Series de Dirichlet y el Teorema del Número Primo

Sergio Montoro Mavilla
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: Francisco J. Ruiz Blasco
y Mario Pérez Riera

Prólogo

En muchos contextos de las matemáticas, especialmente en la teoría analítica de números, se estudian detalladamente distintos tipos de sucesiones $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$. Nosotros identificaremos estas sucesiones con funciones de la forma $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ conocidas como funciones aritméticas[1]. Ejemplos de éstas son las clásicas funciones de Möbius y de Von Mangoldt, muy frecuentes en la teoría de números y que aparecerán en esta memoria; aunque también las hay menos ingeniosas, como la función $f(n) = n^2$.

Para estudiar propiedades de estas funciones –sucesiones– muchas veces se acude a las llamadas funciones generatrices. Posiblemente la más conocida por los matemáticos es la serie de potencias $F(z) = \sum f(n)z^n$, que resulta muy utilizada en la teoría aditiva de números y la razón es porque el producto de dos de estas es $\sum f(n)z^n \cdot \sum g(n)z^n = \sum h(n)z^n$ con $h(n) = \sum_{k+m=n} f(k)g(m)$. En este trabajo nos enfocaremos en otro tipo de estas funciones generatrices: las series de Dirichlet, cuya expresión es $F(z) = \sum f(n)n^{-z}$. Esta clase de funciones son muy utilizadas en la teoría multiplicativa de números ya que el producto de dos de ellas es $\sum f(n)n^{-z} \cdot \sum g(n)n^{-z} = \sum h(n)n^{-z}$ con $h(n) = \sum_{k\cdot m=n} f(k)g(m)$.

Inicialmente la idea del trabajo es formalizar un estudio detallado de las series de Dirichlet intentando hacer analogías, si es que existen, con los principales resultados de las series de potencias (radio de convergencia, qué ocurre en la frontera, prolongación analítica, etc.). No obstante, ya adentrados en el tema y tal como se ha dicho antes, se verá que las series de Dirichlet tienen una estrecha relación con la teoría multiplicativa de números y un resultado central en este contexto es el famoso teorema del número primo que tiene varias demostraciones. La primera, desarrollada por Hadamard [3] y De la Vallée Poussin[9] en 1896 siguiendo las ideas de Riemann ([6] es el trabajo original y [2] es un libro dedicado a entenderlo); inicia sus andaduras en las series de Dirichlet, y éste es el motivo para que la idea final del trabajo sea profundizar un poco más en el tema, llegando más allá que un 'simple' estudio comparativo entre ambas series y así poder abordar satisfactoriamente el que se considera como uno de los resultados más importantes en la historia de las matemáticas que es, precisamente, tal teorema del número primo.

Un resultado sencillo en las series de potencias establece que si la función que define $f(z) = \sum f(n)z^n$ se puede prolongar a un abierto, entonces el radio de convergencia de $\sum f(n)z^n$ es el supremo de los radios de todos los posibles discos cerrados contenidos en el abierto. Hay un análogo en las series de Dirichlet demostrado por Newman que nos conducirá directamente al teorema del número primo con el que queremos finalizar, evitando así pasar por la demostración clásica de Hadamard y De la Vallée Poussin. No obstante, sí que daremos las ideas principales de esta demostración porque ayuda a comprender la relación entre los ceros de la función ζ de Riemann y el término del error en el teorema del número primo. Por el contrario, en este trabajo nos olvidaremos completamente de las demostraciones que no usan la variable compleja, como la de Selberg y Erdös propuesta en 1949, que suelen ser muy intrincadas y engorrosas y no aportan ideas más allá que para la propia demostración.

No me gustaría acabar esta introducción sin agradecer honestamente la labor y el desempeño de mis tutores Francisco J. Ruiz por la paciencia con la que ha resuelto todas mis dudas y la profesionalidad con la que me ha sabido explicar todas las ideas que guardan en esta memoria; y Mario Pérez que me ha ayudado con los detalles más minuciosos para que este trabajo pueda ser presentado debidamente.

[1] A veces se suele incluir el 0 en el dominio de la función.

Summary

We define a Dirichlet series as the sum $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$, where s is a complex number. Because of the easy relationship

$$n^s = \mathrm{e}^{s\log n} = \mathrm{e}^{(\sigma+it)\log n} = \mathrm{e}^{\sigma\log n}\mathrm{e}^{it\log n} = n^{\sigma}\mathrm{e}^{it\log n}$$

we obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|f(n)n^{-s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|n^{-\sigma}.$$

In consequence, if we find a complex number s_0 such that $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)n^{-s_0}| < +\infty$, then $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)n^{-s}|$ converges for all s which verify $\mathrm{Re}\, s \geq \mathrm{Re}\, s_0$. So, we can intuit that a Dirichlet series converges absolutely over a plane. More specifically, we can intuit that there exists a vertical line separating two planes: on the right, the Dirichlet series converges absolutely and it does not converge absolutely on the right. Also, we can speak about uniform convergence of a Dirichlet series. Thanks to Abel's Lemma, introduced in section 1, it is not difficult to prove that, given a $s_0 \in \mathbb{C}$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|n^{-s_0} < +\infty$, then the Dirichlet series associated converges uniformly over the set $\{s \in \mathbb{C} : |Arg(s-s_0)| \leq \theta\}$, where θ is any angle satisfying $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. After this important result, we are able to ensure two facts. The first one, says that a Dirichlet series converges over a plane. Even more, in a similar way about absolutely convergences, given a Dirichlet series, there exists a vertical line such that the series converges on the right and does not converge on the left. The second one, deduced thanks to the uniform convergence on compact sets, says that a Dirichlet series defines an analytic function on the convergence plane.

The Riemann zeta function, defined as

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

when $\mathrm{Re}\, s > 1$, is a particular Dirichlet series, which has a very important role in the proof of the prime number theorem. In the second chapter, we will give a proof of it and, to show correctly all the arguments in each step, we will have to know better this function. Mainly, this is the reason to analyze the zeta function but as this is one of the most important functions in analytic number theory and maybe in complex analysis too, we will show other properties which are not so important for our purpose but were extraordinary advances to other theories when they were found the zeta out. The principal properties that we will speak about are: the zeta function can extend as a holomomorphic function over the whole plane without a single point, $z = 1$, which has a simple pole; the zeta function does not take the value 0 when $\mathrm{Re}\, s \geq 1$; and the zeta function satisfies the functional equation

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s)\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right),$$

when $s \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

We will introduce a very important operation of the analytic number theory, called convolution or Dirichlet convolution, defined as

$$(f*g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{m\cdot l=n} f(m)g(l), \qquad n,d,m,l \in \mathbb{N},$$

for two arithmetic functions. Convolution is very important in this context because when we multiply two Dirichlet series $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ and $G(s)=\sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}$, the result obtained is

$$F(s)G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f*g)(n)}{n^s}.$$

Easily, with some other properties of the zeta function and using the convolution, we could ensure the next equality:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=0,$$

where $\mu(n)$ is the famous Möbius' function defined as

$$\mu(n)=\begin{cases} 1 & \text{if } n=1,\\ (-1)^k & \text{if } n=p_1\dots p_k,\ \ p_i \text{ different primes},\\ 0 & \text{in other case.}\end{cases}$$

And the previous equality is very important for us because it is the beginning to have success in our proof of the prime number theorem. Continuing with this way, we need to have more information about some particular arithmetic functions. So, in chapter two, we will study the hyperbola method to guess how some specific arithmetic function are when n is big. When we apply this method for the function $d(n)=\sum_{d|n}1$, we obtain a result that we will use in the proof of the prime number theorem:

$$\sum_{n\le x} d(n)=x\log x+(2\gamma-1)x+O(\sqrt{x}).$$

Before our proof for the prime number theorem, we will study other arithmetic functions for big values of n. We are speaking about the Von Mangoldt function, defined as:

$$\Lambda(n)=\begin{cases} \log p & \text{if } n=p^m \text{ for some } p \text{ prime and } \ m\ge 1,\\ 0 & \text{in other case.}\end{cases}$$

And for the following partial sums, we obtain:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\mu(n)\right]=0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\Lambda(n)\right]=1.$$

After that, and just proving the inequality

$$\frac{\Psi(x)}{x}\le\frac{\pi(x)\log x}{x}\le\frac{1}{\log x}+\frac{\Psi(x)}{x}\,\frac{\log x}{\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)},$$

where $\Psi(x)$ is defined as $\Psi(x)=\sum_{n\le x}\Lambda(n)$, we will have proven the prime number theorem.

