el sustraendo como $90 + 9$	0	0 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	4	28,5 %	1

Las estrategias utilizadas por los alumnos en la resta $320 - 99$ en la prueba final han sido las siguientes:

Estrategia en la prueba final	N° de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	N° de errores
He completado el sustraendo (99) a la centena siguiente.	4	28,5 %	2
He sumado una unidad al minuendo y al sustraendo	2	14,2 %	0
He descompuesto el sustraendo como $90 + 9$	3	21,4 %	0
He pensado los números en vertical y he restado	5	35,7 %	2

Tras el análisis de las estrategias utilizadas por los alumnos para el cálculo de la resta se comprueba que hay un mínimo descenso en el uso de estrategias en la prueba final respecto a la prueba inicial. Por tanto, se verifica que los alumnos encontraron más difícil aplicar estrategias de cálculo mental para el cálculo de restas. Este hecho, se confirmó durante la enseñanza de estrategias para la resta.

En cuanto a las estrategias aplicadas podemos decir que en la prueba inicial la mayoría de los alumnos utilizan la misma estrategia de cálculo mental “he completado el sustraendo (99) a la centena siguiente”. Sin embargo, en la prueba final los alumnos

utilizan diferentes estrategias para el cálculo mental de la resta. Este hecho, nos hace presuponer que los alumnos han ampliado sus conocimientos de estrategias de cálculo mental para la resta dado que optan en la prueba final por utilizar otras estrategias diferentes a las utilizadas en la prueba inicial.

Además, en la prueba final hay un aumento de la tasa de éxito respecto a la prueba inicial como muestra la siguiente tabla:

	N° de alumnos que utilizan estrategias	N° de errores
Prueba inicial	10	6
Prueba final	9	2

En la prueba final se observa una disminución de errores en el cálculo de la resta cuando los alumnos utilizan estrategias de cálculo mental, es decir, obtienen mejores resultados los alumnos que utilizan estrategias para el cálculo de la resta que los alumnos que optan por pensar en el algoritmo escrito.

	N° de alumnos que no utilizan estrategias	N° de errores
Prueba inicial	4	1
Prueba final	5	2

En cuanto a las multiplicaciones descende el número de alumnos que aplican estrategias diferentes a la de pensar en el algoritmo escrito. Se observa que únicamente en la multiplicación **25 x 4** hay un mayor número de alumnos que aplican estrategias. Los alumnos aplican con éxito estrategias en la multiplicación **27 x 5** y **125 x 4**. Sin embargo, fracasan en la multiplicación **60 x 15** y **34 x 9**.

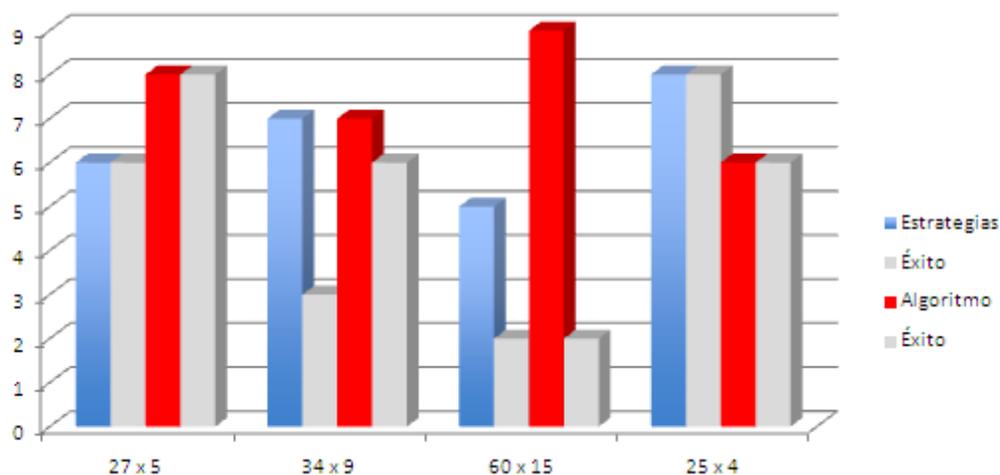


Gráfico 21. Resultados en la prueba final de la multiplicación

En la multiplicación **27 x 5** los alumnos han utilizado de un modo similar las siguientes estrategias: “multiplicar por 10 y el resultado dividirlo entre 2” y “descomponer el multiplicando”.

Del mismo modo, en la multiplicación **34 x 9** han utilizado: “completar el multiplicador a la decena siguiente” y “descomponer el multiplicando”.

A pesar de ser una de las multiplicaciones en las que los alumnos no han obtenido demasiado éxito en su cálculo, nos parece interesante conocer la incidencia de la enseñanza de estrategias de cálculo mental. Para ello procedemos a analizar y comparar las estrategias utilizadas por los alumnos para su cálculo en la prueba inicial y prueba final.

Las estrategias que han utilizado los alumnos en la prueba inicial para el cálculo de la multiplicación **34 x 9** han sido las siguientes:

Estrategia en la prueba inicial	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y he restado una vez el multiplicando (34).	2	14,2 %	0
He descompuesto el multiplicando 34 como 30 + 4	2	14,2 %	2
He pensado los números en vertical y he multiplicado	8	57,1 %	2
Sin calcular la operación	1	7,1 %	-

Las estrategias que han utilizado los alumnos para la multiplicación 34×9 en la prueba final han sido las siguientes:

Estrategia en la prueba final	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He multiplicado por 10 y he restado una vez el multiplicando (34).	4	28,5 %	3
He descompuesto el multiplicando 34 como $30 + 4$	3	21,4 %	1
He pensado los números en vertical y he multiplicado	6	42,8 %	6
Sin calcular la operación	1	7,1 %	-

Los resultados nos permiten comprobar un incremento en el uso de estrategias para el cálculo de la multiplicación en la prueba final respecto a la prueba inicial como se observa en las siguientes tablas:

	Nº de alumnos que utilizan estrategias	Nº de errores
Prueba inicial	4	2
Prueba final	7	4

	Nº de alumnos que no utilizan estrategias	Nº de errores
Prueba inicial	8	2
Prueba final	6	6

Sin embargo, la tasa de éxito disminuye en la prueba final respecto a la prueba inicial tanto de los alumnos que utilizan estrategias como aquellos que no utilizan estrategias en el cálculo de la multiplicación. Consideramos que este hecho pueda deberse al factor tiempo puesto que los alumnos invierten menos tiempo en la

realización de la prueba final que en la prueba inicial como se detalla en el siguiente apartado 4.4 Comparación entre los resultados de la prueba inicial y final.

En la multiplicación 60×15 los alumnos han utilizado las estrategias: “multiplicar por 10 y sumarle al resultado la mitad de éste”, “compensar” y “omitir el cero final”.

Y por último, en 25×4 la mayoría de alumnos han utilizado “factorizar el multiplicador” seguido de “descomponer el multiplicando”.

En el caso de la división los alumnos conocen y aplican estrategias diferentes a la de visualizar en la mente el algoritmo escrito. Además, obtienen una elevada tasa de éxito en los cálculos cuando utilizan estrategias para el cálculo de las divisiones.

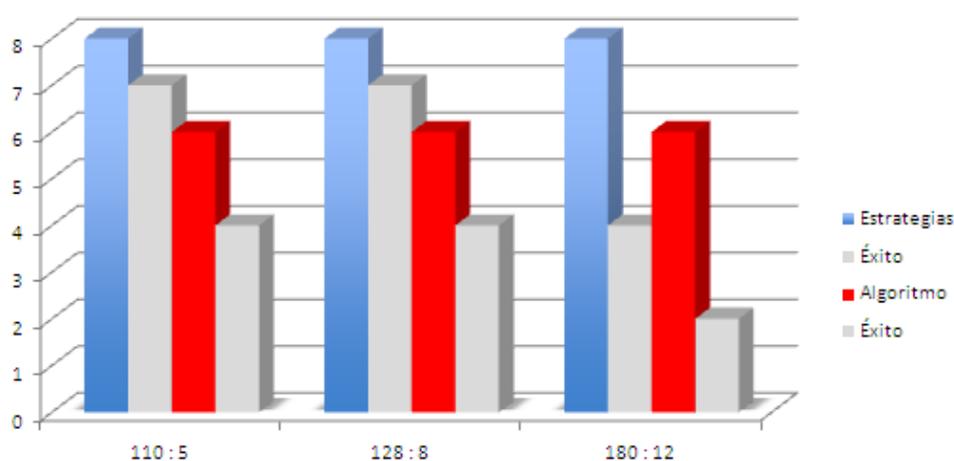


Gráfico 22. Resultados en la prueba final de la división

Las estrategias que utilizan los alumnos para el cálculo de la división $110 : 5$ han sido de un modo similar “dividir entre 10 y multiplicar por 2” y “descomponer el dividendo” y solo en un caso “compensar”.

En la división $128 : 8$ han utilizado de idéntico modo las siguientes estrategias “factorizar el divisor”, “descomponer el dividendo” y “buscar múltiplos del divisor”.

Del mismo modo que en la resta y multiplicación consideramos oportuno analizar y comparar la división $128 : 8$ en la prueba inicial y prueba final con el objetivo de conocer el grado de influencia de la enseñanza de estrategias de cálculo mental para dividir.

Las estrategias utilizadas por los alumnos en la prueba inicial para la división $128 : 8$ han sido las siguientes:

Estrategia en la prueba inicial	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He dividido 128 tres veces consecutivas por 2	0	0 %	0
He descompuesto el dividendo (128) como 80 + 48	1	7,1 %	1
He buscado un número que multiplicado por 8 de 128.	4	28,5 %	0
He pensado en división hecha con la caja	8	57,1 %	1
Sin calcular la operación	1	-	-

Las estrategias utilizadas por los alumnos en la prueba final para la división **128 : 8** han sido las siguientes:

Estrategia en la prueba final	Nº de respuestas	Porcentaje de uso de estrategias	Nº de errores
He dividido 128 tres veces consecutivas por 2	3	21,4 %	1
He descompuesto el dividendo (128) como 80 + 48	3	21,4 %	0
He buscado un número que multiplicado por 8 de 128.	2	14,2 %	0
He pensado en división hecha con la caja	5	35,7 %	1
Sin calcular la operación	1	-	-

Los resultados nos muestran que hay un incremento en el uso de estrategias en la prueba final respecto a la prueba inicial. Asimismo, en la prueba final se comprueba un aumento de la tasa de éxito en aquellos alumnos que utilizan estrategias de cálculo

mental en relación a aquellos alumnos que optan por pensar en el algoritmo escrito como se detalla en las siguientes tablas:

	Nº de alumnos que utilizan estrategias	Nº de errores
Prueba inicial	5	1
Prueba final	8	1

	Nº de alumnos que no utilizan estrategias	Nº de errores
Prueba inicial	8	1
Prueba final	5	1

En la división **180 : 12** la mayoría de los alumnos han utilizado la estrategia “descomponer el dividendo” y en menor medida “descomponer en factores el divisor” y “buscar múltiplos del divisor”.

Para concluir, se puede decir que los alumnos conocen estrategias de cálculo mental. Asimismo, se puede apreciar que en las restas y multiplicaciones hay un menor uso de las mismas para el cálculo de las operaciones. Estos resultados son análogos a los obtenidos por los alumnos en la fase experimental.

4.4 Comparación entre los resultados de la prueba inicial y final

En este apartado se confrontan los resultados obtenidos de la prueba inicial y final, con el objetivo de conocer el grado de repercusión de la enseñanza de estrategias en la aplicación de las mismas.

Operación	Prueba inicial	Prueba final	Prueba inicial	Prueba final
	Porcentaje de uso de estrategias		Porcentaje de aciertos	
19 + 34 + 11	57,1%	64 %	100%	78,6 %
250 + 150	57,1%	64 %	100%	100 %
800 – 350	57,1%	50 %	50%	86 %
27 x 5	28,6%	43 %	85,7%	100 %
110 : 5	42,8%	57 %	85,7%	79 %
40 + 50 + 3 + 60	42,8%	64 %	78,6%	92,8 %
87 + 89	71,4%	57 %	71,4%	71,4 %
320 – 99	71,4%	64 %	50%	71,4 %
34 x 9	28,6%	50 %	64,3%	64,2 %
128 : 8	35,7%	57 %	78,6%	79 %
47 + 43	50 %	64 %	92,9%	100 %
87 - 39	64,2 %	50 %	14,3%	43 %
60 x 15	7,1%	36 %	21,4%	29 %
25 x 4	28,6 %	57 %	92,9%	100 %
180 : 12	28,6 %	57 %	42,9%	43 %

Los porcentajes medios de ambas pruebas se concretan en la siguiente tabla:

	Porcentaje de uso de estrategias	Porcentaje de aciertos
Prueba inicial	44,7 %	68,5 %
Prueba final	55,6 %	75,8 %

Los porcentajes evidencian una mejora en ambos porcentajes, verificando que la enseñanza de estrategias ha fomentado el uso con eficacia de las mismas.

A continuación, se comparan los gráficos obtenidos en las pruebas inicial y final, con el objetivo de comparar las estrategias utilizadas por los alumnos en el cálculo de la suma, resta, multiplicación y división en ambas pruebas.

Los resultados obtenidos tras el análisis de la prueba inicial, revelaron que los alumnos estaban familiarizados con algunas de las estrategias para sumar. Comparando ambos gráficos se observa un aumento en el uso de las mismas.

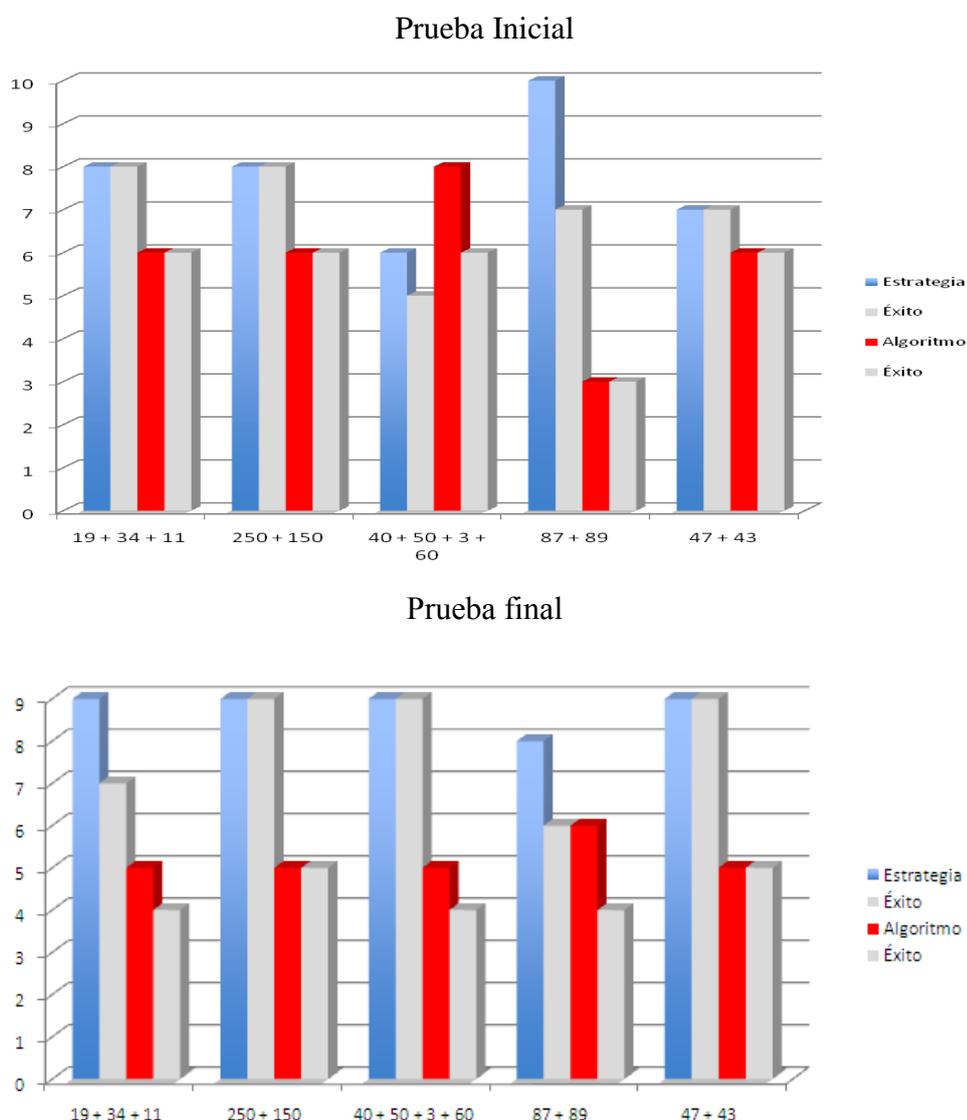


Gráfico 23. Comparativa de los resultados de las pruebas inicial y final de la suma

De las estrategias utilizadas por los alumnos para el cálculo de las sumas podemos decir que se produce una mejora en el uso de estrategias y mejor porcentaje de aciertos en la prueba final respecto a la inicial. Los alumnos en ambas pruebas utilizan de un modo similar la mayoría de las estrategias para sumar, entre las que se encuentran “descomponer uno de los sumandos”, “completar un sumando a la decena siguiente”, “omitir ceros finales” y “compensar”.

En el caso de la resta en la prueba inicial los alumnos obtuvieron mejores resultados cuando pensaban en el algoritmo escrito que cuando utilizan estrategias de cálculo mental. En cambio, en la prueba final aunque no se aprecia un aumento en el uso de las mismas, si se aprecia una mejora en los resultados cuando se utilizan estrategias en el cálculo de las restas.

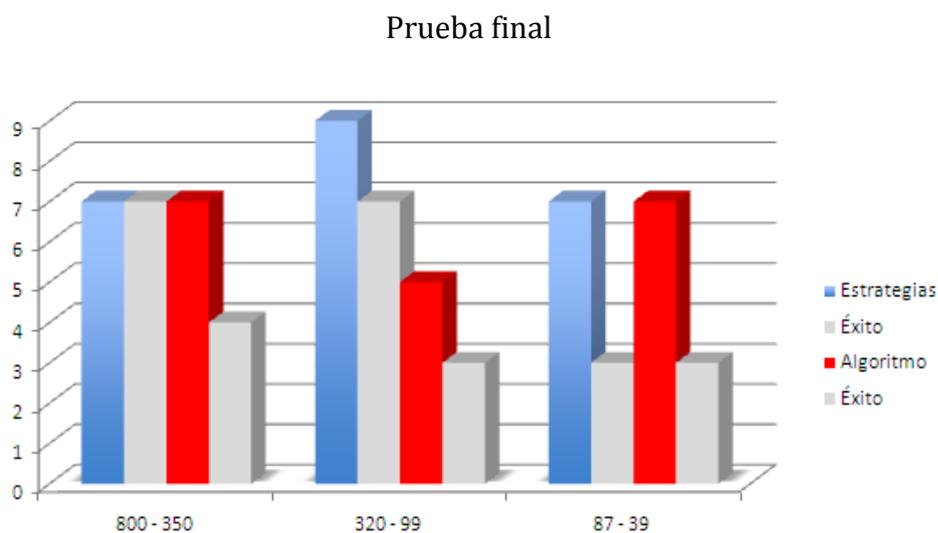
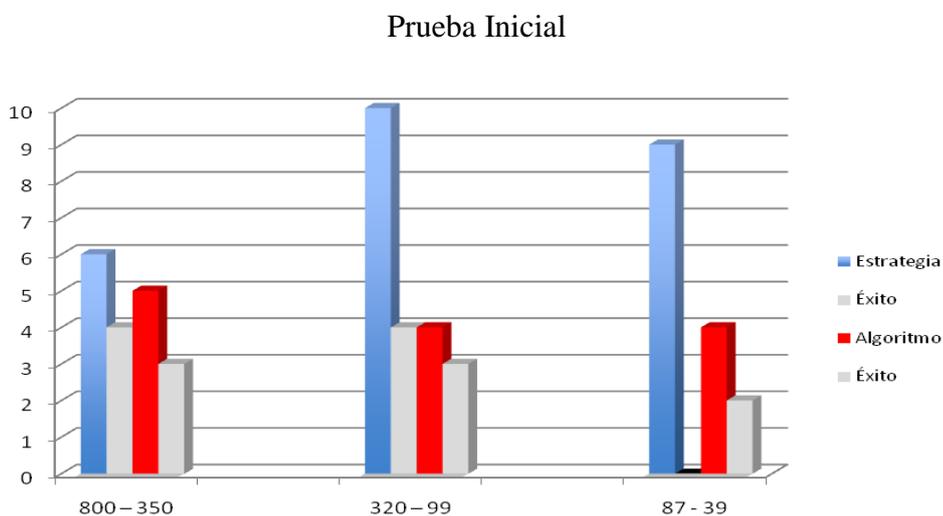
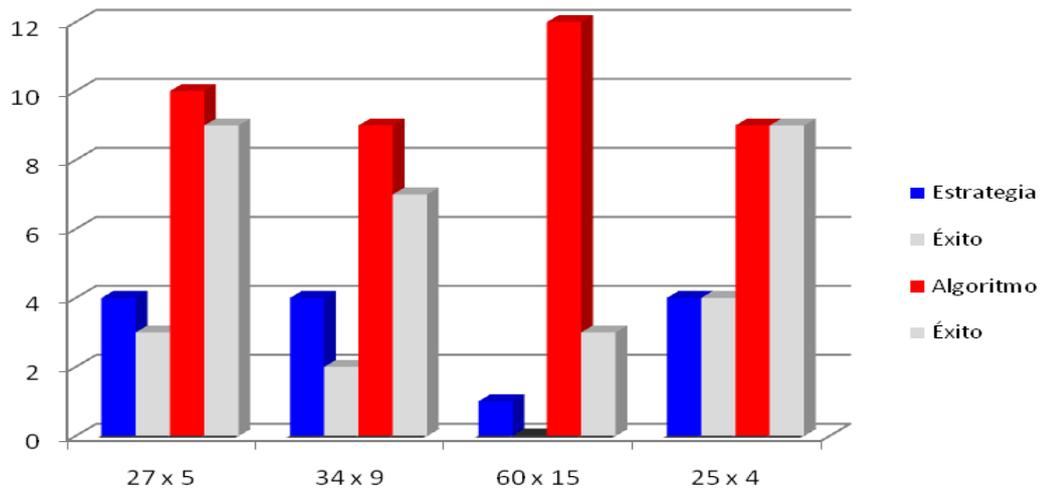


Gráfico 24. Comparativa de los resultados de las pruebas inicial y final de la resta

Por otro lado, las estrategias que los alumnos utilizan son equiparables en ambas pruebas, siendo las siguientes “completar el sustraendo a la decena siguiente”, “descomponer el sustraendo” y “compensar”.

La comparación de los gráficos de las multiplicaciones nos permite constatar que en la prueba final se ha producido un aumento en el uso de estrategias, así como, la mejora en el cálculo de las multiplicaciones cuando utilizan alguna estrategia.

Prueba Inicial



Prueba final

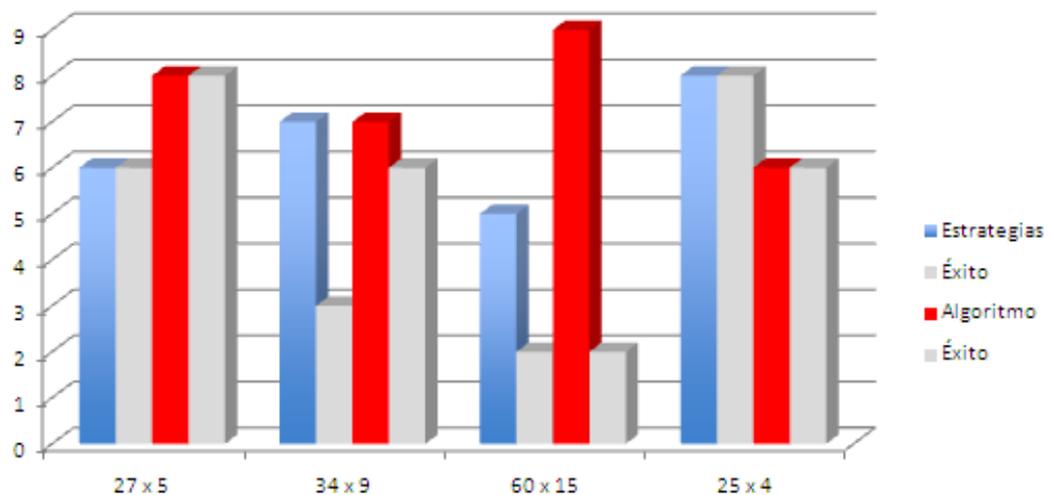


Gráfico 25. Comparativa de los resultados de las pruebas inicial y final de la multiplicación

Del mismo modo que en las sumas y restas, los alumnos en ambas pruebas han utilizado de un modo parecido diferentes estrategias de cálculo mental para multiplicar. Los alumnos han utilizado, por un lado, estrategias generales como “descomponer multiplicando o multiplicador”, “omitir ceros finales” y “compensar”. Y, por otro lado, estrategias para casos particulares como “multiplicar por 10 y luego dividir entre 2” para el cálculo 27×5 .

