

GRADO EN FÍSICA
TRABAJO DE FIN DE GRADO

Entrelazamiento en sistemas cuánticos extendidos

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA

Director: Fernando Falceto Blecua

Alumno: Juan Peiró Esteban

Índice

1. Introducción y justificación	1
1.1. Localidad y entrelazamiento	1
1.2. Estados entrelazados y no entrelazados	1
1.3. Justificación	3
2. Cadena de fermiones	4
2.1. Posiciones de los fermiones. Modos de Fourier	4
2.2. Matriz de correlación	6
3. Entropía de entrelazamiento y teorías críticas	8
3.1. Saturación en teorías no críticas	8
3.2. Relación de dispersión	9
3.3. Dependencia de la entropía en teorías críticas	11
3.4. Carácter crítico como discontinuidad en las matrices \mathcal{G}_k	12
4. Quench	13
4.1. Evolución temporal de la cadena de fermiones	14
4.2. Entropía a lo largo del tiempo	15
5. Conclusiones	24
6. Bibliografía	25

1. Introducción y justificación

1.1. Localidad y entrelazamiento

La localidad es un concepto básico de la relatividad de Einstein: si dos partes de un sistema físico se encuentran lo suficientemente alejadas, realizar una acción sobre una de ellas no afecta a la otra hasta que ha transcurrido un determinado lapso de tiempo. En 1935, Einstein, Podolski y Rose escribieron un artículo^[1] en el que concluyeron que la descripción de la realidad que brinda la Mecánica Cuántica viola este concepto de localidad, desarrollando la interpretación de la teoría de variables ocultas para suplir esa carencia. En una reflexión sobre este artículo^[2], Schrödinger introduce la idea de entrelazamiento como causa del incumplimiento de esta noción de localidad. Esto implica que en Mecánica Cuántica el perfecto conocimiento del total de un sistema no implica necesariamente el total conocimiento de sus partes, siendo una de las características fundamentales de la Física Cuántica, alejando sus bases de partida de la Física Clásica. En 1964, Bell escribió un artículo^[3] introduciendo unas desigualdades que la teoría de variables ocultas de Einstein, Podolski y Rose deben satisfacer obligatoriamente, mientras que pueden ser violadas si aceptamos los postulados de la mecánica cuántica. La demostración de que estas desigualdades no se ven satisfechas experimentalmente no llegó hasta 1981, con el experimento llevado a cabo por Aspect, Dalibard y Roger^[4] que, sin embargo, proporcionó resultados enteramente compatibles con la interpretación de la Mecánica Cuántica.

1.2. Estados entrelazados y no entrelazados

Distinguiremos entre estados entrelazados, a los que denominaremos no separables, y no entrelazados, a los que llamaremos separables. Como paso previo, caracterizaremos los estados puros y mezcla. Asociaremos a cada estado una matriz densidad, un operador autoadjunto, positivo y de traza unitaria. El estado, en función de la forma de la matriz densidad, será:

- Puro, si puede expresarse de tal forma que $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.
- Mezcla, si debe expresarse en su forma genérica $\rho = \sum_i r_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$, formando $|\phi_i\rangle$ una base ortonormal de estados, con $r_i \geq 0$ y $\sum_i r_i = 1$.

Por otra parte, definiremos el producto tensorial de espacios para el caso concreto de un sistema bipartito. Sean Alice y Bob dos observadores con sendos espacios de Hilbert asociados \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B . En caso de compartir estados, el espacio de Hilbert total vendrá dado por el producto tensorial entre ambos subespacios, siendo $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. En el presente trabajo nos centraremos en estados puros, ya que la caracterización del entrelazamiento resulta menos clara en estados mezcla. Un estado puro $|\psi\rangle$ será:

- Separable, si puede expresarse como $|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$, donde $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$ y $|\psi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$.
- No separable, si no admite esta factorización.

La matriz asociada a este estado puro vendrá dada por $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Para identificar el carácter separable o no separable del estado cuántico, realizaremos la traza parcial de la matriz densidad total en el subespacio B, definiendo la matriz densidad reducida del subespacio A como:

$$\rho_A = \text{Tr}_{\mathcal{H}_B} \rho = \text{Tr}_{\mathcal{H}_B} (|\psi\rangle\langle\psi|) \quad (1)$$

Determinaremos la naturaleza del estado total analizando la forma de la matriz ρ_A , distinguiendo dos casos:

- Separable si ρ_A es una matriz densidad pura, pudiendo expresarla de forma que $\rho_A = |\psi\rangle_A\langle\psi|_A$. Este es el caso de entrelazamiento nulo.
- No separable si ρ_A es una matriz densidad mezcla, teniendo que expresarse en su forma genérica $\rho_A = \sum_i r_i |\phi_i\rangle_A\langle\phi_i|_A$, donde $|\phi_i\rangle_A$ es una base ortonormal de estados para el espacio de Hilbert correspondiente a Alice. Este es el caso en que existe entrelazamiento.

Definida la diferencia entre estados cuánticos entrelazados y no entrelazados en el caso concreto de estados puros, pasaremos a cuantificar este grado de entrelazamiento. Para medir el entrelazamiento de un subsistema X utilizaremos la entropía de Rényi, en función de un parámetro $\alpha \geq 0$, definida como

$$S_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log [\text{tr}(\rho_X^\alpha)], \quad (2)$$

siendo ρ_X la matriz densidad reducida asociada al subsistema X . Los estados separables presentarán entropía nula, reflejo de su nulo grado de entrelazamiento, mientras que aquellos que resulten no separables tendrán entropía no nula y creciente conforme aumenta el grado de entrelazamiento.

Para concluir el apartado (1.2), realizaremos el cálculo teórico de esta entropía de Rényi para un caso especialmente sencillo. Trataremos el caso de un sistema bipartito, con dos subsistemas asociados a Alice y Bob, en el que cada uno de ellos presenta dos estados posibles, $|0\rangle$ y $|1\rangle$. Consideramos un estado puro de la forma:

$$|\psi\rangle = \beta |0\rangle_A |0\rangle_B + \gamma |1\rangle_A |1\rangle_B, \text{ con } \beta, \gamma \in \mathbb{C} \text{ y } |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$$

Su matriz densidad asociada toma la forma:

$$\begin{aligned} \rho &= |\psi\rangle\langle\psi| = \\ &= |\beta|^2 |0\rangle_A\langle 0|_A |0\rangle_B\langle 0|_B + \beta \bar{\gamma} |0\rangle_A\langle 1|_A |0\rangle_B\langle 1|_B + \gamma \bar{\beta} |1\rangle_A\langle 0|_A |1\rangle_B\langle 0|_B + |\gamma|^2 |1\rangle_A\langle 1|_A |1\rangle_B\langle 1|_B \end{aligned}$$

La matriz densidad reducida del subsistema A será:

$$\rho_A = \text{Tr}_{\mathcal{H}_B} \rho = |\beta|^2 |0\rangle_A\langle 0|_A + |\gamma|^2 |1\rangle_A\langle 1|_A$$

Nos encontramos en condiciones de calcular la entropía asociada a ese estado puro representado por

el ket $|\psi\rangle$. Tomamos la traza en el espacio \mathcal{H}_A , donde actúa la matriz densidad reducida:

$$\begin{aligned} S_\alpha(A) &= \frac{1}{1-\alpha} \log [\text{tr}_{\mathcal{H}_A} (\rho_A^\alpha)] = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \log \left[\text{tr}_{\mathcal{H}_A} \left((|\beta|^2 |0\rangle_A \langle 0|_A + |\gamma|^2 |1\rangle_A \langle 1|_A)^\alpha \right) \right] = \frac{1}{1-\alpha} \log (|\beta|^{2\alpha} + |\gamma|^{2\alpha}) \end{aligned}$$

Esta expresión es válida para todo valor del parámetro salvo $\alpha = 1$, caso en el que se plantea una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ (caso estudiado en Anexo I). Esta entropía será máxima para aquellos estados que cumplan $|\beta|^2 = |\gamma|^2 = \frac{1}{2}$, correspondiendo con los estados con entrelazamiento máximo $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_A |0\rangle_B + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\phi} |1\rangle_A |1\rangle_B$, donde $\phi \in \mathbb{R}$ es una fase arbitraria. La entropía máxima asociada vendrá dada por:

$$S_\alpha(A) = \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2\alpha} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{2\alpha} \right) = \frac{1}{1-\alpha} \log (2^{1-\alpha}) = \log 2$$

Observamos cómo en este caso concreto la entropía presenta el mismo valor que el obtenido al considerar en Física Estadística la entropía de un sistema con dos microestados igualmente probables¹. También observamos que en el caso teórico concreto estudiado, este valor de la entropía no depende de la elección del parámetro α tomada para el cálculo de la entropía.

1.3. Justificación

El principal motivo para estudiar el entrelazamiento en sistemas cuánticos radica en sus aplicaciones prácticas en comunicaciones y computación. En el primer caso, permite transmitir información a distancia a partir de estados cuánticos compartidos entre “emisor y receptor” mediante teleportación, aprovechando que la distancia entre ambas partes del sistema no impide que las acciones realizadas sobre uno de los subsistemas afecten al restante de forma instantánea. En el segundo, permite realizar codificación densa, ya que un q-bit (bit cuántico) transmite una mayor cantidad de información que la asociada a un bit clásico. Aunque resulte todavía un campo con poco desarrollo técnico, presenta un gran potencial futuro, lo que anima al estudio y creación de estados con un alto grado de entrelazamiento.

Los estados cuánticos en nivel fundamental, con baja energía, presentan generalmente un bajo grado de entrelazamiento. Una excepción a esto son los sistemas críticos, que serán definidos en la sección (3). Estos poseen un entrelazamiento notable aún encontrándose en estado fundamental, lo que aprovecharemos en el estado inicial de la sección (4). Para incrementar todavía más el entrelazamiento del sistema, necesitaremos de un proceso que incremente su entropía a lo largo del tiempo. Utilizaremos un “quench”, consistente en el cambio instantáneo del modelo de interacción entre los fermiones. A lo largo de la sección (4) estudiaremos un caso concreto, partiendo de una red inicial en estado crítico en la que los fermiones interactúan con primeros y segundos vecinos. A partir del instante de tiempo en que retiremos los links a segundos vecinos, el sistema evolucionará

¹Siendo $S(\{p_i\}) = - \sum_{i=1}^R p_i \log p_i$, un estado con $R = 2$ microestados posibles y equiprobables, es decir, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

aumentando su entropía con el paso del tiempo desde un estado crítico inicial que ya presentaba una entropía notable hasta llegar a un nivel de saturación. De esta forma, aprovecharemos tanto el carácter crítico del estado inicial como la evolución temporal de su entropía, reforzando mediante ambos el mayor entrelazamiento del estado final.

2. Cadena de fermiones

En la presente sección estudiaremos el caso concreto de cadenas de fermiones sin espín en una dimensión. Definiremos el hamiltoniano que rige estas redes de fermiones, así como los elementos algebraicos que lo representan hasta llegar a la matriz correlación empleada para el cálculo de la entropía de la subcadena de dimensión X . Dos parámetros fundamentales para definir la red fermiónica unidimensional con la que trabajamos serán N , el número total de fermiones que conforman la cadena, y L , el número de vecinos (tanto hacia la izquierda como hacia la derecha desde su posición dentro de la cadena) con los que cada fermión se acopla. Tomaremos el rango de los acoplos menor a la mitad de la longitud de la cadena, $L < \frac{N}{2}$. Escogeremos condiciones de contorno periódicas en la cadena en una dimensión, siendo el sitio n de esta equivalente al emplazado en el lugar $n + N$.

