



# **Universidad Zaragoza**

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATERIA CONDENSADA

Anexos del trabajo fin de grado:

---

## **NANOFABRICACIÓN Y PROPIEDADES DE TRANSPORTE DE HILOS SUPERCONDUCTORES DE ALTA TEMPERATURA CRÍTICA**

---

**Abel García Rubio**

---

Directores:  
Antonio Badía Majos

Irene Lucas del Pozo

# Índice

A. Efecto Meissner	2
B. Teoría de London	3
C. La teoría de Ginzburg-Landau	4
D. Teoría BCS y pares de Cooper	5
E. Dinámica y propiedades de los vórtices	6
F. Planos de difracción (hkl)	7
G. Componentes de densidad de corriente en ejes intrínsecos del campo	8
Referencias	9

## 1. A: Efecto Meissner

*“A metal in the superconducting state never allows a magnetic flux density to exist in its interior.”<sup>[1]</sup>*

A. C. Rose-Innes

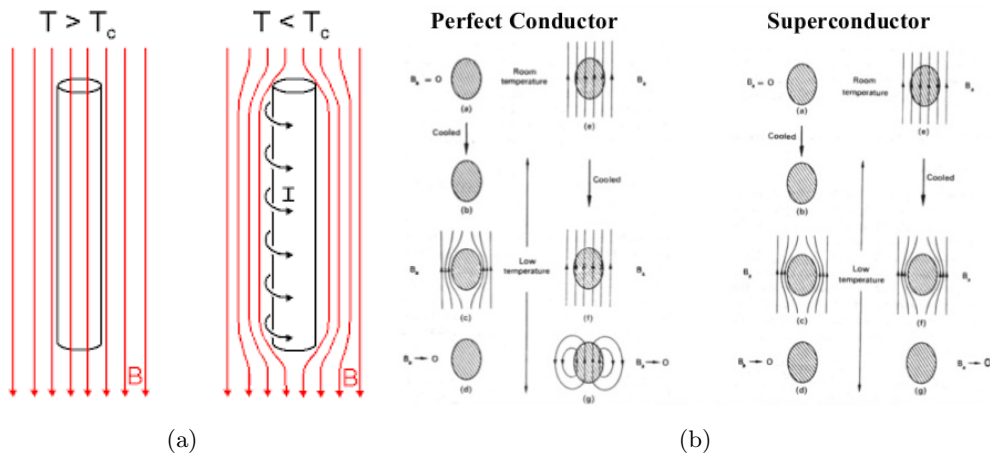
E.H. Rhoderick

El estudio de los superconductores en presencia de un campo magnético permite mostrar algunas características esenciales de su comportamiento. Consideremos un material que se encuentra en el estado superconductor y es sometido a un campo magnético débil, entonces se crean corrientes superficiales de electrones que, en movimiento, generan un campo magnético (Ley de Ampère) que contrarresta flujo en el interior, ver imagen 1.a. De la mismo modo ocurre cuando el material se encuentra sumergido en un campo magnético y es llevado al estado de SC. No hay campo magnético en el interior, es expulsado. A este fenómeno se le conoce como **Efecto Meissner**:

$$B = 0 \quad (\text{A.1})$$

Esta propiedad ha de contrastarse con: si el material es un conductor perfecto se comportará de forma análoga al superconductor cuando es enfriado y, posteriormente, sometido al campo magnético. Como muestra la figura 1.b, el estado final que presentan ambos medios es el mismo si el proceso consiste en primero enfriar y después aplicar campo B (lo expulsan). Sin embargo en el proceso complementario, primero aplicar campo y después enfriar, sólo el SC lo expulsa. Esto se entiende porque en el conductor perfecto se cumple<sup>1</sup>:

$$\dot{B} = 0 \quad (\text{A.2})$$



**Figura 1:** Corrientes superficiales y comportamiento magnético.

<sup>1</sup>Esta relación se obtiene de las ecuaciones de Maxwell considerando nula la resistividad del material.

