Trabajo de Fin de Grado
FÍSICA DE PARTÍCULAS EN EL UNIVERSO CALIENTE (APÉNDICES)

2015-2016
Universidad de Zaragoza

Díaz Gutiérrez, Anabel
Trabajo dirigido por Antonio Segui

Apéndice 1

En este apéndice se demuestra la validez de la expresión (3.7). Partimos de (3.3):

$$\chi = \int_{a_i}^{1} \frac{da}{a^2 H(a)} \tag{1}$$

Relacionamos las densidades de materia y radiación en tiempos distintos a partir del factor de escala y el factor de Hubble en esos tiempos:

$$\left.\begin{array}{l} \rho_{r,1} \sim a_1(t)^{-4} \\ \\ \rho_{r,2} \sim a_2(t)^{-4} \end{array}\right\} \rightarrow \rho_{r,1} = \rho_{r,2} \frac{a_1^{-4}}{a_2^{-4}} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \rho_{m,1} \sim a_1(t)^{-3} \\ \\ \rho_{m,2} \sim a_2(t)^{-3} \end{array}\right\} \rightarrow \rho_{m,1} = \rho_{m,2} \frac{a_1^{-3}}{a_2^{-3}} \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_{r,1} = \frac{8\pi G \rho_{r,1}(t)}{3H_1^2(t)} \\ \\ \Omega_{r,2} = \frac{8\pi G \rho_{r,2}(t)}{3H_2^2(t)} \end{array}\right\} \rightarrow \Omega_{r,1} = \Omega_{r,2} \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2 \frac{\rho_{r,1}(t)}{\rho_{r,2}} = \Omega_{r,2} \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2 \frac{a_1^{-4}}{a_2^{-4}} \tag{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_{m,1} = \frac{8\pi G \rho_{m,1}(t)}{3H_1^2(t)} \\ \\ \Omega_{m,2} = \frac{8\pi G \rho_{m,2}(t)}{3H_2^2(t)} \end{array}\right\} \rightarrow \Omega_{m,1} = \Omega_{m,2} \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2 \frac{\rho_{m,1}(t)}{\rho_{m,2}} = \Omega_{m,2} \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2 \frac{a_1^{-3}}{a_2^{-3}} \tag{5}$$

Dividimos las expresiones para obtener una expresión que relacione ambas densidades:

$$\frac{\Omega_{r,1}=\Omega_{r,2}\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2\frac{a_1^{-4}}{a_2^{-4}}}{\Omega_{m,1}=\Omega_{m,2}\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^2\frac{a_1^{-3}}{a_2^{-3}}}\longrightarrow\frac{\Omega_{r,1}}{\Omega_{m,1}}=\frac{\Omega_{r,2}}{\Omega_{m,2}}\frac{a_1^{-1}}{a_2^{-1}} \tag{6}$$

Si escogemos como tiempo 1 un tiempo cualquiera y tiempo 2 aquel en el que la densidad de radiación y materia eran iguales$\Omega_{r,eq}=\Omega_{m,eq}$ obtenemos una relación para las densidades de materia y radiación en un tiempo t:

$$\Omega_r=\Omega_m\frac{a_{eq}}{a} \tag{7}$$

Si ahora tomamos el tiempo 1 como el tiempo actual t_0 , en el cual el factor de escala es 1 ($a_0=1$) y de nuevo el tiempo 2 es aquel en el que las densidades de materia y radiación son iguales obtenemos una relación para la densidad de materia y radiación hoy:

$$\Omega_{r_0}=\Omega_{m_0}a_{eq} \tag{8}$$

Puesto que los limites de integración en los que calculamos la distancia comovil ocurren cuando todo el universo estaba compuesto unicamente por radiación y materia podemos afirmar que:

$$\Omega_m+\Omega_r=1 \tag{9}$$

Operamos con esta expresión y obtenemos:

$$\left(1+\frac{\Omega_m}{\Omega_r}\right)\Omega_r=1 \tag{10}$$

$$a_{eq}\left(1+\frac{\Omega_m}{\Omega_r}\right)\Omega_r=a_{eq} \tag{11}$$

Utilizamos la expresión que relaciona densidad de materia y radiación para obtener:

$$a_{eq}\left(1+\frac{a}{a_{eq}}\right)\Omega_r=a_{eq} \tag{12}$$

$$(a_{eq}+a)\Omega_r=a_{eq} \tag{13}$$

$$\frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_r}=\frac{\Omega_{r,0}}{a_{eq}}(a_{eq}+a) \tag{14}$$