2.1. Posiciones de los fermiones. Modos de Fourier

Como base de partida, definiremos el hamiltoniano que rige una cadena de N fermiones sin espín con un rango de acoplos finito a L vecinos. Sean a_n^\dagger y a_n los operadores creación y destrucción (respectivamente) en el sitio n de la cadena, cumpliendo la relación de anticonmutación $\{a_n^\dagger, a_m\} = \delta_{nm}$. Si asumimos la periodicidad $a_{n+N} = a_n$ comentada anteriormente, es posible definir el hamiltoniano como:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{l=-L}^{+L} \left(2A_l a_n^\dagger a_{n+l} + B_l a_n^\dagger a_{n+l}^\dagger - \overline{B}_l a_n a_{n+l} \right) \quad (3)$$

El primero de estos términos corresponde a la destrucción de una partícula en la posición $n + l$ y creación de otra en la posición n . Por otra parte, el segundo representa la creación de dos partículas en las posiciones n y $n + l$, mientras que el tercero se asocia con la destrucción de dos partículas en las posiciones n y $n + l$. Para que un hamiltoniano pueda describir correctamente un sistema ha de ser hermítico, requiriendo que $A_{-l} = \overline{A}_l$. En el presente trabajo tomaremos las condiciones $B_{-l} = -B_l$ y $A_l, B_l \in \mathbb{R}, \forall l$, lo que implica que A_l es simétrico frente al índice de vecino l mientras que B_l resulta antisimétrico respecto del citado índice.

Resulta posible expresar este hamiltoniano en función de modos de Fourier con un determinado momento k , desacoplados entre sí, dentro de un espacio de Fock. Definimos el operador:

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{-i\theta_k n} a_n \quad \rightarrow \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k \in [0, 1, \dots, N-2, N-1] \quad (4)$$

Comprobamos a partir de la definición de los modos como $b_{k+N} = b_k$, guardando la misma relación de periodicidad que a_n . Podemos reescribir el hamiltoniano de la red de fermiones sin espín como

$$H = \mathcal{E} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \begin{pmatrix} b_k^\dagger & b_{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k & G_k \\ G_k & -F_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \quad (5)$$

donde

$$F_k = \sum_{l=-L}^L A_l e^{i\theta_k l} \quad G_k = \sum_{l=-L}^L B_l e^{i\theta_k l} \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} F_k \quad (6)$$

En el caso de acoplo a primeros vecinos ($L = 1$, recurrente dentro del presente trabajo), las expresiones de F_k y G_k serán:

- $F_k = h - 2 \cos \theta_k$ pertenece a los números reales por definición.
- $G_k = i2\gamma \sin \theta_k$ pertenece a los números imaginarios por definición.

Donde tomamos $A_1 = A_{-1} = -1$ por normalización. Los parámetros de los acoplos son números reales, donde $h = A_1 = A_{-1}$ y $\gamma = B_1 = -B_{-1}$. Aunque el presente trabajo trata acerca de cadenas de fermiones, es bien conocido que este tipo de sistemas se pueden relacionar con las cadenas de espines mediante una transformación de Jordan-Wigner. En nuestro caso, con acoplo a primeros vecinos, obtenemos el modelo XY. En éste h juega el papel de un campo magnético aplicado en la dirección Z, mientras que γ caracteriza la asimetría en la interacción de la componente X del espín frente a la Y. Para $\gamma = 0$, obtenemos el modelo XX, en el que la interacción se lleva a cabo con la misma intensidad en ambos ejes. Para $\gamma = 1$, obtenemos el modelo de Ising cuántico, en el que la interacción se produce a lo largo de un único eje.

Para presentar el hamiltoniano en forma diagonal implementamos la correspondiente transformación de Bogoliubov, realizada mediante una matriz unitaria U_k :

$$\begin{pmatrix} d_k \\ d_{-k}^\dagger \end{pmatrix} = U_k \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \quad (7)$$

Esta ecuación (7) resultará útil en el apartado (4.1), donde nos referiremos a ciertas propiedades de la matriz U_k . Definimos la relación de dispersión como:

$$\Lambda_k = \sqrt{|F_k|^2 + |G_k|^2} \geq 0. \quad (8)$$

Comentaremos con mayor profundidad la importancia de la forma de esta relación de dispersión en el apartado (3.2), dentro de la sección de teorías críticas (3). A partir de estos nuevos modos podemos expresar el hamiltoniano en forma diagonal:

$$H = \mathcal{E} + \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_k \left(d_k^\dagger d_k - \frac{1}{2} \right) \quad (9)$$

Definiremos el estado estacionario de la cadena de fermiones, dentro del denominado espacio de

Fock $\mathcal{H}_{\mathbf{K}}$, de dimensión 2^N . Cada modo de Fourier, desacoplado del resto y con momento k , puede encontrarse ocupado o vacío. Sea $|\emptyset\rangle^2$ el ket asociado al vacío de cada uno de los modos de Fourier. Podemos entender un estado genérico como la ocupación de una serie de modos de momento $k \in [0, 1, \dots, N-2, N-1]$ a partir del vacío del espacio de Fock. Si se ocupan un conjunto de modos \mathbf{K} :

$$|\mathbf{K}\rangle = \prod_{k \in \mathbf{K}} d_k^\dagger |\emptyset\rangle \quad (10)$$

Aplicando el hamiltoniano correspondiente según la ecuación (9), la energía de este estado estacionario genérico de la cadena será:

$$E_{\mathbf{K}} = \mathcal{E} - \frac{1}{2} \sum_{k \notin \mathbf{K}} \Lambda_k + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbf{K}} \Lambda_k \quad (11)$$

Pasamos ahora a caracterizar el estado fundamental dentro del caso de la cadena estacionaria, que denominaremos como “ground state”:

$$|GS\rangle = \prod_{\Lambda_k < 0} d_k^\dagger |\emptyset\rangle \quad (12)$$

Es decir, estarán ocupados aquellos modos de Fourier con relaciones de dispersión negativas con objeto de minimizar la energía del estado. Ahora bien, trabajamos con una relación de dispersión $\Lambda_k \geq 0, \forall k$ por definición, por lo que el estado estacionario fundamental será el vacío del espacio de Fock:

$$|GS\rangle = |\emptyset\rangle. \quad (13)$$

Aplicándole el hamiltoniano a este estado, podemos comprobar que la energía del estado fundamental será:

$$E_{GS} = \mathcal{E} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_k \quad (14)$$

En el caso de estados excitados, aunque la relación de dispersión sea no negativa para todo valor del momento k , tendremos ocupados algunos modos. Comparando la ecuación (11) con la ecuación (14), observamos claramente cómo esta energía es mayor en el caso excitado que en el caso fundamental, reflejo del coste energético de ocupar modos con momento k y relación de dispersión $\Lambda_k \geq 0$.

2.2. Matriz de correlación

En el presente trabajo estamos interesados en el cálculo de la entropía de entrelazamiento de una subcadena de dimensión X en el estado fundamental. Dadas las propiedades de factorización de las funciones de n -puntos (teorema de Wick) dicha entropía puede expresarse en términos de la matriz de correlación^[7] V_X

$$(V_X)_{nm} = 2 \operatorname{Tr} \left[\rho \begin{pmatrix} a_n \\ a_n^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_m^\dagger & a_m \end{pmatrix} \right] - \delta_{nm} I, \quad (15)$$

²Al aplicar el operador destrucción sobre este vacío del espacio de Fock, obtenemos el vector nulo: $d_k |\emptyset\rangle = \vec{0}$.

con $\rho = |GS\rangle\langle GS|$ la matriz densidad correspondiente al estado puro “ground state”.

La forma concreta de la entropía de entrelazamiento de Rényi⁷ será:

$$S_\alpha(X) = \frac{1}{2(1-\alpha)} \text{tr} \left[\log \left[\left(\frac{\mathbb{I} + V_X}{2} \right)^\alpha + \left(\frac{\mathbb{I} - V_X}{2} \right)^\alpha \right] \right] \quad (16)$$

En el transcurso del trabajo utilizaremos el caso concreto de la entropía de Von Neumann, para $\alpha = 1$. A lo largo del Anexo I puede comprobarse la demostración de la entropía de Von Neumann como el límite cuando el parámetro $\alpha \rightarrow 1$ en el caso general de la entropía de Rényi. La expresión resultante en función de V_X será:

$$S_1(X) = -\frac{1}{2} \text{tr} \left[\left(\frac{\mathbb{I} + V_X}{2} \right) \log \left(\frac{\mathbb{I} + V_X}{2} \right) + \left(\frac{\mathbb{I} - V_X}{2} \right) \log \left(\frac{\mathbb{I} - V_X}{2} \right) \right] \quad (17)$$

La matriz de correlación de una subcadena de dimensión X presenta dimensión $2X \times 2X$, mucho menor que la dimensión $2^X \times 2^X$ de la matriz densidad reducida del subsistema, lo que aligerará computacionalmente el cálculo de la entropía. V_X se construye a través de X bloques, cada uno integrado por una matriz de dimensión 2×2 , distribuidos en filas y columnas. El bloque en la fila n y columna m de la matriz correlación vendrá dado por:

$$(V_X)_{nm} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{G}_k e^{i\theta_k(n-m)} \quad (18)$$

Observamos cómo los bloques en una determinada posición (n, m) dependen únicamente de la diferencia entre el índice de la fila y la columna, por lo que resulta función de $(n - m)$ en lugar de ambas variables explícitamente. Según ello, podemos considerar V_X como una matriz de Toeplitz por bloques, que además resulta hermítica por construcción. Esto reduce enormemente el peso computacional de los programas necesarios para calcular estas matrices correlación, ya que pasamos de calcular $4X^2$ elementos a únicamente $4X$ de ellos. Este carácter hermítico de V_X reducirá además el tiempo que cuesta diagonalizar la matriz correlación, mucho menor para una matriz hermítica que para una de carácter general, ya que los autovalores de V_X serán clave para calcular la entropía de Von Neumann según la ecuación (17).

Los diferentes bloques de dimensión 2×2 de la matriz correlación vienen dados por una serie de cálculos a partir de \mathcal{G}_k , denominado como el símbolo de la matriz, que se define como:

$$\mathcal{G}_k = \text{Tr} \left[\rho \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k^\dagger & b_{-k} \end{pmatrix} \right] \quad (19)$$

Recordar que $\rho = |GS\rangle\langle GS|$ es la matriz densidad correspondiente al estado puro “ground state”. Ello implica que ningún modo de Fourier se encontrará ocupado, por lo que el símbolo de la matriz^[7] tomará la forma:

$$\mathcal{G}_k = \frac{1}{\sqrt{|F_k|^2 + |G_k|^2}} \begin{pmatrix} F_k & G_k \\ G_k^\dagger & -F_k \end{pmatrix} \quad (20)$$

3. Entropía de entrelazamiento y teorías críticas

Denominaremos críticas aquellas teorías en las que la relación de dispersión se anula para algún modo de Fourier, es decir, $\exists k \mid \Lambda_k = 0$. A lo largo de esta sección, veremos cómo afecta este carácter crítico a la manera en que la entropía de entrelazamiento escala con el tamaño del subsistema escogido.