Finally, we will speak about another proof of the prime number theorem which contains some ideas included in the original proof. Moreover, we will connect these ideas with the Riemann hypothesis.

Índice general

Capítulo 1

Series de Dirichlet

Este capítulo primeramente se centra en ver algunas propiedades básicas de las series de Dirichlet: convergencia absoluta, convergencia simple y convergencia uniforme principalmente. Se verá que una serie de Dirichlet converge en semiplanos, dando lugar a una función analítica. Un resultado determinante ya introducido en el prólogo establecerá, bajo ciertas condiciones, una posible convergencia en la frontera de estos semiplanos. La segunda parte del capítulo está dedicada a estudiar los principales elementos de la teoría multiplicativa de números con su operación más importante: la convolución. Relacionaremos esta parte con el producto de series de Dirichlet y acabaremos el capítulo hablando de una función que supone verdaderos quebraderos de cabeza a los matemáticos en la actualidad y de las más importantes en la teoría analítica de números: la zeta de Riemann.
Empezamos la sección enunciando un lema que, como se irá viendo, nos resolverá muchos problemas durante todo el desarrollo del trabajo.

Lema 1.1 (Identidad de Abel)**.** *Sea $a(n)$ una función aritmética y sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ \ni\ f\in\mathscr{C}^{(1}([y,x])$ con $0<y<x$. Entonces se verifica la siguiente igualdad:*

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt,$$

en donde $A(x)$ viene dada por $A(x) = \begin{cases} 0 & si\ x<1, \\ \sum\limits_{n\leq x} a(n) := \sum\limits_{n=1}^{[x]} a(n) & si\ x\geq 1. \end{cases}$

Demostración. Es obvio que $A(n)-A(n-1)=a(n)\ \forall n\geq 1$ y al ser $A(x)$ función escalonada con posibles saltos en los enteros, tenemos que $A(n)=A(t)\ \forall t\in[n,n+1)$. A partir de aquí, la demostración se basa en sencillas manipulaciones aritméticas.
Sea $k=[x],\ m=[y];$ entonces $A(x)=A(k),\ A(y)=A(m);$ por tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= \sum_{n=m+1}^{k} a(n)f(n) = \sum_{n=m+1}^{k}\big[A(n)-A(n-1)\big]f(n) = \sum_{n=m+1}^{k} A(n)f(n) - \sum_{n=m}^{k-1} A(n)f(n+1) \\
&= \sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)\big[f(n)-f(n+1)\big] + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} A(n)\int_n^{n+1} f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\sum_{n=m+1}^{k-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1) \\
&= -\int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(m)f(m+1). \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta cómo están definidos k y m, trabajando con ellos según convenga se observa que

$$\int_y^{m+1} A(t)f'(t)dt = A(m)\int_y^{m+1} f'(t)dt = A(m)\big[f(m+1)-f(y)\big] = A(m)f(m+1)-A(y)f(y),$$

luego

$$A(m)f(m+1) = \int_y^{m+1} A(t)f'(t)dt + A(y)f(y),$$

y sustituyendo esta expresión en (1.1) queda

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) &= -\int_{m+1}^{k} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - \int_y^{m+1} A(t)f'(t)dt - A(y)f(y)\\ &= -\int_y^{k} A(t)f'(t)dt + A(k)f(k) - A(y)f(y). \qquad (1.2)\end{aligned}$$

Llegados a este punto, si $k = x$ queda demostrado el lema. En caso de $x \neq k$ y razonando como antes tenemos

$$\int_k^x A(t)f'(t)dt = A(k)\big[f(x)-f(k)\big] = A(k)f(x)-A(k)f(k) = A(x)f(x)-A(k)f(k).$$

Por tanto

$$A(k)f(k) = A(k)f(x) - \int_k^x A(t)f'(t)dt,$$

y sustituyendo en (1.2) se verifica de nuevo el lema. □

1.1. Convergencia absoluta

Definición. Sea $s \in \mathbb{C}$ con $s = \sigma + it$ donde σ es la parte real y t la parte imaginaria[1] y sea $f(n)$ una función aritmética. Se llama serie de Dirichlet con coeficientes $f(n)$ a la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Lo que en las series de potencias vienen siendo círculos (radio de convergencia), aquí son semiplanos (abscisas verticales) donde a un lado converge absolutamente y al otro no. En la abscisa (al igual que en la frontera) hay dudas sobre esta convergencia absoluta.
Notar que $n^s = e^{s\log n} = e^{(\sigma+it)\log n} = e^{\sigma \log n} e^{it\log n} = n^{\sigma} e^{it\log n}$ de donde se deduce que $|n^s| = n^{\sigma}$.

Teorema 1.2. *Toda serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ posee una abscisa (que denotaremos como σ_a) de manera que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ converge absolutamente si $\sigma > \sigma_a$ y no converge absolutamente si $\sigma < \sigma_a$. A este valor σ_a se le llama abscisa de convergencia absoluta.*[2]

Demostración. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)n^{-s}|$ no converge para ningún $s \in \mathbb{C}$ entonces, por el convenio, $\sigma_a = +\infty$. En otro caso, existe un $s_0 = \sigma_0 + it_0$ de manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|f(n)n^{-s_0}\big| = \sum_{n=1}^{\infty} \big|f(n)\big| n^{-\sigma_0} < +\infty,$$

luego para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\sigma > \sigma_0$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big|f(n)n^{-s}\big| = \sum_{n=1}^{\infty} \big|f(n)\big| n^{-\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \big|f(n)\big| n^{-\sigma_0} < \infty.$$

El ínfimo de tales σ_0 (que obviamente es no vacío ya que en s_0 la serie converge) es el σ_a del enunciado. □

[1] En la teoría de números, es frecuente usar esta notación para expresar las partes reales e imaginarias. A partir de ahora, para cualquier $s_i \in \mathbb{C}$, se sobreentenderá que $\mathrm{Re}\, s_i = \sigma_i$ y $\mathrm{Im}\, s_i = t_i$.

[2] Por convenio, si $\sum_{n=1}^{\infty} \big|f(n)n^{-s}\big|$ converge para todo $s \in \mathbb{C}$ diremos que $\sigma_a = -\infty$; y si $\sum_{n=1}^{\infty} \big|f(n)n^{-s}\big|$ no converge para ningún $s \in \mathbb{C}$ entonces diremos que $\sigma_a = +\infty$.