Por último, en el caso de la división se observa un aumento en la aplicación de estrategias y en la mejora de uso de las mismas. Cabe señalar, que los alumnos que piensan en el algoritmo escrito tienen poco éxito en el cálculo de las divisiones.

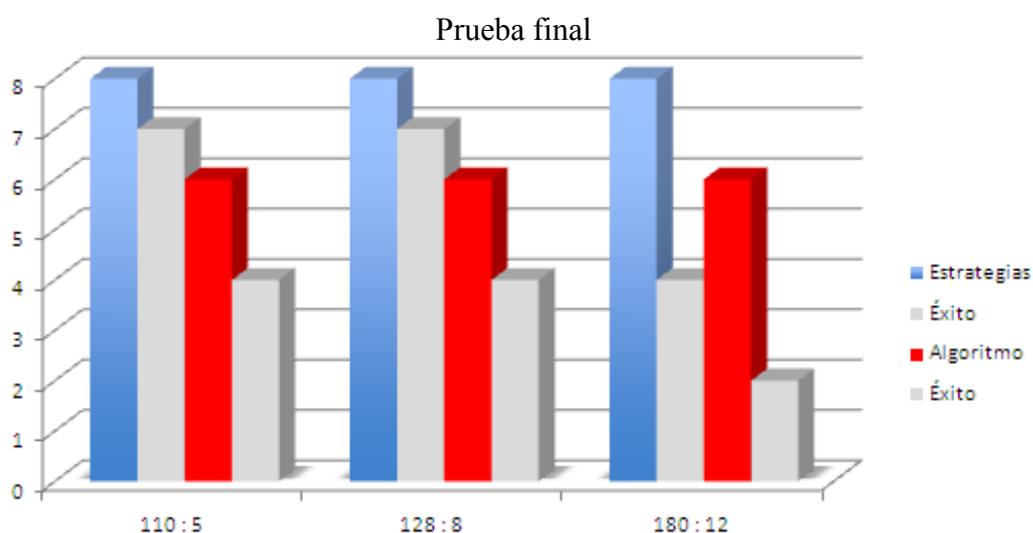
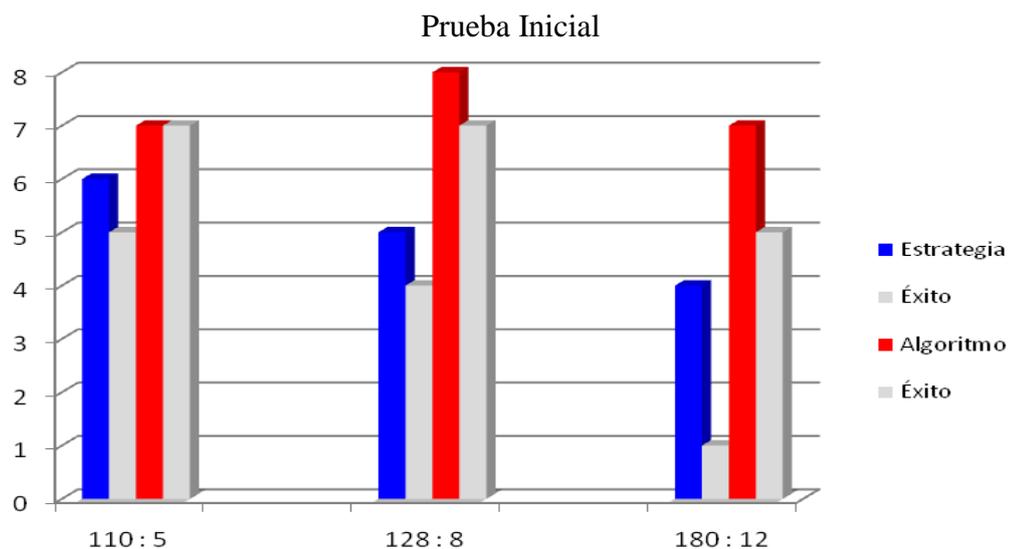


Gráfico 26. Comparativa de los resultados de las pruebas inicial y final de la división

Respecto al uso de estrategias de la suma no hay un cambio notorio entre ambas pruebas porque los resultados ya eran buenos en la prueba inicial y lo siguen siendo en la prueba final.

En el caso de la resta en la prueba inicial los alumnos obtuvieron mejores resultados cuando pensaban en el algoritmo escrito que cuando utilizan estrategias de cálculo mental. En cambio, en la prueba final aunque no se aprecia un aumento en el uso de las mismas, si se aprecia una mejora en los resultados cuando se utilizan estrategias en el cálculo de las restas.

En la prueba final se ha producido un aumento en el uso de estrategias, así como, la mejora en el cálculo de las multiplicaciones cuando utilizan alguna estrategia.

En el caso de la división se observa un aumento en la aplicación de estrategias y mejora en el uso de las mismas. Cabe señalar, que los alumnos que piensan en el

algoritmo escrito tienen menos éxito en el cálculo de las divisiones que los que utilizan estrategias de cálculo mental. Esto mismo sucede en las operaciones de la suma, resta y multiplicación de la prueba final.

A modo de conclusión, se puede decir que los porcentajes evidencian una mejora en ambos porcentajes, verificando que la enseñanza de estrategias ha fomentado el uso de las mismas.

4.5 Perfil de los alumnos finalizada la enseñanza de estrategias de cálculo mental

En primer lugar vamos a establecer una comparativa de cada alumno referido a dos indicadores : la utilización de estrategias y al éxito obtenido, en dos momentos determinados: en la prueba inicial y en la prueba final.

En segundo lugar, vamos a resumir la evolución de los alumnos con respecto a los dos indicadores antes mencionados.

4.5.1 Comparación de perfiles de los alumnos

ALUMNO 1

El alumno en la prueba inicial tiene bien 9 y en la prueba final tiene bien 12 de las 15 operaciones que forman la prueba. Como se observa en la comparación de los gráficos, hay una mejora en el cálculo de las operaciones cuando piensa en el algoritmo escrito.

Inicialmente, el alumno utilizó alguna estrategia para la suma y resta y en la prueba final no ha utilizado ninguna. Esto se debe a que durante la enseñanza de estrategias, el alumno cuando utilizaba estrategias de cálculo mental cometía bastantes errores de cálculo y como consecuencia, ha rehusado utilizarlas en pro del éxito en el cálculo de las operaciones.

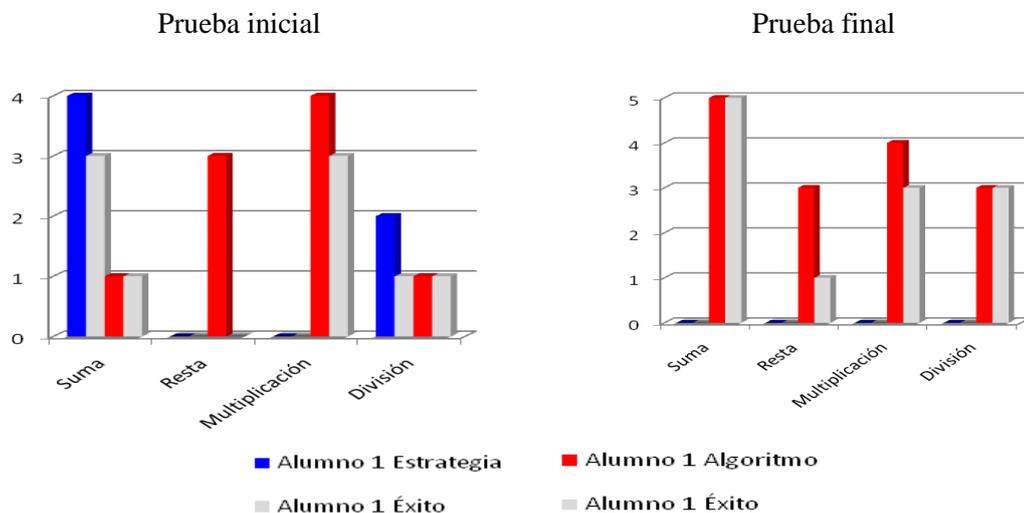


Gráfico 27. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 1 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 2

En un principio este alumno fue uno de los dos alumnos que peores resultados globales obtuvieron en la prueba inicial porque tan solo hizo el cálculo correcto de 6 de las 15 operaciones. Sin embargo, en la prueba final ha hecho el cálculo correcto de 12 de las 15 operaciones.

En ambas pruebas, el alumno ha intentado aplicar estrategias diferentes a la de pensar en el algoritmo escrito. Ha tenido éxito en las estrategias de la suma, ha mejorado en la resta y división. En cambio, no aplica ninguna estrategia en el cálculo de las multiplicaciones. No obstante, ha duplicado la tasa de éxito en la prueba final.

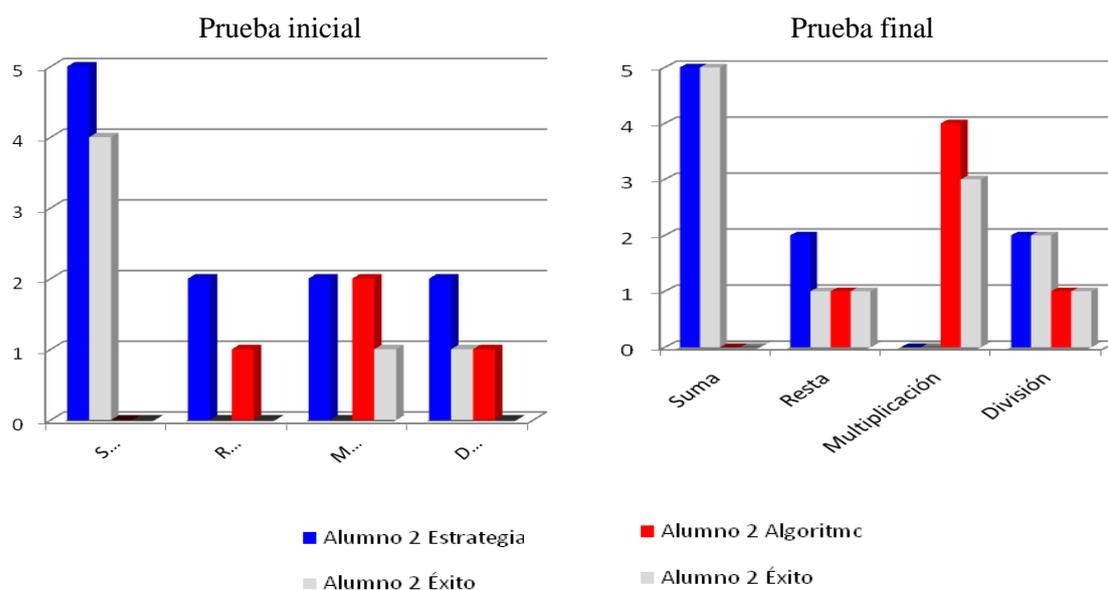


Gráfico 28. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 2 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 3

El alumno ha obtenido resultados globales aceptables dado que ha hecho el cálculo correcto en 12 de las 15 operaciones en ambas pruebas.

En este alumno se observa un cambio notorio en cuanto al uso de estrategias de cálculo mental. En la prueba final utiliza en todas operaciones alguna estrategia, además, las aplica con bastante éxito. Destaca la mejora en el uso de estrategias de las operaciones que intervienen multiplicaciones y divisiones.

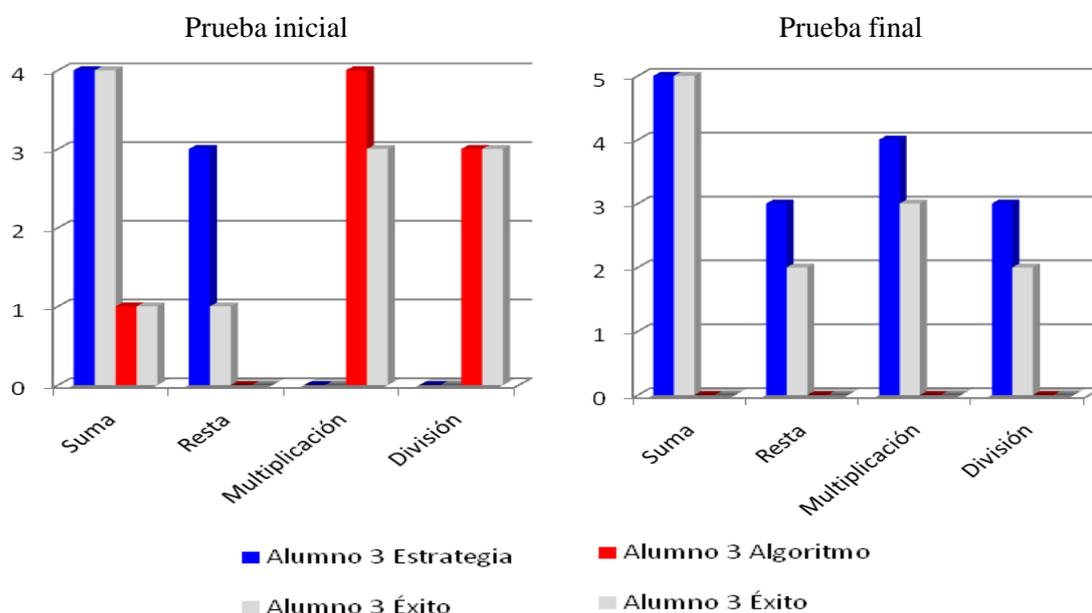


Gráfico 29. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 3 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 4

El alumno ha mejorado los resultados globales. En la prueba inicial hizo el cálculo correcto de 9 operaciones y en la final 14 de las 15 operaciones de la prueba.

Además, ha mejorado su capacidad para realizar cálculos, puesto que la prueba final la ha terminado en 10 minutos y en la inicial empleo 15 minutos. No le dio tiempo a terminar la prueba y dejó las últimas 5 operaciones sin contestar.

Por el contrario, ha disminuido el uso de estrategias, en la prueba inicial piensa en el algoritmo escrito para el cálculo de las operaciones. A lo largo de la enseñanza de las estrategias de cálculo mental, el alumno comenta en varias ocasiones que en general, los cálculos le supone un esfuerzo mental. Por tanto, podemos presuponer que en su caso aplicar estrategias de cálculo mental es un esfuerzo añadido y ha rehusado aplicarlas.

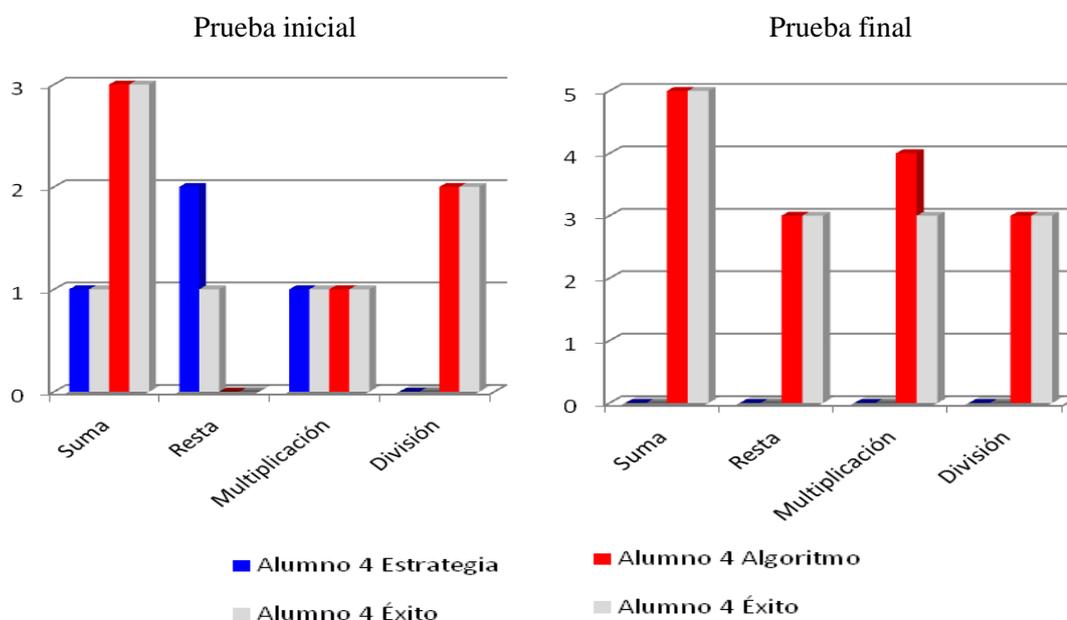


Gráfico 30. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 4 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 5

El alumno ha obtenido resultados globales elevados dado que en la prueba inicial hizo el cálculo correcto en 14 operaciones y en la final ha hecho 13 de las 15 operaciones de la prueba.

Inicialmente, intentó aplicar estrategias de cálculo mental en la mayoría de las operaciones, excepto en la división que prefiere pensar en el algoritmo escrito. En la prueba final se observa un aumento en el uso de estrategias, puesto que calcula todas las operaciones con estrategias y se maneja bien en el cálculo de las operaciones.

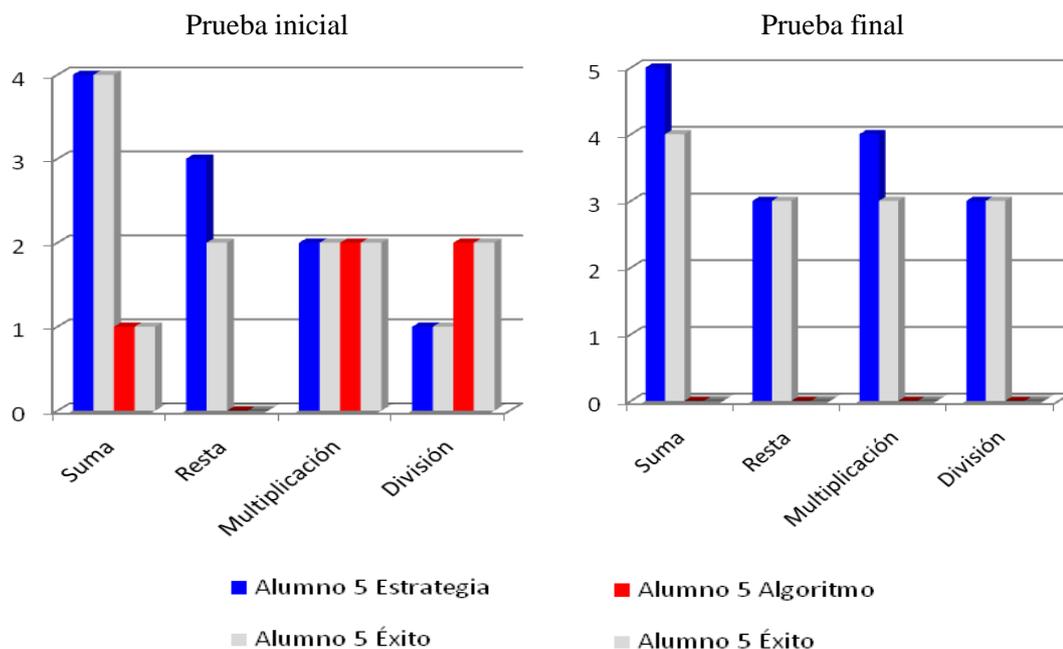


Gráfico 31. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 5 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 6

En la prueba inicial este alumno obtuvo unos resultados globales bajos porque hizo el cálculo correcto de 9 de las 15 operaciones y necesitó para finalizarla 15 minutos. Se trata de un alumno con poca capacidad para la realización de cálculos, puesto que, en la prueba final no le da tiempo a terminarla y deja sin contestar 4 operaciones de la prueba. Realiza correctamente 10 de los cálculos de la prueba final.

En relación con las estrategias utilizadas, podemos decir que ha aumentado en el uso de estrategias en el cálculo de las suma. En la resta ha mejorando el cálculo cuando aplica estrategias, en la multiplicación ha disminuido y en la división no se puede realizar la comparación, dado que las operaciones que deja sin hacer corresponden a divisiones.

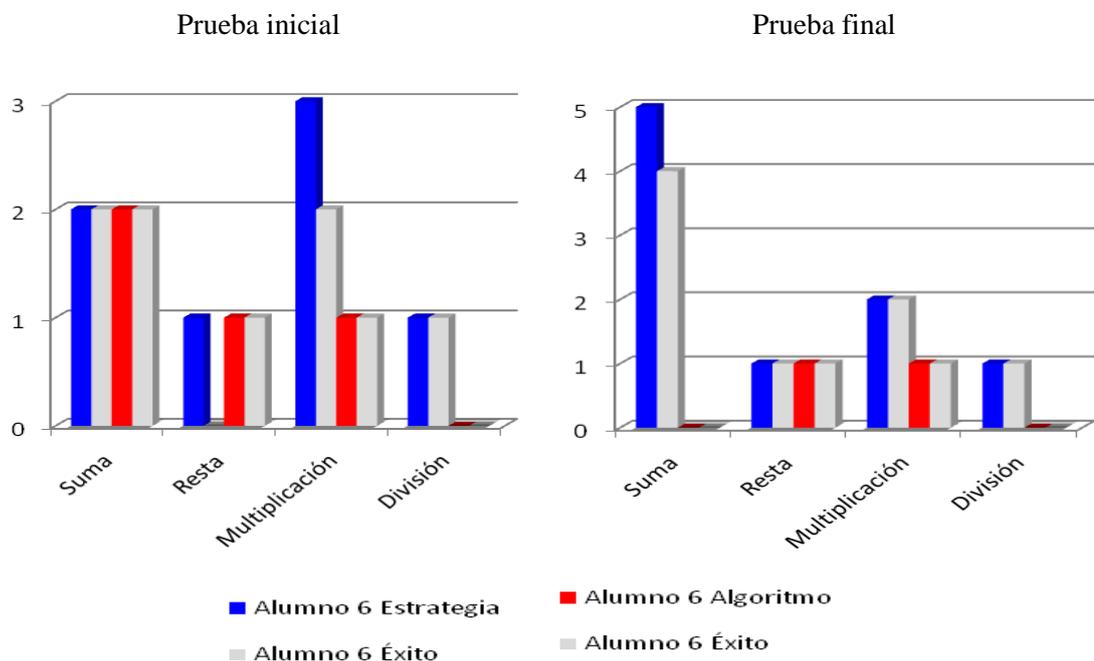


Gráfico 32. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 6 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 7

Este alumno ha obtenido en ambas pruebas unos resultados globales aceptables. En la prueba inicial hizo el cálculo correcto en 11 operaciones y en la prueba final 12 de las 15 operaciones.

En la prueba final el alumno ha aumentado el uso de estrategias de cálculo mental, ya que, aplica en todas las operaciones estrategias de cálculo mental. Además, las aplica con éxito en la suma, resta y multiplicación, excepto, en la división.