Utilizamos la expresión que relaciona densidades de radiación y materia hoy y obtenemos:

$$\frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_r} = \Omega_{m,0}(a_{eq} + a) \tag{15}$$

Particularizando (4) para $a_0 = 1$ y a genérico tenemos:

$$\Omega_r = \Omega_{r,0} \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 a^{-4} \longrightarrow H^2 a^4 = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_r} H_0^2 \tag{16}$$

Sustituyendo (15) en (16) se obtiene:

$$H^2 a^4 = \Omega_{m,0}(a_{eq} + a) H_0^2 \tag{17}$$

Tomando la raíz cuadrada de esta expresión obtenemos:

$$a^2 H = H_0 \Omega_{m,0}^{1/2} \sqrt{a_{eq} + a} \tag{18}$$

Finalmente sustituyendo en (1) vemos que la distancia recorrida por los neutrinos desde un tiempo $t_i = 1seg$ hasta el momento del ultimo scattering de los fotones en el que $a = a_*$ es:

$$\chi_* = \frac{1}{\Omega_{m,0}^{1/2} H_0} \int_{a_i}^{a_*} \frac{da}{\sqrt{a + a_{eq}}} = \frac{1}{\Omega_{m,0}^{1/2} H_0} [\sqrt{a_* + a_{eq}} - \sqrt{a_{eq}}] \tag{19}$$

Donde hemos considerado el hecho de que $a_i << a_{eq}$

Apéndice 2: Estadística de Fermi-Dirac

Un gas de Fermi es un modelo de un sistema de fermiones libres (partículas con spin semientero), que no interactúan entre sí. La distribución de energía de los fermiones de un gas de Fermi está determinada a través de la estadística de Fermi-Dirac.
El principio de Pauli dice que ningún estado cuántico puede ser ocupado por más de un fermión con las mismas propiedades por lo que la energía total de un gas de Fermi en el cero absoluto es mayor que la suma de las energías en el estado fundamental de las partículas aisladas. Debido al principio de Pauli los fermiones se mantienen separados y en movimiento.

La probabilidad de encontrar un fermión con un momento comprendido entre $\overrightarrow{p} y \overrightarrow{p} + d\overrightarrow{p}$ por unidad de volumen, lo da la distribución de Fermi Dirac:

$$f(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} + 1} \tag{20}$$

Donde E es la energía, T la temperatura y μ el potencial químico

La densidad de probabilidad en una distribución en equilibrio viene dada por:

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\overrightarrow{p}) d^3p = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{exp[(E-\mu)/T] + 1} EdE \tag{21}$$

Donde $E^2 = |\overrightarrow{p}|^2 + m^2$

Por tanto para neutrinos sin masa y con $\mu = 0$:

$$P = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{p/T} + 1} = \frac{3\zeta(3) g T^3}{4\pi^2} \tag{22}$$

Para resolver esta integral vemos en primer lugar cómo se resuelven las integrales del tipo:

$$I(p) = \int_0^\infty dx \frac{x^{p-1}}{e^x + 1} \tag{23}$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{p-1}}{e^x + 1} = \int_0^\infty dx e^{-x} (1 + e^{-x})^{-1} x^{p-1} = \int_0^\infty dx e^{-x} \left[\sum_{k=0}^\infty (-1)^k (e^{-x})^k \right] x^{p-1} \tag{24}$$

$$= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^\infty dx e^{-(k+1)x} x^{p-1} \tag{25}$$

Realizamos un cambio de variable$(k+1)x = y, dx = dy/(k+1)$:

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(k+1)^p} \int_0^{\infty} dy y^{p-1} e^{-y} \tag{26}$$