1.2. Convergencia simple

La convergencia simple se comporta igual que la convergencia absoluta con respecto a la existencia de una abscisa vertical donde a un lado converge y al otro no, con dudas en la frontera. En esta situación, a diferencia de lo que ocurre en las series de potencias, las regiones de convergencia simple y convergencia absoluta no tienen por qué coincidir.
A partir de ahora usaremos la notación $\mathscr{A}(s_0,\theta)$ para referirnos a $\{s\in\mathbb{C} : |Arg(s-s_0)|\leq\theta\}$.

Teorema 1.3. *Sea $f(n)$ una función aritmética tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge. Entonces la serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ converge uniformemente en $\mathscr{A}(0,\theta)$, para cualquier $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ fijo.*

Demostración. Sea $\varepsilon>0$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge (y por tanto es de Cauchy), se cumple:

$$\exists a\in\mathbb{N}\ni\left|\sum_{\alpha<n\leq\beta} f(n)\right|<\frac{\varepsilon}{4}\cos\theta\qquad\text{para todo }\ \beta>\alpha\geq a.$$

Definimos $f^*(n)=f(n)$ si $n>a$ y 0 en caso contrario. Llamando $A(x)=\sum_{n\leq x} f^*(n)$, entonces, para todo $s\in\mathscr{A}(0,\theta)$, por el lema de Abel con $a<\alpha<\beta$ cualesquiera se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha<n\leq\beta}\frac{f(n)}{n^s}=\sum_{\alpha<n\leq\beta}\frac{f^*(n)}{n^s}&=A(\beta)\beta^{-s}-A(\alpha)\alpha^{-s}-\int_\alpha^\beta A(t)(t^{-s})'dt\\ &=\sum_{n\leq\beta} f^*(n)\beta^{-s}-\sum_{n\leq\alpha} f^*(n)\alpha^{-s}+s\int_\alpha^\beta A(t)t^{-s-1}dt\\ &=\sum_{a<n\leq\beta} f(n)\beta^{-s}-\sum_{a<n\leq\alpha} f(n)\alpha^{-s}+s\int_\alpha^\beta A(t)t^{-s-1}dt.\end{aligned}$$

Tomando módulos y teniendo en cuenta que $\sigma=|s|\cos\left[Arg(s)\right]$ resulta

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\alpha<n\leq\beta}\frac{f(n)}{n^s}\right|&<\frac{\varepsilon}{4}\cos\theta\,\beta^{-\sigma}+\frac{\varepsilon}{4}\cos\theta\,\alpha^{-\sigma}+|s|\int_\alpha^\beta\frac{\varepsilon}{4}\cos\theta\ t^{-\sigma-1}dt\\ &\leq\frac{\varepsilon}{2}\cos\theta\,\alpha^{-\sigma}+\frac{\varepsilon}{4}\cos\theta\,\frac{|s|}{\sigma}\left(\alpha^{-\sigma}-\beta^{-\sigma}\right)\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\cos\theta}{\cos\left[Arg(s)\right]}.\end{aligned}$$

Como la función $\cos x$ es par en todo $\mathbb{R}$ y decreciente en $[0,\frac{\pi}{2})$ se tiene que $\cos\left[Arg(s)\right]\geq\cos\theta$, luego

$$\left|\sum_{\alpha<n\leq\beta}\frac{f(n)}{n^s}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\cos\theta\,\frac{\cos\theta}{\cos\left[Arg(s)\right]}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}=\varepsilon.$$

Concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ es de Cauchy uniformemente en $\mathscr{A}(0,\theta)$, y, por tanto, converge uniformemente en $\mathscr{A}(0,\theta)$. □

Corolario 1.4. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s_0}$ converge para algún $s_0\in\mathbb{C}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$*

a) converge uniformemente en $\mathscr{A}(s_0,\theta)$ con $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$ fijo,

b) converge para todo $s\in\mathbb{C}\ni\sigma>\sigma_0$.

Demostración. a) Definiendo $g(n)=f(n)n^{s_0}\quad\forall n\geq1$ y aplicando el teorema 1.3 llegamos a que $\sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}$ converge uniformemente con $|Arg(s)|\leq\theta$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s+s_0}$ converge uniformemente en $\mathscr{A}(0,\theta)$ o equivalentemente $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ converge uniformemente en $\mathscr{A}(s_0,\theta)$.

b) Para un s_1 fijo tal que $\sigma_1>\sigma_0$, siempre podemos encontrar un $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ fijo tal que $|Arg(s_1-s_0)|\leq\theta$. Aplicando a) concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ es uniformemente convergente en el conjunto $\mathscr{A}(s_0,\theta)$ y en particular convergente para s_1. □

Teorema 1.5. *Para toda serie de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ existe un número σ_s tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ converge si $\sigma > \sigma_s$ y no converge si $\sigma < \sigma_s$. A este número σ_s se le llama absisa de convergencia simple.*[3]

Demostración. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ no converge para ningún $s \in \mathbb{C}$, entonces, por el convenio, $\sigma_s = +\infty$. En otro caso, existe un $s_0 = \sigma_0 + it_0$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s_0}$ converge, por tanto el conjunto $\{s \in \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} < \infty\}$ es no vacío. Llamando σ_s al ínfimo de las partes reales del conjunto anterior, por Corolario 1.4 se verifica que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ converge si $\sigma > \sigma_s$ y no converge si $\sigma < \sigma_s$. $\square$

Tanto la convergencia simple, como la absoluta, queda determinada por una abscisa vertical σ_s, o σ_a, donde a su derecha converge, o converge absolutamente, y a su izquierda no. A partir de ahora, llamaremos semiplano de convergencia simple al conjunto $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_s\}$ y semiplano de convergencia absoluta al conjunto $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \sigma_a\}$.

Observación 1. Una consecuencia inmediata es que, en el semiplano de convergencia simple, la serie de Dirichlet asociada converge a una función analítica. Denotando $S_N(s) = \sum_{n=1}^{N} f(n)n^{-s}$ y considerando la sucesión de los S_N, se observa que tal sucesión converge uniformemente sobre compactos del semiplano de convergencia simple a la función $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$. Al ser S_N entera para todo $N \in \mathbb{N}$, concluimos que F es analítica.

Observación 2. Gracias a la convergencia uniforme, aplicando los corolarios 1.5 y 1.6, las derivadas de las series de Dirichlet se obtienen fácilmente derivando término a término, obteniendo de nuevo otra serie de Dirichlet. Es decir, si $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ entonces

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)\log n}{n^s}, \quad si\ \ \sigma > \sigma_s.$$

La siguiente proposición afirma que σ_a y σ_s están relativamente próximas cuando son finitas.

Proposición 1.6. *Toda serie de Dirichlet con σ_s finito verifica:* $0 \leq \sigma_a - \sigma_s \leq 1$.

Demostración. Por hipótesis, σ_s es finito, por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s_0}$ converge para todo s_0 tal que $\sigma_0 > \sigma_s$. Fijando un s_0 cumpliendo lo anterior, hay que probar que $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)n^s| < +\infty$ para todo s con $\sigma > \sigma_0 + 1$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s_0}$ converge, $\exists\, A > 0 \ni |f(n)n^{s_0}| \leq A\ \forall n \in \mathbb{N}$ y supongamos que s verifica que $\sigma > \sigma_0 + 1$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f(n)}{n^{s_0}} \right| \left| \frac{1}{n^{s-s_0}} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n^{\sigma-\sigma_0}} < +\infty.$$ $\square$

El siguiente teorema es el equivalente al segundo lema de Abel para las series de potencias.