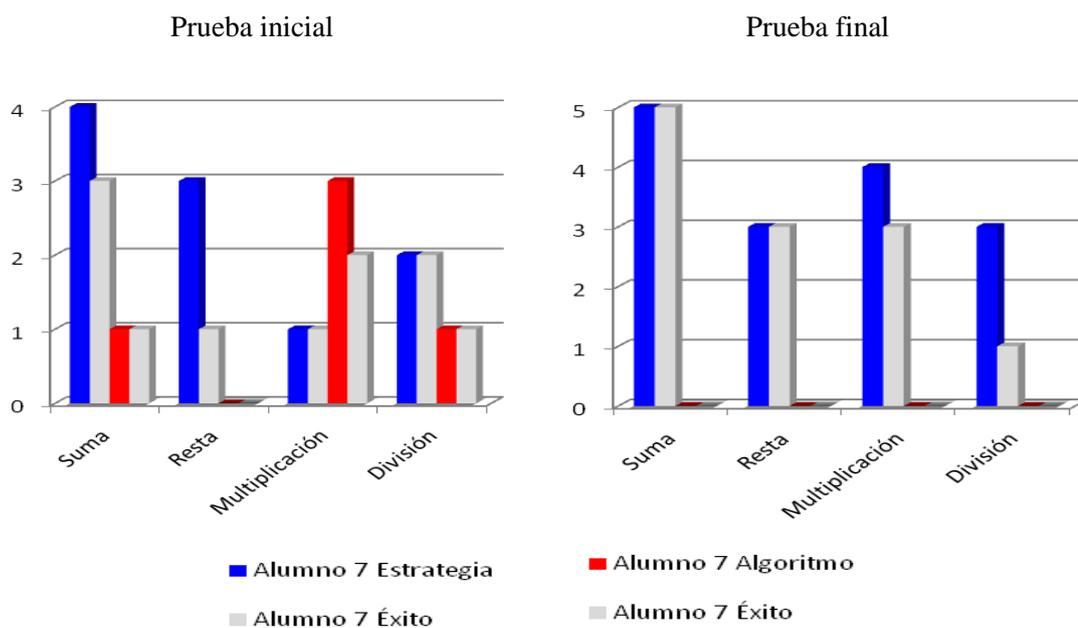


Gráfico 33. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 7 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 8

El alumno ha obtenido resultados globales aceptables, en la prueba inicial hace el cálculo correcto en 11 operaciones y en la prueba final hace 13 de las 15 operaciones de la prueba.

Hay un aumento en la aplicación de estrategias de cálculo mental para la suma, resta, multiplicación y división. Como se observa en el gráfico las realiza con bastante éxito excepto en la multiplicación y división que comete un par de errores en el cálculo.

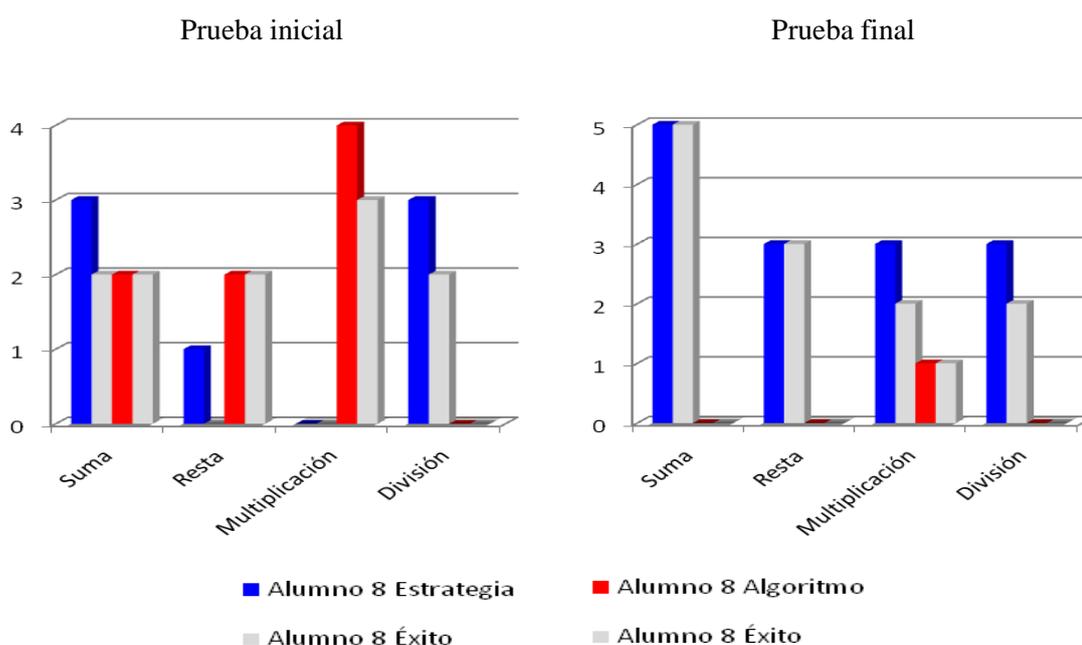


Gráfico 34. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 8 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 9

El alumno en la prueba inicial hizo el cálculo correcto en 10 operaciones y en la final 13 de las 15 operaciones de la prueba, es decir, ha obtenido unos resultados globales aceptables.

Ha aumentado y mejorado la aplicación de estrategias en la suma, resta, multiplicación y división. Asimismo, ha mejorado su capacidad de cálculo dado que para la prueba inicial utiliza 13 minutos y en la prueba final solo emplea 5 minutos para terminarla.

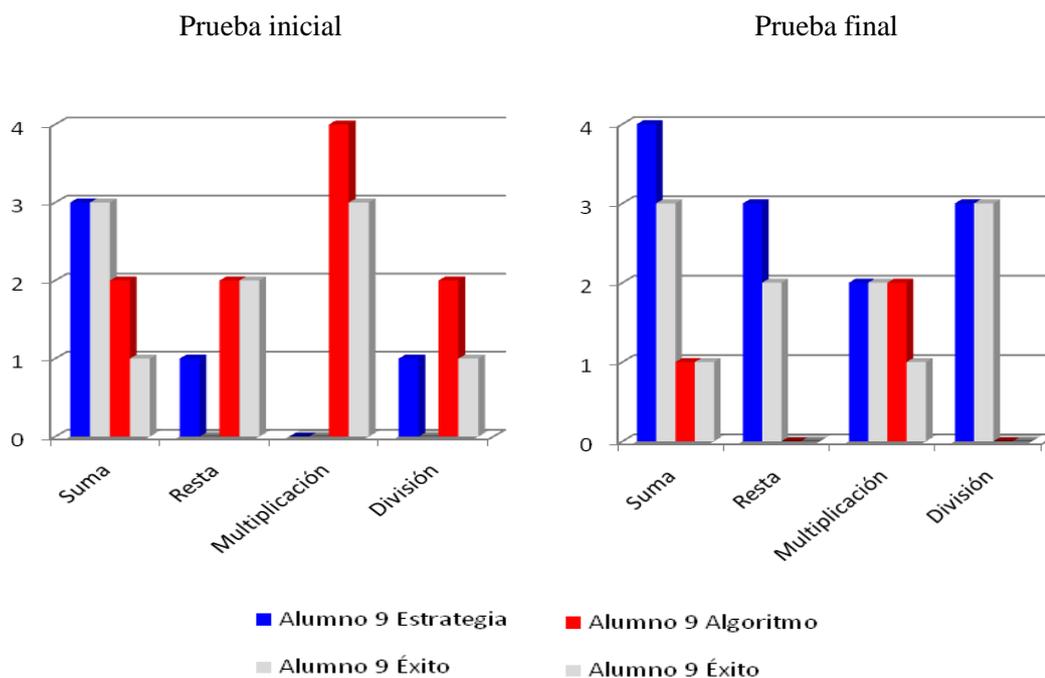


Gráfico 35. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 9 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 10

El alumno en ambas pruebas ha obtenido resultados globales altos, ya que ha hecho el cálculo correcto en 13 de las 15 operaciones tanto en la prueba inicial como final.

Inicialmente, este alumno desconocía las estrategias de cálculo mental de la suma, resta, multiplicación y división. Durante la enseñanza de estrategias de cálculo mental el alumno aplicó alguna de las estrategias para el cálculo de operaciones pero sin éxito. Se observa que tiene un buen manejo del algoritmo escrito para estas operaciones, lo que le permite tener un nivel elevado de éxito.

Pensar en el algoritmo escrito le aporta al alumno la seguridad y confianza que no tiene cuando utiliza estrategias de cálculo mental y como consecuencia, prevalece el algoritmo escrito para el cálculo de las operaciones.

Por otro lado, ha aumentado sus destrezas de cálculo, pudiéndose observar en el tiempo invertido en la realización de las pruebas. En la prueba inicial necesita 13 minutos y la final la termina en 6 minutos.

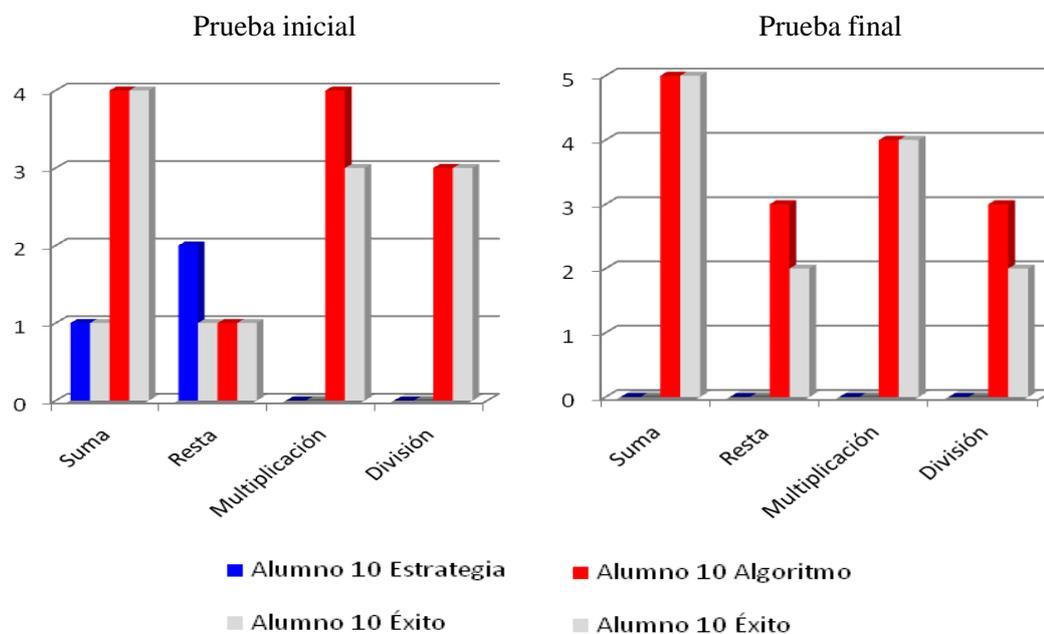


Gráfico 36. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 10 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 11

Los resultados globales que ha obtenido este alumno en ambas pruebas son aceptables. En la prueba inicial hizo el cálculo correcto en 13 y en la final 11 de las 15 operaciones. Cabe destacar, que durante toda la intervención este alumno intenta aplicar las estrategias de cálculo mental y obtiene buenos resultados. Este hecho se refleja en la prueba final.

El alumno ha aumentado y mejorado en el uso de estrategias de cálculo mental. En un principio las desconocía. Asimismo, ha mejorado su capacidad de cálculo ya que la prueba final la realiza en la mitad de tiempo que la inicial.

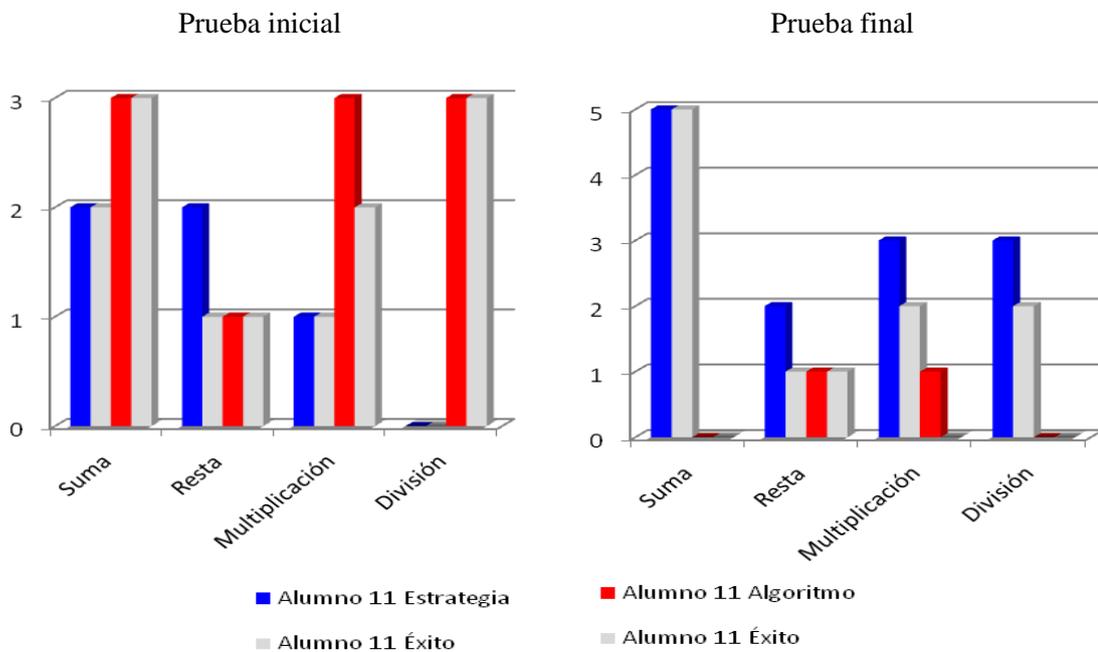


Gráfico 37. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 11 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 12

En ambas pruebas este alumno obtiene resultados globales aceptables. En la prueba inicial hizo el cálculo correcto en 10 operaciones y en la final hace 11 operaciones de las 15 operaciones de la prueba.

Durante la enseñanza de estrategias el alumno no obtuvo éxito en las ocasiones que utilizó estrategias de cálculo mental, al igual que a sus compañeros A1, A4 y A10 y por ello, muestra preferencia en pensar en el algoritmo escrito para el cálculo de las operaciones, como se confirma en la prueba final puesto que no aplica ninguna estrategia para el cálculo de las operaciones.

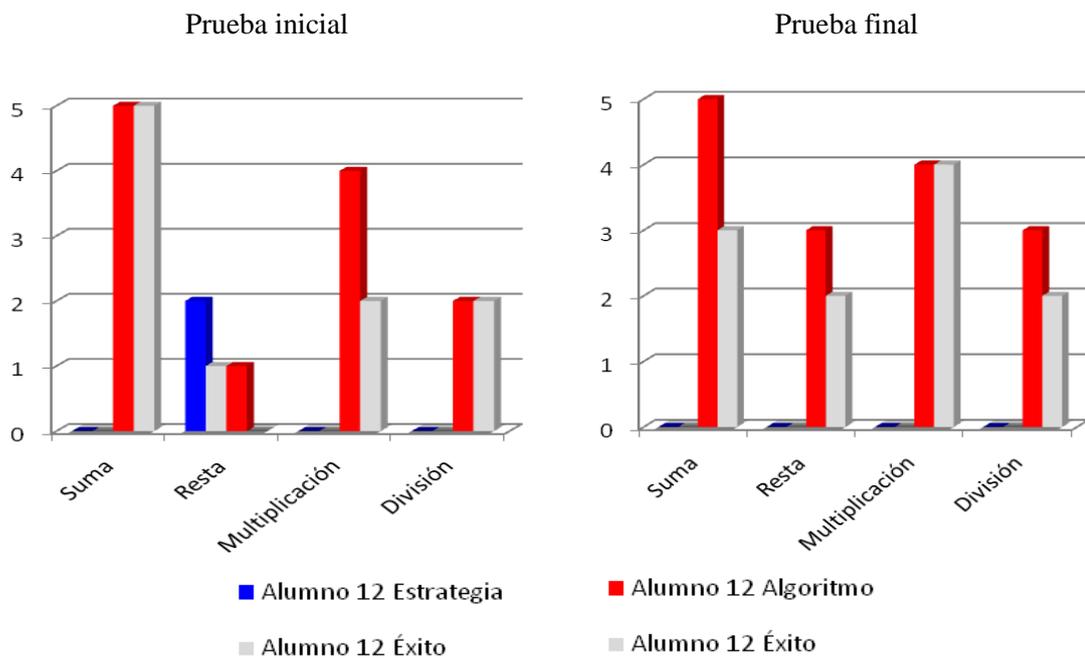


Gráfico 38. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 12 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 13

El alumno en la prueba inicial obtuvo unos resultados globales aceptables dado que hizo el cálculo correcto en 11 operaciones y en la prueba final ha bajado su rendimiento, realizando el cálculo correcto en 9 operaciones de las 15 operaciones de la prueba.

La disminución en el rendimiento en este alumno es un hecho puntual ya que es un alumno que durante la enseñanza ha mostrado tener buena capacidad tanto en la aplicación de estrategias como en el uso del algoritmo escrito, obteniendo en la mayoría de las fichas elevados resultados.

No obstante, ha aumentado notoriamente el uso de estrategias. Inicialmente, se observa que intenta aplicar estrategias y en la prueba final se aprecia un cambio de postura respecto al cálculo de las operaciones, como es el uso de estrategias en el cálculo de las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

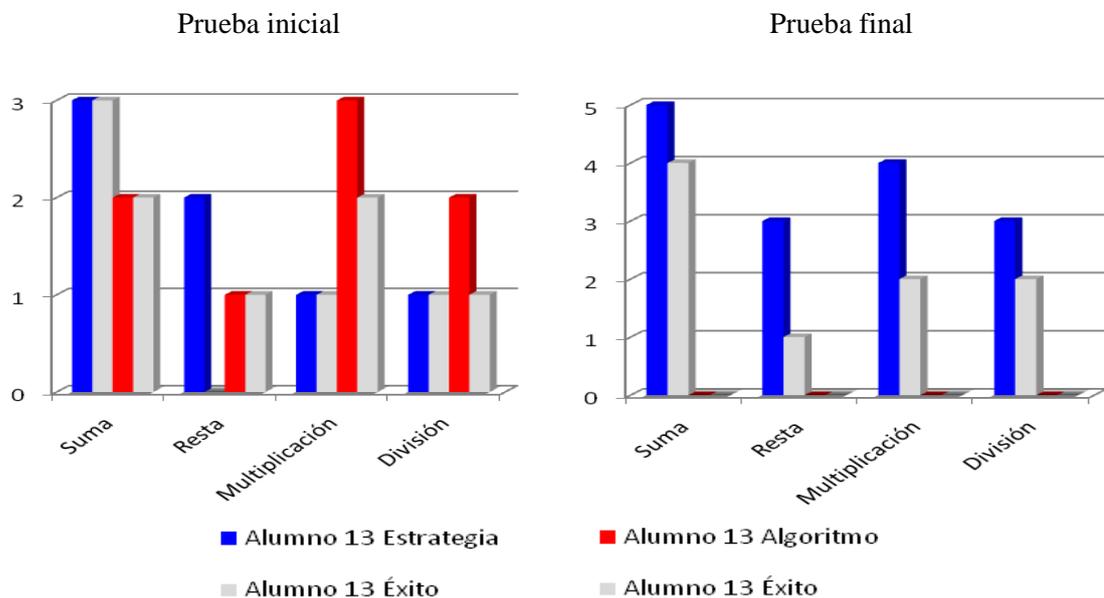


Gráfico 39. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 13 en las pruebas inicial y final

ALUMNO 14

Este alumno es el otro alumno que ha obtenido los peores resultados globales. En ambas pruebas ha hecho el cálculo correcto de 6 de las 15 operaciones de la prueba.

Conviene recordar que se trata del alumno que sigue un programa de adaptación curricular significativo en el área de matemáticas.

En la prueba inicial, aplicó estrategias para el cálculo de la suma con éxito y en la resta, multiplicación y división sin éxito. Durante la experimentación, en un principio el alumno intenta aplicar estrategias de cálculo mental pero no obtiene buenos resultados, lo que lo lleva a prescindir de ellas. Como consecuencia, acaba pensando en el algoritmo escrito para el cálculo de la suma, resta, multiplicación y división como se pone de manifiesto en la prueba final.

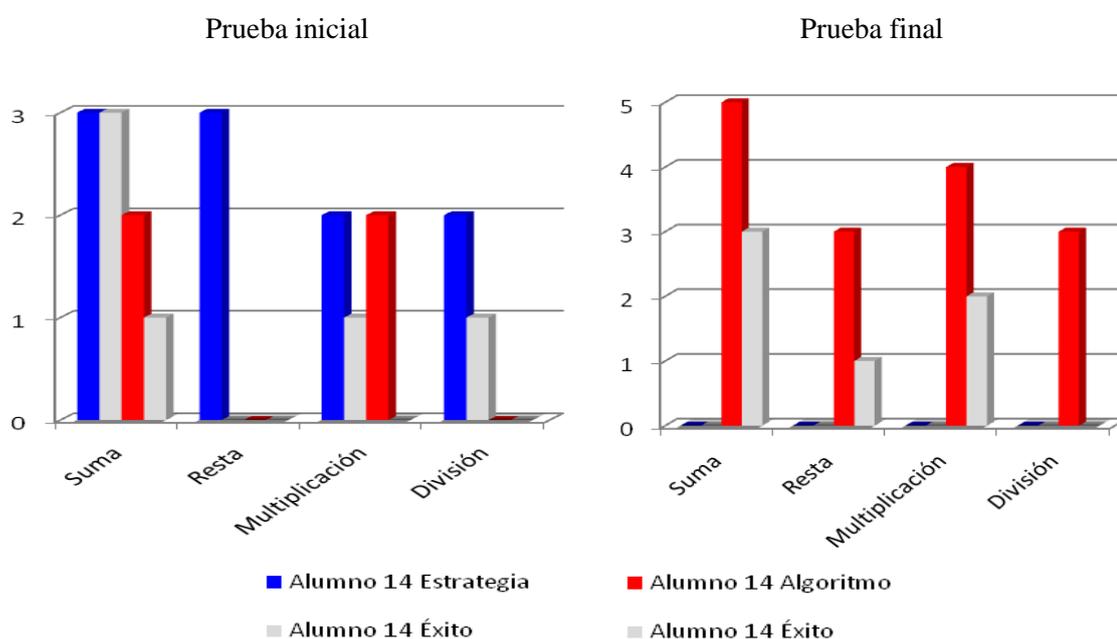


Gráfico 40. Comparativa de los resultados obtenidos por el alumno 14 en las pruebas inicial y final

4.5.2 Resumen del progreso de los alumnos

En general, la enseñanza ha favorecido que los alumnos aprendan estrategias de cálculo mental a pesar de que no todos los alumnos aceptan utilizarlas.

El alumno A1 rehúsa utilizar estrategias de cálculo mental a pesar de que obtiene mejor tasa de éxito que en la prueba inicial.

El alumno A2 ha intentado aplicar estrategias diferentes a la de pensar en el algoritmo escrito con éxito dispar: ha tenido éxito en las estrategias de la suma, ha mejorado en la resta y división. En cambio, no aplica ninguna estrategia en el cálculo de las multiplicaciones. No obstante, ha duplicado la tasa de éxito en la prueba final.

El alumno A3 mejora mucho en el uso de estrategias de cálculo mental. En la prueba final utiliza en todas operaciones alguna estrategia, además, las aplica con bastante éxito. Este alumno ha tenido la misma tasa de éxito en la prueba inicial y final.

El alumno A4 al igual que el alumno A1 no utiliza estrategias de cálculo mental para el cálculo de ninguna operación. No obstante, ha mejorado mucho el porcentaje de éxito en la prueba final.

El alumno A5 ha obtenido resultados globales elevados y además utiliza muchas más estrategias que en la prueba inicial. Los porcentajes de éxito son altas en las dos pruebas.

El alumno A6, caso análogo al alumno A2, ha intentado aplicar estrategias diferentes a la de pensar en el algoritmo escrito con éxito dispar: ha aumentado en el uso de estrategias en el cálculo de las suma pero tiene escaso éxito al aplicar estrategias de las otras operaciones de la prueba. Ha tenido tasas de éxito análogas y cercanas al 66 % en ambas pruebas.

El alumno A7, caso análogo a los alumnos A3 y A5, en la prueba final ha aumentado el uso de estrategias de cálculo mental, ya que, aplica en todas las operaciones estrategias de cálculo mental. Además, las aplica con éxito en la suma, resta y multiplicación, excepto, en la división. Ha obtenido tasas de éxito análogas en las dos pruebas, cercana al 80 %

Los alumnos A8 y A9 mejoran el uso de estrategias y obtienen porcentajes de éxito altas, superiores al 80 %

El alumno A10 obtiene resultados globales altos en ambas pruebas, superiores al 80 %. Comprende las estrategias de cálculo mental pero opta por pensar en el algoritmo escrito para realizar los cálculos.

