A. Anexos

A.1. Anexo I

En el transcurso de este primer anexo demostraremos la forma concreta de la entropía de Von Neumann $S_1(X)$ a partir de la definición de la entropía de Rényi $S_\alpha(X)$. Utilizaremos el siguiente resultado previo:

$$\frac{d}{da}x^a = \frac{d}{da}e^{\log(x)^a} = \frac{d}{da}e^{a\log x} = \log x e^{a\log x} = \log x e^{\log(x)^a} = x^a \log x \tag{37}$$

En caso de que el exponente se acerque a la unidad:

$$\lim_{a\to 1}\frac{d}{da}x^a = x\log x \tag{38}$$

Sabiendo esto, el objetivo a lo largo de este anexo será demostrar que la entropía de Rényi tiende a la forma que toma la entropía de Von Neumann conforme el parámetro α tiende a la unidad. Expresaremos ambas formas de la entropía de entrelazamiento en función de los autovalores λ_{X_i} de la matriz densidad reducida ρ_X, $i \in [1, 2^X]$:

$$S_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\log\left[\mathrm{tr}\left(\rho_X^\alpha\right)\right] = \frac{1}{1-\alpha}\log\left(\sum_{i=1}^{2^X}\lambda_{X_i}^\alpha\right) \tag{39}$$

$$S_1(X) = -\mathrm{tr}\left(\rho_X\log\rho_X\right) = -\left(\sum_{i=1}^{2^X}\lambda_{X_i}\log\lambda_{X_i}\right) \tag{40}$$

Observamos como para $\alpha = 1$, S_α es una indeterminación del tipo $\frac{\log 1}{0} = \frac{0}{0}$. Desarrollaremos el argumento del logaritmo de esta función por Taylor en las proximidades de $\alpha = 1$, truncando la serie en orden 2:

$$u_X(\alpha) = \sum_{i=1}^{2^X}\lambda_{X_i}^\alpha$$

$$u_X(\alpha = 1) = \sum_{i=1}^{2^X}\lambda_{X_i} = \mathrm{tr}\rho_X = 1$$

$$u_X'(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}u_X(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{i=1}^{2^X}\lambda_{X_i}^\alpha\right) = \sum_{i=1}^{2^X}\frac{d}{d\alpha}\lambda_{X_i}^\alpha = \sum_{i=1}^{2^X}\lambda_{X_i}^\alpha\log\lambda_{X_i}$$

$$u_X'(\alpha = 1) = \lim_{\alpha\to 1}u_X'(\alpha) = \sum_{i=1}^{2^X}\lambda_{X_i}\log\lambda_{X_i} = -S_1(X)$$

Según la forma descrita en la ecuación (40). Tomaremos el citado límite en la entropía de Rényi al mismo tiempo que desarrollamos $u_X(\alpha)$ por Taylor alrededor de $\alpha = 1$, lo que resultará posible por estar considerando el límite $\alpha \to 1$:

$$\lim_{\alpha\to 1}S_\alpha(X) = \lim_{\alpha\to 1}\frac{1}{1-\alpha}log\left[u_X(\alpha)\right] =$$

$$= \lim_{\alpha\to 1}\frac{1}{1-\alpha}log\left[u_X(\alpha = 1) + u_X'(\alpha = 1)\left(\alpha - 1\right) + O\left[\left(\alpha - 1\right)^2\right]\right] =$$

$$= \lim_{\alpha \to 1} \frac{1}{1-\alpha} log \left[1 - S_1(X)(\alpha - 1) + O\left[(\alpha-1)^2\right]\right] =$$
$$= \lim_{\alpha \to 1} \frac{1}{1-\alpha} log \left[1 + \left(S_1(X)(1 - \alpha) + O\left[(\alpha-1)^2\right]\right)\right]$$

Teniendo en cuenta que $\log(1 + x) \simeq x$ cuando $x <<$, y sabiendo que el término $x = S_1(X)(1-\alpha) + O\left[(\alpha-1)^2\right]$ cumple esto cuando $\alpha \to 1$:

$$\lim_{\alpha \to 1} S_\alpha(X) = \lim_{\alpha \to 1} \frac{1}{1-\alpha}\left[S_1(X)(1-\alpha) + O\left[(\alpha-1)^2\right]\right] = S_1(X) \tag{41}$$

Tal y como queríamos demostrar. El paso desde la expresión de la ecuación (40), correspondiente a $S_1(\rho_X)$, a la ecuación (17), correspondiente a $S_1(V_X)$, será análogo al paso desde la ecuación (2), correspondiente a $S_\alpha(\rho_X)$. a la ecuación (16), correspondiente a $S_\alpha(V_X)$.