Teorema 1.7. *Sea $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ cualquiera fijo. Se considera la función $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ y supongamos que converge para algún $s_0 \in \mathbb{C}$. Entonces se verifica $F(s_0) = \lim\limits_{s \to s_0} F(s)$ con $s \in \mathscr{A}(s_0, \theta)$.*

Demostración. Como la sucesión de funciones continuas $S_N(s) = \sum_{n=1}^{N} f(n)n^{-s}$ converge uniformemente a $F(s)$ en $\mathscr{A}(s_0, \theta)$ (y trivialmente $s_0 \in \mathscr{A}(s_0, \theta)$) se deduce que $F(s)$ es continua en $\mathscr{A}(s_0, \theta)$ y por tanto $F(s_0) = \lim\limits_{s \to s_0} F(s)$ cuando $s \in \mathscr{A}(s_0, \theta)$. $\square$

Mostramos a continuación una posible convergencia sobre σ_s. Este resultado será clave cuando lo apliquemos a la función zeta de Riemann de la que hablaremos más adelante.[4]

[3] Al igual que en el caso de convergencia absoluta, por convenio denotamos $\sigma_s = -\infty$ si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ converge para todo $s \in \mathbb{C}$; y $\sigma_s = +\infty$ si $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ no converge para ningún $s \in \mathbb{C}$.

[4] Este resultado fue demostrado por Newman, que aparece en [5], capítulo 7.

Teorema 1.8. *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ *con* $|a_n| \le 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Supongamos que existe una función holomorfa* $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *que verifica*

a) Ω *es abierto en* $\mathbb{C}$ *y además* $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \ge 1\} \subseteq \Omega$.

b) $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ $\forall s \in \mathbb{C} \ni \mathrm{Re}\, s > 1$.

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ *converge en* $\mathrm{Re}\, s \ge 1$.

Demostración. Es obvio que $\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)n^{-s}| < +\infty$ cuando $\mathrm{Re}\, s > 1$ ya que los a_n están acotados. Para cualquier $N \in \mathbb{N}$ están bien definidas

$$S_N(s) := \sum_{n=1}^{N} a(n)n^{-s} \quad \text{para cualquier s} \in \mathbb{C},$$

$$R_N(s) := \sum_{n=N+1}^{\infty} a(n)n^{-s} \quad \text{para cualquier s tal que } \mathrm{Re}\, s > 1.$$

Sea $w \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\, w = 1$ y veamos que $S_N(w)$ converge a $F(w)$ cuando $N \to \infty$ (y quedará probado el teorema). Como $F(s)$ es holomorfa en Ω (abierto) y $\{\mathrm{Re}\, z \ge 1\} \subseteq \Omega$ entonces $F(s+w)$ es holomorfa en Ω' (otro abierto, concretamente Ω trasladado) y $\{\mathrm{Re}\, z \ge 0\} \subseteq \Omega'$ pues $\mathrm{Re}\, s \ge 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, s + \mathrm{Re}\, w \ge 1$.

Sea cualquier $R > 0$. Como Ω' es abierto, $\exists\, \delta = \delta(R) > 0$ de manera que el camino de la figura (1.1a) está contenido en Ω'. Llamamos A a la parte del camino cuando $\mathrm{Re}\, z > 0$ y, para $\mathrm{Re}\, z \le 0$, denotamos como γ_1 y γ_3 los segmentos horizontales superior e inferior, respectivamente; y γ_2 al segmento vertical. Para este segundo camino, usaremos la parametrización: $\gamma_1(t) = -t + iR,\ t \in [0, \delta]$; $\gamma_2(t) = -\delta - it$, $t \in [-R, R]$; $\gamma_3(t) = t + iR,\ t \in [-\delta, 0]$. Observamos que la función

$$F(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) \equiv \frac{F(z+w)N^z \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)}{z}$$

es holomorfa en $\Omega' \setminus \{0\}$ y en $z = 0$ tiene un polo simple. Integrando sobre el camino de (1.1a) se cumple

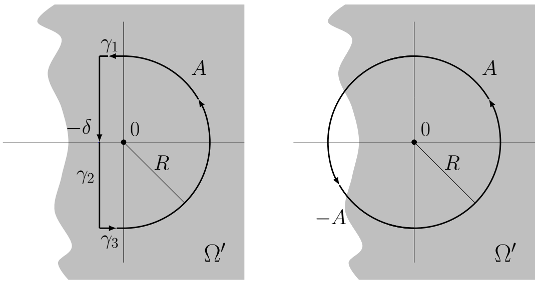
$$\begin{aligned}\int_{A\cup\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3} F(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz &= \int_A S_N(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz + \int_A R_N(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \\ &\quad + \sum_{k=1}^{3} \int_{\gamma_k} F(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz. \qquad (1.3)\end{aligned}$$

Ahora, realizando la misma integral por medio del teorema de los residuos se tiene

$$\int_{A\cup\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3} \frac{F(z+w)N^z(1 + \frac{z^2}{R^2})}{z} dz = 2\pi i F(z+w)N^z(1 + \frac{z^2}{R^2})\Big|_{z=0} = 2\pi i F(w). \qquad (1.4)$$

Por otro lado, la función $S_N(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con un polo simple en $z = 0$. Por tanto, podemos integrarla respecto a la circunferencia de centro $z = 0$ y radio R (ver 1.1b). Aquí se denota A como antes y $-A$ la semicircunferencia cuando $\mathrm{Re}\, z \le 0$. Por el teorema de los residuos y teniendo en cuenta la simetría de la circunferencia se tiene

$$\begin{aligned}2\pi i S_N(w) &= \int_{(A)\cup(-A)} S_N(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \qquad (1.5)\\ &= \int_A S_N(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz + \int_{-A} S_N(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz \\ &= \int_A S_N(z+w)N^z \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz + \int_A S_N(w-z)N^{-z} \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}\right) dz,\end{aligned}$$



(a) (b)

Figura 1.1

Así, juntando (1.3), (1.4) y (1.5) queda

$$2\pi i\big[F(w)-S_N(w)\big]=\int_A\left(R_N(z+w)N^z-\frac{S_N(w-z)}{N^z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz+\sum_{k=1}^{3}\int_{\gamma_k}F(z+w)N^z\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)dz \tag{1.6}$$

Observamos que se verifican las siguientes acotaciones:

- $|z|=R\Longrightarrow z=\dfrac{R^2}{\overline{z}}\Longrightarrow\left|\dfrac{1}{z}+\dfrac{z}{R^2}\right|=\dfrac{\overline{z}}{R^2}+\dfrac{z}{R^2}=\dfrac{2\operatorname{Re}z}{R^2},$ para todo $\operatorname{Re}z>0$.
- $|R_N(z+w)|\le\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\operatorname{Re}z+1}}\le\int_N^{\infty}\frac{dn}{n^{\operatorname{Re}z+1}}=\frac{1}{\operatorname{Re}z\,N^{\operatorname{Re}z}},$ para todo $\operatorname{Re}z>0$.
- $|S_N(w-z)|\le\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{1-\operatorname{Re}z}}\le N^{\operatorname{Re}z-1}+\int_0^N n^{\operatorname{Re}z-1}dn=N^{\operatorname{Re}z}\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{\operatorname{Re}z}\right),$ para todo $\operatorname{Re}z>0$.
- $\operatorname{Re}z\le|z|=R,$ para todo $\operatorname{Re}z>0$.
- $\delta\le|z|\le 2R\Rightarrow\left|\dfrac{1}{z}+\dfrac{z}{R^2}\right|=\left|\dfrac{1}{z}\right|\left|1+\dfrac{z^2}{R^2}\right|\le\dfrac{1}{\delta}\left(1+\dfrac{4R^2}{R^2}\right)\le\dfrac{5}{\delta},$ para todo $\operatorname{Re}z\le 0$.
- $sop\big[\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\big]$ es cerrado y acotado en Ω' y al ser $F(w+z)$ holomorfa en tal subconjunto, concluimos que $\exists\, M=M(R)>0\ni|F(w+z)|<M$