El alumno A11 ha aumentado y mejorado en el uso de estrategias de cálculo mental. Se trata de un caso análogo a los alumnos A3, A5, A7, A8 y A9.

El alumno A12 no obtuvo éxito en las ocasiones que utilizó estrategias de cálculo mental, durante la enseñanza de estrategias. Como los alumnos A1, A4 y

A10 muestra preferencia en pensar en el algoritmo escrito para el cálculo de las operaciones.

El alumno A13 ha aumentado notoriamente el uso de estrategias, como los alumnos A3, A5, A7, A8, A9 y A11. Sin embargo, la tasa de éxito ha bajado con respecto a la prueba inicial y a los resultados de la fase experimental.

En un principio el alumno A14 intenta aplicar estrategias de cálculo mental pero no obtiene buenos resultados, lo que lo lleva a prescindir de ellas. Se trata de un caso análogo al de los alumnos A1, A4, A10 y A12 y además, se trata de un alumno que sigue un programa de adaptación curricular.

Resumiendo, de los 14 alumnos 9 (A2, A3, A5, A6, A7, A8, A9, A11 Y A13) optan por utilizar estrategias de cálculo mental y 5 (A1, A4, A10, A12 y A14) optan por pensar en el algoritmo escrito para el cálculo de las operaciones.

De estos últimos cinco alumnos, los alumnos A1, A4, A10 y A12 obtienen tasas de éxito elevadas a pesar de realizar los cálculos mentalmente pensando en el algoritmo escrito.

Podemos concluir que todos los alumnos han mejorado en el aprendizaje de las estrategias de cálculo mental aunque algunos de ellos prefieren pensar en el algoritmo escrito para realizar cálculos aritméticos con números naturales.

CAPÍTULO V - CONCLUSIONES Y VALORACIÓN PERSONAL

5.1 Conclusiones

En general, consideramos que se han alcanzado los objetivos planteados en este trabajo y a continuación se exponen las conclusiones correspondientes a los mismos.

1. En el **primer objetivo** se pretendía ubicar el cálculo mental entre los diferentes procedimientos de cálculo de números naturales y estudiar su relación con el sentido numérico. Desde el modelo teórico se han abordado los diferentes tipos de cálculo y su relación con el desarrollo del sentido numérico, las diferencias y relaciones entre el cálculo escrito y el cálculo mental y su relación con el sentido numérico.

En este sentido, las mayores dificultades planteadas en este punto se han centrado en la concreción del término sentido numérico, puesto que se trata de un concepto complejo de definir. Sin descartar ninguna de las otras definiciones, entendemos que el sentido numérico es una red conceptual bien organizada, propia de cada individuo, por la cual es capaz de relacionar números y propiedades de las operaciones para resolver problemas de manera flexible y creativa (Castro, Castro y Rico, 2004). En este trabajo, que se centra en el cálculo mental, el sentido numérico lo restringimos a las capacidades que los alumnos deben movilizar para realizar cálculos aritméticos de números naturales, sin la ayuda de la calculadora ni del soporte escrito y que precisa de la comprensión del sistema de numeración decimal, las diferentes relaciones que se dan entre los números entre las operaciones aritméticas de los números naturales, las propiedades estructurales de las operaciones de números naturales.

Centrándonos en la problemática de la enseñanza del cálculo mental en las aulas de Educación Primaria compartimos con otros autores que alertan de lo contraproducente que es posponer la enseñanza del cálculo mental a momentos posteriores cuando los alumnos dominan los algoritmos convencionales.

La enseñanza de estrategias de cálculo mental debería ser previa a la de los algoritmos escritos. El cálculo mental es un procedimiento de cálculo más natural que favorece el desarrollo del sentido numérico. Como consecuencia, el alumno estará capacitado para elegir el procedimiento de cálculo más adecuado en función del contexto y de los números implicados en la operación.

A su vez, se ha podido verificar la riqueza y variedad de estrategias que permite el cálculo mental y como contribuye al desarrollo del sentido numérico. El alumno progresivamente va estableciendo una red conceptual de relaciones entre los números y entre las operaciones y sus propiedades. De ese modo, amplía su capacidad y comprensión general sobre los números, operaciones y sobre nuestro sistema de numeración decimal que le permitan realizar cálculos de una forma creativa y flexible. Además, se capacita para seleccionar libremente los caminos o procedimientos que estime oportunos para realizar el cálculo.

Conviene tener presente y añadir que el algoritmo escrito es una buena herramienta en la realización de cálculos, puesto que se trata de un procedimiento seguro y eficaz, el cual consiste en una sucesión finita de reglas elementales, regidas por una prescripción precisa y uniforme, que permite efectuar paso a paso, en un encadenamiento estricto y riguroso de ciertas operaciones. Además, apela a propiedades de los números y de las operaciones aunque éstas se encuentren encubiertas y automatizadas. No proponemos abolir su enseñanza, entendemos que hay que apostar por una enseñanza flexible del cálculo en el que el alumno decida cual es el procedimiento de cálculo más adecuado: el cálculo mental, la estimación, el uso de la calculadora o la aplicación del algoritmo escrito.

2. En el **segundo objetivo** se analiza la enseñanza del cálculo mental en las aulas de Educación Primaria a partir de dos fuentes documentales: el currículo oficial y la propuesta didáctica que realiza la editorial del libro de texto Vicens Vives para 5º de Primaria. Del análisis, se evidencia un claro predominio de la enseñanza del cálculo escrito sobre el cálculo mental en las aulas de Educación Primaria.

Las administraciones educativas reconocen su importancia y así lo concretan en el currículo. Sin embargo, no aportan orientaciones didácticas para llevarla a cabo de un modo sistematizado y para orientar al docente.

Asimismo, la propuesta ofrecida por la editorial del libro de texto Vicens Vives para 5º de Primaria, presenta una enseñanza de cálculo mental inadecuada porque no aborda de modo gradual ni sistemática la enseñanza de estrategias de cálculo mental a lo largo de las unidades didácticas en la que se articula el texto.

A pesar que en la actualidad existen propuestas innovadoras de enseñanza del cálculo mental, como El Quinzet o las tablas de cálculo de Jiménez (2010) o los materiales de Ortiz (2011), mucho nos tememos que éstas y otras propuestas

análogas tenga escasa influencia en las prácticas educativas del cálculo mental en Educación Primaria.

3. En el **tercer objetivo** se perseguía estudiar el conocimiento de las estrategias de cálculo mental y el uso que hacen los alumnos de un grupo natural de 5º curso. Este hecho se pone de manifiesto en el desarrollo y análisis de una prueba inicial en la cual los alumnos no habían recibido ninguna instrucción sobre estrategias de cálculo mental previamente.

De los resultados obtenidos se puede decir que los alumnos desconocen las estrategias de cálculo mental y que únicamente muestran competencia en algunas estrategias que aplican para sumar números naturales.

En el caso de las estrategias de la suma de naturales hemos detectado que los alumnos de 5º curso las comprenden y saben utilizarlas porque un porcentaje elevado las aplican con bastante éxito y únicamente en el cálculo cometen algún error. Las estrategias más utilizadas en esta prueba inicial son: asociar sumandos, la descomposición de uno de los sumandos, omisión de ceros o completar decenas y compensar números de dos cifras.

En el caso de la resta obtienen mejores resultados cuando piensan en el algoritmo escrito que cuando utilizan estrategias de cálculo mental. Se observa una predisposición por parte de los alumnos en el uso de estrategias para el cálculo de restas, sin embargo, no son capaces de aplicarlas con éxito. Las estrategias más utilizadas son completar el sustraendo a la decena siguiente, omitir los ceros finales o descomponer el sustraendo.

Respecto a la multiplicación los alumnos desconocen las estrategias de cálculo mental dado que apenas utilizan estrategias y cuando lo hacen tienen poco éxito. Las estrategias utilizadas para la multiplicación son completar el multiplicador a la decena siguiente o estrategias para casos particulares como multiplicar por 5.

En cuanto a la división los alumnos conocen pocas estrategias diferentes a la de visualizar en la mente el algoritmo escrito.

En resumen, los alumnos del grupo experimental apenas conocen estrategias de cálculo mental y tan sólo son capaces de gestionar con éxito estrategias para la operación suma de números naturales. En el caso de las otras tres operaciones aritméticas prefieren realizar el cálculo visualizando en sus mentes el algoritmo escrito

4. En el **cuarto objetivo** nos proponemos enseñar estrategias de cálculo mental, para la cual se diseña, desarrolla y evalúa una propuesta parcial de enseñanza de estrategias de cálculo mental en 5° curso de Educación Primaria. El material de trabajo, formado por fichas de cálculo mental, ha sido elaborado por la autora de este trabajo para desarrollarlo en la fase experimental.

La enseñanza llevada a cabo en el grupo clase es viable porque se ha desarrollado según lo planificado y porque los alumnos dan muestras de comprender las estrategias de cálculo mental durante la fase experimental y, particularmente, en la prueba final.

Para evaluar la propuesta se realiza y analiza una prueba final cuyo objetivo es comprobar en qué grado se produce el proceso de enseñanza-aprendizaje de estrategias de cálculo mental.

Los resultados obtenidos en la prueba final indican que la mayoría de los alumnos conocen y aplican con éxito estrategias de cálculo mental para realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números naturales.

Como consecuencia de la enseñanza de estrategias de cálculo mental se aprecia en la prueba final un aumento en el uso de estrategias y una mejora en su aplicación ya que se obtienen mejores resultados en el cálculo mental de las operaciones que en la prueba inicial.

Cabe señalar que en general los alumnos han aceptado de buen grado las estrategias de cálculo mental aunque les ha resultado más accesibles las estrategias de la suma, resta y división y en menor medida las estrategias de la multiplicación con números de dos cifras. A pesar de este hecho, se aprecia una mejora en los porcentajes de éxito cuando utilizan estrategias de cálculo mental en el cálculo de las operaciones.

Asimismo, se observa una mejora de los porcentajes de éxito de aquellos alumnos que no aplican estrategias en el cálculo de las operaciones y optan por realizarlas pensando en el algoritmo escrito en la prueba final. Esta mejora se refleja en el aumento de éxito en el cálculo de las operaciones y en la disminución del tiempo invertido en dichos cálculos. Del mismo modo, hemos detectado un aumento en los porcentajes de éxito de los alumnos que no aceptan utilizar las estrategias de cálculo mental y que optan por realizar el cálculo visualizando el algoritmo escrito. A estos alumnos la propuesta de enseñanza les ha resultado beneficiosa a pesar de que con ellos no hemos alcanzado los objetivos previstos.

En general, todos los alumnos han mejorado en el cálculo mental y de cálculo escrito, bien sea utilizando estrategias de cálculo mental o bien visualizando en su mente el algoritmo escrito.

Los resultados de la experimentación permiten extraer las siguientes conclusiones que se detallan a continuación:

- De la enseñanza de estrategias de la suma, podemos decir que los alumnos han aceptado de buen grado las estrategias de la suma. Las más utilizadas han sido completar a la decena, centena siguiente, descomponer uno o los dos sumandos y compensar. Además, se ha observado una tendencia a pensar en el algoritmo escrito cuando aumentan los valores de los sumandos porque se sienten más seguros en el cálculo de dichas operaciones visualizando el algoritmo escrito.
- En cuanto a la enseñanza de estrategias de la resta, constatamos que el cálculo de las restas les resulta más difícil a la mayoría de los alumnos, dado que, cometen más errores, en especial, cuando hay un aumento de los valores de los minuendos y sustraendos. Los alumnos dan muestras de comprender las estrategias porque tienden a utilizarlas, sin embargo, se muestran inseguros a la hora de utilizarlas lo que les lleva a obtener tasas de éxito más reducidas que en el caso de las sumas.

De los datos analizados podemos concluir que los alumnos han mejorado en el uso de la estrategia “completar el sustraendo a la decena o centena siguiente”, puesto que hemos detectado una mejora progresiva en la aplicación y porcentaje de éxito de esta estrategia que ha sido bien acogida por los escolares. Además, hemos detectado una ligera progresión en el uso de las estrategias de “descomponer el sustraendo” y “compensación” para calcular restas. Por el contrario, no hemos visto progresión en el uso de la estrategia “añadir números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo”, por lo que conjeturamos que los alumnos no comprenden esta estrategia y se muestran reacios a utilizarla.

- En el caso de la enseñanza de estrategias de la multiplicación por un número de una cifra (2, 3, 4, 5, 6, 8 y 9) los porcentajes de aplicación de estrategias han descendido con respecto a las operaciones de suma y de resta, oscilando desde el 63 % hasta el 50 %, aproximadamente. La mitad de los alumnos no utilizan estrategias en el cálculo de multiplicaciones de números de dos cifras

porque se sienten inseguros cuando las utilizan, no las comprenden o les supone un esfuerzo mental añadido su aplicación. No obstante, cabe señalar que se ha observado una progresión en el aprendizaje de estrategias generales de la multiplicación a pesar de la dificultad que les supone su utilización con multiplicaciones de dos cifras.

En el caso de multiplicaciones donde uno de los factores es de una sola cifra constatamos que los alumnos prefieren utilizar estrategias de descomposición aditiva en detrimento de las estrategias multiplicativas como la compensación y factorización.

También, hemos observado que los alumnos encuentran especial dificultad en el uso de estrategias para multiplicar números de dos cifras y hay una baja tasa de éxito en este tipo de operaciones. No obstante, los alumnos que piensan en el algoritmo escrito fracasan por completo porque les resulta imposible visualizar en su mente los productos parciales que obliga la aplicación de la propiedad distributiva. En este sentido, constatamos que los alumnos que utilizan el algoritmo yerran siempre. Sin embargo, los alumnos que utilizan estrategias para el cálculo de estas multiplicaciones obtienen mejores resultados que los que nos las usan dado que estos últimos alumnos les resulta muy complejo pensar en el algoritmo escrito para realizar el cálculo de multiplicaciones de dos cifras.

- En cuanto a la enseñanza de las estrategias para dividir conjeturamos que los alumnos comprenden mejor las estrategias de la división que las de la multiplicación porque obtienen mejor porcentaje de uso y de éxito (próximos al 75 %).

En cuanto a las estrategias más utilizadas para dividir, constatamos una ligera preferencia por “descomponer el dividendo” frente a “compensar”, “factorizar el divisor” o “estrategias para casos particulares”. Además, constatamos porcentajes de éxito elevados cuando los alumnos aplican la estrategia de “descomponer el dividendo”. Como en el caso de la multiplicación las estrategias aditivas son más utilizadas por los alumnos que las estrategias multiplicativas como compensar y factorizar.

El estudio de la evolución de los aprendizajes realizados por cada uno los alumnos del grupo clase podemos constatar que todos han mejorado sus tasas de éxito al realizar los cálculos aritméticos. Además, nueve de los catorce alumnos

optan por utilizar estrategias de cálculo mental para realizar las tareas de la fase experimental o para realizar los cálculo de la prueba final. Cabe indicar que tan sólo cinco alumnos no utilizan estrategias de cálculo mental.

Efectivamente, cinco de los alumnos muestran cierta reticencia al uso de estrategias de cálculo mental. En varias ocasiones se les ha preguntado por qué no utilizan ninguna estrategia en el cálculo de las operaciones y su respuesta nos revela que les supone un esfuerzo mental añadido y que prefieren pensar en el algoritmo escrito que ya conocen.

Cuatro de los cinco alumnos que eluden usar estrategias (A1, A4, A10 y A12) han dado muestras de comprender las estrategias pero se muestran inseguros al utilizarlas y optan por pensar en el algoritmo escrito. Este hecho, se detectó en el trabajo de Pregal (2015) y pone de manifiesto la inercia de los alumnos para seguir utilizando los algoritmos escritos como consecuencia de una enseñanza tradicional que olvida los otros procedimientos de cálculo diferentes del algoritmo escrito.

La metodología utilizada durante la enseñanza se ha mostrado adecuada para crear un ambiente de trabajo en el aula que ha favorecido la construcción y comunicación de estrategias entre los alumnos, en sintonía con los principios del aprendizaje constructivista.

La realización y puesta en común de las fichas durante la experimentación ha generado un ambiente de aprendizaje en el aula donde los alumnos han podido jugar con los números, los han compuesto y descompuesto, han realizado redondeos, compensaciones, etcétera, de un modo flexible, libre y ameno que ha favorecido la comprensión de nuestro sistema numérico decimal, así como, las relaciones entre los números y la comprensión de las propiedades de las operaciones. El desarrollo de la propuesta de enseñanza agradó a todos los alumnos, no disgustó a ninguno y divirtió a alguno de ellos.

Finalizada la enseñanza de estrategias de cálculo mental hemos podido comprobar las dificultades y los progresos que presentan los alumnos en la aplicación de estrategias de cálculo mental. Para superar inercias a favor del cálculo escrito consideramos fundamental trabajar las estrategias de cálculo mental en los primeros cursos de la etapa y siempre antes de introducir el algoritmo escrito correspondiente.

Por último, constatamos lo dicho en otras investigaciones que alertan de que la enseñanza de estrategias de cálculo mental requiere un proceso largo de enseñanza

sistemática que debería abarcar toda la etapa desde el primer curso de Educación Primaria.

5.2 Valoración personal

A lo largo de nuestra vida escolar aprendemos multitud de conceptos, procedimientos, etcétera y adquirimos una visión global de las cosas conforme a nuestros conocimientos. Por ello, estudiar las estrategias de cálculo mental ha provocado en mí un cambio respecto a la enseñanza del cálculo en las aulas de Educación Primaria.

En relación a la enseñanza del cálculo pertenezco a una generación en la que primaba el aprendizaje de los algoritmos escritos y como consecuencia, en el aula no se creaban espacios para la enseñanza de estrategias de cálculo mental.

Cuando comencé mis estudios de grado conocía alguna de las estrategias de cálculo mental para la suma, me resultaban una forma divertida de realizar sumas de cabeza, pero desconocía el resto de estrategias y sus ventajas.

El profundizar en el conocimiento de estrategias de cálculo mental me ha hecho contemplar de modo diferente el cálculo y sus posibilidades. Además, me ha permitido ser consciente de la importancia en introducir primero en el aula, la enseñanza del cálculo mental y posteriormente, abordar la enseñanza del algoritmo escrito.

Este trabajo me ha permitido diseñar y planificar una enseñanza parcial de estrategias de cálculo mental elaborando un material docente original que ha sido diseñado para esta experiencia de aula concreta. A partir de la observación directa y a través de los medios elaborados para registrar las producciones de los alumnos he podido constatar que éstos han mejorado en el uso de estrategias de cálculo mental y el éxito a la hora de realizar cálculos aritméticos.

Además, me ha permitido apoyarme en las teorías o didácticas impartidas en la carrera, asentando dichos aprendizajes para mi futuro docente.

Por otro lado, he podido aprender a gestionar un aula, así como visualizar la diversidad de la misma, los diferentes estilos y ritmos de aprendizaje y las dificultades o reticencias que presentan algunos alumnos en la utilización de otros procedimientos si éstos les generan inseguridad, como fue el caso de algunos

alumnos que optaron por realizar los cálculos de las operaciones pensando en el algoritmo escrito en vez de utilizar estrategias de cálculo mental.

Otro aprendizaje que he visualizado durante la experimentación es la necesidad de implementar una enseñanza de estrategias de cálculo mental desde primer curso de Educación Primaria estructurada que sea progresiva en cuanto a dificultad y tenga en cuenta el estado psicoevolutivo en el que se encuentra el alumno. Por ello, el plantear una enseñanza de cálculo flexible parece una propuesta muy adecuada si queremos que nuestros alumnos vayan desarrollando progresivamente una red conceptual sobre los números, las operaciones y el sistema de numeración decimal que permita el desarrollo del sentido numérico.

Al hilo de lo citado, agradezco a la tutora del aula las facilidades dadas para llevar a cabo la experimentación. He constatado que la tutora considera importante trabajar el cálculo mental en Primaria como un proyecto que se desarrolle durante toda la Primaria y no de un modo aislado, parcial o descontextualizado y comparte las nuevas orientaciones respecto a la enseñanza del cálculo mental.

La tutora, consciente de la necesidad de introducir en el aula estrategias de cálculo mental, me cedió dos días a la semana un espacio temporal de 15 a 20 minutos para llevar a cabo la enseñanza parcial de estrategias de cálculo mental.

Por otro lado, le pareció muy acertado el facilitar a los alumnos un librito de estrategias de cálculo mental en el cual estaban recogidas todas las estrategias trabajadas en el aula, de ese modo el alumno puede consultarlo siempre que lo desee.

Los alumnos se han mostrado muy receptivos e interesados por aprender las estrategias de cálculo mental y han participado activamente en la puesta en común realizada a lo largo de la experimentación. Además, he podido observar en los alumnos diferentes posturas respecto al uso de las estrategias como por ejemplo los alumnos A4 y A5. La alumna A4 comprendía las estrategias de cálculo mental y sin embargo, no las aplicaba, cuando le preguntaba el por qué no las utilizaba me contestaba que le suponían mucho esfuerzo mental y que por ello, optaba en realizar los cálculos de las operaciones pensando en el algoritmo escrito.

Por el contrario, el alumno A5 se mostraba muy implicado en el aprendizaje y búsqueda de diferentes estrategias para el cálculo de una misma operación, de hecho le gustó mucho poder jugar con los números y adquirir conocimientos que le permiten tener un mayor control en el manejo de los mismos y aumentar sus capacidades en la realización de cálculos.

Por último, la realización de esta memoria y la experimentación llevada a cabo en el aula de Primaria me han proporcionado poder adquirir una visión globalizadora del proceso-aprendizaje del cálculo. Por ello, me han resultado muy interesantes y relevantes y me han proporcionado un gran bagaje para mi futura profesión.

CAPÍTULO VI - BIBLIOGRAFÍA

6.1 Bibliografía

- Adrián, C., Jimenéz-Fanjul, N., Maz-Machado, A., Bracho, R., & García, T. (2012). Matemática informal y sentido numérico en escolares de primer ciclo de E. Primaria. 2-7.
- AIRES, B. (2010). Matemática: Cálculo mental con números naturales. Apuntes para la enseñanza. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. Buenos Aires: Secretaria de Educación Dirección General de Planeamiento Dirección de Currícula.
- Almeida, R., Bruno, A., Perdomo-Díaz, J. (2014) Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. Enseñanza de las Ciencias, 32 (2), pp. 9-34
- Barba D., Calvo C. (2009). Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos.
- Bracho-López, R. (2013). Menos reglas y más sentido: alternativas metodológicas a los algoritmos de cálculo tradicionales para el desarrollo del sentido numérico en la Educación Primaria. Actas del VII CIBEM ISSN,2301(0797), 71-72.
- Chavarría, J. (2008). Teoría de las situaciones didácticas. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, (2).
- DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN, UNIVERSIDAD, CULTURA Y DEPORTE DEL GOBIERNO DE ARAGÓN (2014). Orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. BOA de 20 de junio de 2014.
- Fernández del Campo, J. E. (2004). Del cálculo mental. Organización Nacional de Ciegos Españoles. Madrid
- Fraile, J. (2014). Libro de texto de 5º de Primaria de Matemáticas. Vicens Vives Primaria S.A.
- Gálvez G., Cosmelli D., Cubillos L., Leger P., Mena A., Tanter E., et al. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.