Imaginemos una red de fermiones en 3 dimensiones. Al tomar un subsistema como un volumen dentro del sistema total, la frontera entre ambos escalará con el área que rodea al volumen escogido. En el caso de teorías no críticas, la longitud de correlación entre fermiones resulta finita, por lo que estos únicamente se entrelazarán en cortas distancias. Por lo tanto, la cantidad de fermiones que perderán interacción vendrá dada únicamente por aquellos más cercanos a la frontera, ya que estos dejarán de interaccionar con sus vecinos del exterior mientras que los fermiones en el interior seguirán pudiendo interaccionar con sus vecinos cercanos. Por ello, esta incertidumbre relacionada con la entropía de entrelazamiento escalará con el área que rodea al subsistema. De manera análoga, en una red de fermiones en 2 dimensiones esta entropía escalará con la longitud que rodea al área del subsistema escogido. Esta misma razón explica, como veremos en el apartado (3.1), por qué la entropía en el caso de 1 dimensión correspondiente a la cadena de fermiones presenta coeficiente lineal nulo, saturando para bajos tamaños del subsistema en teorías no críticas. Esto se debe a que la frontera de la subcadena en 1 dimensión corresponde a los dos puntos de sus extremos, independientemente de la longitud de esta, lo que da lugar a una contribución constante en el límite asintótico.

Sin embargo, en el caso de teorías críticas la longitud de correlación se hace infinita, pudiendo interaccionar los fermiones aún entre puntos muy distantes. Esto se traducirá en la existencia de un término logarítmico^[7] con el tamaño del subsistema analizado, que se sumará al término constante explicado al inicio del párrafo. Esta dependencia logarítmica será observada en el apartado (3.3). Podemos comprender que la longitud de correlación se haga infinita entendiendo los fermiones a través un carácter de “masa 0”, considerando que presentan una energía (representada por Λ_k) que puede hacerse tan pequeña como deseemos en función del momento k del modo de Fourier. Esto permite relacionarlos con portadores de interacción sin masa, como los fotones, cuya longitud de interacción se extiende hacia el infinito, análogamente a la longitud de correlación entre fermiones en este caso.

3.1. Saturación en teorías no críticas

Veremos en primer lugar en este apartado (3.1) cómo, según lo explicado en la introducción de esta sección (3), la dependencia de la entropía de entrelazamiento con el tamaño del subsistema ha de ser prácticamente constante, ya que no escala con el tamaño de esta en el caso general, ni con el logaritmo de su tamaño en el caso de teorías no críticas. Presentaremos el caso de una red de $N = 10000$ fermiones con interacción a primeros vecinos ($L = 1$). Los parámetros utilizados son $h = 1,0$ y $\gamma = 1,0$, realizando simulaciones para dimensiones del subsistema $X \in [1, 15]$.

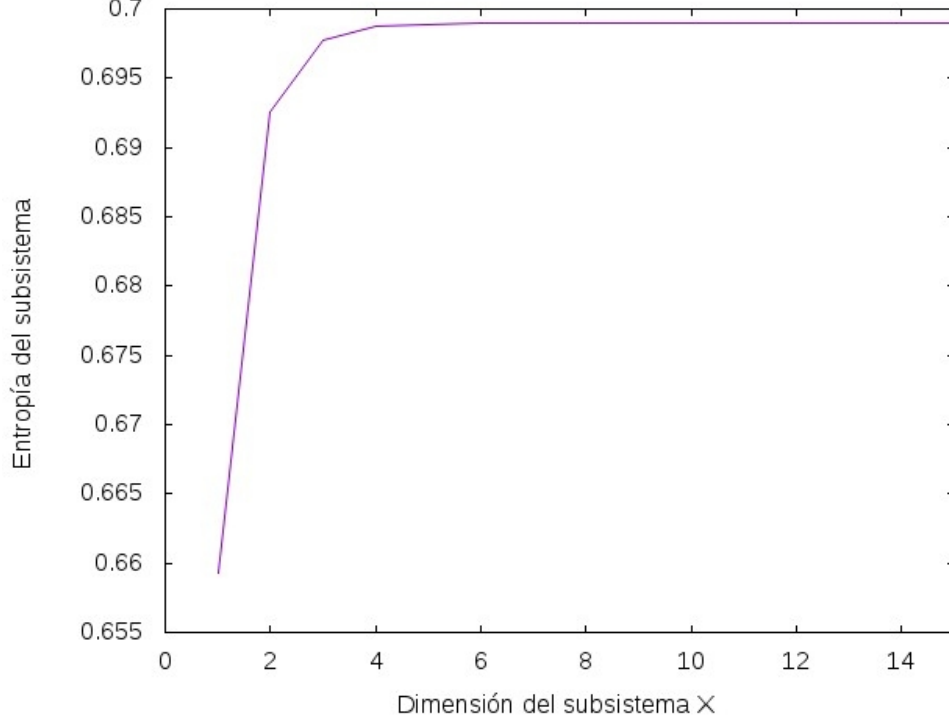


Figura 1: *Dependencia de la entropía con la dimensión del subsistema. Caso no crítico.*

Observamos que la variación relativa entre el valor de la entropía para $X = 1$ y su valor de saturación es de apenas el 6,017% de su valor inicial, saturando para valores por encima de $X = 8$. Esto es reflejo de que en el caso de sistemas no críticos no resulta “rentable” aumentar el tamaño del subsistema, ya que ello apenas genera aumento del entrelazamiento. Evitar el pronto colapso que sufre el entrelazamiento con el crecimiento de la dimensión del subsistema en el caso no crítico es la principal razón por la cual el estado de partida de la sección (4) será escogido dentro de una teoría crítica.

3.2. Relación de dispersión

En el caso de interacción a primeros vecinos $L = 1$ introducido en el apartado (2.1), la forma que toma la relación de dispersión es:

$$\Lambda_k = \sqrt{|F_k|^2 + |G_k|^2} = \sqrt{(h - 2 \cos \theta_k)^2 + 4\gamma^2 \sin^2 \theta_k} \quad (21)$$

Presentaremos la relación de dispersión para el caso no crítico expuesto en el apartado (3.1), observando claramente cómo Λ_k no se anula para ninguno de los modos de Fourier, existiendo un gap de masas. Tal y como hemos explicado en la introducción de la sección (3), esta Figura 2 explicará la dependencia de la entropía, asintóticamente constante con el tamaño del subsistema, observada en la Figura 1:

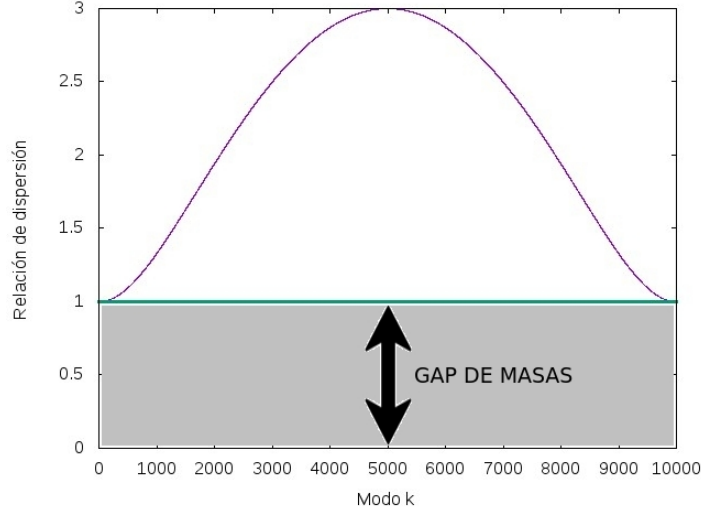


Figura 2: *Relación de dispersión frente al momento k del modo. Caso no crítico.*

En el caso concreto de $L = 1$, para que se anule Λ_k y la teoría resulte crítica deben anularse tanto F_k como G_k , ya que la relación de dispersión resulta una suma cuadrática de los módulos de ambos. Con $\gamma = 0$, Λ_k se anulará en $\theta_k = \arccos(\frac{h}{2})$. Para el caso crítico tomaremos la misma red de fermiones analizada anteriormente, con $N = 10000$ y $L = 1$, utilizando como parámetros de la interacción $h = 1,0$ y $\gamma = 0,0$. A partir de ellos, obtenemos la siguiente dependencia para Λ_k :

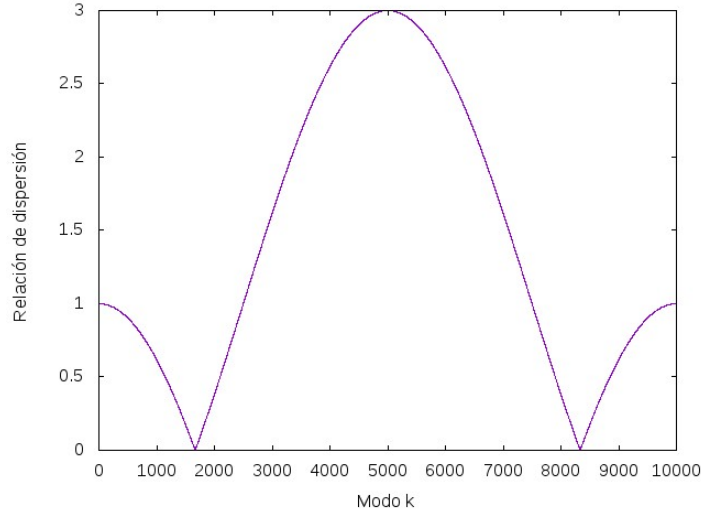


Figura 3: *Relación de dispersión frente al momento k del modo. Caso crítico.*

Observamos como Λ_k se anula claramente en dos modos de Fourier. Un análisis más detenido de la relación de dispersión revela que esta se anula en los modos de Fourier con momento $k_1 = 1667$ y $k_2 = 8333$, correspondientes a $\theta_{k_1} = 1,0474$ rad y $\theta_{k_2} = 5,2358$ rad, ambas soluciones de la ecuación $\theta_k = \arccos(\frac{h}{2})$ para $h = 1,0$. Este gap de masas nulo observado en la Figura 3 dará lugar a la aparición de un término logarítmico en el apartado (3.3).

3.3. Dependencia de la entropía en teorías críticas

Veamos qué efecto presenta considerar una teoría crítica en la dependencia de la entropía de un subsistema con su dimensión. La Figura 4 reflejará la dependencia del caso introducido en la Figura 3. En este caso llevaremos a cabo simulaciones hasta mayores tamaños del subsistema $X \in [1, 500]$ que en el caso no crítico de saturación presentado en el apartado (3.1), con el objetivo de realizar posteriormente un ajuste preciso a la dependencia que presentaremos en la ecuación (22).