Ahora, en (1.6) acotamos la primera integral y parametrizamos y luego acotamos las 3 integrales siguientes. De esta manera obtenemos

$$\begin{aligned}
2\pi\big|F(w)-S_N(w)\big| &\le \pi R\sup_{z\in A}\left|\Big[R_N(z+w)N^z-S_N(w-z)N^{-z}\Big]\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{R^2}\right)\right|\\
&\quad+\frac{5M}{\delta}\int_0^{\delta}N^{-\sigma}d\sigma+\frac{5M}{\delta}\int_{-R}^{R}N^{-\delta}dt+\frac{5M}{\delta}\int_{-\delta}^{0}N^{\sigma}d\sigma\\
&\le\pi R\sup_{z\in A}\left\{\frac{N^{\operatorname{Re}z}}{\operatorname{Re}z\,N^{\operatorname{Re}z}}\frac{2\operatorname{Re}z}{R^2}+N^{\operatorname{Re}z}\Big(\frac{1}{N}+\frac{1}{\operatorname{Re}z}\Big)N^{-\operatorname{Re}z}\frac{2\operatorname{Re}z}{R^2}\right\}+\frac{10M}{\delta\log N}+\frac{10MR}{\delta N^{\delta}}\\
&=\pi R\sup_{z\in A}\left\{\frac{2}{R^2}+\frac{2\operatorname{Re}z}{NR^2}+\frac{2}{R^2}\right\}+\frac{10M}{\delta\log N}+\frac{10MR}{\delta N^{\delta}}\\
&\le\pi R\left(\frac{4}{R^2}+\frac{2}{NR}\right)+\frac{10M}{\delta\log N}+\frac{10MR}{\delta N^{\delta}}=\frac{4\pi}{R}+\frac{2\pi}{N}+\frac{10M}{\delta\log N}+\frac{10MR}{\delta N^{\delta}}.
\end{aligned}\tag{1.7}$$

Entonces, para $\varepsilon>0$ dado, elegimos R tal que $\frac{2}{R}<\frac{\varepsilon}{2}$. A partir de aquí, con R fijo, quedarán fijados M y δ y podemos elegir un N tal que $\frac{1}{N}+\frac{5M}{\pi\delta\log N}+\frac{5MR}{\delta\pi N^{\delta}}<\frac{\varepsilon}{2}$, y por tanto $|F(w)-S_N(w)|<\varepsilon$. □

1.3. Convolución de Dirichlet

En esta sección trataremos con una nueva operación que aparecerá al multiplicar series de Dirichlet[5]. No haremos gran parte de las demostraciones porque la mayoría son inmediatas a partir de las definiciones y, las que no son tan inmediatas, no tienen ninguna dificultad utilizando sencillas manipulaciones aritméticas muy conocidas. No obstante, el lector interesado puede encontrarlas en [1] (capítulo 2).

Definición. Dadas f y g dos funciones aritméticas, decimos que su convolución (o convolución de Dirichlet) es la función aritmética, denotada como $f*g$, definida por

$$(f*g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \underset{(1)}{=} \sum_{m\cdot l=n} f(m)g(l), \qquad n,d,m,l \in \mathbb{N},$$

donde d son todos los divisores de n y m,l son todas las posibles combinaciones tales que $m\cdot l = n$. La igualdad (1) es clara ya que si d divide a n, entonces existe $c \in \mathbb{N}$ tal que $c\cdot d = n$.

En la definición ya hemos recalcado que la convolución de dos funciones aritméticas es, de nuevo, otra función aritmética. Por la igualdad (1), es obvio que esta operación es conmutativa y fácil de probar que satisface la propiedad asociativa. Además, hay una única función aritmética, I, definida por

$$I(n) := \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1, \\ 0 & \text{si } n>1, \end{cases}$$

cumpliendo que $f*I = I*f = f$ para toda f función aritmética. También es fácil probar que, dada f tal que $f(1) \neq 0$, existe una única g cumpliendo $f*g = g*f = I$. Estos hechos son las características que definen a los grupos abelianos.

Observación 3. Si f, g son funciones aritméticas tales que $f(1)g(1) \neq 0$, entonces $(f*g)(1) \neq 0$ y $f^{-1}(1) = 1/f(1) \neq 0$ y, por tanto, el par $(E,*)$ tiene estructura de grupo abeliano (E denota el conjunto de las funciones aritméticas tales que $f(1) \neq 0$).

El siguiente teorema muestra la importancia que tiene esta operación en las series de Dirichlet.

Teorema 1.9. *Sean $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$, $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}$ dos series de Dirichlet con f,g funciones aritméticas. Entonces, en el semiplano en el que ambas converjan absolutamente, se tiene*

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f*g)(n)}{n^s}.$$

Demostración. Sea cualquier s tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \left|f(n)n^{-s}\right| < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|g(n)n^{-s}\right| < +\infty$. Entonces

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} \sum_{n=1}^{\infty} g(m)m^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(n)g(m)(mn)^{-s}. \tag{1.8}$$

Gracias a la convergencia absoluta, se pueden reordenar los términos en (1.8) sin que se altere la suma. Juntando los términos constantes, es decir, los mn tales que $mn = k$ con $k = 1,2\ldots$ queda

$$F(s)G(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(n)g(m)(mn)^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{m\cdot n=k} f(n)g(m)k^{-s}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f*g)(k)}{k^s}. \qquad \square$$

Veamos algunas funciones aritméticas muy frecuentes en la teoría de números y como se interrelacionan gracias a la convolución:

[5] A partir de ahora, como vamos a trabajar constantemente con sumatorios, se advierte que la letra p en el subíndice siempre representará a un número primo.

a) La función de Möbius, $\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1, \\ (-1)^k & \text{si } n = p_1 \dots p_k, \ p_i \text{ primos distintos}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

b) La función unidad, $u(n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

c) La función de Von Mangoldt, $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^m \text{ para algún } p \text{ primo y } m \geq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

d) La función divisor, $d(n) = \sum_{d|n} 1$.

Teorema 1.10. *Para todo $n \geq 1$, se verifican las siguientes igualdades:*

1. $(\mu * u)(n) = I(n)$.
2. $\log n = (\Lambda * u)(n)$.
3. $\Lambda(n) = (\mu * \log)(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d$.
4. $d(n) = (u * u)(n)$.

Demostración.

1. Veamos que

$$(\mu * u)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) u\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n > 1 \end{cases} \tag{1.9}$$

Si $n = 1$ el resultado es trivial. Si $n > 1$, entonces n se descompone de forma única como $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ con p_i primos, $a_i \geq 1$, $i = 1, \dots, k$. Todos los términos de $\sum_{d|n} \mu(d)$ son nulos salvo los de la forma $\mu(d)$ cuya descomposición d en factores primos consta de primos con exponente 1. Haciendo la suma de todas las posibles combinaciones, la expresión de (1.9) queda

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \mu(p_1) + \dots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \dots + \mu(p_{k-1} p_k) + \dots + \mu(p_1 \dots p_k) \\ &= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \dots + \binom{k}{k-1}(-1)^{k-1} + \binom{k}{k}(-1)^k = (1-1)^k = 0, \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se satisface gracias al binomio de Newton.