- Gallardo Romero, J. (2014). Enseñanza y aprendizaje del cálculo aritmético en Primaria, 1-19.
- García S. (2014). Sentido numérico. Materiales para Apoyar la Práctica Educativa. México. 58-59.
- Gea, M., Contreras, J. M., Cañadas, G., & Arteaga, P. (2012). Comprendiendo la correlación a partir de sus representaciones. In XIV Congreso sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas:" Diversidad y Matemáticas. 2.
- Godino, J. D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en didáctica de la matemática. *Quadrante*, 2(1), 9-22.
- Gómez Alfonso, B. (1988). Numeración y Cálculo. Madrid: Síntesis.
- Gómez Alfonso, B. (1994). Tipología de los errores en el cálculo mental. Un estudio en el contexto educativo. Tesis doctoral. Universidad de Valencia. España.
- Gómez, B. (1995). Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores. Col. *Mathema*. Granada, Ed. Comares.
- Gómez Alfonso, B. (2005). La enseñanza del cálculo mental. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, (4), 17-29.
- Gómez Alfonso, B. (2006). El cálculo mental. Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Valencia.
- Kamii, C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*, 19, 130-140.
- Jiménez, J. J (2010): Las tablas de cálculo: un método para trabajar el cálculo mental. *Revista Sigma*, nº 35. Departamento de Educación del Gobierno Vasco.
- Mato González, M. (2015). Algoritmos ABN: Abiertos Basados en Números. Trabajo fin de grado, 11. Disponible en: <https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/14476/1/TFG-G%201330%20.pdf>
- Martínez Montero, J. (2011). El método de cálculo abierto basado en números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales cerrados basados en cifras (CBC). *Bordón*, 63, p. 95-110.

- MECD (2013). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria de la LOMCE. BOE de 1 de marzo de 2014.
- National Council of Teachers of Mathematics (Ed.). (2000). Principles and standards for school mathematics (Vol. 1). National Council of Teachers.
- Ortega del Rincón, T., Ortiz Vallejo, M. (2005). Cálculo mental. Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática Universidad de Valladolid, 4.
- Ortega del Rincón, T., & Ortiz Vallejo, M. (2005). Un recurso para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental educación primaria. IX SIMPOSIO SEIEM, Córdoba.
- Ortiz Vallejo, M. (2011). Cálculo mental en el aula. Editorial CCS.
- Perdomo Díaz, J., Almeida, R., & Bruno, A. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas, 9.
- Pregal Cabello, S. (2015). Cálculo mental en Educación Primaria (trabajo fin de grado). Universidad de Zaragoza. España.
- Sancha, I. (2011). Cálculo mental y algorítmico. Mejorar los aprendizajes. Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la provincia de Buenos Aires.
- Sadovsky, P. (2010). Cálculo mental con números naturales: apuntes para la enseñanza. Secretaría de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Valencia Cifuentes, E. (2013). Desarrollo del cálculo mental a partir de entrenamiento en combinaciones numéricas y estrategias de cálculo. Departamento de Educación Municipal de Laja. Chile.

ANEXOS

ANEXO I

Libro de texto 5º Primaria Vicens Vives

Tema 1 Números naturales. Suma y resta

Cálculo mental

Estimar resultados de sumas y restas

1980	redondeo	2000
$+ 3270$	estimación	$+ 3000$
		5000

8270	redondeo	8000
$- 3905$	estimación	$- 4000$
		4000

Primero redondeo los números.



Estima el resultado y anótalo en tu cuaderno:

499874	299937	199980	2937	2972	5978
$- 20139$	$- 49079$	$- 60417$	6018	3856	3097
			4895	2079	1870
			$+ 9374$	$+ 4168$	$+ 1039$

Tema 2 Multiplicación y división de números naturales

Cálculo mental

Multiplicar varios números de una cifra

$5 \times 7 \times 4$
20×7
140

Siempre que puedas, elige primero dos factores cuyo producto termine en cero.



Efectúa:

$6 \times 3 \times 5$	$3 \times 5 \times 8$	$6 \times 5 \times 8$	$2 \times 73 \times 5$	$3 \times 5 \times 4$
$2 \times 5 \times 32$	$5 \times 8 \times 5 \times 2$	$4 \times 9 \times 5$	$2 \times 5 \times 3 \times 8$	$2 \times 5 \times 41$

Tema 3 Múltiplos y divisores

Cálculo mental

Dividir números acabados en cero

$15 : 3 = 5$
 $150 : 3 = 50$
 $1.500 : 3 = 500$
 $15.000 : 3 = 5.000$
 $150.000 : 3 = 50.000$



15 : 3 = 5

explorador@digital
Práctica de la división
www.fiching.com/677333

Copia en tu cuaderno y resuelve:

72 : 8	30 : 6	720 : 9	360 : 3
720 : 8	300 : 6	250 : 5	27.000 : 3
7.200 : 8	3.000 : 6	4.800 : 6	840 : 4
72.000 : 8	30.000 : 6	48.000 : 8	55.000 : 5
720.000 : 8	300.000 : 6	640.000 : 8	555.000 : 5

Tema 4 Fracciones

Cálculo mental

Sumar y restar números de dos cifras

$$\begin{array}{r} 56 + 38 \\ +30 \rightarrow 86 \rightarrow +8 \rightarrow 94 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 - 38 \\ -30 \rightarrow 26 \rightarrow -8 \rightarrow 18 \end{array}$$



38 es lo mismo que 30 + 8.

explorador@digital
Jerarquía de las operaciones
www.fiching.com/118508

Escribe, en tu cuaderno, el resultado de estas operaciones:

48 + 34	527 + 56	37 + 46	359 + 37	75 + 78	276 + 45
83 - 36	752 - 28	74 - 25	375 - 46	91 - 17	880 - 73

Tema 5 Operaciones con fracciones

Cálculo mental

Multiplicar un número de una cifra por otro de dos cifras

$$\begin{array}{r} 3 \times 54 \\ (3 \times 50) + (3 \times 4) \\ 150 + 12 \\ \hline 162 \end{array}$$



Primero multiplica las decenas y luego, las unidades.

explorador@digital
Repaso de fracciones
www.fiching.com/118509

Escribe en tu cuaderno el resultado de estas multiplicaciones:

2 × 49	7 × 27	8 × 25	3 × 48	4 × 36	5 × 39	3 × 45	9 × 21
8 × 22	6 × 28	7 × 35	4 × 58	5 × 62	4 × 43	6 × 52	3 × 47

Tema 6 Números decimales

Cálculo mental

Multiplicar un número por 11

$$23 \xrightarrow{\times 10} 230 \xrightarrow{+ 23} 253$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\times 11}$$

Es igual que multiplicarlo por 10 y, luego, sumar el número al resultado obtenido.



explorador@digital
Decimas, centésimas y milésimas
www.fiching.com/119619

Efectúa en tu cuaderno:

34×11	46×11	21×11	52×11
14×11	25×11	13×11	72×11

Tema 7 Operaciones con números decimales

Cálculo mental

Redondear a las unidades y resolver

Suma: $0,99 \rightarrow 1$
 $3,07 \rightarrow + 3$
 $\quad \quad \quad 4$

Resta: $3,07 \rightarrow 3$
 $1,97 \rightarrow - 2$
 $\quad \quad \quad 1$

Multiplicación: $3,99 \times 4$
 \downarrow
 $4 \times 4 = 16$

División: $5,85 : 3$
 \downarrow
 $6 : 3 = 2$

Calcula los resultados aproximados:

$1,59 + 5,87$	$3,87 - 1,04$	$3,01 \times 5$	$9,03 : 3$	$2,05 + 1,97 + 3,95$
$6,02 - 0,92$	$5,03 + 1,99$	$7,89 : 2$	$15,8 \times 2$	$7,98 + 2,01 - 0,97$

explorador@digital
Suma y resta con decimales
www.fiching.com/119620

Tema 8 Longitud y Superficie

Cálculo mental

Multiplicar números de dos cifras por 9

Multiplicamos por 10 y luego restamos el número.

$$27 \times 10 = 270 \leftarrow \times 10$$

$$270 - 20 = 250 \leftarrow - 20$$

$$250 - 7 = 243 \leftarrow - 7$$

Por tanto: $27 \times 9 = 243$

Calcula:

12×9	18×9	15×9	16×9	25×9	23×9	28×9	21×9
32×9	36×9	31×9	38×9	57×9	64×9	75×9	87×9

explorador@digital
Series
www.fiching.com/119615

Tema 9 Masa y capacidad

Cálculo mental

Dividir un número par de dos cifras entre 2

a. Si las dos cifras son números pares, cada cifra se divide entre 2:

$$84 \xrightarrow{:2} 42$$

b. Si la cifra de las decenas es impar:

$$\begin{array}{ccc} 74 & \xrightarrow{:2} & 37 \\ \underbrace{60 + 10 + 4} & \xrightarrow{:2} & \underbrace{30 + 5 + 2} \end{array}$$

Divide los números siguientes entre 2:
62 86 72 28 98 24 82 56 52 34 46 78 48 92

Fíjate primero en la cifra de las decenas.



explorador@digital
Calculadora y cálculo mental
www.fiching.com/119616

Tema 10 Rectas y Ángulos

Cálculo mental

Multiplicar un número por 5

$$\begin{array}{ccc} 24 & \xrightarrow{\times 10} & 240 & \xrightarrow{:2} & 120 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ & & & & \\ & \xrightarrow{\times 5} & & & \end{array}$$

Resuelve:

46×5	32×5	45×5	68×5	84×5	14×5
56×5	53×5	26×5	78×5	27×5	82×5
24×5	88×5	36×5	64×5	90×5	52×5

Primero, multiplica el número por 10 y, luego, divide el resultado entre 2.



explorador@digital
Medida de ángulos
www.fiching.com/119621

Tema 11 Sistema Sexagesimal

Cálculo mental

Dividir un número entre 5

$$\begin{array}{ccc} 70 & \xrightarrow{:10} & 7 & \xrightarrow{\times 2} & 14 \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ & & & & \\ & \xrightarrow{:5} & & & \end{array}$$

Dividir entre 5 es lo mismo que dividir entre 10 y multiplicar el resultado por 2.

Calcula:

$60 : 5$	$210 : 5$	$430 : 5$	$320 : 5$	$90 : 5$	$700 : 5$	$160 : 5$
$600 : 5$	$130 : 5$	$720 : 5$	$470 : 5$	$80 : 5$	$900 : 5$	$380 : 5$

Vueltas



explorador@digital
www.fiching.com/676209

Tema 12 Figuras planas

Cálculo mental

Sumar números que terminan en 9

$$\begin{array}{r} 36 + 49 \\ \hline 36 + 50 - 1 \\ \hline 86 - 1 = 85 \end{array}$$

Para sumar 49, sumamos 50 y restamos 1.



explorador@digital
Cálculo mental: sumas
www.fiching.com/677330

Calcula:

$35 + 19$	$24 + 49$	$644 + 19$	$116 + 79$	$527 + 69$
$18 + 59$	$56 + 29$	$37 + 39$	$412 + 59$	$533 + 49$
$238 + 29$	$12 + 79$	$12 + 89$	$225 + 39$	$849 + 29$

Tema 13 Movimiento en el plano y áreas de figuras

Cálculo mental

Multiplicar un número por 0,5

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 0,5 \\ \hline 25,0 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{r} 50 \overline{) 2} \\ \underline{10} \\ 25 \\ \downarrow \end{array}$$

Multiplicar un número por 0,5 es lo mismo que dividirlo entre 2.



explorador@digital
Coordenadas
www.fiching.com/677331

Resuelve:

$70 \times 0,5$	$60 \times 0,5$	$30 \times 0,5$	$20 \times 0,5$	$42 \times 0,5$	$28 \times 0,5$
$36 \times 0,5$	$248 \times 0,5$	$86 \times 0,5$	$64 \times 0,5$	$466 \times 0,5$	$622 \times 0,5$

Tema 14 Cuerpos Geométricos

Cálculo mental

Multiplicar por 0,25

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 0,25 \\ \hline 180 \\ \underline{72} \\ 9,00 \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{r} 36 \overline{) 4} \\ \underline{0} \\ 9 \end{array}$$

Multiplicar por 0,25 es lo mismo que dividir entre 4.



explorador@digital
Cálculo mental: restas
www.fiching.com/119623

Multiplica:

$12 \times 0,25$	$80 \times 0,25$	$20 \times 0,25$	$28 \times 0,25$	$24 \times 0,25$	$60 \times 0,25$
$32 \times 0,25$	$36 \times 0,25$	$40 \times 0,25$	$44 \times 0,25$	$84 \times 0,25$	$96 \times 0,25$

Tema 15 Estadística y Probabilidad

Cálculo mental

Multiplicar un número por 0,1

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 0,1 \\ \hline 3,2 \end{array}$$

$\leftarrow 32 : 10 = 3,2$

Multiplicar un número por 0,1 equivale a dividirlo entre 10.



explorador@digital
Las cuatro operaciones
www.fiching.com/677395

Multiplica:

$52,31 \times 0,1$	$7,5 \times 0,1$	$4,32 \times 0,1$	$34,5 \times 0,1$
$3.247 \times 0,1$	$120,4 \times 0,1$	$4,50 \times 0,1$	$87 \times 0,1$

ANEXO II

La tabla que se muestra a continuación se llama Tabla Pitagórica. La inventó el matemático y filósofo Pitágoras en Grecia hace más de dos mil quinientos años.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ANEXO III

Librillo de estrategias de cálculo mental entregado a los alumnos durante la experimentación.

VAMOS A JUGAR CON LOS NÚMEROS

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA SUMAR, RESTAR, MULTIPLICAR Y DIVIDIR NÚMEROS NATURALES



Alumno/a _____

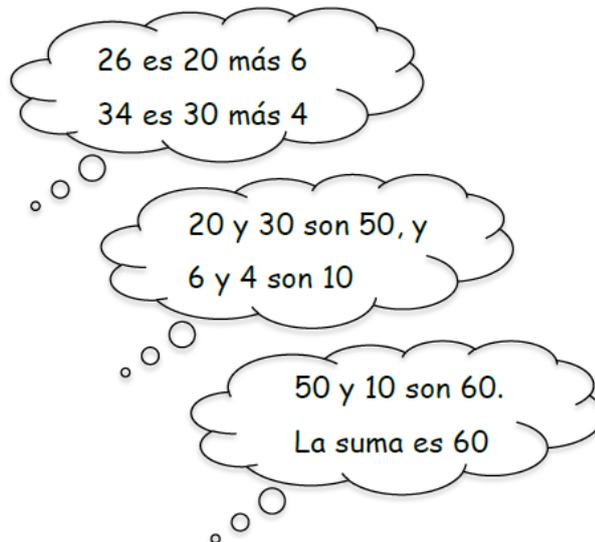
**CEIP San Roque
María de Huerva**

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA SUMAR PARA HACER SUMAS "DE CABEZA"

Descomponer uno o los dos sumandos:

$$26 + 34 = (20 + 6) + (30 + 4) = (20 + 30) + (6 + 4) = 50 + 10 = 60$$

Se puede pensar así:

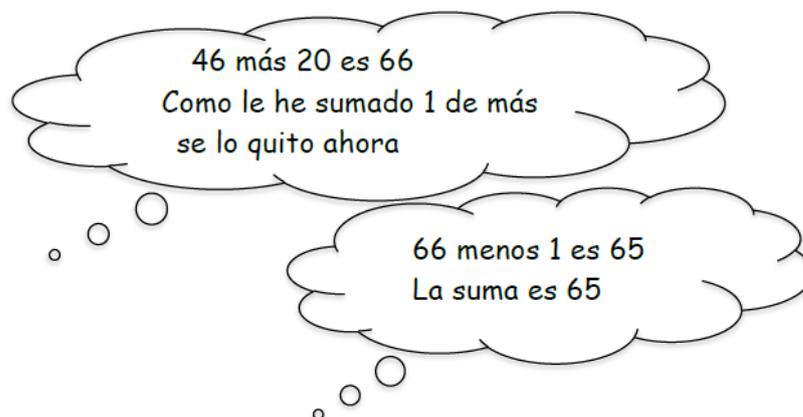


**Completar un sumando a la decena, centena o unidad de millar
siguiente (Redondear):**

$$46 + 19 = 46 + (20 - 1) = (46 + 20) - 1 = 66 - 1 = 65$$

Se puede pensar así:

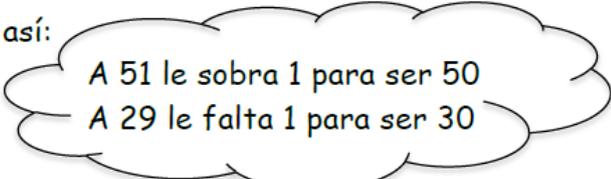
Como a 19 le falta 1 para ser 20, a 46 le sumaré 20 y después le
quitaré 1



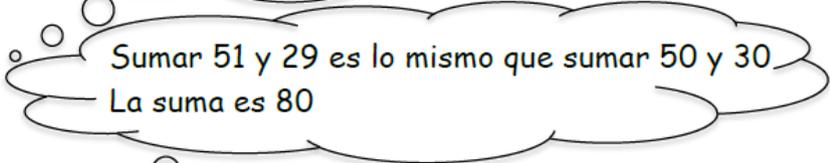
Compensar: lo que añado a un sumando se lo quito al otro sumando

$$51 + 29 = (51 - 1) + (29 + 1) = 50 + 30 = 80$$

Se puede pensar así:



A 51 le sobra 1 para ser 50
A 29 le falta 1 para ser 30

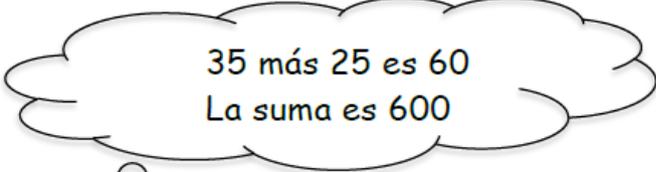


Sumar 51 y 29 es lo mismo que sumar 50 y 30
La suma es 80

Omitir ceros finales:

$$350 + 250 = 35 \times 10 + 25 \times 10 = (35 + 25) \times 10 = 60 \times 10 = 600$$

Se piensa así: sumo 35 más 25 y después añado un cero a la derecha.

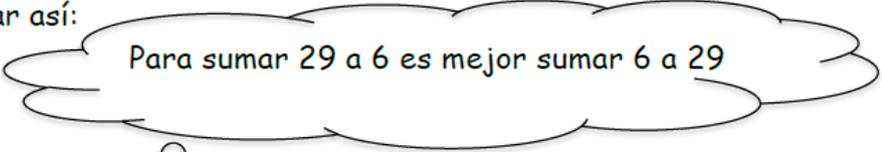


35 más 25 es 60
La suma es 600

Cambiar el orden de los sumandos (Propiedad conmutativa)

$$6 + 29 = 29 + 6$$

Se puede pensar así:

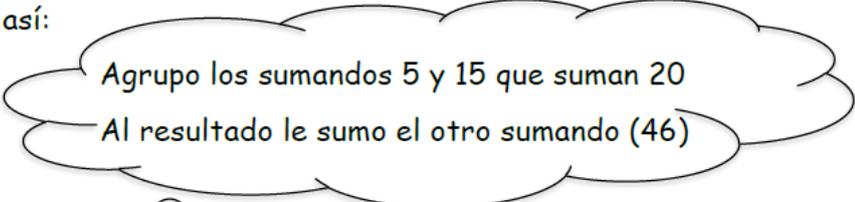


Para sumar 29 a 6 es mejor sumar 6 a 29

Asociar sumandos (Propiedad asociativa)

$$5 + 46 + 15 = (5 + 15) + 46 = 20 + 46 = 66$$

Se puede pensar así:



Agrupo los sumandos 5 y 15 que suman 20
Al resultado le sumo el otro sumando (46)

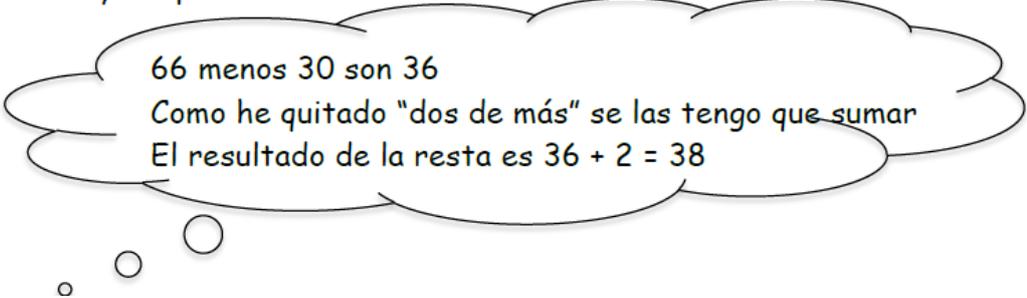
ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA RESTAR

VAMOS A JUGAR CON LOS NÚMEROS PARA HACER RESTAS "DE CABEZA"

Completar el sustraendo a la decena siguiente (Redondear)

$$66 - 28 = 66 - 30 + 2 = 36 + 2 = 38$$

Se puede pensar así: como a 28 le faltan 2 para llegar a 30, restaré primero 30 y después sumaré 2.

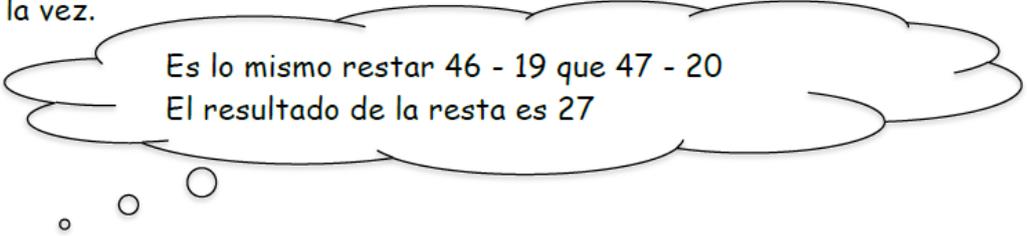


66 menos 30 son 36
Como he quitado "dos de más" se las tengo que sumar
El resultado de la resta es $36 + 2 = 38$

Compensar: sumar o restar al minuendo y sustraendo el mismo número

$$46 - 19 = (46 + 1) + (19 + 1) = 47 - 20 = 27$$

Se puede pensar así: como a 19 le falta 1 para ser 20, sumaré uno a 46 y a 19, a la vez.

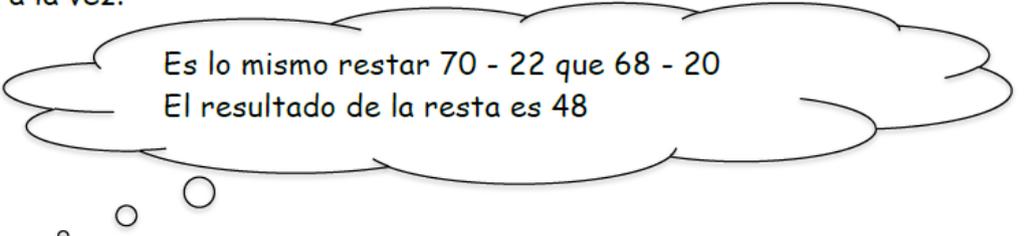


Es lo mismo restar $46 - 19$ que $47 - 20$
El resultado de la resta es 27

Otro ejemplo de "compensar":

$$70 - 22 = (70 - 2) + (22 - 2) = 68 - 20 = 48$$

Se puede pensar así: como a 22 le sobran 2 para ser 20, restaré 2 a 70 y a 22, a la vez.