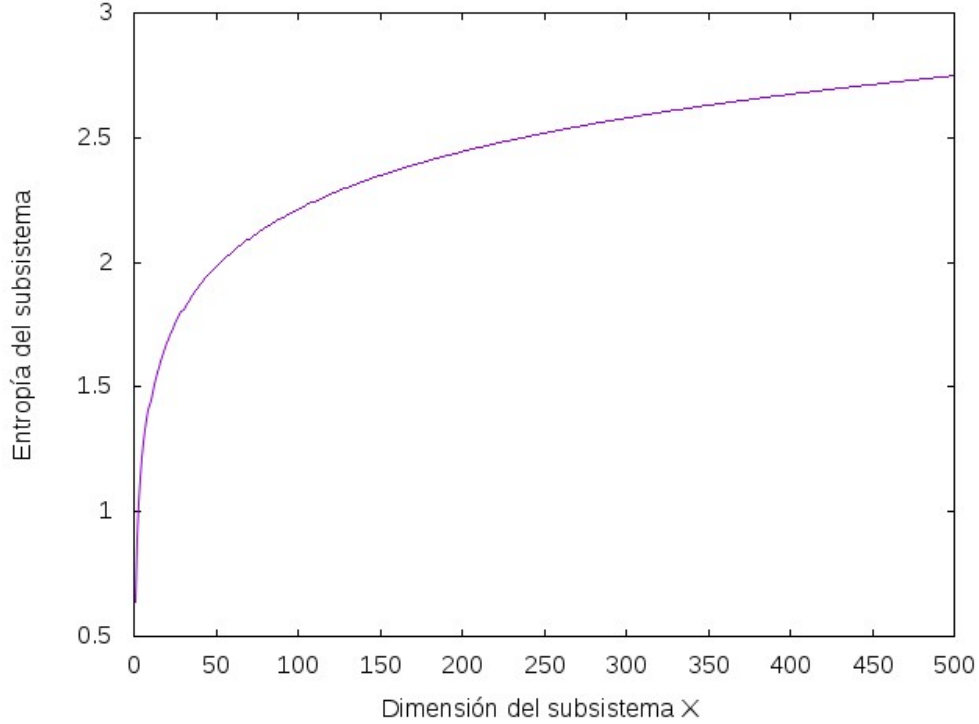


Figura 4: *Dependencia de la entropía con la dimensión del subsistema. Caso crítico.*

Esta ecuación (22) recoge la contribución constante de los bordes del subsistema en el término constante c y la contribución logarítmica debido al carácter crítico en el término logarítmico b , incluyendo a su vez un término lineal en a para comprobar que la entropía de entrelazamiento de la cadena de fermiones unidimensional no escala linealmente con su tamaño en el caso estático, tal y como hemos comentado en la introducción de la sección (3).

$$S_1(X) = aX + b \log X + c \quad (22)$$

Realizaremos el ajuste para valores de $X \in [50, 500]$, debido a que los valores más pequeños del subsistema se desvían ligeramente de este comportamiento logarítmico. Tras ello, llegamos a la conclusión de que el coeficiente del término lineal es prácticamente nulo, con un valor de $a = -5,19327 \cdot 10^{-6} \pm 8 \cdot 10^{-8}$ para un intervalo de confianza del 95 %. Este resultado era esperado según lo explicado en la introducción de la sección (3), ya que resulta consecuencia del hecho físico de que la frontera de una cadena lineal sean dos puntos constantes. Por otra parte, el resultado

del ajuste de los dos coeficientes restantes es $b = 0,33383 \pm 0,00002$ y $c = 0,67627 \pm 0,00004$ respectivamente. Observamos la cercanía del coeficiente b al valor predicho por la teoría^[7], $b = \frac{1}{3}$. Sin embargo, este valor teórico de b no entra dentro del intervalo de confianza del 95 %, posiblemente debido al carácter finito de la cadena de fermiones.

Es en estos casos relacionados con teorías críticas en los que resulta provechoso aumentar el tamaño del subsistema para hacer mayor la entropía y así crear entrelazamiento en el sistema. Esto será aprovechado en la sección (4) del quench, combinando este carácter crítico del estado inicial con la evolución temporal provocada por el quench para aumentar el entrelazamiento del estado final.

3.4. Carácter crítico como discontinuidad en las matrices \mathcal{G}_k

Este carácter crítico implica una indeterminación en el símbolo de la matriz \mathcal{G}_k para determinados modos de Fourier, debido a que en ellos se anula tanto la relación de dispersión Λ_k como F_k y G_k , siendo \mathcal{G}_k una matriz formada por indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ según la forma vista en la ecuación (20). Tomemos una teoría general con rango de interacción L , representada por una relación de dispersión con forma

$$\hat{\Lambda}_k = \sqrt{|\hat{F}_k|^2 + |\hat{G}_k|^2} \quad (23)$$

donde \hat{F}_k y \hat{G}_k son las funciones asociadas a esta teoría con rango L . Dotaremos a la relación de dispersión de carácter crítico haciendo que se anule para un valor de momento k correspondiente a $\theta_k = \pm\theta_F$. Para ello, multiplicaremos las funciones \hat{F}_k y \hat{G}_k por un factor

$$\Upsilon_k \equiv e^{-i\theta_k}(e^{i\theta_k} - e^{i\theta_F})(e^{i\theta_k} - e^{-i\theta_F}) = -4 \sin \frac{\theta_k - \theta_F}{2} \sin \frac{\theta_k + \theta_F}{2},$$

lo que a su vez aumentará el rango de interacción de la teoría a $L + 1$. En el Anexo II puede observarse una demostración más completa de cómo la introducción de estas raíces que anulan la relación de dispersión aumentan en 1 el rango de los acoplos de la teoría, así como la manera en que se agrupan estas raíces, $e^{\pm i\theta_F}$.

$$\begin{cases} F_k = \Upsilon_k \hat{F}_k \\ G_k = \Upsilon_k \hat{G}_k \end{cases} \rightarrow \Lambda_k = |\Upsilon_k| \sqrt{|\hat{F}_k|^2 + |\hat{G}_k|^2} = |\Upsilon_k| \hat{\Lambda}_k \quad (24)$$

Observamos cómo la relación de dispersión asociada Λ_k ahora se anula para $\theta_k = \pm\theta_F$. Podemos distinguir dos casos en el símbolo de la matriz \mathcal{G}_k , correspondiente a la teoría crítica de rango $L + 1$, en función del momento k del modo de Fourier al que corresponda:

$$\mathcal{G}_k = \frac{1}{|\Upsilon_k| \sqrt{\hat{F}_k^2 + \hat{G}_k^2}} \begin{pmatrix} \Upsilon_k \hat{F}_k & \Upsilon_k \hat{G}_k \\ \Upsilon_k \hat{G}_k & -\Upsilon_k \hat{F}_k \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\hat{F}_k^2 + \hat{G}_k^2}} \begin{pmatrix} \hat{F}_k & \hat{G}_k \\ \hat{G}_k & -\hat{F}_k \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{G}}_k & \text{si } \Upsilon_k > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\hat{F}_k^2 + \hat{G}_k^2}} \begin{pmatrix} -\hat{F}_k & -\hat{G}_k \\ -\hat{G}_k & \hat{F}_k \end{pmatrix} = -\hat{\mathcal{G}}_k & \text{si } \Upsilon_k < 0 \end{cases} \quad (25)$$

$\hat{\mathcal{G}}_k$ corresponde al símbolo de la matriz de la teoría general de rango L . Observamos cómo la anulación de la relación de dispersión en la teoría de rango $L + 1$ para determinados valores del momento $\theta_k = \pm\theta_F$ puede traducirse en un cambio de signo en el símbolo de la matriz correspondiente a la teoría general de rango L . Resumiendo, podremos entender una teoría crítica de rango $L + 1$ como una teoría general de rango L con una discontinuidad en el signo del símbolo de la matriz asociada.

4. Quench

En la presente sección estudiaremos la introducción de un “quench” en la cadena de fermiones. De forma genérica, este proceso implica el cambio instantáneo en un momento determinado del modelo de interacción en la cadena, bien sea por el cambio de los parámetros o del rango de interacción. En este caso, el tipo de quench introducido será el cambio de una teoría crítica con rango de interacción $L = 2$ a una teoría no crítica con rango $L = 1$. Este proceso corresponderá a la retirada de los “links” que unen a cada fermión con sus segundos vecinos, tal y como muestra la Figura 5.

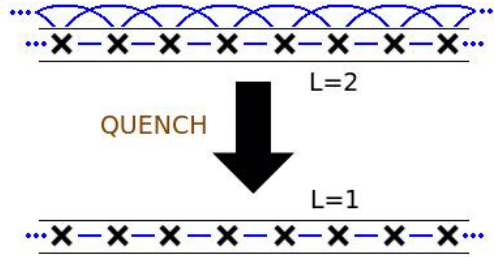


Figura 5: *Quench introducido retirando los links a segundos vecinos.*

Tal y como hemos comentado en el apartado (3.4), podemos entender esta teoría inicial crítica con rango $L = 2$ como una teoría en general no crítica de rango $L = 1$ con parámetros (h_0, γ_0) y una discontinuidad en el signo del símbolo de la matriz \mathcal{G}_{0_k} asociada al parámetro θ_F . Tras aplicar el quench en el instante inicial de la evolución, los autoestados de H_0 dejan de ser funciones propias del sistema bajo este nuevo hamiltoniano H que regirá la evolución de este. Por ello, estudiaremos la evolución del estado inicial, representado por $\mathcal{G}_{0_k}(h_0, \gamma_0, \theta_F)$, a través del hamiltoniano que rige el sistema tras la retirada de los links a segundos vecinos, cuyo representante será $\mathcal{G}_k(h, \gamma)$, con nuevos parámetros de interacción:

$$h = \frac{h_0 \cos \theta_F + 1}{h_0/2 + \cos \theta_F}, \quad \gamma = \frac{\gamma_0 \cos \theta_F}{h_0/2 + \cos \theta_F} \quad (26)$$

La forma concreta de estos nuevos parámetros puede ser entendida a partir del Anexo II. El objetivo en esta parte del trabajo es analizar la evolución temporal de la entropía en diferentes subsistemas analizados de la cadena de fermiones. Antes de presentar los resultados obtenidos a través de las simulaciones, plantearemos el marco teórico que define la evolución temporal del sistema en las simulaciones realizadas.