A.2. Anexo II

A lo largo de este segundo anexo, demostraremos la forma concreta de los nuevos parámetros de interacción tras la eliminación de los links a segundos vecinos que marcará el inicio de la evolución temporal.

A.2.1. Polinomio asociado

Para una cadena de fermiones con rango de interacción L y parámetros de interacción A_l y B_l, definimos inicialmente:

$$\begin{cases} \Theta(z) = \sum\limits_{l=-L}^{+L} A_l z^l \\ \\ \Xi(z) = \sum\limits_{l=-L}^{+L} B_l z^l \end{cases} \tag{42}$$

Veamos en primer lugar cómo afecta la conjugación e inversión del argumento complejo z a estos polinomios:

$$\begin{cases} \Theta(z^{-1}) = \sum\limits_{l=-L}^{+L} A_l z^{-l} = \sum\limits_{l=-L}^{+L} A_{-l} z^{-l} = \Theta(z) \\ \\ \Xi(z^{-1}) = \sum\limits_{l=-L}^{+L} B_l z^{-l} = \sum\limits_{l=-L}^{+L} (-B_{-l}) z^{-l} = -\sum\limits_{l=-L}^{+L} B_{-l} z^{-l} = -\Xi(z) \end{cases} \tag{43}$$

Debido a la simetría en el índice l asociada a A_l y la antisimetría relacionada con B_l comentadas en el apartado (2.1), podemos validar las igualdades planteadas en la ecuación (43). Por otra parte, si estudiamos cómo afecta la conjugación del argumento z:

$$\begin{cases} \Theta(\bar{z}) = \sum\limits_{l=-L}^{+L} A_l (\bar{z})^l = \sum\limits_{l=-L}^{+L} \overline{\bar{A_l} z^l} = \sum\limits_{l=-L}^{+L} \overline{A_l z^l} = \overline{\Theta(z)} \\ \\ \Xi(\bar{z}) = \sum\limits_{l=-L}^{+L} B_l (\bar{z})^l = \sum\limits_{l=-L}^{+L} \overline{\bar{B_l} z^l} = \sum\limits_{l=-L}^{+L} \overline{B_l z^l} = \overline{\Xi(z)} \end{cases} \tag{44}$$

Deducimos las relaciones presentadas en la ecuación (44) por haber definido los coeficientes de interacción como reales, con una simple reorganización del orden de los sumandos. Ambas observaciones resultarán de utilidad a la hora de estudiar las raíces complejas para las que se anula el polinomio asociado, y cómo se relacionan unas con otras. A partir de estos dos polinomios, con rango en potencias de z desde $-L$ hasta $+L$, definiremos el polinomio correspondiente a la cadena de fermiones con rango de interacción L:

$$P(z) = z^{2L}[\Theta(z) + \Xi(z)][\Theta(z) - \Xi(z)] \tag{45}$$

Teniendo en cuenta el rango de potencias de Θ y Ξ, el rango correspondiente al factor $[\Theta(z) + \Xi(z)][\Theta(z) - \Xi(z)]$ abarcará desde un exponente mínimo $-2L$ hasta un exponente máximo de $+2L$. Por esta razón introducimos el factor z^{2L} multiplicando en el polinomio, ya que de esta manera sus potencias de z variarán desde exponente 0 hasta exponente máximo $4L$. De esta forma, podemos afirmar que en este caso el polinomio asociado a una cadena de fermiones con rango de interacción L y parámetros A_l y B_l resulta un polinomio complejo de coeficientes reales, según lo establecido en el apartado (2.1), y grado $4L$ para las potencias complejas. Por ello, podremos afirmar que este polinomio presentará $4L$ soluciones en las que se anule, es decir, 4 soluciones por grado de interacción que presente la cadena.