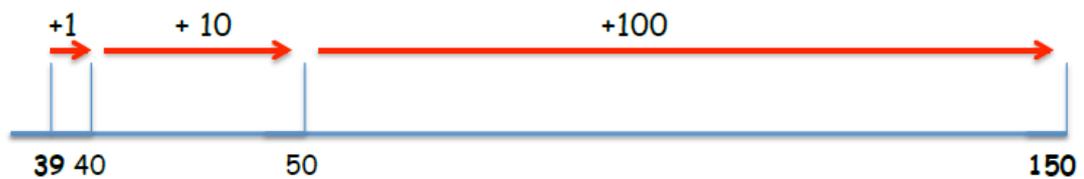
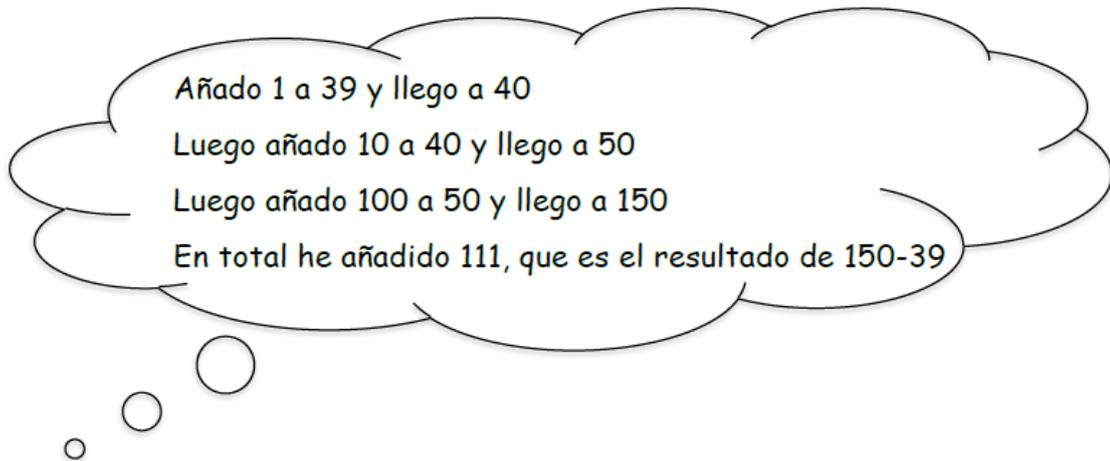
Es lo mismo restar $70 - 22$ que $68 - 20$
El resultado de la resta es 48

Añadir un número al sustraendo hasta llegar al minuendo

Esta estrategia consiste en convertir la resta en una suma.

$$150 - 39 = 1 + 10 + 100 = 111$$

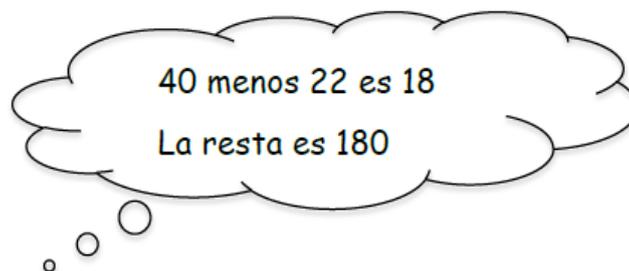
Ha pensado lo siguiente:



Omitir ceros finales:

$$400 - 220 = 40 \times 10 - 22 \times 10 = (40 - 22) \times 10 = 18 \times 10 = 180$$

Se piensa así: hago la resta $40 - 22$ y después añado un cero a la derecha.



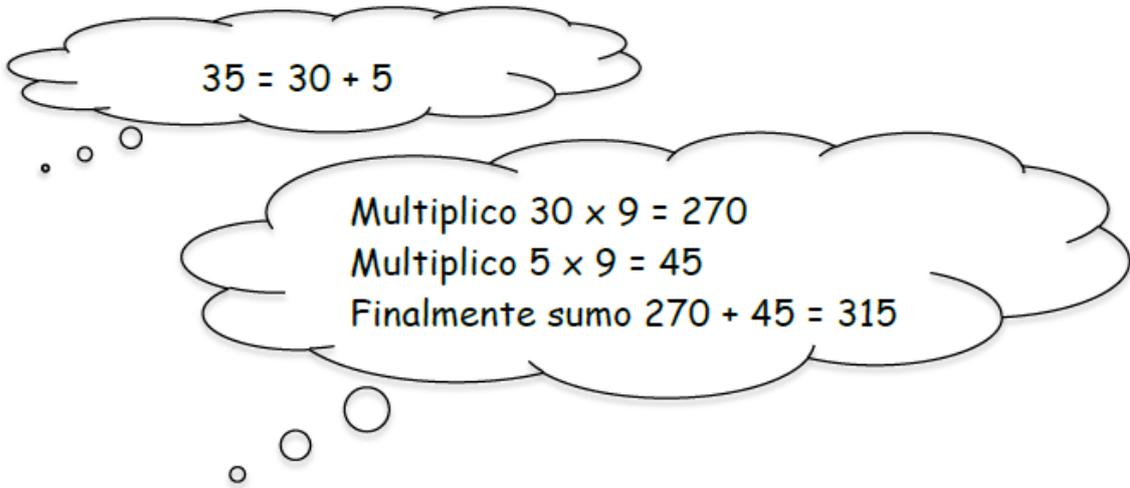
ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA MULTIPLICAR

VAMOS A JUGAR CON LOS NÚMEROS PARA HACER MULTIPLICACIONES "DE CABEZA"

Descomponer el multiplicando o el multiplicador:

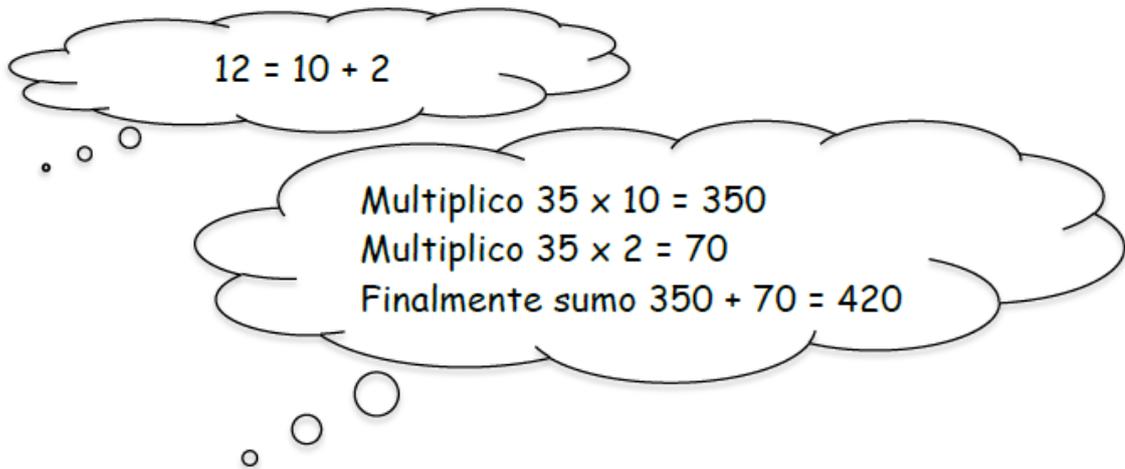
- Si descomponemos el multiplicando:

$$35 \times 9 = (30 + 5) \times 9 = (30 \times 9) + (5 \times 9) = 270 + 45 = 315$$



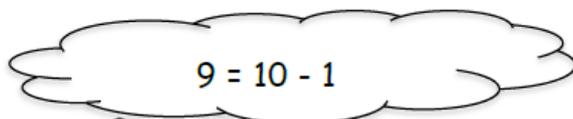
- Si descomponemos el multiplicador:

$$35 \times 12 = 35 \times (10 + 2) = (35 \times 10) + (35 \times 2) = 350 + 70 = 420$$

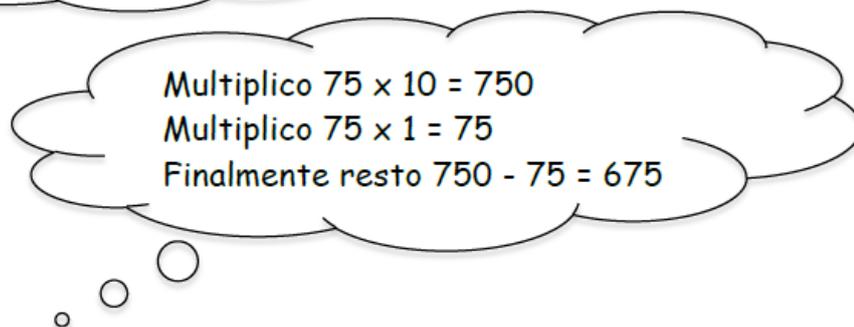


Completar el multiplicador a la decena siguiente:

$$75 \times 9 = 75 \times (10 - 1) = (75 \times 10) - (75 \times 1) = 750 - 75 = 675$$



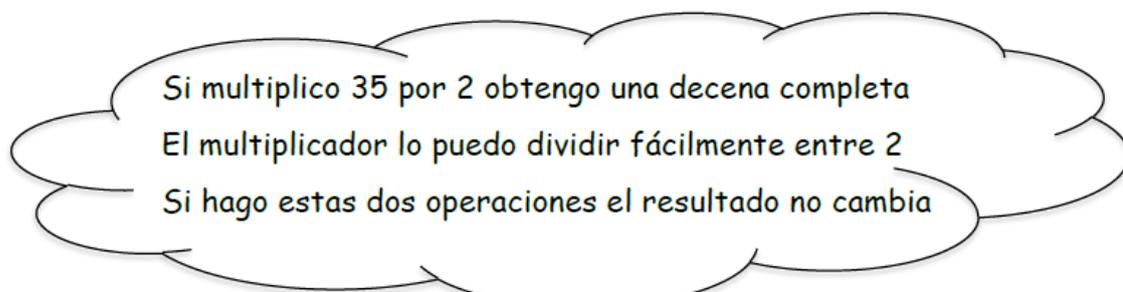
$9 = 10 - 1$



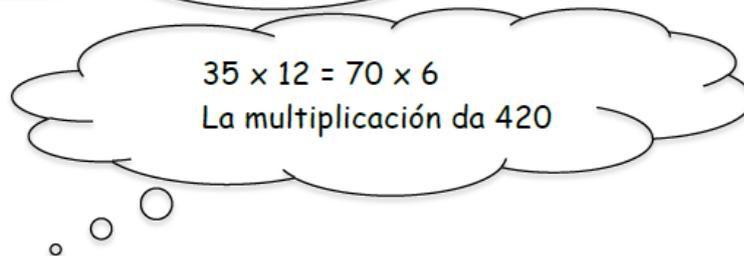
Multiplico $75 \times 10 = 750$
Multiplico $75 \times 1 = 75$
Finalmente resto $750 - 75 = 675$

Compensar: multiplicar uno de los factores por un número y dividir el otro factor por el mismo número

$$35 \times 12 = (35 \times 2) \times (12 : 2) = 70 \times 6 = 420$$



Si multiplico 35 por 2 obtengo una decena completa
El multiplicador lo puedo dividir fácilmente entre 2
Si hago estas dos operaciones el resultado no cambia



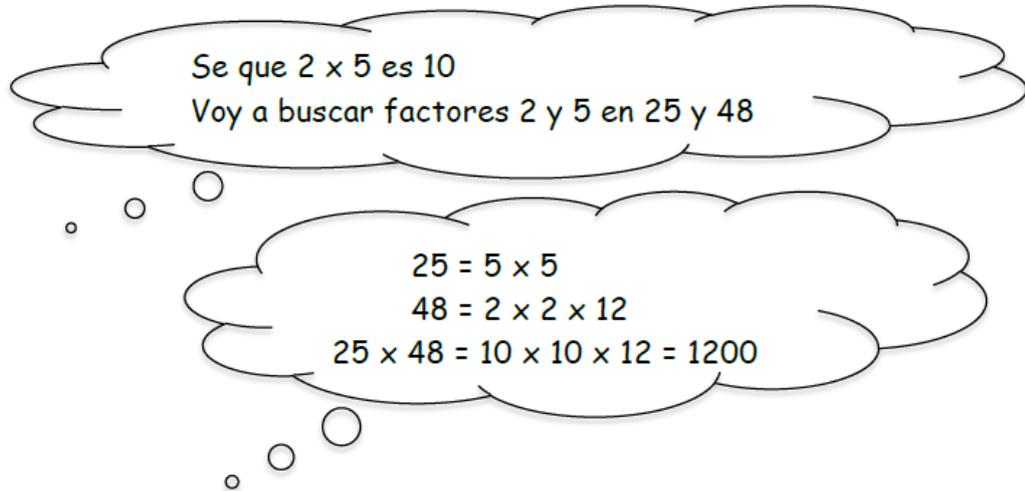
$35 \times 12 = 70 \times 6$
La multiplicación da 420

Práctica un poco:

Utiliza la estrategia de compensación para calcular 25×48

Factorizar: buscar factores 2 y 5 en el multiplicando y/o en el multiplicador

$$25 \times 48 = (5 \times 5) \times (2 \times 2 \times 12) = (5 \times 2) \times (5 \times 2) \times 12 = 10 \times 10 \times 12$$



Estrategias particulares:

- **Multiplicar por 10, 100, 1000, ...**

Para multiplicar por 10 basta añadir un 0 a la derecha del multiplicando.

$$35 \times 10 = 350$$

Para multiplicar por 100 basta añadir dos ceros a la derecha del multiplicando.

$$35 \times 100 = 3500$$

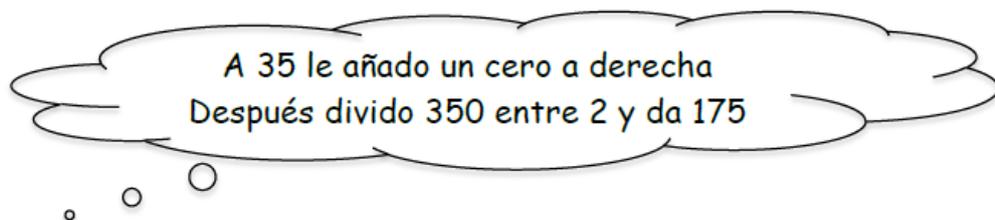
Para multiplicar por 1000 basta añadir tres ceros a la derecha del multiplicando.

$$35 \times 1000 = 35000$$

- **Multiplicar por 5**

Basta con multiplicar el número por 10 y después dividir por 2.

$$35 \times 5 = 35 \times (10 : 2) = (35 \times 10) : 2 = 350 : 2 = 175$$



- Multiplicar por 3

Basta con multiplicar el número por 2 y al resultado sumarle el número.

$$35 \times 3 = 35 \times (2 + 1) = (35 \times 2) + 35 = 70 + 35 = 105$$

Primero hago el doble de doble de 35

Y al resultado (70) le sumo 35, y da 105

- Multiplicar por 6

Basta con multiplicar el número por 3 y después por 2. En algunos casos es mejor multiplicar primero por 2 y después por 3.

$$35 \times 6 = 35 \times (2 \times 3) = (35 \times 2) \times 3 = 70 \times 3 = 210$$

Primero hago el doble de doble de 35

Y el resultado (70) le multiplico por 3, y da 210

- Multiplicar por 15

Basta con multiplicar el número por 10 y al resultado sumarle la mitad de éste.

$$35 \times 15 = 35 \times (10 + 5) = (35 \times 10) + (35 \times 5) = (35 \times 10) + (35 \times 10) : 2 = 350 + 175 = 525$$

Primero hago $35 \times 10 = 350$

Después hago la mitad de 35×10 que es 175

Finalmente, sumo 350 y 175, que es 525

ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL PARA DIVIDIR

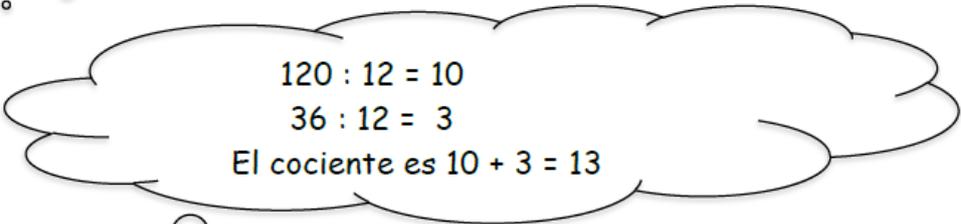
VAMOS A JUGAR CON LOS NÚMEROS PARA HACER DIVISIONES "DE CABEZA"

Descomponer el dividendo en sumandos que contengan el divisor

$$156 : 12 = (120 : 12) + (36 : 12) = 10 + 3 = 13$$

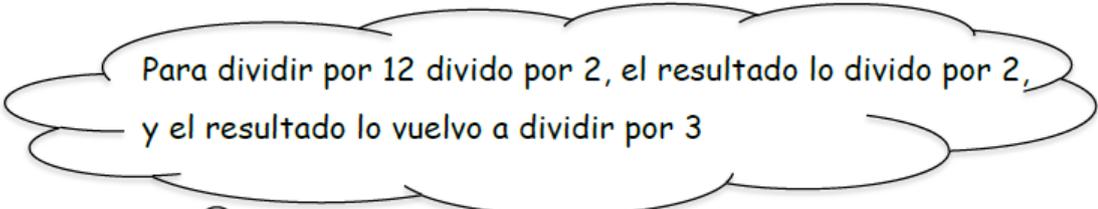


156 lo descompongo como $120 + 36$

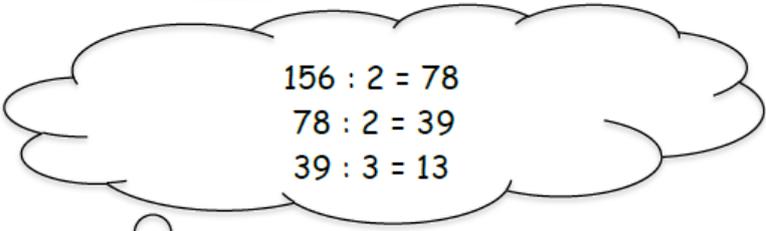

$$\begin{aligned} 120 : 12 &= 10 \\ 36 : 12 &= 3 \\ \text{El cociente es } 10 + 3 &= 13 \end{aligned}$$

Factorizar el divisor

$$156 : 12 = 156 : (2 \times 6) = (156 : 2) : 6 = 78 : 6 = (78 : 2) : 3 = 39 : 3 = 13$$



Para dividir por 12 divido por 2, el resultado lo divido por 2,
y el resultado lo vuelvo a dividir por 3


$$\begin{aligned} 156 : 2 &= 78 \\ 78 : 2 &= 39 \\ 39 : 3 &= 13 \end{aligned}$$

Compensar: multiplicar o dividir el dividendo y el divisor por un mismo número

$$156 : 12 = (156 : 2) : (12 : 2) = 78 : 6 = (78 : 2) : (6 : 2) = 39 : 3 = 13$$

Como el dividendo y el divisor son pares,
si divido ambos números por 2 no cambia el resultado

$$\begin{aligned} 156 : 2 &= 78 \\ 12 : 2 &= 6 \\ 156 : 12 &= 78 : 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 78 : 2 &= 39 \\ 6 : 2 &= 3 \\ 78 : 2 &= 39 : 3 = 13 \end{aligned}$$

- Otro ejemplo de compensación:

$$900 : 25 = (900 \times 4) : (25 \times 4) = 3600 : 100 = 36$$

Si multiplico 25 por 4 obtengo 100.
Voy a multiplicar dividendo y divisor por 4

$$\begin{aligned} 900 \times 4 &= 3600 \\ 25 \times 4 &= 100 \\ 900 : 25 &= 3600 : 100 = 36 \end{aligned}$$

Estrategias particulares:

- Dividir por 10, 100, ...

Para dividir por 10, 100, ... basta suprimir los ceros que están a la derecha del dividendo. Se suprimirán tantos como ceros tenga el divisor.

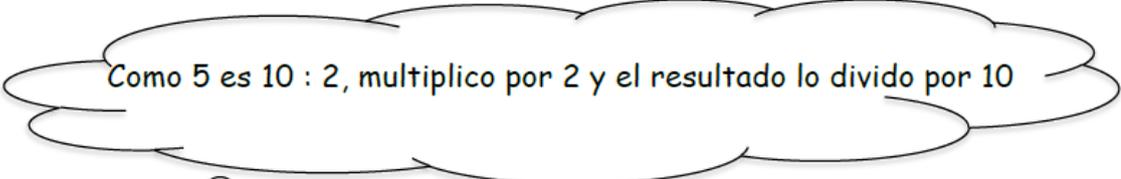
$$3600 : 10 = 360$$

$$3600 : 100 = 36$$

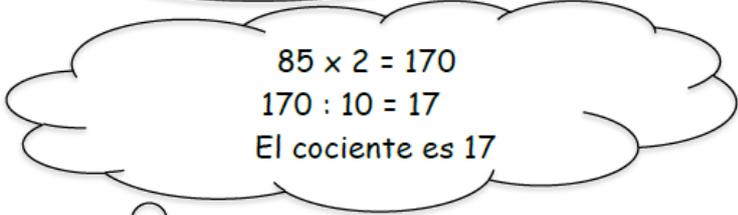
- Dividir por 5

Para dividir un número por 5 basta con multiplicar el número por 2 y después dividir el resultado por 10.

$$85 : 5 = 85 : (10 : 2) = (85 \times 2) : 10 = 170 : 10 = 17$$

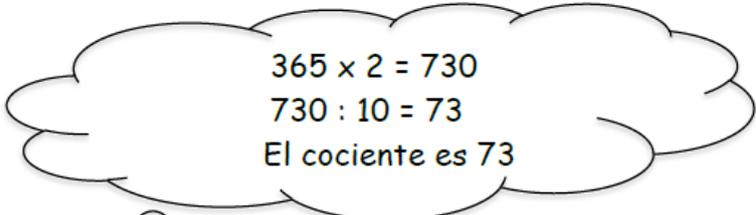


Como 5 es $10 : 2$, multiplico por 2 y el resultado lo divido por 10


$$\begin{aligned} 85 \times 2 &= 170 \\ 170 : 10 &= 17 \\ \text{El cociente es } &17 \end{aligned}$$

- Otro ejemplo de la estrategia de "dividir por 5"

$$365 : 5 = 365 : (10 : 2) = (365 \times 2) : 10 = 730 : 10 = 73$$


$$\begin{aligned} 365 \times 2 &= 730 \\ 730 : 10 &= 73 \\ \text{El cociente es } &73 \end{aligned}$$

ANEXO IV

Modelo Prueba Inicial y Final y recogida de datos de la prueba inicial.

PRUEBA INICIAL/FINAL DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **10 minutos** para realizar el cálculo de 15 operaciones de suma, resta, multiplicación o división de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

1) $19 + 34 + 11 =$

- He buscado completar decenas.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

He quitado los ceros finales.

He completado un sumando a la centena siguiente.

2) $250 + 150 =$

He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.

He pensado los números en vertical y he sumado.

3) $800 - 350 =$

He quitado los ceros finales.

He descompuesto el sustraendo como $300 + 50$.

He pensado los números en vertical y he restado.

4) $27 \times 5 =$

He multiplicado 27 por 10 y después he dividido por 2.

He descompuesto el multiplicando 27, como $20 + 7$.

He pensado los números en vertical y he multiplicado.

5) $110 : 5 =$

He dividido 110 por 10 y después he multiplicado por 2.

He descompuesto el dividendo 110 como $100 + 10$.

He multiplicado el dividendo y el divisor por 2.

He pensado en la división hecha con la caja.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 6) $40 + 50 + 3 + 60 =$ He buscado completar centenas.
 He pensado los números en vertical y he sumado.
- 7) $87 + 89 =$ He completado uno o los dos sumandos a la decena siguiente.
 He sumado 1 a 89 y restado 1 a 87.
 He pensado los números en vertical y he sumado.
- 8) $320 - 99 =$ He completado el sustraendo (99) a la centena siguiente.
 He sumado una unidad al minuendo y al sustraendo.
 He descompuesto el sustraendo como $90 + 9$.
 He pensado los números en vertical y he restado.
- 9) $34 \times 9 =$ He multiplicado por 10 y he restado una vez el multiplicando (34).
 He descompuesto el multiplicando 34 como $30 + 4$.
 He pensado los números en vertical y he multiplicado.
- 10) $128 : 8 =$ He dividido 128 tres veces consecutivas por 2.
 He descompuesto el dividendo (128) como $80 + 48$.
 He buscado un número que multiplicado por 8 de 128.
 He pensado en división hecha con la caja.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

11) $47 + 43 =$

- He descompuesto 47 como $40 + 7$, y 43 como $40 + 3$, y he sumado.
- He sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar un doble.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

12) $87 - 39 =$

- He completado el sustraendo (39) a la siguiente decena.
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He descompuesto el sustraendo como $30 + 9$.
- He pensado los números en vertical y he restado.

13) $60 \times 15 =$

- He multiplicado 60 por 10, el resultado lo he dividido por 2 y después he sumado.
- He dividido 60 entre 2 y he multiplicado 15 por 2
- He omitido el cero del multiplicando (60).
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

14) $25 \times 4 =$

- He multiplicado 25 por 2 y he dividido 4 entre 2.
- He multiplicado 25 por 2 y después he vuelto a multiplicar por 2.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

15) $180 : 12 =$

- He dividido el dividendo y el divisor por un mismo número (compensar).
- He descompuesto el dividendo 180 como $120 + 60$.
- He descompuesto en factores el divisor 12 como 6×2 .
- He buscado un número que multiplicado por 12 de 180.
- He pensado en la división hecha con la caja.