4.1. Evolución temporal de la cadena de fermiones

En este apartado (4.1) trataremos de obtener la dependencia explícita del símbolo de la matriz con el tiempo, es decir $\mathcal{G}_k(t)$. Esto permitirá obtener una dependencia temporal en la función entropía, $S(\mathcal{G}_k(t)) = S(t)$, representando la evolución del entrelazamiento en la cadena de fermiones. Por lo tanto, estas matrices $\mathcal{G}_k(t)$ no representan ni el estado inicial (asociado con \mathcal{G}_{0_k}) ni el modelo con el que evoluciona la cadena a lo largo del tiempo (asociado con \mathcal{G}_k), sino el estado de la cadena en cada instante de tiempo. Para demostrar su forma explícita partiremos de la definición del símbolo de la matriz, siendo $\rho(t)$ la matriz densidad de la cadena en cada instante de tiempo. Recordemos que partimos desde un estado fundamental puro “ground state”, con $\rho(t=0) = |GS\rangle\langle GS|$.

$$\mathcal{G}_k(t) = \text{Tr} \left[\rho(t) \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k^\dagger & b_{-k} \end{pmatrix} \right] \quad (27)$$

Tenemos en cuenta la diagonalización de los modos de Fourier planteada en la ecuación (7), que concretada al modelo de cadena inicial y al modelo que rige la evolución de esta serán respectivamente:

$$\begin{pmatrix} d_{0_k} \\ d_{0_{-k}}^\dagger \end{pmatrix} = U_{0_k} \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} d_k \\ d_{-k}^\dagger \end{pmatrix} = U_k \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix}$$

De esta forma, podemos expresar el símbolo de la matriz en función de los modos diagonales que definen el sistema tras el quench:

$$\mathcal{G}_k(t) = U_k^\dagger \text{Tr} \left[\rho(t) \begin{pmatrix} d_k \\ d_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k^\dagger & d_{-k} \end{pmatrix} \right] U_k$$

Teniendo en cuenta que los modos d_k son autoestados del nuevo hamiltoniano que rige el sistema tras la retirada de los links a segundos vecinos, tenemos:

$$\text{Tr} \left[\rho(t) \begin{pmatrix} d_k \\ d_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k^\dagger & d_{-k} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{i\Lambda_k t} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda_{-k} t} \end{pmatrix} \text{Tr} \left[\rho(0) \begin{pmatrix} d_k \\ d_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_k^\dagger & d_{-k} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e^{-i\Lambda_k t} & 0 \\ 0 & e^{i\Lambda_{-k} t} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, si volvemos a expresar el símbolo de la matriz a partir de los modos de Fourier:

$$\mathcal{G}_k(t) = U_k^\dagger \begin{pmatrix} e^{i\Lambda_k t} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda_{-k} t} \end{pmatrix} U_k \text{Tr} \left[\rho(0) \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k^\dagger & b_{-k} \end{pmatrix} \right] U_k^\dagger \begin{pmatrix} e^{-i\Lambda_k t} & 0 \\ 0 & e^{i\Lambda_{-k} t} \end{pmatrix} U_k$$

Donde el símbolo de la matriz del estado inicial será:

$$\mathcal{G}_k(0) = \text{Tr} \left[\rho(0) \begin{pmatrix} b_k \\ b_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k^\dagger & b_{-k} \end{pmatrix} \right]$$

Correspondiendo al estado inicial crítico con rango $L = 2$, que viene representado por \mathcal{G}_{0_k} , definido

en la introducción de la sección (4). Resulta conveniente introducir la siguiente propiedad^[7] de U_k :

$$\mathcal{G}_k = U_k^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} U_k \quad (28)$$

Donde \mathcal{G}_k es el símbolo de la matriz del estado no crítico con $L = 1$, definido en la introducción de la sección (4). Tenemos en cuenta que, tal y como puede desprenderse de la ecuación (21), trabajamos con relaciones de dispersión simétricas $\Lambda_{-k} = \Lambda_k$. Descomponemos las matrices de evolución temporal de la matriz densidad de tal forma que:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} e^{i\Lambda_k t} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda_k t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\Lambda_k t} & 0 \\ 0 & e^{-i\Lambda_k t} \end{pmatrix} = \cos(\Lambda_k t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \sin(\Lambda_k t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e^{-i\Lambda_k t} & 0 \\ 0 & e^{i\Lambda_k t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\Lambda_k t} & 0 \\ 0 & e^{i\Lambda_k t} \end{pmatrix} = \cos(\Lambda_k t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \sin(\Lambda_k t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (28) y que las matrices U_k cumplen que $U_k^\dagger \mathbb{I} U_k = \mathbb{I}$, resulta sencillo demostrar que:

$$\mathcal{G}_k(t) = [\cos(\Lambda_k t) \mathbb{I} + i \sin(\Lambda_k t) \mathcal{G}_k] \mathcal{G}_{0_k} [\cos(\Lambda_k t) \mathbb{I} - i \sin(\Lambda_k t) \mathcal{G}_k] \quad (29)$$

4.2. Entropía a lo largo del tiempo

Previamente a la presentación de las simulaciones de la cadena, presentaremos los resultados esperados según la expresión analítica^[6] de la ecuación (31). Esta fórmula responde a la evolución tras un quench de una cadena de partículas con espín interactuando según el modelo XY de Ising ($L = 1$) en un campo magnético en el eje Z. Trataremos de buscar una analogía entre el comportamiento esperado para este modelo y las simulaciones realizadas para la cadena de fermiones sin espín. Sean:

$$\begin{aligned} \Lambda'_{\theta_k} &\equiv \frac{d\Lambda_{\theta_k}}{d\theta_k} & H(x) &= - \left[\left(\frac{1+x}{2} \right) \log \left(\frac{1+x}{2} \right) + \left(\frac{1-x}{2} \right) \log \left(\frac{1-x}{2} \right) \right] \\ \Lambda'_{0_{\theta_k}} &\equiv \frac{d\Lambda_{0_{\theta_k}}}{d\theta_k} & \cos \Delta_{\theta_k} &= \frac{hh_0 - 2 \cos \theta_k (h + h_0) + 4 \cos^2 \theta_k + \gamma \gamma_0 \sin^2 \theta_k}{\Lambda_{\theta_k} \Lambda_{0_{\theta_k}}} \end{aligned} \quad (30)$$

Donde $\Lambda_{0_{\theta_k}}$ es la relación de dispersión del modelo crítico inicial con $L = 2$ en función de los parámetros iniciales (h_0, γ_0) , sin verse afectado por la discontinuidad en el símbolo de la matriz \mathcal{G}_{0_k} en $\pm\theta_F$, y Λ_{θ_k} es la relación de dispersión del modelo no crítico de evolución con $L = 1$ en función de los parámetros finales (h, γ) , definidos en la introducción de la sección (4). Esperaremos una evolución temporal de la entropía para una subcadena de longitud X regida por:

$$S_X(t) = t \int_{2|\Lambda'_{\theta_k}|_{t < X}} \frac{d\theta_k}{2\pi} 2 |\Lambda'_{\theta_k}| H(\cos \Delta_{\theta_k}) + X \int_{2|\Lambda'_{\theta_k}|_{t > X}} \frac{d\theta_k}{2\pi} H(\cos \Delta_{\theta_k}) \quad (31)$$

Veamos un ejemplo del comportamiento esperado en la evolución temporal según la fórmula fenomenológica. Para una red unidimensional de $N = 10000$ fermiones, pasaremos del estado crítico inicial interaccionando con $L = 2$ y parámetros iniciales $h_0 = 1,0$, $\gamma_0 = 1,0$ y $\theta_F = \frac{\pi}{3}$, a una interacción no crítica con $L = 1$ y parámetros de interacción de valores $h = 1,5$ y $\gamma = 0,5$ tras el quench. Realizaremos las integrales a través de cálculo numérico para diferentes tamaños del subsistema de la cadena:

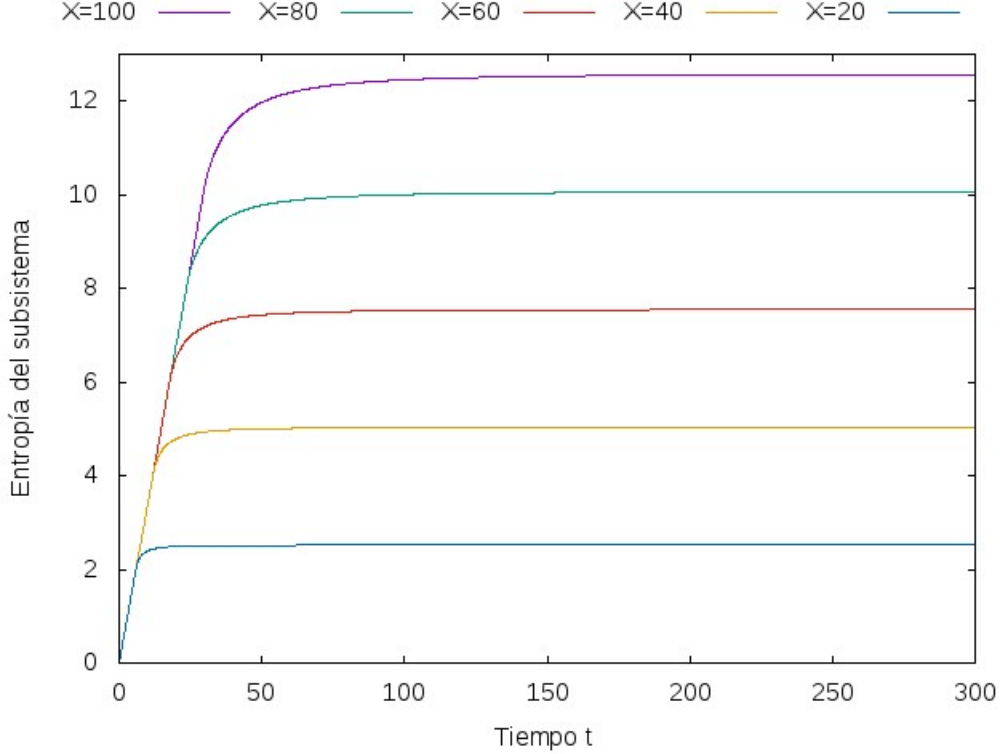


Figura 6: *Evolución temporal en la entropía para diferentes tamaños del subsistema. Teórico.*

- Inicialmente, con $t \ll$, los límites de la primera integral serán $\theta_k \in [0, 2\pi]$ independientemente de la dimensión del subsistema. Por otra parte, la segunda integral será nula, ya que no existirá ningún θ_k que cumpla la condición de los límites de integración. Esto explica por qué antes de producirse el quench el término lineal a resulta nulo, tal y como hemos concluido en el ajuste de la Figura 4. Puede apreciarse inicialmente en la Figura 6 un régimen de crecimiento lineal con el tiempo, con pendiente independiente de la dimensión del subsistema X . Observamos cómo el tiempo empleado para que la entropía sature y abandone el régimen lineal es mayor conforme crece la dimensión X del subsistema, debido a que a la condición de integración $2 \left| \Lambda'_{\theta_k} \right| t < X$ le tomará más tiempo anularse para todos los modos de Fourier.
- Para tiempos largos, con $t \gg$, la primera integral será nula, ya que no existirá ningún θ_k que cumpla la condición de los límites de integración. Por otra parte, los límites de la segunda integral serán $\theta_k \in [0, 2\pi]$ para cualquier valor de la dimensión del subsistema X . Observamos en la Figura 6 un régimen de saturación proporcional al valor de la dimensión del subsistema para tiempos largos.