Para estudiar cómo se agrupan las raíces de este polinomio, suponemos que este se anula para un determinado argumento $z = se^{i\theta}$. Por lo tanto, si $P(z) = 0$, veamos cómo se comporta el polinomio para el conjugado y el inverso de ese número complejo z:

$$\begin{aligned} P(z^{-1}) &= (z^{-1})^{2L}[\Theta(z^{-1}) + \Xi(z^{-1})][\Theta(z^{-1}) - \Xi(z^{-1})] \\ &= z^{-2L}[\Theta(z) - \Xi(z)][\Theta(z) + \Xi(z)] = z^{-4L}P(z) = 0 \end{aligned} \tag{46}$$

$$P(\bar{z}) = (\bar{z})^{2L}\left[\Theta\left(\bar{z}\right) + \Xi\left(\bar{z}\right)\right]\left[\Theta\left(\bar{z}\right) - \Xi\left(\bar{z}\right)\right] = \overline{z^{2L}}\left[\overline{\Theta(z)} + \overline{\Xi(z)}\right]\left[\overline{\Theta(z)} - \overline{\Xi(z)}\right] = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0 \tag{47}$$

Donde en la ecuación (46) hemos utilizado los resultados de (43), mientras que en la ecuación (47) han sido empleados los resultados de (44). Según la ecuación (46), si un número complejo z es raíz del $P(z)$, también lo será su inverso z^{-1}. Análogamente, también será solución su conjugado $\bar{z}$ según la ecuación (47). Combinando el resultado obtenido en (46) y (47), podemos deducir a su vez que el conjugado del inverso de z, $\overline{z^{-1}}$, será solución del citado polinomio. Las $4L$ raíces del polinomio se agruparan en L soluciones (una por cada grado de interacción), distribuidas en grupos de 4 en torno a una solución conocida z:

$$z = se^{i\theta} \qquad z^{-1} = \frac{1}{s}e^{-i\theta} \qquad \bar{z} = se^{-i\theta} \qquad \overline{z^{-1}} = \frac{1}{s}e^{i\theta} \qquad \rightarrow \qquad s, \theta \in \mathbb{R} \tag{48}$$

Para analizar el caso con sentido físico (argumento z sobre la circunferencia unitaria), requeriremos tener en cuenta que Θ y Ξ resultan generalizaciones de F_k y G_k para argumentos complejos de carácter general. Esto ayudará a agrupar las $4L$ raíces complejas en $2L$ soluciones dobles, como veremos a continuación. En el caso de argumentos dentro de la circunferencia unidad ($z = e^{i\theta_k}$):

$$\begin{cases} \Theta(e^{i\theta_k}) = \sum\limits_{l=-L}^{+L} A_l e^{i\theta_k l} = F_k(\theta_k) \\ \\ \Xi(e^{i\theta_k}) = \sum\limits_{l=-L}^{+L} B_l e^{i\theta_k l} = G_k(\theta_k) \end{cases} \tag{49}$$

Podemos realizar un razonamiento análogo en este caso concreto, obteniendo de nuevo L grupos de 4 soluciones. Ahora bien, en el caso de la circunferencia unidad, los argumentos z son unimodulares. Tomando $s = 1$, las soluciones quedan agrupadas según:

$$z = \overline{z^{-1}} = e^{i\theta} \qquad\qquad z^{-1} = \bar{z} = e^{-i\theta} \tag{50}$$

Observamos cómo en este caso el conjugado de un número complejo coincide con su inverso, así como el conjugado del inverso con el propio número. Por ello, agruparemos las soluciones en L grupos de 2 soluciones dobles, correspondientes a un número complejo $z = e^{i\theta_F}$ y su conjugado $\bar{z} = e^{-i\theta_F}$. Por ello, al introducir una discontinuidad en el símbolo de la matriz $\mathcal{G}_k$ este cambio de signo deberá ser establecido en el intervalo $\theta_k \in [-\theta_F, +\theta_F]$. Debido a que definimos el momento k de los modos de Fourier como un número entre 0 y $N-1$, el argumento angular del modo de Fourier se encontrará comprendido en el intervalo $\theta_k \in [0, 2\pi)$. Por esa razón, deberemos introducir el cambio de signo en el intervalo $\theta_k \in (\theta_F, 2\pi - \theta_F)$.