## 2. B: Teoría de London

Los hermanos F. y H. London dieron una descripción fenomenológica de los aspectos básicos de la SC basada en la idea dos fluidos de Gorter y Casimir. Consideraron las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo para explicar la SC. La corriente SC está formada por los superelectrones, que posteriormente se conocerá como pares de Cooper, y por portadores de carga normales. Despreciando la contribución de éstos últimos y utilizando la vision newtoniana dieron una aproximación a la longitud de penetración,  $\lambda_L$ , que indica la variación de la intensidad del campo magnético dentro del SC. Se justifica el efecto Meissner.

Postularon que la corriente es proporcional al potencial magnético vector, luego se cumple.

$$\vec{j} \propto \vec{A} \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{A} \quad (\text{B.1})$$

Es la ecuación de London que puede también puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\nabla \times \vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B} \quad (\text{B.2})$$

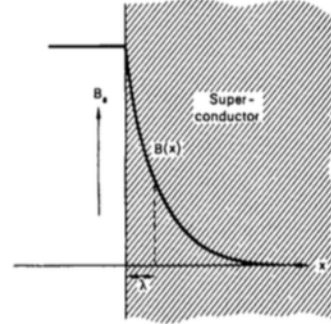
Por otro lado, desarrollando la ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \times \vec{j} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{j} \quad (\text{B.3})$$

Entonces llegamos a la siguiente relación final, sabiendo que  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ :

$$-\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{j} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{B} = \frac{\vec{B}}{\lambda_L^2}} \quad (\text{B.4})$$

Esta relación, con solución en 1D (caso sencillo)  $B(x) = B(0)e^{-\frac{x}{\lambda_L}}$ , indica la variación del campo magnético en el interior del SC.



**Figura 2:** Variación de flujo en un superconductor.

Anteriormente se había dicho que el valor de  $\lambda_L$  se puede obtener desde una visión newtoniana, luego procederemos a calcularlo. Partiendo del dato de que la densidad de corriente de los portadores de carga es  $J_s = n_s q v$ , considerando solo la contribución de los superelectrones. Supongamos que momentáneamente aparece un campo eléctrico,  $E$ , sobre el material, luego:

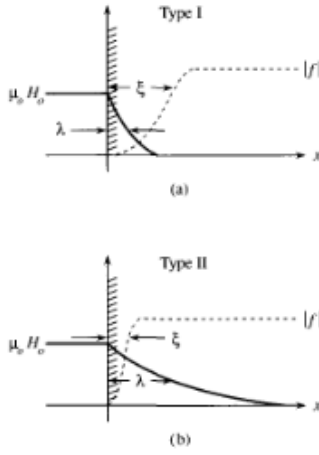
$$\begin{aligned} m \frac{\partial v_s}{\partial t} &= -eE \Rightarrow \frac{\partial j_s}{\partial t} = \frac{e^2 n_s}{m} E \Rightarrow^{(1)} \nabla \times \frac{\partial j_s}{\partial t} = \frac{n_s e^2}{m} \frac{\partial B}{\partial t} \\ &\Rightarrow^{(2)} \nabla^2 B = \frac{\mu_0 n_s e^2}{m} B \Rightarrow \lambda_L = \left( \frac{m}{\mu_0 n_s e^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En (1) se ha utilizado la ley de Faraday de la inducción magnética  $\nabla \times E = -\partial B / \partial t$ . En (2) se ha utilizado una de las ecuaciones de Maxwell,  $\nabla \times B = \mu_0 \cdot j_s$ , y se ha realizado el desarrollo que correspondiente.

### 3. C: La teoría de Ginzburg-Landau

Es una teoría más fundamental que la teoría de London. Si bien se plantea a nivel mesoscópico, es decir prescindiendo de las interacciones microscópicas de los electrones y los átomos del cristal. Se sustenta en la mecánica cuántica para predecir el comportamiento del material. Asume que los electrones se pueden describir por una “función de ondas efectiva”,  $\Psi$ , siendo  $|\Psi|^2$  la densidad de superelectrones.

Partiendo de la consideración de que la parte de energía cinética de la función de ondas tiene el mismo origen que la energía cinética térmica, y asumiendo que la partícula, “superelectrón” en este caso, se encuentra en movimiento en un campo magnético consigue dar una aproximación de las ecuaciones  $\Psi(x, y, z)$  y  $A(x, y, z)$  con una energía libre mínima consistentes con las condiciones de contorno del sistema.