Recogida de datos de prueba inicial

	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	11	11E	12	12E	13	13E	14	14E	15	15E	Oper-	Correcta	Total	estrategi	Tiempo
A.1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	3	6	12'		
A.2	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	6	11	14'			
A.3	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	12	7	11'		
A.4	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	15'			
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	14	10	14'		
A.6	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	3	7	15'			
A.7	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	11	10	10'		
A.8	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	11	10	10'			
A.9	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	10	5	13'		
A.10	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	13	3	13'		
A.11	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	13	5	11'		
A.12	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	10	2	15'				
A.13	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	11	7	14'			
A.14	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	6	10	15'			
Porcentaje	100	57,1	100	57,1	50	57,1	85,7	28,6	85,7	42,9	78,6	42,9	71,4	71,4	50	71,4	64,3	28,6	78,6	35,7	92,9	50	14,3	64,3	21,4	7,1	92,9	28,6	42,9	28,6					

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

Recogida de datos de prueba final

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	11	11E	12	12E	13	13E	14	14E	15	15E	Op. Correctas	total Estrategias	Tiempo
A.1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	12	0	4'
A.2	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	11	9	6,5'
A.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	12	15	4,30'
A.4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	14	0	5,20'
A.5	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	13	15	7,08'
A.6	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	10	9	10'
A.7	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	15	7,45'
A.8	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	13	14	3,45'
A.9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	12	12	5'
A.10	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	13	0	6,08'
A.11	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	11	14	6,14'	
A.12	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	11	0	7,15'
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	9	15	9'	
A.14	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	6	0	7,24'	
Porcentaje	79	64	100	64	86	50	100	43	79	57	93	64	71	57	71	64	64	50	79	57	100	64	43	50	29	36	100	57	43	57			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del **uso de estrategias** en el cálculo de la operación

ANEXO V

Modelo ficha 1 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 1 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de sumas de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 1) $28 + 9 =$
- A 28 le sumo 10 y después quito una.
 - He sumado 1 al 9 y restado 1 al 28.
 - He pensado los números en vertical y he sumado.
- 2) $95 + 9 =$
- A 95 le sumo 10 y después quito una.
 - He sumado 1 al 9 y restado 1 al 95.
 - He pensado los números en vertical y he sumado.
- 3) $9 + 48 =$
- A 48 le sumo 10 y después quito una.
 - He sumado 1 al 9 y restado 1 al 48.
 - He pensado los números en vertical y he sumado.
- 4) $35 + 19 =$
- A 35 le sumo 20 y después quito una.
 - He sumado 1 al 19 y restado 1 al 35.
 - He pensado los números en vertical y he sumado.
- 5) $86 + 19 =$
- A 86 le sumo 20 y después quito una.
 - He sumado 1 al 19 y restado 1 al 86.
 - He pensado los números en vertical y he sumado.

6) $110 + 39 =$

A 110 le sumo 40 y después quito una.

He sumado 1 al 39 y restado 1 al 110.

He pensado los números en vertical y he sumado.

A 506 le sumo 50 y después quito una.

7) $506 + 49 =$

He sumado 1 al 49 y restado 1 al 505.

He pensado los números en vertical y he sumado.

8) $39 + 666 =$

A 666 le sumo 40 y después quito una.

He sumado 1 al 39 y restado 1 al 666.

He pensado los números en vertical y he sumado.

9) $456 + 99 =$

A 456 le sumo 100 y después quito una.

He sumado 1 al 99 y restado 1 al 456.

He pensado los números en vertical y he sumado.

10) $99 + 891 =$

A 891 le sumo 100 y después quito una.

He sumado 1 al 99 y restado 1 al 891.

He pensado los números en vertical y he sumado.

Recogida de datos ficha 1

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
Columna	C	C	Co	Co	Co	C	Co	Co	Co	Co	C	C	C	Co	C	C	Co	Co	C	C	Columna22	Columna23	Columna24
A.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	8	10	3'
A.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	2,45'
A.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9	10	3'
A.4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9	10	3,45'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	2,40'
A.6	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	7	10	4,30'
A.7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	1,40'
A.8	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	6	10	3,45'
A.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9	10	3,50'
A.10	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	6	8	2,30'
A.11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	1,30'
A.12	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	6	10	4,30'
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9	10	3,30'
Porcentaje	100	100	92,3	92,3	92,3	100	76,9	100	92,3	100	76,9	100	92,3	100	38,5	100	100	92,3	77	100			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO VI

Modelo ficha 2 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 2 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de suma y de resta de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

1) $99 + 54 =$

- He buscado completar 99 a la centena.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

2) $550 + 750 =$

- He quitado los ceros finales.
- He completado un sumando a la centena siguiente.
- He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

3) $76 + 74 =$

- He descompuesto 76 como $70+6$ y 74 como $70+4$
- He sumado 1 a 74 y restado 1 a 76.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

4) $59 + 61 =$

- He completado 59 a 60 y después resto 1.
- He sumado 1 a 59 y he restado 1 a 60
- He pensado los números en vertical y he sumado.

5) $87 + 83 =$

- He descompuesto 87 como $80 + 7$, y 83 como $80 + 3$, y he sumado.
- He sumado 2 a un sumando y he restado 2 al otro sumando para buscar un doble.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

6) $245 + 255 =$

- He descompuesto los sumando viendo que $45+55$ son 100, después he sumado 400
- He compensado añadiendo 5 a 245 y quitando 5 a 255.
- He pensado los números en vertical y he sumado

7) $900 + 250 =$

- He quitado los ceros finales.
- He completado 250 a la centena siguiente (300) y después he restado 50.
- He descompuesto 250 como $100 + 150$
- He pensado los números en vertical y he sumado.

8) $427 + 95 =$

- He completado 95 a la centena siguiente (100) y después he restado 5.
- A 427 le he quitado 5 y a 95 le sumado 5.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

9) $999 + 99 =$

- He completado 99 a la centena siguiente (100) y que quitado 1.
- He pensado los números en vertical y he sumado

10) $1750 + 350 =$

- He quitado los ceros finales.
- He descompuesto 350 como $250 + 100$.
- He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

Recogida de datos ficha 2

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
ALUMNO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total Op. Correcta	Total Estrategia	Tiempo
A.1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	8	8	6'
A.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	7,22'
A.3	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	9	6	6'
A.4	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	10	1	4,55'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	5,54'
A.6	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	x	x	x	x	1	1	5	8	8'
A-7	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	7	10	3,56'
A.8	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	10	6	3,19'
A.9	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	10	6	6,29'
A.10	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	9	1	6'
A.11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	9	9	4,19'
A.12	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	6	5	6,5'
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	6'
A.14	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	9	3	7,53'
Poercentaje	93	79	86	57	93	64	86	79	100	79	93	50	86	71	71	79	93	50	79	57,1			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del **uso de estrategias** en el cálculo de la operación

ANEXO VII

Modelo ficha 3 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 3 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de suma y de resta de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

1) $610 + 390 =$

- He quitado los ceros finales.
- He descompuesto 610 como $600 + 10$ y 390 como $300 + 90$
- He completado 390 a la centena 400.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

2) $269 + 141 =$

- He descompuesto 269 como $260 + 9$ y 141 como $140 + 1$
- He sumado 1 a 269 y restado 1 a 141
- He pensado los números en vertical y he sumado.

3) $199 + 176 =$

- He buscado completar 199 a la centena 200.
- He sumado 1 a 199 y restado 1 a 176.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

4) $345 + 355 =$

- He descompuesto los sumando viendo que $45 + 55$ son 100, después he sumado 600
- He compensado añadiendo 5 a 345 y quitando 5 a 355.
- He pensado los números en vertical y he restado.

5) $1850 + 250 =$

- He quitado los ceros finales.
- He descompuesto 1850 como $1800 + 50$ y 250 como $200 + 50$
- He sumado 50 a un sumando y he restado 50 al otro sumando.
- He descompuesto 250 como $150 + 100$
- He pensado los números en vertical y he sumado.

6) $556 + 95 =$

- He completado 95 a la centena siguiente (100) y después he restado 5.
- A 556 le he quitado 5 y a 95 le sumado 5.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

7) $251 + 129 =$

- He sumado 1 a 129 y restado 1 a 251.
- He descompuesto 251 como $250 + 1$ y 129 como $120 + 9$
- He pensado los números en vertical y he sumado.

8) $47 + 253 =$

- He cambiado el orden de los sumandos $253+47$.
- He buscado completar 47 a la decena 50.
- He sumado 3 a 47 y restado 3 a 253.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

9) $1250 + 450 =$

- He quitado los ceros finales.
- He descompuesto 1250 como $1200 + 50$ y 450 como $400 + 50$
- He sumado 50 a 450 y he restado 50 a 1250.
- He restado 50 a 450 y he sumado 50 a 1250.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

10) $399 + 56 =$

- He buscado completar 399 a la centena 400.
- He sumado 1 a 399 y restado 1 a 56.
- He pensado los números en vertical y he sumado.

Recogida de datos ficha 3

Columna1	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Columna22	Columna23	Columna2
ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	5	5	3,47'
A.2	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	8	10	6'
A.3	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	7	10	3,58'
A.4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	10	0	3,30'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	4,43'
A.6	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	x	x	1	1	x	x	x	x	x	5	5	6
A-7	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	6	10	3,30'
A.8	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	10	8	3,09'
A.9	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	9	4,15'
A.10	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	9	2	3,10'
A.11	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	9	7	4,43'
A.12	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	6	3	4,45'
A.13	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	7	10	4,12'
A.14	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	8	7	6'
Porcentaje	100	86	71	64	79	64	79	64	57	85,7	71	57,1	85,7	50	93	64,3	71	78,6	79	71			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO VIII

Modelo ficha 4 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 4 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de restas de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

1) $28 - 9 =$

- A 28 le resto 10 y después le sumo 1.
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado.

2) $38 - 9 =$

- A 38 le resto 10 y después le sumo 1
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

3) $103 - 9 =$

- A 103 le resto 10 y después le sumo 1.
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

4) $50 - 19 =$

- A 50 le resto 20 y después le sumo 1
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

5) $60 - 29 =$

- A 60 le resto 30 y después le sumo 1
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

6) $89 - 19 =$

- A 89 le resto 20 y después le sumo 1.
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

7) $111 - 29 =$

- A 111 le resto 30 y después le sumo 1.
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

8) $121 - 39 =$

- A 121 le resto 40 y después le sumo 1.
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

9) $225 - 49 =$

- A 225 le resto 50 y después le sumo 1.
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

10) $225 - 99 =$

- A 225 le resto 100 y después le sumo 1.
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

Recogida de datos ficha 4

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Columna	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Co	Columna22	Columna23	Columna2
ALUMNOS		1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	10	3,22'
A.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	7	10	3,55'
A.4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	4,48'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	3
A.6	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	4	10	4,58'
A-7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	8	10	3'
A.8	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	6	2,43'
A.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	9	10	4,50'
A.10	0	1	0	X	0	1	0	1	0	X	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	7	4,10'
A.11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	8	10	2,10'
A.12	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	4	10	4,20'
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	9	10	3'
A.14	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	10	3,35'
Porcentaje	77	100	77	92,3	61,5	100	77	92,3	85	92	54	92,3	46	100	46	92	46	100	46,2	92			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del **uso de estrategias** en el cálculo de la operación

ANEXO IX

Modelo ficha 5y recogida de datos de la prueba.

FICHA 5 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de restas de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

1) $94 - 39 =$

- A 94 le resto 40 y después le sumo 1.
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado.

2) $140 - 28 =$

- A 140 le resto 30 y después le sumo 2
- He sumado 2 al minuendo y 2 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

3) $655 - 195 =$

- A 655 le resto 200 y después le sumo 5.
- He sumado 5 al minuendo y 5 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

4) $270 - 99 =$

- A 270 le resto 100 y después le sumo 1.
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

5) $800 - 330 =$

- He omitido los ceros finales.
- He descompuesto el sustraendo como $300 + 30$.
- He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
- He pensado los números en vertical y he restado

- 6) $263 - 48 =$
- A 263 le resto 50 y después le sumo 2.
 - He sumado 2 al minuendo y 2 al sustraendo.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
 - He sumado 3 al minuendo y 3 al sustraendo.
- 7) $252 - 127 =$
- He restado 2 al minuendo y 2 al sustraendo
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
- 8) $80 - 41 =$
- He descompuesto el sustraendo (41) como 40 más 1.
 - He restado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
 - He omitido los ceros finales.
- 9) $1250 - 750 =$
- He descompuesto el sustraendo como 700 + 50.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
- 10) $412 - 99 =$
- A 412 le resto 100 y después le sumo 1.
 - He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado

Recogida de datos ficha 5

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	10	5,50'
A.2	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	6	9	7,3'
A.3	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	10	5,5
A.4	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	9	0	5,50'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	9	10	5,40'
A.6	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	4	5	7'
A.7	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	7	10	5,10'
A.8	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	8	9	4,40'
A.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	9	10	6'
A.10	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	2	8	7'
A.12	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	5	8	6,20'
A.14	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	7	10	5,50'
Porcentaje	58,3	83,3	66,7	75	66,7	75	67	83,3	25	66,7	66,7	83,3	58,3	58,3	58,3	75	25	58,3	66,7	83,3			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO X

Modelo ficha 6 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 6 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de restas de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 1) $84 - 39 =$
- A 84 le resto 40 y después le sumo 1.
 - He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado.
- 2) $100 - 28 =$
- A 100 le resto 30 y después le sumo 2
 - A 100 le resto 20 y después le resto 8
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
 - A 90 le resto 20 y después le sumo 1.
- 3) $90 - 19 =$
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
 - A 200 le resto 100 y después le sumo 1.
- 4) $200 - 99 =$
- He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
 - He omitido los ceros finales.
- 5) $500 - 210 =$
- He descompuesto el sustraendo como $200 + 10$.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado

- 6) $75 - 25 =$
- A 75 le resto 20 y después le resto 5
 - He sumado 5 al minuendo y 5 al sustraendo
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
- 7) $250 - 105 =$
- A 250 le resto 100 y después le resto 5
 - He restado 5 al minuendo y 5 al sustraendo
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
- 8) $110 - 41 =$
- A 110 le resto 40 y después le resto 1
 - He restado 1 al minuendo y 1 al sustraendo
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
- 9) $125 - 9 =$
- A 125 le resto 10 y después le sumo 1
 - He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
- 10) $400 - 99 =$
- A 400 le resto 100 y después le sumo 1
 - He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado

Recogida de datos ficha 6

Columna	blu	lun	lun	lun	lun	lun	lun	lun	lun	lun	lun	lun	lun	Columna22	Columna23	Columna24								
ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo	
A.1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	3	9	4,23'	
A.2	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	7	10	7,1	
A.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	4,25'	
A.4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	9	9	7	
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	10	4,10'	
A.6	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	7	3	5,15'	
A.7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	2,50'	
A.8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	10	7	3,2	
A.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	4,30'	
A.10	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	7	5	4,30'	
A.11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	10	2,30'	
A.12	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	5	5	7'	
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	10	6,20'	
A.14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	4,50'	
Porcentaje	85,7	92,9	64,3	85,7	85,7	92,9	92,9	92,9	71,4	78,6	57	71,4	78,6	64,3	71,4	78,6	64,3	64,3	92,9	78,6				

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO XI

Modelo ficha 7 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 7 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de sumas y restas de números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 1) $700 + 650 =$
- He quitado los ceros finales.
 - He completado 650 a la centena siguiente (700) y después he restado 50.
 - He descompuesto 650 como $600 + 50$
 - He pensado los números en vertical y he sumado.
- 2) $900 - 450 =$
- He quitado los ceros finales.
 - He descompuesto el sustraendo como $400 + 50$.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado.
- 3) $1880 + 1220 =$
- He quitado los ceros finales.
 - He descompuesto 1880 como $1800 + 80$ y 1220 como $1200 + 20$
 - He sumado 20 a 1880 y he completado a 1900 y le he restado 20 a 1220.
 - He pensado los números en vertical y he sumado.
- 4) $106 - 59 =$
- A 106 le resto 60 y después le sumo 1.
 - He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado
- 5) $87 + 399 =$
- He cambiado el orden de los sumandos $399 + 87$.
 - He buscado completar 399 a la centena 400.
 - He sumado 1 a 399 y restado 1 a 87.
 - He pensado los números en vertical y he sumado.

- 6) $111 - 39 =$
- A 111 le resto 40 y después le sumo 1.
 - He sumado 1 al minuendo y 1 al sustraendo.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado.
- 7) $324 - 122 =$
- He restado 2 al minuendo y 2 al sustraendo.
 - He descompuesto el sustraendo en $100 + 22$.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado.
- 8) $238 + 398 =$
- He completado 398 a la centena siguiente (400) y después he restado 2.
 - A 238 le he quitado 2 y a 398 le he sumado 2.
 - He pensado los números en vertical y he sumado.
- 9) $600 - 230 =$
- He omitido los ceros finales.
 - He descompuesto el sustraendo como $200 + 30$.
 - He añadido números desde el sustraendo hasta llegar al minuendo.
 - He pensado los números en vertical y he restado.
- 10) $369 + 241 =$
- He descompuesto 369 como $360 + 9$ y 241 como $240 + 1$.
 - He sumado 1 a 369 y restado 1 a 241.
 - He pensado los números en vertical y he sumado.

Recogida de datos ficha 7

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	9	4,55'
A.2	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	4	9	9'
A.3	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	7	10	6,45'
A.4	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	8	4	6,30'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	7	10	8,15'
A.6	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	5	9	8,25'
A-7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	7	10	6,45'
A.8	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	9	6	3,30'
A.9	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	8	8	5,35'
A.10	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	8	1	4,45'
A.11	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8	9	4,45'
A.12	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	6	1	6,45'
A.13	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	10	6,45'
A.14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6,45'
Porcentaje	78,57	64,3	57,1	85,7	71,4	57,14	57,1	71,43	71,4	78,6	50	64,3	71,4	71,4	50	71,4	50	64,3	64,3	57,1			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO XII

Modelo ficha 8 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 8 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 12 operaciones de multiplicar y dividir números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

1) $35 \times 2 =$

- He sumado al multiplicando (35) el multiplicando.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

2) $57 \times 2 =$

- He sumado al multiplicando (57) el multiplicando.
- He descompuesto el multiplicando como $50+7$
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

3) $79 \times 2 =$

- He sumado al multiplicando (79) el multiplicando.
- He descompuesto el multiplicando como $80 - 1$.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

4) $105 \times 2 =$

- He sumado al multiplicando (105) el multiplicando.
- He descompuesto el multiplicando como $100 + 5$.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

5) $99 \times 2 =$

- He sumado al multiplicando (99) el multiplicando.
- He descompuesto el multiplicando como $100 - 1$.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

6) $998 \times 2 =$

- He sumado al multiplicando (998) el multiplicando.
- He descompuesto el multiplicando como $1000 - 2$.
- He pensado los números en vertical y he multiplicado.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 7) $68 : 2 =$ He descompuesto el dividendo (68) como $60 + 8$.
 He pensado en la división hecha con la caja.
- 8) $84 : 2 =$ He descompuesto el dividendo (84) como $80 + 4$.
 He pensado en la división hecha con la caja.
- 9) $106 : 2 =$ He descompuesto el dividendo (106) como $100 + 6$.
 He pensado en la división hecha con la caja.
- 10) $52 : 2 =$ He descompuesto el dividendo (52) como $40 + 12$.
 He descompuesto el dividendo (52) como $50 + 2$.
 He pensado en la división hecha con la caja.
- 11) $98 : 2 =$ He descompuesto el dividendo (98) como $80 + 18$.
 He descompuesto el dividendo (98) como $100 - 2$.
 He pensado en la división hecha con la caja.
- 12) $190 : 2 =$ He descompuesto el dividendo (190) como $180 + 10$.
 He descompuesto el dividendo (190) como $200 - 10$.
 He pensado en la división hecha con la caja.

Recogida de datos ficha 8

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	11	11E	12	12E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	11	8	2,30'
A.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	12	4,30'
A.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	12	3,25'
A.4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	0	4,15'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	12	6'
A.6	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	10	10	4,50'
A.7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	9	12	2,15'
A.8	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	10	2,30'
A.9	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	7	6	4,30'
A.10	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	0	2,50'
A.11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	12	4,30'
A.12	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	0	3,40'
A.13	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	12	4,20'
A.14	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	9	0	6'
Porcentaje	100	57	92,9	71,4	93	57,1	92,9	64,3	86	64	78,6	64	100	64,3	100	64,3	92,9	64,3	78,6	64,3	85,7	64,3	78,6	64,3			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO XIII

Modelo ficha 9 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 9 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 12 operaciones de multiplicar y dividir números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 1) $15 \times 3 =$ He multiplicado (15) por 2 y después he sumado 15
 He descompuesto el multiplicando como 10+5
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 2) $26 \times 3 =$ He multiplicado (26) por 2 y después he sumado 26
 He descompuesto el multiplicando como 20+6
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 3) $39 \times 3 =$ He multiplicado (39) por 2 y después he sumado 39
 He descompuesto el multiplicando como 40 - 1
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 4) $36 : 3 =$ He descompuesto el dividendo 36 como 30 + 6.
 He pensado en la división hecha con la caja
- 5) $42 : 3 =$ He descompuesto el dividendo 42 como 30+12
 He pensado en la división hecha con la caja
- 6) $84 : 3 =$ He descompuesto el dividendo 84 como 60 + 24
 He pensado en la división hecha con la caja
- 7) $25 \times 4 =$ He descompuesto el multiplicando (25) como 20 + 5
 He multiplicado (25) por 2 y el resultado lo he multiplicado por 2
 He pensado los números en vertical y he multiplicado

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 8) $53 \times 4 =$
- He descompuesto el multiplicando (53) como $50 + 3$
 - He multiplicado (53) por 2 y el resultado lo he multiplicado por 2
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 9) $59 \times 4 =$
- He descompuesto el multiplicando (59) como $60 - 1$
 - He multiplicado (59) por 2 y el resultado después lo he multiplicado por 2
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 10) $56 : 4 =$
- He descompuesto el dividendo (56) como $40 + 16$
 - He dividido (56) entre 2 y el resultado después lo he dividido entre 2
 - He pensado en la división hecha con la caja.
- 11) $92 : 4 =$
- He descompuesto el dividendo (92) como $80 + 12$
 - He dividido (92) entre 2 y el resultado después lo he dividido entre 2
 - He pensado en la división hecha con la caja.
- 12) $500 : 4 =$
- He descompuesto el dividendo (500) como $400 + 100$
 - He dividido (500) entre 2 y el resultado después lo he dividido entre 2
 - He pensado en la división hecha con la caja.