A.2.2. Polinomio asociado al estado inicial

Para el estado de partida de las simulaciones hemos tomado una cadena crítica de fermiones con grado de interacción a segundos vecinos, $L = 2$. Hemos considerado para ello un modelo con interacción $L = 1$ y parámetros (h_0, γ_0) con carácter en general no crítico y un cambio de signo signo en el símbolo de la matriz para $\theta_k \in [-\theta_F, +\theta_F]$ Esta presencia de las raíces dobles $z = e^{i\theta_F}$ y $\bar{z} = e^{-i\theta_F}$ en el polinomio asociado confieren a la teoría carácter crítico, tal y como hemos comentado en el apartado (3.4), y aumentan de L a $L+1$ el rango de interacción de la cadena (en este caso, el aumento será de $L = 1$ a $L = 2$). Podremos expresar su hamiltoniano en forma diagonal, de tal manera que $H_0 = \mathcal{E}_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_{k_0} \left(d^\dagger_{k_0} d_{k_0} - \frac{1}{2} \right)$.

Veamos su efecto en el polinomio correspondiente, relacionándolo con el aumento del grado de interacción a vecinos en una unidad. Sea P_0 el polinomio asociado a un modelo con interacción $L = 1$ con parámetros (h_0, γ_0), que definirán las funciones $\Theta_0(z)$ y $\Xi_0(z)$, y P'_0 el correspondiente a aumentar el rango de los acoplos a siguientes vecinos al incluir las citadas raíces en el polinomio, que traduciremos en nuestra simulación con la introducción de un cambio de signo en el símbolo. A partir de este modelo calculamos el conjunto de matrices $\mathcal{G}_{k_0}$ correspondientes al estado de partida.

$$P'_0(z) = (z - e^{i\theta_F})^2 (z - e^{-i\theta_F})^2 P_0(z) = (z - e^{i\theta_F})^2 (z - e^{-i\theta_F})^2 z^2 [\Theta_0(z) + \Xi_0(z)][\Theta_0(z) - \Xi_0(z)] \tag{51}$$

Observamos cómo la adición de estas dos raíces dobles eleva el grado del polinomio del modelo de partida a 8, lo que corresponde a grado de interacción con segundos vecinos, $L = 2$. Podemos redefinir unas nuevas funciones Θ'_0 y Ξ'_0 para reorganizar el polinomio correspondiente de tal manera que presente la forma general definida en la ecuación (45) para $L = 2$:

$$\begin{aligned} P'_0(z) &= (z - e^{i\theta_F})^2 (z - e^{-i\theta_F})^2 z^2 [\Theta_0(z) + \Xi_0(z)][\Theta_0(z) - \Xi_0(z)] = \\ &= \left(\frac{(z - e^{i\theta_F})(z - e^{-i\theta_F})}{z} \right)^2 z^4 [\Theta_0(z) + \Xi_0(z)][\Theta_0(z) - \Xi_0(z)] = \\ &= z^4 \left[\left[\frac{(z - e^{i\theta_F})(z - e^{-i\theta_F})}{z} \right] (\Theta_0(z) + \Xi_0(z)) \right] \left[\left[\frac{(z - e^{i\theta_F})(z - e^{-i\theta_F})}{z} \right] (\Theta_0(z) - \Xi_0(z)) \right] \end{aligned} \tag{52}$$

Teniendo en cuenta que la forma genérica para el polinomio asociado de grado $L = 2$ será $P'_0 = z^4[\Theta'_0(z) + \Xi'_0(z)][\Theta'_0(z) - \Xi'_0(z)]$, podremos concluir que la nueva forma de las funciones

Θ_0' y Ξ_0' será

$$\Theta_0'(z) = \frac{(z - e^{i\theta_F})(z - e^{-i\theta_F})}{z}\Theta_0(z) = (z - 2\cos\theta_F + z^{-1})(h - z - z^{-1})$$
$$= (-z^2 + z(h_0 + 2\cos\theta_F) - 2h_0\cos\theta_F - 2 + z^{-1}(h_0 + 2\cos\theta_F) - z^{-2}) \tag{53}$$
$$\Xi_0'(z) = \frac{(z - e^{i\theta_F})(z - e^{-i\theta_F})}{z}\Xi_0(z) = (z - 2\cos\theta_F + z^{-1})(\gamma z - \gamma z^{-1})$$
$$= (\gamma_0 z^2 - 2\gamma_0\cos\theta_F\, z + 2\gamma_0\cos\theta_F\, z^{-1} - \gamma_0 z^{-2}) \tag{54}$$

donde en la ecuación (53) hemos tenido en cuenta la normalización $A_1 = A_{-1} = -1$ planteada en el apartado (2.1). Volveremos a utilizar esta normalización dentro de este mismo Anexo II. Observamos cómo al redefinir estas funciones Θ' y Ξ', los exponentes de ambos polinomios varían desde -2 hasta $+2$, tal y como esperamos de un sistema con interacción a segundos vecinos $L = 2$.