**Figura 3:** Región de separación entre las superficies normal y superconductora.

Ginzburg-Landau incorporan en su función de energía dos parámetros que caracterizan los comportamientos de los sistemas SC: la longitud característica o de correlación,  $\xi$ , indica la escala en la que decae el estado superconductor y longitud de penetración o de London,  $\lambda_L$ , nos da información de cuánto penetra el campo magnético en el interior del SC. Al minimizar esta energía se deduce que el cociente entre estos permite hacer una distinción de los SC existentes. La condición que debe satisfacer para clasificarlos en un superconductor de tipo II es:

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.1})$$

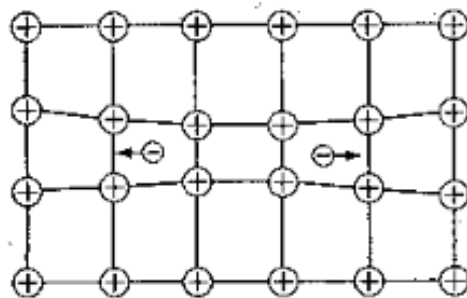
Esta teoría presenta un pequeño inconveniente y a su vez una ventaja respecto a la teoría de London. El hecho desfavorable es que no tiene capacidad predictiva para los valores de  $\lambda$  como lo hace la teoría de London. Lo mismo podemos decir del parámetro  $\xi$ . Sin embargo, al incorporar los valores de  $\xi$  y  $\lambda_L$  en una función de energía libre permite clasificar la respuesta SC en términos de estos.

## 4. D: Teoría BCS y pares de Cooper

La teoría propuesta por *Bardeen, Cooper y Schrieffer* ( **teoría BCS** ) es una teoría que, desde un punto de vista microscópico, logró explicar con éxito el fenómeno de la superconductividad.

En particular, por contra a las dos anteriores, relaciona  $\xi$  y  $\lambda_L$  con propiedades microscópicas del medio y permite por todo evaluarlas para diferentes materiales.

Expone que la corriente dentro de un SC no esta formada por electrones sino que son parejas de electrones, denominados **pares de Cooper**. La siguiente idea física permite visualizar el fenómeno de modo sencillo a la formación de estos pares: cuando un primer electrón se desplaza por un medio SC se ve polarizado mediante la fuerza atractiva que surge entre iones de distintas cargas, se crea el polarón<sup>2</sup>. De esta manera tenemos un exceso de iones positivos lo que da lugar a la atracción de un segundo electrón a la zona. En este caso, si la atracción es lo suficientemente fuerte para superar la fuerza repulsiva Coulombiana entre los dos electrones se crea lo que se conoce como par de Cooper.



**Figura 4:** Formación de pares de Cooper en un SC.

Algunos de los fenómenos que comprende esta teoría son:

- La existencia de un gap de energía asociado al estado puro de superconductividad.
- La transición superconductor-normal tiene un cambio de fase de segundo orden.

La referencia [1, Cap. 9] explica la teoría BCS dando unos aspectos básicos y ofreciendo una visión microscópica a las propiedades de los SC. Habla de la correlación electrónica,  $\xi$ , que es la distancia más corta posible en la que podría haber un cambio significativo en la densidad de superelectrones (cambio en la concentración de los pares de Cooper) lo identifica con la extensión espacial de la función de ondas de los pares de electrones con longitud de coherencia  $\xi$  (teoría GL).

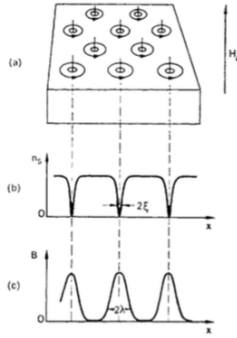
Un ingrediente esencial es el GAP energético. El GAP SC hace referencia a la función de ondas que describe los pares de Cooper. Superar esa energía supone romper la posibilidad del apareamiento de electrones y como consecuencia la desaparición de la superconductividad. Este GAP no es constante sino que disminuye conforme aumentamos la temperatura del material.

También hace hincapié en explicar la existencia de una temperatura crítica de transición relacionada con el gap energético en cero absoluto. Además de justificar la transición de segundo orden que lleva asociado un calor latente.

---

<sup>2</sup>Cuasipartícula compuesta por un electrón y un campo de deformaciones en la red cristalina.