2. Se trata de ver si $\sum_{d|n} \Lambda(n) = \log n \ \ \forall n \geq 1$. Para $n = 1$ es obvio pues ambos términos son 0. Para $n > 1$, de nuevo, descomponemos n en potencias de primos es $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$. Además, como $\Lambda(d) = 0$ para todo d que no sea de la forma $d = p_i^m$ con p_i primo, entonces

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{p_i^m | n} \Lambda(p_i^m) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{a_i} \log p_i = \sum_{i=1}^{k} a_i \log p_i = \sum_{i=1}^{k} \log p_i^{a_i} = \log n.$$

3. La primera igualdad es obvia, pues del apartado 2 tenemos $\log = \Lambda * u$ implica $\log * \mu = (\Lambda * u) * \mu$ que, usando la propiedad asociativa primero, el apartado 1 posteriormente y la propiedad conmutativa para finalizar, se llega al resultado. La segunda igualdad se deduce de

$$\begin{aligned} \Lambda(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = \log n \sum_{d|n} \mu(d) - \sum_{d|n} \mu(d) \log d \\ &= I(n) \log n - \sum_{d|n} \mu(d) \log d = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d, \end{aligned}$$

ya que el término $I(n) \log n = 0 \ \ \forall n \in N$.

4. Es trivial por la igualdad (1) en la definición de la convolución de Dirichlet. □

1.4. La función ζ de Riemann

Quizá, la serie de Dirichlet más famosa y estudiada hasta la fecha sea la función zeta de Riemann, $\zeta(s)$, definida como

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{con } \ \sigma > 1.$$

Veremos que en nuestra memoria tiene vital importancia manifestar algunas de las propiedades básicas de ésta. En primer lugar se observa que $\zeta(s)$ es holomorfa en $\sigma > 1$ pues es claro que $\sigma_a = \sigma_s = 1$. No obstante, se puede extender de manera holomorfa a un dominio más amplio.

Teorema 1.11. *La función $\zeta(s)$, se extiende de manera holomorfa a $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 0\} \setminus \{1\}$, con polo simple en $s = 1$.*

Demostración. Sea $s = \sigma + it$ con $\sigma > 1$. Denotamos $[x]$ la parte entera de x y $\{x\}$ su parte fraccionaria. Consideramos $0 < y < 1$ y las funciones $f(t) = t^{-s}$, si $t \in (0, +\infty)$; y $A(x) = \sum_{n \le x} u(n) = \sum_{n \le x} 1 = [x]$, para todo $x \ge 1$. Aplicando la Identidad de Abel se tiene

$$\sum_{y<n\le x} \frac{1}{n^s} = \frac{[x]}{x^s} - \frac{[y]}{y^s} - \int_y^x [t](t^{-s})' dt = \frac{[x]}{x^s} + s\int_y^x \frac{[t]}{t^{s+1}} dt,$$

pues $[y] = 0$. Si tomamos límites a ambos lados cuando $y \to 1^-$ llegamos a

$$\sum_{n=1}^{[x]} \frac{1}{n^s} = \frac{[x]}{x^s} + s\int_1^x \frac{[t]}{t^{s+1}} dt. \tag{1.10}$$

Como $\left| [x]x^{-s} \right| \le x x^{-\sigma} = x^{1-\sigma} \longrightarrow 0$ cuando $x \to \infty$, tomando límites a ambos lados de (1.10) obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = s\int_1^{\infty} \frac{[t]}{t^{s+1}} dt = s\int_1^{\infty} \frac{t - \{t\}}{t^{s+1}} dt. \tag{1.11}$$

Observamos que se cumple

$$\int_1^{\infty} \frac{t}{t^{s+1}} dt = \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{-s+1} t^{-s+1} \Big|_1^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{-s+1} t^{-s+1} \right) - \frac{1}{-s+1} = \frac{1}{s-1}, \tag{1.12}$$

pues

$$\left| \frac{t^{-s+1}}{-s+1} \right| = \frac{t^{-\sigma+1}}{\sigma - 1} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \quad \text{ya que } \quad \sigma > 1;$$

lo que quiere decir que, al converger la expresión de (1.12), podemos separar en dos integrales la expresión de (1.11) y sustituir el resultado obtenido. De esta manera

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} dt, \quad \text{si } \ \sigma > 1. \tag{1.13}$$

$\frac{s}{s-1}$ es una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ con un polo simple en $s = 1$, así que para llegar al resultado basta ver que el término de la derecha de (1.13) es holomorfo cuando $\sigma > 0$. Sea $G(s) := \int_1^{\infty} \{t\} t^{-s-1}\, dt$ con $\sigma > 0$. Es obvio que la función G está bien definida ya que

$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\{t\}}{t^{s+1}} \right| dt \le \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{\sigma+1}} < +\infty.$$

Supongamos que G se puede derivar bajo signo integral. Se tiene

$$G'(s) = \int_1^{\infty} \frac{d}{ds} \left(\frac{\{t\}}{t^{s+1}} \right) dt = -\int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}} \log t\, dt, \quad \forall s \ni \sigma > 0. \tag{1.14}$$

Como $\sigma > 0$, $\exists M = M(\sigma) > 1$ tal que $\log t \leq t^{\sigma/2}$ para todo $t > M$. Así

$$\int_1^\infty \left| \frac{\{t\}}{t^{s+1}} \log t \right| dt \leq \int_1^\infty \frac{\log t}{t^{\sigma+1}} dt \leq \int_1^M \frac{\log t}{t^{\sigma+1}} dt + \int_M^\infty \frac{dt}{t^{\frac{\sigma}{2}+1}} < +\infty.$$

De esta manera, obtendríamos que G es holomorfa si $\sigma > 0$. Para justificar la derivación bajo signo integral usamos el teorema de la convergencia dominada, que se puede aplicar ya que fijado un s con $\sigma > 0$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\sigma - \varepsilon > 0$ y, por tanto, para todo $t > 1$ se verifica

$$\left| \frac{\{t\}}{t^{s+1}} \log t \right| \leq \frac{\log t}{t^{\sigma-\varepsilon}} \frac{1}{t^{\varepsilon+1}} \leq \frac{A}{t^{\varepsilon+1}},$$

para cierta constante $A > 0$. Como la función $At^{-\varepsilon-1}$ es integrable en $(1, +\infty)$ y la cota ha servido para todos los valores en un entorno de s, se concluye que $G(s)$ es holomorfa si $\sigma > 0$. $\square$

Otra propiedad importante es que la función ζ no se anula si $\sigma > 1$.

Teorema 1.12. *Para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\sigma > 1$, se tiene que $\zeta(s) \neq 0$. Más aún, considerando $\mathcal{M}(s) = \sum_{n=1}^\infty \mu(n) n^{-s}$ se verifica*

$$\mathcal{M}(s) = \frac{1}{\zeta(s)}, \quad si \;\; \sigma > 1.$$

Demostración. Sea la función $\mathcal{M}(s) = \sum_{n=1}^\infty \mu(n) n^{-s}$ con $\sigma > 1$ y, al ser $\mathcal{M}$ y ζ series de Dirichlet, en el semiplano de convergencia absoluta común, $\sigma > 1$, se cumple

$$\mathcal{M}(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{(\mu * u)(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^\infty \frac{I(n)}{n^s} = 1. \qquad \square$$

Un argumento más ingenioso prueba que la función $\zeta(s)$ no tiene ceros en la recta $\sigma = 1$ pero primero observamos distintos aspectos de cómo se puede presentar esta función.