Recogida de datos ficha 9

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	11	11E	12	12E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	11	3'
A.2	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	9	12	7,20'
A.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	11	12	4'
A.4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	11	0	7,20'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	11	12	9,20'
A.6	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	7	9	6'
A.7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	10	7	4'
A.8	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	12	7	2,50'
A.9	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	11	4	10'
A.10	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	11	0	4,55'
A.12	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	8	0	7,20'
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	12	5,20'
Porcentaje	100	75	91,7	58,3	91,7	50	100	66,7	67	50	91,7	50	83,3	66,7	91,7	75	75	41,7	75	66,7	83,3	50	75	66,7			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO XIV

Modelo ficha 10 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 10 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 12 operaciones de multiplicar y dividir números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 1) $18 \times 5 =$ He multiplicado por 10 y el resultado lo he dividido entre 2
 He descompuesto el multiplicando (18) como 10+8
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 2) $21 \times 5 =$ He multiplicado por 10 y el resultado lo he dividido entre 2
 He descompuesto el multiplicando (21) como 20+1
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 3) $25 \times 5 =$ He multiplicado por 10 y el resultado lo he dividido entre 2
 He descompuesto el multiplicando (25) como 20+5
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 4) $28 \times 5 =$ He multiplicado por 10 y el resultado lo he dividido entre 2
 He descompuesto el multiplicando (28) como 20+8
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 5) $31 \times 5 =$ He multiplicado por 10 y el resultado lo he dividido entre 2
 He descompuesto el multiplicando (31) como 30+1
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 6) $42 \times 5 =$ He multiplicado por 10 y el resultado lo he dividido entre 2
 He descompuesto el multiplicando (42) como 40+2
 He pensado los números en vertical y he multiplicado

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 7) $60 : 5 =$ He multiplicado el dividendo por 2 y el resultado lo he dividido entre 10
 He descompuesto 60 como $50 + 10$
 He pensado en la división hecha con la caja
- 8) $70 : 5 =$ He multiplicado el dividendo por 2 y el resultado lo he dividido entre 10
 He descompuesto 70 como $50 + 20$
 He pensado en la división hecha con la caja
- 9) $85 : 5 =$ He multiplicado el dividendo por 2 y el resultado lo he dividido entre 10
 He descompuesto 85 como $50 + 35$
 He pensado en la división hecha con la caja
- 10) $125 : 5 =$ He multiplicado el dividendo por 2 y el resultado lo he dividido entre 10
 He descompuesto 125 como $100 + 25$
 He pensado en la división hecha con la caja
- 11) $150 : 5 =$ He multiplicado el dividendo por 2 y el resultado lo he dividido entre 10
 He descompuesto 150 como $100 + 50$
 He pensado en la división hecha con la caja
- 12) $175 : 5 =$ He multiplicado el dividendo por 2 y el resultado lo he dividido entre 10
 He descompuesto 175 como $200 - 25$
 He pensado en la división hecha con la caja

Recogida de datos ficha 10

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	11	11E	12	12E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	4	2,40'
A.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	12	3,30'
A.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	11	12	3,17'
A.4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	0	4,17'
A.5	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	10	12	4,50'
A.6	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	6	6	5,15'
A.7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	12	2,50'
A.8	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	12	9	2,40'
A.9	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	12	6	4,50'
A.10	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	0	2,40'
A.11	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	12	8	5,50'
A.12	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	11	0	3,45'
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	12	5,35'
A.14	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	9	0	5,50'
Porcentaje	93	57	100	50	100	57,1	100	42,9	100	64,3	100	50	85,7	64,3	92,9	57,1	92,9	50	78,6	64,3	85,7	57,1	78,6	50			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO XV

Modelo ficha 11 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 11 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 12 operaciones de multiplicar números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

1) $12 \times 9 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 12
- He descompuesto el multiplicando (12) como 10+2
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

2) $15 \times 9 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 15
- He descompuesto el multiplicando (15) como 10+5
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

3) $18 \times 9 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 18
- He descompuesto el multiplicando (18) como 10+8
- He descompuesto el multiplicando (18) como 20 - 2
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

4) $19 \times 9 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 19
- He descompuesto el multiplicando (19) como 10+9
- He descompuesto el multiplicando (19) como 20 - 1
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

5) $21 \times 9 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 21
- He descompuesto el multiplicando (21) como 20+1
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

6) $25 \times 9 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 25
- He descompuesto el multiplicando (25) como 20+5
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

7) $30 \times 9 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 30
- He multiplicado 3×9 y he añadido un cero a la derecha
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

8) $35 \times 9 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 35
- He descompuesto el multiplicando (35) como $30+5$
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

9) $15 \times 8 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 30
- He descompuesto el multiplicando (15) como $10+5$
- He multiplicado por 2 y el resultado lo he multiplicado de nuevo por 2 y el resultado lo he vuelto a multiplicar por 2
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

10) $18 \times 8 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 36
- He descompuesto el multiplicando (18) como $20 - 2$
- He multiplicado por 2 y el resultado lo he multiplicado de nuevo por 2 y el resultado lo he vuelto a multiplicar por 2
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

11) $25 \times 8 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 50
- He descompuesto el multiplicando (25) como $20+5$
- He multiplicado por 2 y el resultado lo he multiplicado de nuevo por 2 y el resultado lo he vuelto a multiplicar por 2
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

12) $29 \times 8 =$

- He multiplicado por 10 y al resultado le he restado 58
- He descompuesto el multiplicando (29) como $30 - 1$
- He multiplicado por 2 y el resultado lo he multiplicado de nuevo por 2 y el resultado lo he vuelto a multiplicar por 2
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

Recogida de datos ficha 11

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	11	11E	12	12E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	10	1	3,17'
A.2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	11	0	6'
A.3	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	8	12	5'
A.4	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	11	0	6,30'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	12	10'
A.6	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	12	8	5,40'
A.7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	11	12	3,50'
A.8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	11	11	11'
A.9	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	5	11	4,45'
A.10	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	9	0	5,40'
A.11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	11	10	7,28'
A.12	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	11	0	6,20'
A.13	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	12	7,50'
A.14	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	0	10'
Porcentaje	100	50	93	50	92,9	57,1	57	57	100	50	85,7	57	100	50	92,9	50	85,7	64,3	64,3	64,3	85,7	50	71,4	42,9			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO XVI

Modelo ficha 12 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 12 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 12 operaciones de multiplicar números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 1) $15 \times 6 =$ He multiplicado 15 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3
- He multiplicado 15 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (15)
- He descompuesto el multiplicando (15) como 10+5
- He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 2) $19 \times 6 =$ He multiplicado 19 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3
- He multiplicado 19 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (19)
- He descompuesto el multiplicando (19) como 20-1
- He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 3) $25 \times 6 =$ He multiplicado 25 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3
- He multiplicado 25 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (25)
- He descompuesto el multiplicando (25) como 20+5
- He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 4) $28 \times 6 =$ He multiplicado 28 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3
- He multiplicado 28 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (28)
- He descompuesto el multiplicando (28) como 30-2
- He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 5) $50 \times 6 =$ He multiplicado 50 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3
- He multiplicado 50 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (50)
- He multiplicado 5 x 6 y he añadido un 0
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 6) $45 \times 3 =$ He multiplicado 45 por 2 y al resultado le he sumado el multiplicando (45)
 He descompuesto el multiplicando (45) como 40+5
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 7) $45 \times 6 =$ He multiplicado 45 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3
 He multiplicado 45 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (45)
 He descompuesto el multiplicando (45) como 40+5
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 8) $45 \times 8 =$ He multiplicado 45 por 10 y al resultado le he restado 90
 He descompuesto el multiplicando (45) como 40+5
 He multiplicado 45 por 2, y el resultado lo he multiplicado de nuevo por 2 y el resultado lo he vuelto a multiplicar por 2
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 9) $45 \times 9 =$ He multiplicado 45 por 10 y al resultado le he restado el multiplicando (45)
 He descompuesto el multiplicando (45) como 40+5
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 10) $49 \times 4 =$ He multiplicado 49 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 2
 He descompuesto el multiplicando (49) como 40+9
 He descompuesto el multiplicando (49) como 50-1
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 11) $49 \times 6 =$ He multiplicado 49 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3
 He multiplicado 49 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (49)
 He descompuesto el multiplicando (49) como 50-1
 He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 12) $99 \times 6 =$ He multiplicado 99 por 2 y el resultado lo he multiplicado por 3
 He multiplicado 99 por 5 y al resultado le he sumado el multiplicando (99)
 He descompuesto el multiplicando (99) como 100-1
 He pensado los números en vertical y he multiplicado

Recogida de datos ficha 12

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	11	11E	12	12E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	0	2,10'
A.2	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	0	3,25'
A.3	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	11	11	3,10'
A.4	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	0	3,40'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	9	12	7,15'
A.6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	11	12	3,50'
A.7	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	8	11	3,30'
A.8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	11	8	2'
A.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	5	4'
A.10	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	0	2,30'
A.11	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	12	9	5,15'
A.12	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	10	0	3,50'
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12	12	6,45'
A.14	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	12	0	5,40'
Porcentaje	100	57,1	86	57,1	100	50	86	57,1	100	50	100	50	92,9	42,9	85,7	42,9	92,9	35,7	100	42,9	78,6	50	92,9	28,6			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO XVII

Modelo ficha 13 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 13 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 12 operaciones de multiplicar números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 1) $12 \times 15 =$
- He multiplicado 12 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 12×10
 - He descompuesto el multiplicando (12) como $10+2$
 - He compensado, he dividido 12 entre 2 y he multiplicado 15 por 2
 - He descompuesto en factores 12 y 15 buscando multiplicaciones 2×5
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 2) $14 \times 15 =$
- He multiplicado 14 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 14×10
 - He descompuesto el multiplicando (14) como $10+4$
 - He compensado, he dividido 14 entre 2 y he multiplicado 15 por 2
 - He descompuesto en factores 12 y 15 buscando multiplicaciones 2×5
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 3) $16 \times 15 =$
- He multiplicado 16 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 16×10
 - He descompuesto el multiplicando (16) como $10+6$
 - He compensado, he dividido 16 entre 2 y he multiplicado 15 por 2
 - He descompuesto en factores 16 y 15 buscando multiplicaciones 2×5
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 4) $18 \times 15 =$
- He multiplicado 18 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 18×10
 - He descompuesto el multiplicando (18) como $10+8$
 - He compensado, he dividido 18 entre 2 y he multiplicado 15 por 2
 - He descompuesto en factores 18 y 15 buscando multiplicaciones 2×5
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 5) $20 \times 15 =$
- He multiplicado 2 por 15 y añadido un 0 a la derecha del resultado
 - He descompuesto el multiplicando (15) como $10+5$
 - He compensado, he dividido 18 entre 2 y he multiplicado 15 por 2
 - He descompuesto en factores 20 y 15 buscando multiplicaciones 2×5
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo

- 6) $20 \times 25 =$
- He multiplicado 2 por 25 y añadido un 0 a la derecha del resultado
 - He descompuesto el multiplicador (25) como 20+5
 - He compensado, he dividido 20 entre 2 y he multiplicado 25 por 2
 - He descompuesto en factores 20 y 25 buscando multiplicaciones 2 x 5
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 7) $15 \times 25 =$
- He pensado en 25×15 , he multiplicado 25 por 10 y al resultado le sumo la mitad de 25×10
 - He pensado en 25×15 , y he descompuesto el multiplicando (25) como 20+5
 - He compensado, he dividido 15 entre 5 y he multiplicado 25 por 5
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 8) $25 \times 25 =$
- He descompuesto el multiplicando (25) como 20+5
 - He compensado, he dividido 25 entre 5 y he multiplicado 25 por 5
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 9) $15 \times 15 =$
- He multiplicado 15 por 10 y al resultado le sumo la mitad de 15×10
 - He descompuesto el multiplicando (15) como 10+5
 - He compensado, he dividido 15 entre 5 y he multiplicado 15 por 5
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 10) $25 \times 24 =$
- He descompuesto el multiplicando (25) como 20+5
 - He descompuesto el multiplicador (24) como 20+4
 - He compensado, he multiplicado 25 por y he dividido 24 entre 4
 - He descompuesto en factores 25 y 24 buscando multiplicaciones 2x5
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado

Recogida de datos ficha 13

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	7,20'
A.2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2	1	7,50'
A.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	9	10	11,40'
A.4	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	15'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	8,40'
A.6	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	2	8	15'
A-7	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	2	9	6'
A.8	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	9	9	6'
A.9	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4	1	12'
A.10	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	6'
A.11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	9	4	14,30'
A.12	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	6	0	14'
A.13	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	10	7,30'
A.14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	6,30'
Porcentaje	100	50	50	50	35,7	50	42,9	50	42,86	35,71	50	42,9	42,9	42,9	21,4	28,6	28,6	42,9	28,6	42,9			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO XVIII

Modelo ficha 14 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 14 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 12 operaciones de multiplicar números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo

1) $24 \times 15 =$

- He multiplicado 24 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 24×10
- He descompuesto el multiplicando (24) como $20+4$
- He compensado, he dividido 24 entre 2 y he multiplicado 15 por 2
- He descompuesto en factores 25 y 24 buscando multiplicaciones 2×5
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

2) $28 \times 15 =$

- He multiplicado 28 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 28×10
- He descompuesto el multiplicando (28) como $30 - 2$
- He compensado, he dividido 28 entre 2 y he multiplicado 15 por 2
- He descompuesto en factores 28 y 15 buscando multiplicaciones 2×5
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

3) $35 \times 15 =$

- He multiplicado 35 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 35×10
- He descompuesto el multiplicando (35) como $30+5$
- He compensado, he multiplicado 35 por 5 y he dividido 15 entre 5
- He pensado los números en vertical y he multiplicado
- He multiplicado 15 por 5 y añadido un 0 a la derecha del resultado

4) $50 \times 15 =$

- He multiplicado 50 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 50×10
- He compensado, he dividido 50 entre 5 y he multiplicado 15 por 5
- He descompuesto en factores 50 y 15 buscando multiplicaciones 2×5
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

5) $48 \times 15 =$

- He multiplicado 48 por 10 y al resultado le he sumado la mitad de 48×10
- He descompuesto el multiplicando (48) como $50-2$
- He compensado, he dividido 48 entre 2 y he multiplicado 15 por 2
- He descompuesto en factores 48 y 15 buscando multiplicaciones 2×5
- He pensado los números en vertical y he multiplicado

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo

- 6) $15 \times 12 =$
- He descompuesto el multiplicador (12) como $10 + 2$
 - He compensado, he dividido 12 entre 2 y he multiplicado 15 por 2
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 7) $16 \times 14 =$
- He descompuesto el multiplicando (16) como $10 + 6$
 - He descompuesto el multiplicador (14) como $10 + 4$
 - He compensado, he dividido 16 entre 2 y he multiplicado 14 por 2
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 8) $21 \times 19 =$
- He descompuesto el multiplicando (21) como $20 + 1$
 - He descompuesto el multiplicador (19) como $20 - 1$
 - He descompuesto en factores 21 buscando una multiplicación más sencilla
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 9) $22 \times 18 =$
- He descompuesto el multiplicando (22) como $20 + 2$
 - He descompuesto el multiplicando (18) como $20 - 2$
 - He compensado, he dividido 22 entre 2 y he multiplicado 18 por 2
 - He descompuesto en factores 22 y 18 buscando una multiplicación más sencilla
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado
- 10) $24 \times 16 =$
- He descompuesto el multiplicando (24) como $20 + 4$
 - He descompuesto el multiplicando (16) como $10 + 6$
 - He compensado, he multiplicado 24 por 4 y he dividido 16 entre 4
 - He descompuesto en factores 24 como 3×8 , buscando una multiplicación más sencilla
 - He pensado los números en vertical y he multiplicado

Recogida de datos ficha 14

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8,50'
A.2	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	7	0	9,20'
A.3	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	10	11,50'
A.4	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	13'
A.5	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	6	10	7,50'
A.6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	7	10	10,50'
A-7	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	3	10	13'
A.8	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	3	9	13'
A.9	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	3	13'
A.10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	9,30'
A.11	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	4	8	13'
A.12	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	2	8	10,34'
A.13	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	7	10	7,45'
Porcentaje	46,2	69,2	53,8	61,5	15,4	69,23	53,8	61,5	61,5	46,2	76,9	61,5	30,8	61,5	38,5	53,8	23,1	53,8	30,77	46,2			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO XIX

Modelo ficha 15 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 15 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de dividir números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo

- 1) $84 : 6 =$ He descompuesto el dividendo 84 como 60+24
 He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 3
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja
- 2) $96 : 8 =$ He descompuesto el dividendo 96 como 80+16
 He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja
- 3) $128 : 8 =$ He descompuesto el dividendo 128 como 80+48
 He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja
- 4) $135 : 9 =$ He descompuesto el dividendo 135 como 90+45
 He dividido entre 3 y el resultado lo he dividido entre 3
 He dividido el dividendo y divisor entre 3
 He pensado en la división hecha con la caja
- 5) $156 : 12 =$ He descompuesto el dividendo 156 como 120+36
 He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2 y lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 3
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 6) $168 : 14 =$ He descompuesto el dividendo 168 como 140+28
 He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 7
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja
- 7) $180 : 12 =$ He descompuesto el dividendo 180 como 120+60
 He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2 y lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 3
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja
- 8) $192 : 16 =$ He descompuesto el dividendo 192 como 160+32
 He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 2, lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 2, y he vuelto a dividir entre 2
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja
- 9) $182 : 14 =$ He descompuesto el dividendo 182 como 140+42
 He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 7
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja
- 10) $208 : 16 =$ He descompuesto el dividendo 208 como 160+48
 He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 2, lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 2, y he vuelto a dividir entre 2
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja

Recogida de datos ficha 15

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.2	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	3	10	6,30'
A.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	7,10'
A.4	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	9	0	7,20'
A.5	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	10	2,50'
A.6	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	4	10	7,20'
A.7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	9	10	4,5'
A.8	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	8	8	5,30'
A.9	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	6	8	7,13'
A.10	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	5	0	6,40'
A.11	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9	8	7,15'
A.12	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	8	0	7,20'
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	4'
A.14	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	7,10'
Porcentaje	100	53,8	100	69,2	61,5	69,23	92,3	69,2	46,2	53,85	53,8	61,54	53,8	69,2	76,92	69,2	53,85	69,2	76,92	61,5			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del **uso de estrategias** en el cálculo de la operación

ANEXO XX

Modelo ficha 16 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 16 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **5 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de dividir números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 1) $78 : 6 =$ He descompuesto el dividendo 78 como 60+18
 He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 3
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja
- 2) $104 : 8 =$ He descompuesto el dividendo 104 como 80+24
 He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja
- 3) $153 : 9 =$ He descompuesto el dividendo 153 como 90+63
 He dividido entre 3 y el resultado lo he dividido entre 3
 He dividido el dividendo y divisor entre 3
 He pensado en la división hecha con la caja
- 4) $144 : 12 =$ He descompuesto el dividendo 144 como 120+24
 He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2 y lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 3
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja
- 5) $182 : 14 =$ He descompuesto el dividendo 224 como 140+42
 He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 7
 He dividido el dividendo y divisor entre 2
 He pensado en la división hecha con la caja

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 6) $192 : 16 =$
- He descompuesto el dividendo 192 como $160+32$
 - He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 2, lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 2, y he vuelto a dividir entre 2
 - He dividido el dividendo y divisor entre 2
 - He pensado en la división hecha con la caja
- 7) $216 : 18 =$
- He descompuesto el dividendo 216 como $180+36$
 - He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 3 y lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 3
 - He dividido el dividendo y divisor entre 2
 - He pensado en la división hecha con la caja
- 8) $168 : 12 =$
- He descompuesto el dividendo 168 como $120+48$
 - He dividido entre 2 y el resultado lo he vuelto a dividir entre 2 y lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 3
 - He dividido el dividendo y divisor entre 2
 - He pensado en la división hecha con la caja
- 9) $196 : 14 =$
- He descompuesto el dividendo 196 como $140+56$
 - He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 7
 - He dividido el dividendo y divisor entre 2
 - He pensado en la división hecha con la caja
- 10) $176 : 16 =$
- He descompuesto el dividendo 176 como $160+16$
 - He dividido entre 2 y el resultado lo he dividido entre 2, lo que me ha dado lo he vuelto a dividir entre 2, y he vuelto a dividir entre 2
 - He dividido el dividendo y divisor entre 2
 - He pensado en la división hecha con la caja

Recogida de datos ficha 16

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	9	0	4,40'
A.2	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	8	10	4,20'
A.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9	10	5,45'
A.4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	3,10'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	2,15'
A.6	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	7	8	5'
A.7	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	6	10	3,20'
A.8	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	6	9	3,20'
A.9	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	7	10	4,40'
A.10	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	5	0	5'
A.11	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	9	3,20'
A.12	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	10	2	2,25'
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	8	10	3,15'
Porcentaje	100	61,5	100	76,9	100	76,92	84,6	76,9	38,5	84,6	69,2	76,9	100	76,9	76,9	84,6	46,2	69,2	92,3	69,2			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del uso de estrategias en el cálculo de la operación

ANEXO XXI

Modelo ficha 17 y recogida de datos de la prueba.

FICHA 17 DE CÁLCULO MENTAL

Nombre y apellidos: _____

Curso y grupo: _____

Fecha de realización de la prueba: _____

INDICACIONES PARA REALIZAR LA PRUEBA:

- Cuando la profesora te indique darás la vuelta a esta hoja y dispondrás de **10 minutos** para realizar el cálculo de 10 operaciones de multiplicar números naturales.
- Se trata de **hacer los cálculos “con la cabeza”** sin utilizar lápiz y papel, ni tampoco calculadoras u otros dispositivos de cálculo que no sea vuestro pensamiento. Únicamente utilizarás el lápiz para **escribir en el recuadro el resultado de la operación.**
- También utilizarás el lápiz para **marcar con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.** Si has utilizado otra estrategia diferente a las que aparecen en la prueba explica tu estrategia escribiéndola debajo de la operación.

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo

- 1) $120 : 5 =$
- He dividido 120 entre 10 y después he multiplicado entre 2
 - He descompuesto el dividendo 120 como $100 + 20$
 - He multiplicado el dividendo y el divisor por 2
 - He pensado en la división hecha con la caja
- 2) $136 : 8 =$
- He dividido 136 tres veces consecutivas entre 2
 - He descompuesto el dividendo (136) como $80 + 56$
 - He dividido el dividendo (136) y divisor (8) entre 2
 - He pensado en la división hecha con la caja
- 3) $144 : 6 =$
- He dividido el dividendo (144) entre 2, y después he dividido el resultado entre 3
 - He descompuesto el dividendo 144 como $120 + 24$
 - He dividido el dividendo (144) y divisor (6) entre 2
 - He pensado en la división hecha con la caja.
- 4) $225 : 9 =$
- He dividido el dividendo (225) entre 3, y después he dividido el resultado entre 3
 - He descompuesto el dividendo 225 como $180 + 45$
 - He pensado en la división hecha con la caja
- 5) $600 : 12 =$
- He dividido el dividendo (600) entre 3, y después he dividido el resultado entre 4
 - He dividido el dividendo (600) y divisor (12) entre 6
 - He pensado en la división hecha con la caja

Marca con una cruz la estrategia que has utilizado para hacer el cálculo.

- 6) $600 : 25 =$
- He dividido el dividendo (600) entre 5, y después he dividido el resultado entre 5
 - He descompuesto el dividendo 600 como 500 + 100
 - He multiplicado el dividendo y el divisor por 4
 - He pensado en la división hecha con la caja
- 7) $375 : 15 =$
- He dividido primero entre 5, y después he dividido el resultado entre 3
 - He multiplicado el dividendo y el divisor por 2
 - He descompuesto el dividendo 375 como 300 + 75
 - He pensado en la división hecha con la caja
- 8) $276 : 12 =$
- He dividido el dividendo (276) entre 2, y después he dividido el resultado entre 2, y después entre 3
 - He descompuesto el dividendo 276 como 240 + 36.
 - He pensado en la división hecha con la caja
- 9) $500 : 25 =$
- He dividido primero entre 5, y después he dividido el resultado entre 5
 - He descompuesto el dividendo como 250 + 250
 - He multiplicado el dividendo y el divisor por 4
 - He pensado en la división hecha con la caja
- 10) $270 : 18 =$
- He dividido primero entre 9, y después he dividido el resultado entre 2
 - He descompuesto el dividendo (270) como 180 + 90
 - He pensado en división hecha con la caja

Recogida de datos ficha 17

ALUMNOS	1	1E	2	2E	3	3E	4	4E	5	5E	6	6E	7	7E	8	8E	9	9E	10	10E	Total Op. Correctas	Total Estrategias	Tiempo
A.1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	7	1	4,50'
A.2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	6	6	10,30'
A.3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	7	10	4,26'
A.4	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	10	6	7,50'
A.5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	10	5,50'
A.6	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5	5	10,30'
A.8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	7	10	5,15'
A.9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	6	8	4,52'
A.10	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	7	0	5,50'
A.11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	10	8	7,35'
A.12	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	8	0	6,20'
A.13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	7	6	10,20'
Porcentaje	100	67	100	83,3	100	75	91,7	75	83	41,7	58,3	75	41,7	41,7	58,3	50	83,3	33,3	33,3	41,7			

Operaciones (números naturales):

- 1 operación bien resuelta
- 0 operación mal resuelta

Estrategias (números naturales acompañadas de letras):

- 1 utiliza estrategia para realizar el cálculo
- 0 piensa en el algoritmo escrito para realizar el cálculo

Porcentaje general de aciertos en las operaciones

Porcentaje general del **uso de estrategias** en el cálculo de la operación