## 5. E: Dinámica y propiedades de los vórtices



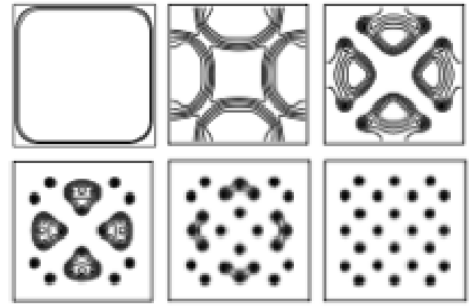
**Figura 5:** Flujo de campo magnético y densidad de superelectrones en el interior de un vórtice.

Como predice la teoría GL los vórtices (torbellinos de corriente SC rodeados por tubos de flujo) aparecen en un estado no ideal de superconductividad que se manifiesta bajo unas condiciones adecuadas de temperatura y campo magnético. Sólo se dan en los superconductores de tipo II.

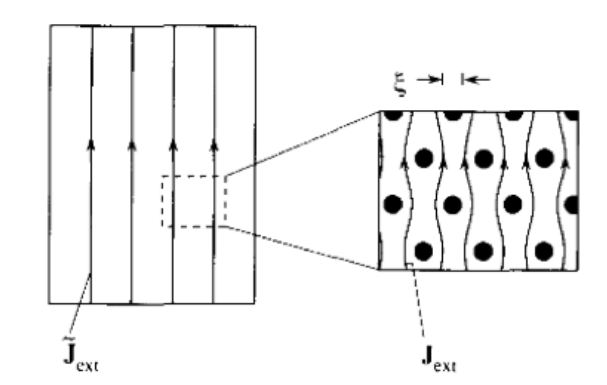
Supongamos que el material se encuentra en estado superconductor, por lo tanto tenemos la expulsión del campo magnético en su interior, y para que se de este fenómeno se necesitan crear corrientes superficiales de pares de electrones. Estos pares de electrones (pares de Cooper) dan lugar a un campo magnético, de igual magnitud, opuesto al aplicado que, con la ley de superposición, se anulan. Ahora bien, si el campo del material crece pasamos a un estado mixto, en el que las líneas de corriente comienzan a circular por zonas determinadas encerrándose sobre sí mismas dando lugar a la formación de los vórtices.

En un caso ideal, estos vórtices los consideraremos como tubos rectos que atraviesan el material y por los que atraviesa el campo magnético, pero en realidad los vórtices se encuentran entrelazándose entre sí. Los vórtices de corriente manifiestan fuerzas de repulsión, algo similar a la repulsión entre dos solenoides, formando una estructura trigonal pues es la más estable energéticamente y acorde con GL.

Como estos núcleos permiten el paso del campo magnético a través de ellos, si sometemos el material a una corriente eléctrica observamos que los vórtices experimentan la fuerza de Lorentz ( $\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$ ). Si este valor de la fuerza supera a la fuerza de “anclaje”, que es proporcional al potencial en el que se encuentran los vórtices, éstos comenzarán a desplazarse y por lo tanto a disipar energía. Dicho de otra manera, estos núcleos son zonas no superconductoras que presentan resistencia cuando la corriente los atraviesa.



**Figura 6:** Simulación de vórtices en una red 2D.



**Figura 7:** Densidad de corriente promedio y densidad de corriente mesoscópica.

Para describir el desplazamiento de los vórtices consideraremos una fuerza interactuante producida por la corriente eléctrica bajo un campo magnético. El vector de densidad de corriente en promedio se puede describir como un vector contenido en el mismo plano de la muestra. Bajo una aproximación mesoscópica este vector no es totalmente rectilíneo sino que es un promedio de una densidad de corriente que se ve alterada por los núcleos. Ver imagen anexa.