Sin embargo, este no será exactamente el comportamiento esperado. La entropía inicial para todos los subsistemas analizados es nula en la Figura 6, es decir, la evolución temporal presentada en la ecuación (31) no tiene en cuenta el carácter inicial del subsistema crítico, ni cómo evoluciona este. Veremos más adelante cómo trataremos de reflejar en la evolución temporal este comportamiento. De momento, presentamos los resultados de la simulación para la evolución de la entropía. Simularemos el caso introducido teóricamente en la Figura 6:

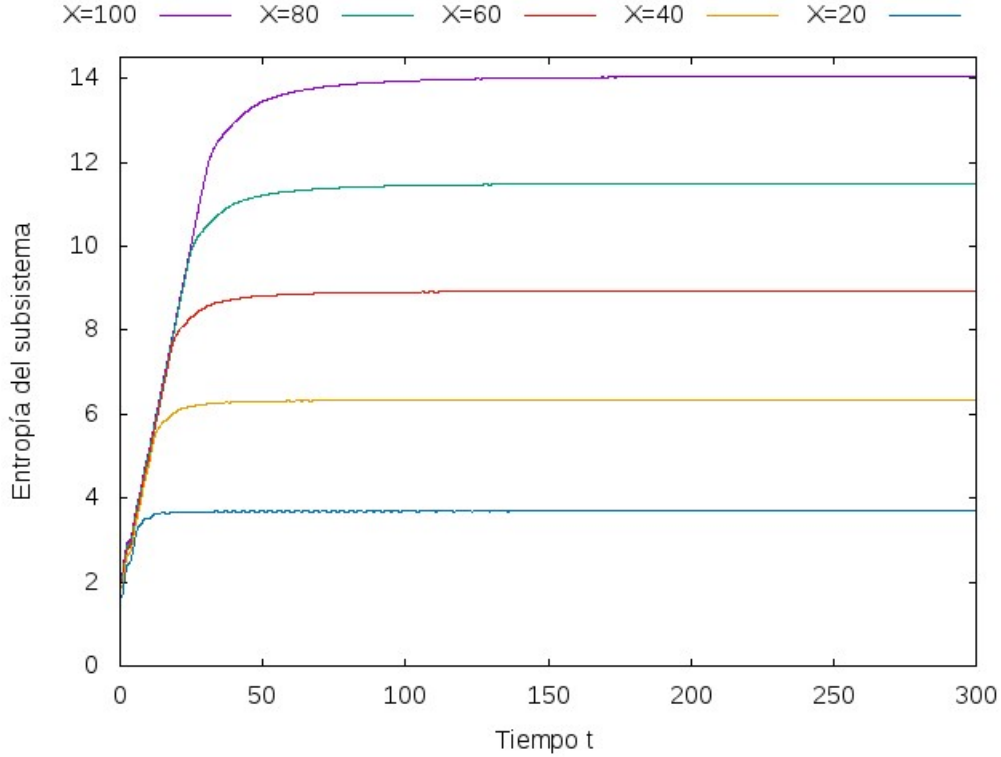


Figura 7: *Evolución temporal en la entropía para diferentes tamaños del subsistema. Simulación.*

En primer lugar, comprobamos cómo la entropía inicial en el caso de las simulaciones no es nula, a diferencia de las predicciones teóricas de la ecuación (31). Esto también provoca que los valores de saturación no coincidan con los obtenidos a través de cálculo numérico. Se observa cómo el régimen lineal inicial con el tiempo presenta una pendiente prácticamente igual en todos los casos de diferentes tamaños X del subsistema. Por otra parte, observamos cómo aquellos subsistemas a los que les cuesta más tiempo saturar su entropía son los de mayor dimensión X , según lo esperado. También podemos comprobar cómo el valor de saturación de la entropía parece resultar lineal con el tamaño del subsistema. Analizaremos más adelante este comportamiento de forma cuantitativa.

Estaremos interesados en analizar la evolución temporal para los instantes iniciales tras el quench, para el mismo caso introducido en las Figuras 6 y 7:

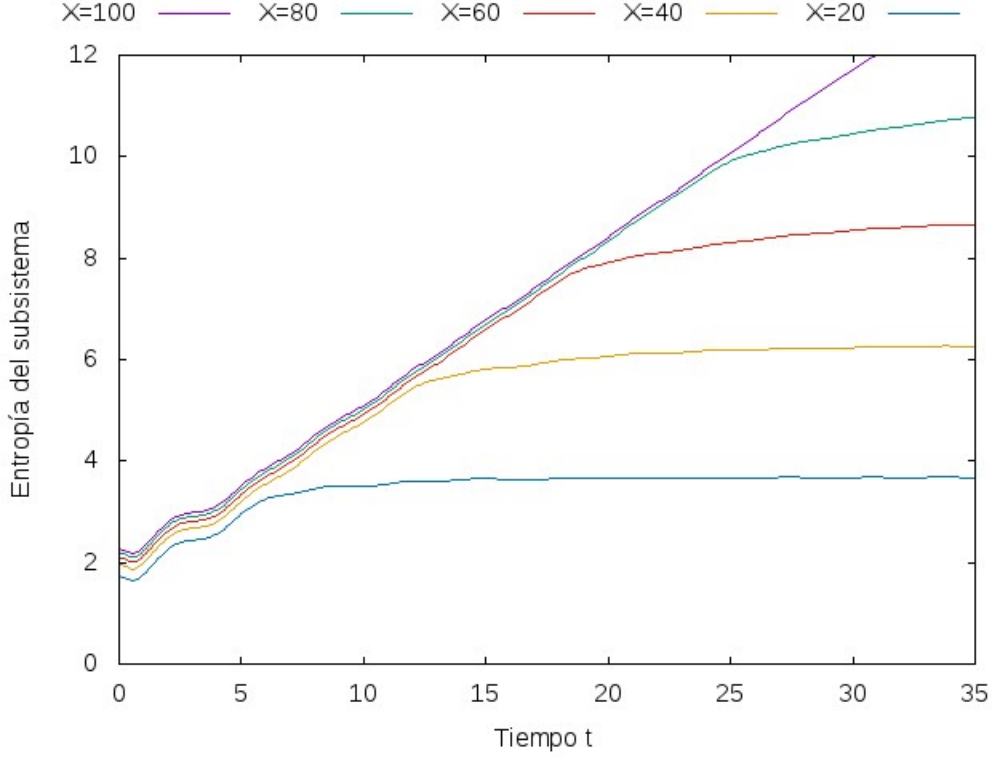


Figura 8: *Evolución inicial en la entropía para diferentes tamaños del subsistema. Simulación.*

En esta Figura 8 comprobamos cómo la entropía inicial del subsistema depende de su dimensión X , tal y como esperábamos para un sistema crítico. Representando esta entropía inicial en función del tamaño del subsistema, obtenemos una dependencia del tipo presentado en la ecuación (22), con $a \simeq 0,0$ y $b \simeq \frac{1}{3}$. Esto sugiere que puede existir una evolución temporal en el coeficiente b que representa el carácter crítico de la teoría inicial, tal y como reflejaremos más adelante.

Por otra parte, observamos la aparición de oscilaciones en la entropía con el paso del tiempo durante el régimen lineal inicial, tal y como se ha reportado en otros trabajos previos^[6]. Estas oscilaciones parecen independientes de la dimensión del subsistema considerado, tanto en amplitud como en frecuencia y tiempo de amortiguación. Un efecto sorprendente es que estas oscilaciones provocan un descenso inicial en la entropía en todos los subsistemas analizados.

Pasemos a comparar dos casos de evolución concretos para el tipo de quench concreto tratado a lo largo de este apartado. Compararemos los casos de subsistemas con dimensión $X = 20$ y $X = 100$ sumando un término constante en cada caso a los resultados teóricos obtenidos a partir de la ecuación (31), para que saturan al mismo valor que nuestras simulaciones. Esto será reflejo de no haber considerado la entropía inicial del subsistema en el cálculo teórico.

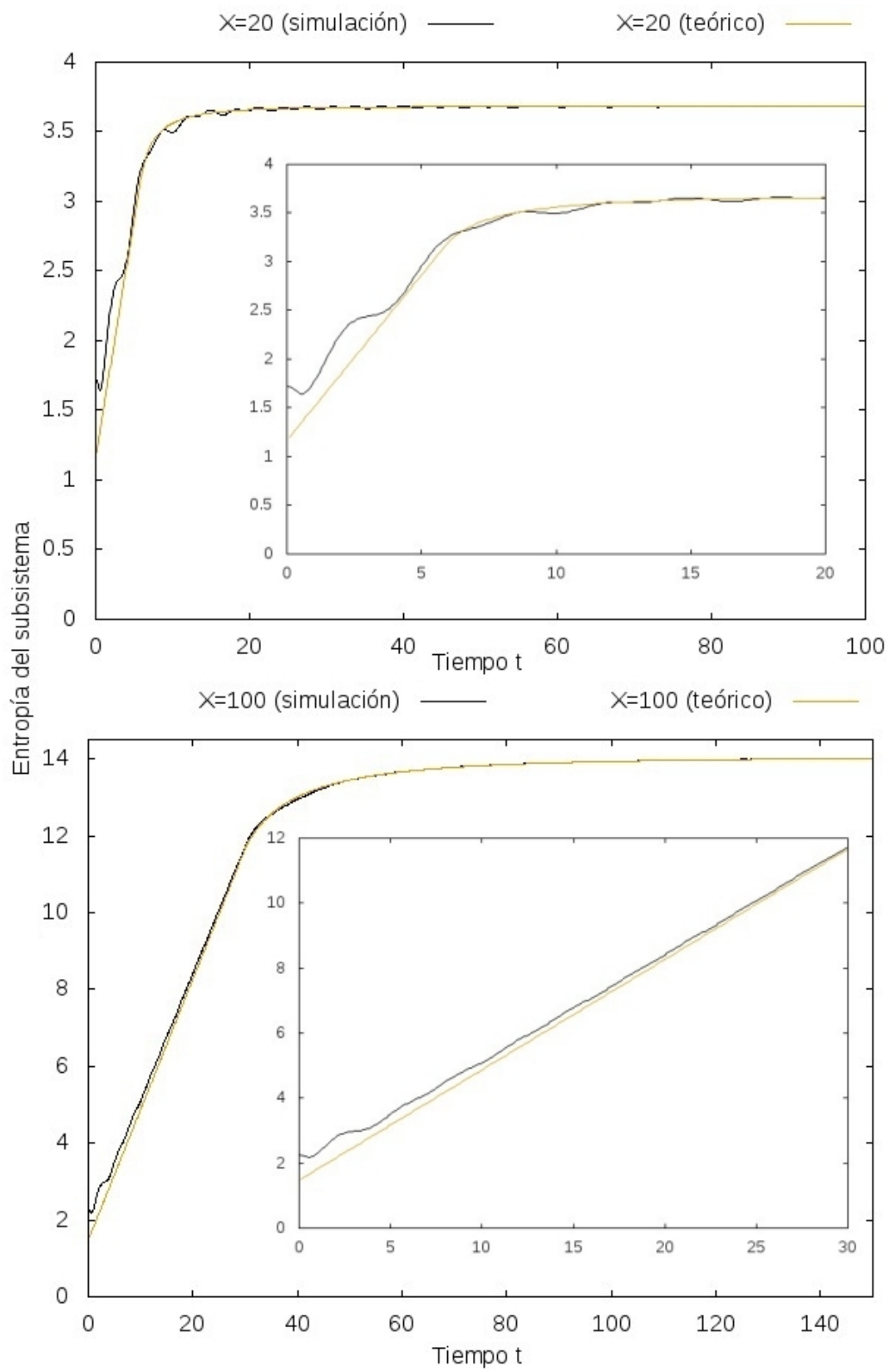


Figura 9: Evolución temporal en la entropía para $X = 20, 100$. Teoría y simulación.

Ambos casos parecen reflejar una correcta evolución según lo previsto por la teoría, al menos de forma cualitativa. Se observa en ambos casos cómo la entropía inicial del sistema es ligeramente mayor en el caso de las simulaciones que en el de la entropía, con un valor de la pendiente inicial con el tiempo ligeramente menor en las simulaciones.

Ahora bien, para entender de forma cuantitativa la evolución temporal del subsistema concreto de la cadena de fermiones, trataremos de ajustar su comportamiento a una dependencia del tipo:

$$S_1(X, t) = a(t)X + b(t) \log X + c(t) \quad (32)$$

Para ello, realizaremos simulaciones de la evolución temporal de la entropía para tamaños del subsistema $X \in [20, 500]$. Este ajuste a la variable X proporcionará una dependencia explícita de los coeficientes lineal, logarítmico e independiente de la dimensión X a lo largo del tiempo. Analizaremos las simulaciones para el mismo tipo de quench expuesto desde la Figura 6.