La integral es la definición de la función gamma por o que:

$$= -\Gamma(p) \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(k)^p} \tag{27}$$

$$= -\Gamma(p) \left(\sum_{k}^{par} \frac{1}{(k)^p} - \sum_{k}^{impar} \frac{1}{(k)^p} \right) \tag{28}$$

$$= -\Gamma(p) \left(2\sum_{k}^{par} \frac{1}{(k)^p} - \sum_{k}^{\infty} \frac{1}{(k)^p} \right) \tag{29}$$

$$= -\Gamma(p) \left(\frac{2}{2^p} \sum_{l}^{\infty} \frac{1}{(l)^p} - \sum_{k}^{\infty} \frac{1}{(k)^p} \right) \tag{30}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) \zeta(p)\Gamma(p) \tag{31}$$

Donde hemos utilizado la función zeta de Riemann definida como:

$$\zeta(p) = \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{(n)^p} \tag{32}$$

En la integral que queremos resolver p=3 por lo que teniendo en cuenta que $\Gamma(p) = 2$:

$$I(3) = \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{e^x + 1} = \frac{3}{2}\zeta(3) \tag{33}$$

La integral que nosotros queremos resolver es:

$$P = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{p^2 dp}{e^{p/T} + 1} \tag{34}$$

Por lo que $x = p/T$ y $dx = dp/T$, es decir

$$P = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_0^{\infty} \frac{(p/T)^2 (dp/T)}{e^{p/T} + 1} = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \frac{3}{2}\zeta(3) = \frac{3\zeta(3) g T^3}{4\pi^2} \tag{35}$$

Bibliografía

[1] E.W. Kolb and M.S. Turner, *The Early Universe* Westview Press, Boulder, CO, 1994.

[2] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology,* John Wiley, New York, 1972.

[3] S.Carroll, *An introduction to General Relativity Spacetime and Geometry* Addison Wesley, San Francisco, 2004

[4] M.P.Hobson, G.Efstathiou and A.N.Lasneby, *General Relativity. An introduction for Physicist*Cambridge University Press, New York, 2006

[5] E.W.Kolb and M.S.Turner, *Ann. Rev. Nuc. Part. Sci* **33**, 645 (1983)

[6] A.D.Sakharov, *JETP Letters* **5**, 24 (1967)

[7] S.Dodelson and M.Vesterinen, *Cosmic Neutrino Last Scattering Surface,Phys.Rev.Lett***103**(2009)17

[8] E. Komatsu et al (WMAP Collaboration), Aatrophys.J.Suppl. Ser. **180**, 330 (2009)

[9] Collaboration, P. Ade et.al., *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters,* arXiv:1303.5076.

[10] T.M.Davis and C.H.Lineweaver, *Publ. Astron. Soc. Austral.***21**(2003)97 arXiv:astro-ph/0310808v2

[11] A.Faessler, R. Hodak, S.Kovalenko and F.Simkovic *Beta Decay and the Cosmic Neutrino Background*(1013) arXiv:1304.5632v4 (nucl-th)

[12] A.Ringwald, Y.Y. Y.Wong, *JCAP* **0412**(2004)005 [arXiv:hep-ph/0408241]

[13] A.Ringwald, Y.Y. Y.Wong, *JCAP* **0412**(2004)005; arXiv:hep-ph/0412256

[14] A.Ringwald, *Prospects for the direct detection of the cosmic neutrino background, Nucl. Phys* **827** (2009) arXiv:0901.1529

[15] S.Singh and C.P.Ma, *Neutrino clustering in cold dark matter halos: Implications for ultrahigh energy cosmic rays, Phisical Review* D **67** (Jan., 2003) 023506 arXiv:astro-ph/0208419

[16] R.Lazauskas,P.Vogel and C.Volpe, *Charged current cross section for massive cosmological neutrinos impinging on radioactive nuclei,J. Phys.* G. **35**(2008)025001

[17] A.J. Long, C. Lunardini, and E. Sabancilar, *Detecting non-relativistic cosmicy neutrinos by capture on tritium: phenomenology and physics potential, JCAP* **1408**(2014)038 arXiv:1405.7654