Observación 4. Como $\zeta(s)$ es una serie de Dirichlet cuando con $\sigma_a = \sigma_s = 1$, por la observación 2 obtenemos

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{\log n}{n^s} = -\sum_{n=2}^\infty \frac{\log n}{n^s} \quad \text{si} \;\; \sigma > 1.$$

Además $\zeta(s)$ no se anula para tales σ, por tanto, dividiendo lo anterior por ésta tenemos

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \zeta'(s)\mathcal{M}(s) = -\sum_{n=2}^\infty \frac{(\log * \mu)(n)}{n^s} = -\sum_{n=2}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad \text{si} \quad \sigma > 1. \tag{1.15}$$

Por otro lado, como de nuevo $\zeta(s) \neq 0$ en el abierto y simplemente conexo $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$, existe logaritmo holomorfo de $\zeta(s)$ que vamos a denotar como $\operatorname{Log} \zeta(s)$. Observamos que $\zeta(\sigma) > 0$ para $\sigma \in (1, +\infty)$, así que podemos elegir $\operatorname{Log} \zeta(s)$ de forma que en $(1, +\infty)$ sea el logaritmo real de $\zeta(\sigma)$. Hallando primitivas se tiene

$$\operatorname{Log} \zeta(s) = \sum_{n=2}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^s \log n} + C \quad \text{si} \quad \sigma > 1.$$

Fijado $c > 1$, para todo $\sigma > c$ se tiene

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^\sigma} = \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^{\sigma-c}} \frac{1}{n^c} \leq 2^{c-\sigma} \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^c} \underset{\sigma \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Longrightarrow \quad \zeta(\sigma) \longrightarrow 1, \text{ cuando } \sigma \longrightarrow +\infty;$$

y así $\operatorname{Log} \zeta(\sigma) \longrightarrow 0$ cuando $\sigma \longrightarrow +\infty$. Un razonamiento análogo prueba que $\sum_{n=2}^\infty \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma \log n} \longrightarrow 0$ cuando $\sigma \longrightarrow +\infty$. De esta manera $C = 0$.

Lema 1.13. *Sea* $\sigma > 1$. *Se verifica:*

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1.$$

Demostración. Teniendo en cuenta cómo se define $\Lambda(n)$, para $\sigma > 1$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}\zeta(s) &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s\log n} = \sum_{\substack{n=2\\ n=p^m}}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s\log n} = \sum_{\substack{n=2\\ n=p^m}}^{\infty}\frac{\Lambda(p^m)}{mp^{ms}\log p} = \sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log p}{mp^{ms}\log p}\\
&= \sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{ms}} = \sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{mp^{m\sigma}p^{mit}} = \sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-imt\log p}}{mp^{m\sigma}}.
\end{aligned}$$

Es decir, para todo $\sigma > 1$ se cumple:

$$\zeta(s) = \exp\left\{\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-imt\log p}}{mp^{m\sigma}}\right\}, \qquad |\zeta(s)| = \exp\left\{\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right\};$$

donde tenemos en cuenta la igualdad $|e^{e^{-iz}}| = \left|e^{\cos z}e^{-i\operatorname{sen} z}\right| = e^{\cos z}$, $\forall z\in\mathbb{C}$. De esta manera:

$$\zeta^3(\sigma) = \exp\left\{\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3}{mp^{m\sigma}}\right\}, \qquad |\zeta(\sigma+it)|^4 = \exp\left\{\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4\cos(mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right\},$$

$$|\zeta(\sigma+2it)| = \exp\left\{\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right\}.$$

Y juntando las 3 expresiones queda

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| = \exp\left\{\sum_p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3+4\cos(mt\log p)+\cos(2mt\log p)}{mp^{m\sigma}}\right\}.$$

Y queda demostrado el lema ya que para todo $\theta\in\mathbb{R}$ tenemos la siguiente relación trigonométrica:

$$0 \leq 2(1+\cos\theta)^2 = 2+4\cos\theta+2\cos^2\theta = 3+4\cos\theta+\cos 2\theta. \qquad \square$$

Teorema 1.14. *La función* ζ *no se anula en* $\sigma \geq 1$.

Demostración. Ya hemos visto que es cierto si $\sigma > 1$ y se sabe que en $s = 1$ hay un polo simple. Supongamos que $\zeta(1+it) = 0$ para algún $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y veamos que se llega a contradicción.
De la desigualdad en el lema 1.13, multiplicando a ambos lados por $\frac{1}{\sigma-1}$ con $\sigma > 1$ se cumple

$$[(\sigma-1)\zeta(\sigma)]^3\left|\frac{\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it)}{\sigma-1}\right|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1} \quad \text{si } \sigma > 1.$$

Haciendo que $\sigma \longrightarrow 1^+$ se observa que el primer factor queda simplificado a una constante A (ya que ζ tiene polo simple en $s = 1$) y el límite del tercer factor no presenta problemas por continuidad. Como además existe $\zeta'(s)$ si $\sigma > 0$ $(s \neq 1)$, se cumple

$$A|\zeta'(1+it)|^4|\zeta(1+2it)| \geq \lim_{\sigma\to 1^+}\frac{1}{\sigma-1} = +\infty.$$

Contradicción con el hecho de que ζ y ζ' sean holomorfas en el semiplano positivo con $s \neq 1$. $\square$

Corolario 1.15. *La función* $\mathcal{M}(s)$ *se puede extender a un dominio* Ω *tal que* $\{\sigma \geq 1\}\subset\Omega$.

Demostración. La función ζ es holomorfa sin que se anule en $\sigma \geq 1$ $(s \neq 1)$ luego, por continuidad, ζ no se anulará en un $\Omega \supset \{\sigma \geq 1\}$. Así, $\mathcal{M}$ se puede extender en Ω como $\mathcal{M} = \frac{1}{\zeta}$. $\square$

El siguiente teorema es el punto de partida para la demostración del teorema del número primo.

Teorema 1.16. *Se cumple*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

Demostración. En vista del corolario anterior, podemos aplicar el teorema 1.8 deduciendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-1}$ converge. Para calcular la suma, por el teorema 1.7 tenemos
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = \lim_{s\to 1^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \lim_{s\to 1^+} \frac{1}{\zeta(s)} = 0. \qquad \square$$

La función ζ de Riemann está fuertemente ligada a la distribución de los números primos. El siguiente teorema muestra una primera conexión entre ambos.