Podremos entender $a(t)$ como el término lineal con X de la ecuación (31), teniendo que variar desde un valor inicial de $a(t=0) \equiv a_0 = 0$ (explicado al inicio de este mismo apartado) hasta un valor de saturación dado por

$$a_{sat} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_k}{2\pi} H(\cos \Delta_{\theta_k}), \quad (33)$$

tomando el valor $a_{sat} = 0,12584$ para el quench estudiado. Ahora bien, en este caso el valor es independiente de la dimensión del subsistema X por estar considerando $t \rightarrow \infty$ en los límites de integración, así como el valor a_0 es nulo para cualquier X por estar considerando $t = 0$ en esos mismos límites. Sin embargo, para tiempos intermedios, no esperamos una dependencia exacta al estar realizando un ajuste para diferentes dimensiones del subsistema. Sin embargo, esta evolución temporal de $a(t)$ sí que deberá responder a los valores esperados para los instantes iniciales y para el límite de tiempo largo.

Por otra parte, no disponemos de una dependencia explícita para la evolución temporal $b(t)$ del término logarítmico. Sin embargo, es conocido^[8] que el coeficiente del término logarítmico depende de los autovalores del símbolo de la matriz, que vendrán condicionados a su vez por las discontinuidades correspondientes a su signo. De esta forma, para el estado inicial en $t = 0$, el símbolo de la matriz inicial \mathcal{G}_{0_k} tendrá autovalores $\lambda_{0_1} = -1$ para $\theta_k \in [-\pi, -\pi + \theta_F) \cup (\pi - \theta_F, \pi]$ y $\lambda_{0_2} = +1$ para $\theta_k \in (-\pi + \theta_F, \pi - \theta_F)$. Sin embargo, con el paso del tiempo este símbolo de la matriz $\mathcal{G}_k(t)$ definido en la ecuación (29) deberá ser promediado en el tiempo por su carácter oscilatorio. Para el límite de tiempos largos, estos autovalores variarán entre $\lambda_1 = -\cos \Delta_{\theta_F}$ y $\lambda_2 = +\cos \Delta_{\theta_F}$ en las dos discontinuidades existentes en el símbolo de la matriz. Se adjunta en el Anexo III una explicación más extensa de la forma de calcular este coeficiente b en función de los dos autovalores diferentes. Resumiendo, en el caso de una matriz con dos autovalores $\pm\lambda$ marcados por las discontinuidades en $\pm\theta_F$, nuestra forma de calcular el coeficiente logarítmico será:

$$b = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{1}{2\pi^2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \log \left| \frac{x+\lambda}{x-\lambda} \right| dx \quad (34)$$

$$b_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2\pi^2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| dx \quad (35)$$

$$b_{sat} = \int_{-\cos \Delta_{\theta_F}}^{+\cos \Delta_{\theta_F}} \frac{1}{2\pi^2} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \log \left| \frac{x + \cos \Delta_{\theta_F}}{x - \cos \Delta_{\theta_F}} \right| dx \quad (36)$$

Para el quench correspondiente a $\theta_F = \frac{\pi}{3}$ darán lugar a los valores $b_0 = 0,33333$ y $b_{sat} = 0,19432$. Análogamente a lo planteado para el coeficiente a , esperaremos que el ajuste responda correctamente para límites de tiempos bajos y largos.

El análisis del coeficiente $c(t)$ se omitirá en el presente trabajo, aunque su dependencia se considere en el ajuste a la ecuación (32). Por ello, nos centraremos en el análisis de la evolución temporal de los coeficientes lineal $a(t)$ y logarítmico $b(t)$, comprobando si responden a los valores teóricos iniciales para tiempos cortos y si convergen para $(t \rightarrow \infty)$ a los valores teóricos de saturación.

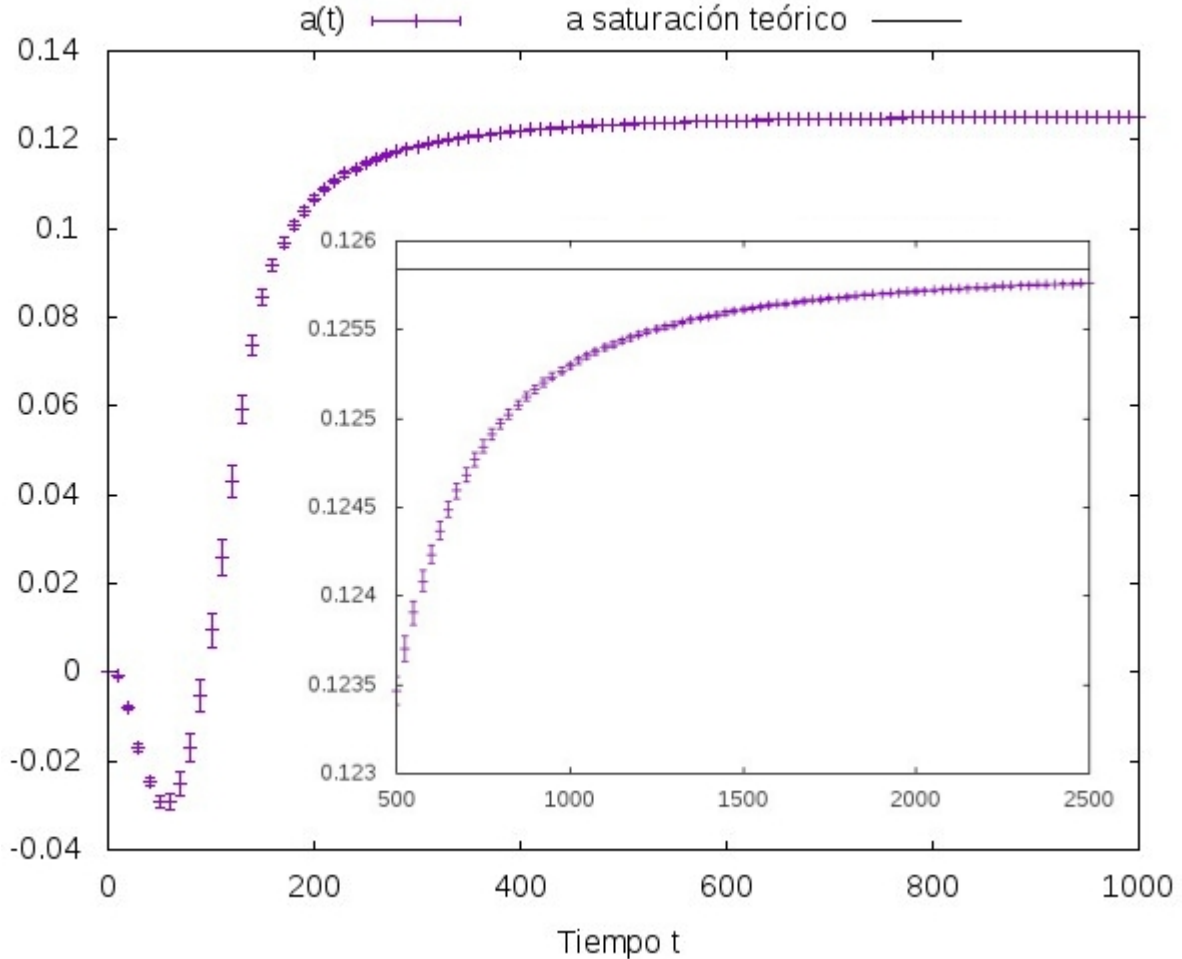


Figura 10: *Evolución temporal del coeficiente lineal. Simulación.*

Observamos cómo los resultados de la simulación para $t = 0,0$ son coherentes, con término lineal prácticamente nulo, $a_0 = -4,97044 \times 10^{-6} \pm 4 \times 10^{-8}$. Sin embargo, este toma valores negativos

hasta $t = 100,0$, lo que podremos achacar al mal ajuste esperado de la ecuación (32) para tiempos intermedios. Esto resulta consistente con el aumento del error del ajuste observado para este intervalo de tiempo. Por otra parte, se observa cómo la convergencia para tiempos largos hacia el valor de saturación del coeficiente lineal es satisfactoria. Obtenemos para $t = 2840,0$ el valor en la simulación $a_{sat} = 0,12578 \pm 2 \times 10^{-6}$ con un intervalo de confianza del 95 %, bastante cercano al valor teórico $a_{sat} = 0,12584$. Comentaremos más adelante qué ocurre alrededor de ese tiempo $t = 2840,0$ para el que se presenta los valores de saturación de los coeficientes lineal y logarítmico correspondientes a las simulaciones realizadas.