A.2.3. Polinomio asociado al quench. Nuevos parámetros h y γ

Tras la aplicación del quench, esta retirada de los links a segundos vecinos deja un sistema regido por un hamiltoniano con interacción $L = 1$ a primeros vecinos y parámetros (h, γ) definidos en la sección (4). Podemos expresar el nuevo hamiltoniano en su forma diagonal de tal forma que $H = \mathcal{E} + \sum_{k=0}^{N-1} \Lambda_k \left(d_k^\dagger d_k - \frac{1}{2}\right)$. A partir de este modelo calculamos el conjunto de matrices $\mathcal{G}_k$ correspondientes al modelo con el que evoluciona la cadena tras el quench.

La forma del polinomio en este caso resulta sencilla:

$$P(z) = z^2[\Theta(z) + \Xi(z)][\Theta(z) - \Xi(z)] \tag{55}$$

En primer lugar, analizaremos la forma explícita de Θ y Ξ:

$$\Theta(z) = h - z - z^{-1} \tag{56}$$

$$\Xi(z) = \gamma z - \gamma z^{-1} \tag{57}$$

Para determinar los nuevos parámetros de interacción, impondremos la conservación del polinomio tras reducir el grado de interacción a $L = 1$. Esta conservación de la totalidad del polinomio puede traducirse en la conservación de las funciones Θ y Ξ tras la retirada de los links a segundos vecinos, lo que a su vez puede entenderse como la eliminación de las potencias de z con exponente ± 2 de las funciones Θ_0' y Ξ_0', que pasarán a ser:

$$\Theta_0''(z) = z(h_0 + 2\cos\theta_F) - 2h_0\cos\theta_F - 2 + z^{-1}(h_0 + 2\cos\theta_F) \tag{58}$$

$$\Xi_0''(z) = -2\gamma_0\cos\theta_F\, z + 2\gamma_0\cos\theta_F\, z^{-1} \tag{59}$$

Observamos cómo en la ecuación (58) el parámetro $A_1 = A_{-1} = h_0 + 2\cos\theta_F$. Por ello, deberemos renormalizar ambas funciones dividiendo por el factor $-(h_0 + 2\cos\theta_F)$ para conseguir la normalización $A_1 = A_{-1} = -1$ utilizada en el apartado (2.1). Una vez normalizados, los polinomios serán:

$$\Theta_0'''(z) = \frac{2h_0\cos\theta_F + 2}{h_0 + 2\cos\theta_F} - z - z^{-1} \tag{60}$$

$$\Xi_0'''(z) = \frac{2\gamma_0\cos\theta_F}{h_0 + 2\cos\theta_F}z - \frac{2\gamma_0\cos\theta_F}{h_0 + 2\cos\theta_F}z^{-1} \tag{61}$$

Podremos determinar los parámetros de interacción una vez llevado a cabo el quench igualando estos polinomios Θ_0''' y Ξ_0''' de las ecuaciones (60) y (61), correspondientes al estado inicial con links a segundos vecinos retirados, con los polinomios Θ y Ξ definidos en (56) y (57)

$$h = \frac{h_0 \cos\theta_F + 1}{h_0/2 + \cos\theta_F} \qquad\qquad \gamma = \frac{\gamma_0 \cos\theta_F}{h_0/2 + \cos\theta_F}, \tag{62}$$

tal y como habíamos planteado en la ecuación (26), dentro de la introducción de la sección (4).

A.3. Anexo III

El objetivo de este tercer anexo será profundizar en la manera de calcular el coeficiente logarítmico en la entropía de un subsistema de la cadena de fermiones, demostrando la forma reflejada en la ecuación (34). Para el caso de la entropía de Von Neumann, $\alpha = 1$, podremos expresar este coeficiente como

$$b_{\alpha=1} \equiv b_1 = 2\sum_{r=1}^{R} J_1(r,r) \tag{63}$$

donde R es el número de discontinuidades que presenta la matriz. En este caso, trataremos el caso de $R = 2$ discontinuidades en el símbolo de la matriz, con autovalores $\lambda_r,\ r = 1, 2$. Sea:

$$f_\alpha(y,z) = \frac{1}{1-\alpha}\log\left[\left(\frac{y+z}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{y-z}{2}\right)^\alpha\right] \tag{64}$$