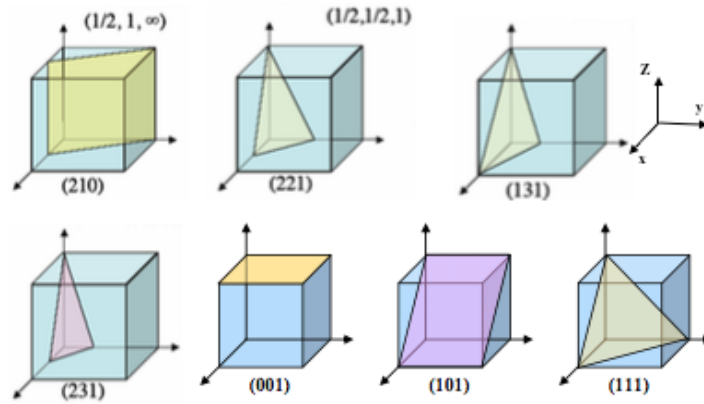
## 6. F: Planos de difracción (hkl)

Para poder entender correctamente el conjunto de planos de difracción ( $hkl$ ) es preciso dar unas definiciones previas.

- Red de Bravais: Conjunto de infinitos puntos que pueden ser definidos por vectores posición de la siguiente forma.  $\vec{R} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$  con  $n_i$  entero. La elección de los vectores  $\vec{a}_i$  es arbitraria con condición que deben definir todos los puntos de la red.
- Red recíproca: Conjunto de todos los  $\vec{k}$  de ondas planas con la periodicidad de una red de Bravais dada. Cualquier vector de dicha red puede ser expresado de la siguiente forma:  $\vec{G} = h\vec{b}_1 + k\vec{b}_2 + l\vec{b}_3$ , donde la relación entre ellas es  $e^{i\vec{R}\cdot\vec{G}} = \pm 1$
- Índices de Miller: son los enteros  $h,k,l$  que no tienen divisor común. Se utilizan para denotar la familia de planos.

Entonces podemos decir que:

Los planos ( $hkl$ ) son familias de planos equiespaciados que se encuentran en toda la red. La separación más pequeña entre estos planos tiene de módulo  $2\pi/d$ . El valor de  $d$  viene dado por el módulo de un vector de la red recíproca. Estos planos vienen determinados por los llamados índices de Miller. Algunos ejemplos de índices de Miller son:



**Figura 8:** Índices de Miller para una red recíproca cúbica.

Puede ampliarse la información sobre este breve recordatorio en [2] y [3]



## 7. G: Componentes de la densidad de corriente en ejes intrínsecos del campo

Aquí presentaremos una demostración matemática de la expresión que adquiere el vector  $\vec{J}$  cuando lo referimos a unos ejes definidos por la dirección  $\parallel$  y  $\perp$  al campo magnético. Usaremos la notación siguiente:

- $\hat{h}$ : vector unitario a lo largo del campo
- $\theta$ : ángulo formado por  $\hat{h}$  y el eje  $\hat{k}$
- $H$ : módulo de  $\vec{H}$
- $\hat{\beta}$ : vector unitario  $\perp$  a  $\hat{h}$

Consideremos que nos encontramos un material en forma de lámina ilimitada que se extiende por el plano y-z por donde circula la corriente. Daremos por válida la hipótesis de que el campo magnético aplicado es uniforme y está contenido en dicho plano variando a lo largo del eje x. Luego utilizando la ley de Amperé de electromagnetismo clásico tenemos el siguiente desarrollo:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \nabla \times (H \cdot \hat{h}) = H \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{h}) - \hat{h} \times \vec{\nabla} \cdot H = J_{\parallel} \hat{h} + J_{\perp} \hat{\beta}$$

$$J_{\perp} = -\hat{h} \times \vec{\nabla} \cdot H = -(\hat{h} \times \hat{i}) \frac{dH}{dx} = \frac{dH}{dx} \hat{\beta} \quad (\text{G.1})$$

$$J_{\parallel} = H \cdot (\vec{\nabla} \times \hat{h}) = H \cdot \left( -\frac{\partial \sin \theta}{\partial x} \hat{j} + \frac{\partial \cos \theta}{\partial x} \hat{k} \right) = H \frac{\partial \theta}{\partial x} (\cos \theta \hat{j} + \sin \theta \hat{k}) = H \frac{\partial \theta}{\partial x} \hat{h}$$

## Referencias

- [1] A. C. Rose-Innes and E. H. Rhoderick. Introduction to superconductivity. Pergamon Press, 1978.
- [2] Charles Kittel. Introduction to Solid State Physics. John Wiley and Sons, Inc, 2005.
- [3] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin. Solid State Physics. Harcourt College Publishers, 1967.