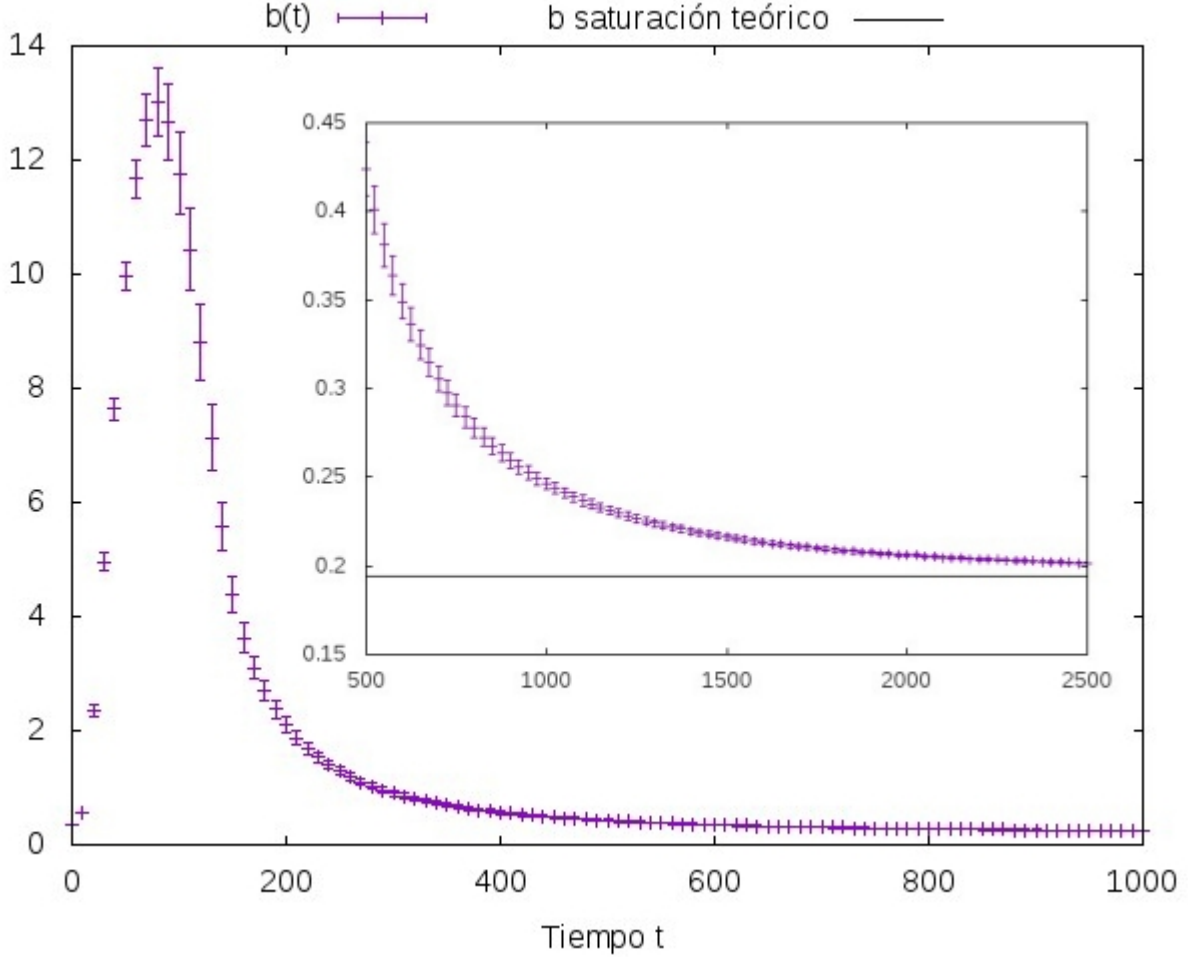


Figura 11: *Evolución temporal del coeficiente logarítmico. Simulación.*

Análogamente, para $t = 0,0$ obtenemos como valor del coeficiente logarítmico en la simulación $b_0 = 0,33378 \pm 5 \times 10^{-6}$, muy cercano al valor teórico $b_0 = 0,33333$ (tal y como ocurría en el ajuste correspondiente a la Figura 4). Para tiempos intermedios observamos un pico en el valor del coeficiente b . Este comportamiento es simultáneo al aumento del error del ajuste, por lo que cabe la posibilidad de que sea resultado del deficiente ajuste que esperábamos para tiempos intermedios. De nuevo, la convergencia hacia el valor de saturación teórico vuelve a ser buena, presentando un valor en la simulación para $t = 2840,0$ de $b_{sat} = 0,19984 \pm 0,00022$, muy cercano al valor teórico

esperado $b_{sat} = 0,19432$, al que debería aproximarse para valores mayores de t .

Veamos por último la razón de que no podamos obtener valores para los coeficientes a_{sat} y b_{sat} en las simulaciones más cercanos a los valores esperados teóricamente. Para ello, deberíamos tomar simulaciones para tiempos más largos que $t = 2840,0$, instante de tiempo en el que presentamos los valores de saturación en la simulación en este apartado (4.2). Sin embargo, veamos qué ocurre con los coeficientes para tiempos más largos:

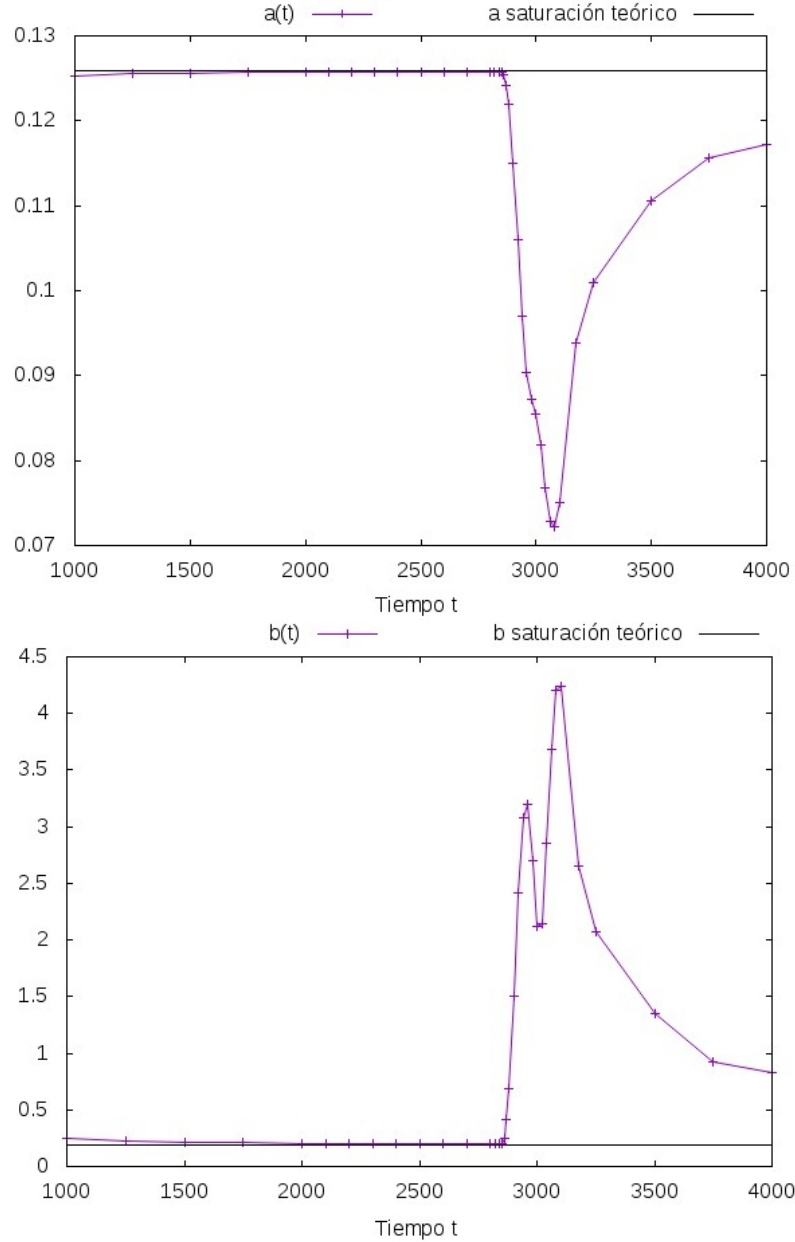


Figura 12: *Problemas en los coeficientes lineal y logarítmico para tiempos largos.*

Existen problemas en el cálculo de la entropía para $t > 2840,0$, como refleja la repentina variación de

los coeficientes lineal y logarítmico. La imposibilidad de obtener simulaciones correctas para tiempos mayores del citado valor $t = 2840,0$ impide obtener valores de saturación “experimentales” más cercanos a lo esperado teóricamente para el límite de tiempos largos. La tendencia de la convergencia parece indicar que si no apareciesen estos problemas en la simulación a partir de $t = 2840,0$, podríamos obtener un ajuste muy preciso de la simulación al modelo teórico en saturación. Estos problemas pueden deberse a un error en el cálculo del símbolo de la matriz explícitamente con el tiempo, $\mathcal{G}_k(t)$, según la ecuación (29). Esta ecuación utiliza funciones trigonométricas en las que el argumento puede llegar a ser notablemente grande para valores elevados de tiempo.

5. Conclusiones

- En la cadena estática de fermiones sin espín unidimensional, la ley de escala justifica que el coeficiente lineal de la entropía de entrelazamiento con respecto a la dimensión del subsistema sea nulo.
- En teorías no críticas unidimensionales, la entropía de los subsistemas satura asintóticamente a un valor constante con su dimensión. En estos casos, aumentar la dimensión de la subcadena apenas incrementa el entrelazamiento del estado.
- En el caso de teorías críticas, resulta provechoso aumentar la dimensión del subsistema, ya que la entropía de entrelazamiento crece logarítmicamente con esa dimensión. En este caso, ese aumento sí que genera un crecimiento del entrelazamiento.
- Una teoría crítica de rango $L + 1$ puede ser entendida como una teoría en general no crítica de rango L con una discontinuidad en determinados momentos $\pm\theta_F$ del símbolo de la matriz \mathcal{G}_k .
- Un proceso de quench corresponde al cambio instantáneo del modelo de interacción de la cadena de fermiones sin espín. Esto provoca que los autoestados bajo el antiguo hamiltoniano ya no lo sean bajo el nuevo hamiltoniano que rige la interacción, provocando un proceso de evolución temporal en el que crece el entrelazamiento del sistema. En este caso, diferente al de la cadena estática, se produce una saturación de la entropía de entrelazamiento para tiempos largos proporcional a la dimensión del subsistema considerado, apareciendo por lo tanto un coeficiente lineal no nulo.
- Para crear entrelazamiento, en el caso estudiado a lo largo de este trabajo hemos aprovechado tanto el carácter crítico de la teoría inicial como la evolución temporal generada por el quench.
- La creación de entrelazamiento con el aumento de la entropía mediante la evolución a lo largo del tiempo del estado de la cadena de fermiones sin espín tras el quench puede entenderse a través de la fórmula analítica de Pasquale Calabrese y John Cardy^[5]. Aunque esta fórmula esté pensada para describir la evolución temporal de la cadena de espines a través de un modelo de Ising XY en un campo magnético transversal Z , sus resultados pueden extrapolarse y adaptarse a la cadena de fermiones sin espín.

- Un efecto no tenido en cuenta por la fórmula de Calabrese y Cardy es el carácter crítico inicial del subsistema. Esta fórmula toma la entropía inicial como nula, sin reflejar esa dependencia logarítmica con el tamaño del subsistema. Para entender este carácter crítico inicial y su evolución a lo largo del tiempo, hemos analizado no solo la evolución temporal del término lineal con la dimensión del subsistema en la entropía según la Fórmula de Calabrese y Cardy, sino que también hemos incluido la evolución temporal de un término logarítmico que represente el carácter crítico de la teoría inicial.

6. Bibliografía

Recursos bibliográficos utilizados:

- [1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?” *Physical Review*, volumen 47, número 10, páginas 777-780, 1935. arXiv:quant-ph/0701001v1 DOI: 10.1103/PhysRev.47.777
- [2] E. Schrödinger, “Discussion of probability relations between separated systems”. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volumen 31 , número 4, páginas 555–563, 1935. DOI:10.1017/S0305004100013554, Bibcode:1935PCPS...31..555S
- [3] J. S. Bell, “On the Einstein Podolski Rose paradox”. *Physics*, volumen 1, número 3, páginas 195-200, 1964. URL: https://cds.cern.ch/record/111654/files/vol1p195-200_001.pdf
- [4] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger “Experimental Test of Bell’s inequalities Using Time-Varying Analyzers”. *Physical Review Letters*, volumen 49, número 25, páginas 1804-1807, 1982. DOI: 10.1103/PhysRevLett.49.1804
- [5] Pasquale Calabrese y John Cardy. “Evolution of Entanglement Entropy in One-Dimensional Systems”. Marzo 2005. arXiv:cond-mat/0503393v1 [cond-mat.stat-mech] DOI:10.1088/1742-5468/2005/04/P04010
- [6] Maurizio Fagotti y Pasquale Calabrese. “Evolution of entanglement entropy following a quantum quench: Analytic results for the XY chain in a transverse magnetic field”. *Physical Review A*, volumen 78, número 1, Julio 2008. arXiv:0804.3559v1 [cond-mat.stat-mech] DOI:10.1103/PhysRevA.78.010306
- [7] Filiberto Ares, José G. Esteve, Fernando Falceto y Amilcar R. de Queiroz. “Entanglement in fermionic chains with finite range coupling and broken symmetries”. Junio 2015. arXiv:1506.06665v1 [quant-ph] DOI:10.1103/PhysRevA.92.042334
- [8] Filiberto Ares, José G. Esteve y Fernando Falceto. “Entanglement of several blocks in fermionic chains”. *Physical Review A*, volumen 90, número 6, Diciembre 2014. arXiv:1406.1668v1 [quant-ph] DOI:10.1103/PhysRevA.90.062321