Para el argumento $y = 1$, la función toma la forma:

$$f_\alpha(y=1,z) = \frac{1}{1-\alpha}\log\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{1-z}{2}\right)^\alpha\right] \tag{65}$$

Desarrollamos por Taylor el argumento del logaritmo de la ecuación (65) alrededor alrededor de $\alpha = 1$, teniendo en cuenta los resultados de las ecuaciones (37) y (38):

$$v(\alpha,z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{1-z}{2}\right)^\alpha$$
$$v(\alpha=1,z) = 1$$
$$v'(\alpha,z) = \frac{dv(\alpha,z)}{d\alpha} = \left(\frac{1+z}{2}\right)^\alpha \log\left(\frac{1+z}{2}\right) + \left(\frac{1-z}{2}\right)^\alpha \log\left(\frac{1-z}{2}\right)$$
$$v'(\alpha=1,z) = \lim_{\alpha\to1} v'(\alpha,z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)\log\left(\frac{1+z}{2}\right) + \left(\frac{1-z}{2}\right)\log\left(\frac{1-z}{2}\right)$$
$$v(\alpha,z) = v(\alpha=1,z) + v'(\alpha=1,z)(\alpha-1) + O\left[(\alpha-1)^2\right] =$$
$$= 1 + \left[\left(\frac{1+z}{2}\right)\log\left(\frac{1+z}{2}\right) + \left(\frac{1-z}{2}\right)\log\left(\frac{1-z}{2}\right)\right](\alpha-1) + O\left[(\alpha-1)^2\right]$$

Tomamos en la ecuación (65) el límite ($\alpha \to 1$), desarrollando simultáneamente la función $v(x,\alpha)$ por Taylor alrededor de $\alpha = 1$:

$$f_1(1,z) = \lim_{\alpha\to1} f_\alpha(1,z) = \lim_{\alpha\to1}\frac{1}{1-\alpha}\log\left[v(\alpha,z)\right] =$$
$$\lim_{\alpha\to1}\frac{1}{1-\alpha}\log\left[1 + \left(\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)\log\left(\frac{1+z}{2}\right) + \left(\frac{1-z}{2}\right)\log\left(\frac{1-z}{2}\right)\right](\alpha-1) + O\left[(\alpha-1)^2\right]\right)\right]$$

Teniendo en cuenta que $\log(1+x) \simeq x$ cuando $x <<$, y sabiendo que el término $x = \left[\left(\frac{1+z}{2}\right)\log\left(\frac{1+z}{2}\right) + \left(\frac{1-z}{2}\right)\log\left(\frac{1-z}{2}\right)\right](\alpha-1) + O\left[(\alpha-1)^2\right]$ cumple esto cuando $\alpha \to 1$:

$$f_1(1,z) = \lim_{\alpha\to 1} f_\alpha(1,z) = -\left[\left(\frac{1+z}{2}\right)\log\left(\frac{1+z}{2}\right) + \left(\frac{1-z}{2}\right)\log\left(\frac{1-z}{2}\right)\right] \tag{66}$$

Llegados a este punto, podemos introducir:

$$J_1(r,r') = \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda_{r-1}}^{\lambda_r} \frac{df_1(1,x)}{dx}\omega_{r'}(x)dx \tag{67}$$

siendo

$$\omega_r = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{x-\lambda_r}{x-\lambda_{r-1}}\right| \tag{68}$$

y pudiendo calcular a partir de (66):

$$\frac{df_1(1,x)}{dx} = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \tag{69}$$

De esta forma, para dos discontinuidades en el símbolo de la matriz, asociadas a los autovalores $\pm\lambda$:

- $r = 1 \to \lambda_r = +\lambda, \lambda_{r-1} = -\lambda$
- $r = 2 \to \lambda_r = -\lambda, \lambda_{r-1} = +\lambda$

Sabiendo esto, podemos afirmar que:

$$J_1(1,1) = J_1(2,2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{x+\lambda}{x-\lambda}\right|dx \tag{70}$$

De esta manera, podemos calcular directamente el coeficiente logarítmico como:

$$b_1 = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{1}{2\pi^2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\log\left|\frac{x+\lambda}{x-\lambda}\right|dx \tag{71}$$