Teorema 1.17. *Para todo $\sigma > 1$ se cumple*
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} := \lim_{N\to\infty} \prod_{p\le N} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$

Demostración. Definimos $A_N := \{n \in \mathbb{N} | n = p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k},\ p_i \text{ primos } \wedge\ p_i \le N\ i = 1,\dots,k\}$ para todo $N \ge 2$. Sea la función
$$P_N(s) = \prod_{p\le N} \left\{1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right\} \tag{1.16}$$
con $\sigma > 1$ (la función está bien definida ya que es un producto finito de sumas convergentes). Como $\sum_{n\ge 1} |p^{-ns}| < +\infty$, para cualquier p primo y todo s tal que $\sigma > 1$ podemos reordenar los términos de la suma de (1.16) sin que afecte al valor $P_N(s)$. De este modo, para N suficientemente grande se tiene
$$\begin{aligned} P_N(s) &= \left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^{2s}}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{3^{2s}}+\dots\right)\left(1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{5^{2s}}+\dots\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\rho^s}+\frac{1}{\rho^{2s}}+\dots\right) \\ &= 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\dots, \end{aligned}$$
donde ρ es el mayor primo menor o igual que N. Observamos que si $n \in A_N$ entonces todos los primos de su descomposición son menores que N y, por tanto, es posible encontrar (una única vez por la unicidad en la factorización de primos) el término n^{-s} en el desarrollo anterior. Reescribiendo $P_N(s)$ como un sumatorio queda
$$P_N(s) = \sum_{n\in A_N} \frac{1}{n^s} \quad \text{si } \sigma > 1,$$
luego
$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - P_N(s) \right| \le \sum_{n\in A_N^C} \frac{1}{n^\sigma} \le \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$
ya que $\sigma > 1$. De este modo
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{N\to\infty} \prod_{p\le N} \left\{1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\dots\right\} = \lim_{N\to\infty} \prod_{p\le N} \frac{1}{1-p^{-s}} \equiv \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \quad \text{si } \sigma > 1. \qquad \square$$

Muchas funciones aritméticas guardan relación con la ζ de Riemann, algunos ejemplos son:

- $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$ si $\sigma > 1$.
- $\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$ si $\sigma > 1$.
- $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$ si $\sigma > 1$.
- $\operatorname{Log} \zeta(s) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s \log n}$ si $\sigma > 1$.
- $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p (1-p^{-s})$ si $\sigma > 1$.
- $\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \prod_p \frac{1-p^{-s}}{1-p^{1-s}}$ si $\sigma > 2$.

1.5. Extensión de ζ al plano complejo y ecuación funcional

Ya hemos visto que la función $\zeta(s)$ se podía extender a una función holomorfa en $\operatorname{Re} s > 0$ con un polo simple en $s = 1$. Avancemos un poco más y veamos que esta función se puede extender de manera holomorfa a todo $\mathbb{C}$ con un polo simple en $s = 1$. Empezamos trabajando con la famosa función gamma, definida como

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx, \quad \text{con } \sigma > 0.$$

Aunque la definición clásica es cuando s toma valores reales positivos, no supone ningún problema tomar s complejo tal que $\sigma > 0$. Se puede probar vía productos infinitos (omitimos la demostración ya que este tema no se ha tocado en el grado) que la función $\Gamma(s)$ se puede extender a una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y con polos simples en $s = -n$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Por otro lado, con un cambio de variable y después aplicando el teorema de Fubini, llegamos a

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} n^{-s}\, dx = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} t^{s-1}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt, \tag{1.17}$$

válido para todo $\sigma > 1$. El teorema de Fubini está bien aplicado ya que

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{-nt} t^{s-1} \right| dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} t^{\sigma-1}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{t^{\sigma-1}}{e^t - 1}\, dt < +\infty.$$

Gracias a los desarrollos de Laurent, sabemos que se cumple la igualdad

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad \text{si } 0 < |z| < 2\pi. \tag{1.18}$$

Así, para cualquier $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo (entendiendo que no aparece el sumatorio si $N = 0$), se cumple

$$\begin{aligned}
\zeta(s)\Gamma(s) &= \int_0^1 t^{s-1} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{B_n}{n!} t^n \right) dt + \int_0^1 t^{s-1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{B_n}{n!} t^n \right) dt + \int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt \\
&= \int_0^1 t^{s-1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n\, dt + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{n=1}^{N} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s+n} + \int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\, dt. \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

En principio, todo esto es válido cuando $\sigma > 1$. No obstante, si $\sigma > -N-1$, por Fubini-Tonelli tenemos

$$\int_0^1 \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{B_n}{n!} t^{s-1+n} \right| dt \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{|B_n|}{n!} t^{\sigma-1+n}\, dt = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|B_n|}{n!} \frac{1}{\sigma+n} < +\infty, \tag{1.20}$$

donde la última desigualdad se concluye por comparación con (1.18) (con respecto a la convergencia absoluta en el interior del disco). Así, tiene sentido interpretar la primera integral de (1.19) como una función, que además es holomorfa ya que derivando bajo signo integral obtenemos

$$\frac{d}{ds} \int_0^1 t^{s-1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n\, dt = \int_0^1 t^{s-1} \log t \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n\, dt,$$

y de nuevo, por Fubini-Tonelli, se prueba que la integral converge. La derivación bajo signo integral se justifica ya que para todo $\varepsilon > 0$, $\lim_{t\to 0^+} t^{\varepsilon}\log t = 0$. Por tanto $\exists A > 0 \ni |t^{\varepsilon}\log t| \le A\ \forall t \in (0,1]$. Con el apropiado ε, aplicando Fubini-Tonelli tenemos

$$\int_0^1 \left| t^{s-1}\log t \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \right| dt \le A \int_0^1 t^{\sigma-1-\varepsilon} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|B_n|}{n!} t^n\, dt = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|B_n|}{n!} \frac{1}{\sigma-\varepsilon+n} < +\infty,$$

en cada semiplano $\sigma > \varepsilon$.

Con respecto a los otros términos de (1.19):

$$\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2s} + \sum_{n=1}^{N} \frac{B_n}{n!} \frac{1}{s+n}, \qquad \int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t-1}\, dt;$$

tenemos que el primero es una función holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en los puntos $s = 1, 0, -1, -2\ldots, -N$, que son polos simples. La segunda expresión está bien definida entendiéndola como una función, que además es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

Al ser N arbitrario, llegamos a que $\zeta(s)\Gamma(s)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ salvo en $s = -n$, con $n \in \mathbb{N}\cup\{-1,0\}$, que son polos simples. Como ya se ha dicho en la introducción de esta sección, la función $\Gamma(s)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$, con polos simples en $s = -n$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Por tanto, los polos de $\zeta(s)\Gamma(s)$ para $s = -n$ cuando $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, han de provenir de la función $\Gamma(s)$; mientras que el polo en $s = 1$ ha de provenir de la función $\zeta(s)$. De este modo concluimos que la función $\zeta(s)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ salvo en $s = 1$ que tiene un polo simple. Además, si tenemos en cuenta que

$$\frac{1}{s-1} = -\int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{t}\, dt, \quad \text{si } \sigma < 1; \qquad -\frac{1}{2s} = \int_1^{\infty} \frac{t^{s-1}}{2}\, dt, \quad \text{si } \sigma < 0;$$

a partir de la igualdad (1.19), con $N = 0$, si $\sigma \in (-1,0)$ obtenemos fácilmente

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{s-1}\, dt.$$

Una identidad de la función cotangente, obtenida mediante integración por residuos (ver [4]) es $\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2-n^2}$, válido para cualquier $z \notin \mathbb{Z}$. De esta manera, si $\sigma \in (-1,0)$, se tiene

$$\begin{aligned}\Gamma(s)\zeta(s) &= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{s-1}\, dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2}\frac{e^t+1}{e^t-1} - \frac{1}{t} \right) t^{s-1}\, dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{i}{2}\cot\left(\frac{it}{2}\right) - \frac{1}{t} \right) t^{s-1}\, dt \\ &= 2\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^s}{t^2+4n^2\pi^2}\, dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{s-1} \int_0^{\infty} \frac{t^s}{t^2+1}\, dt = 2(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s) \int_0^{\infty} \frac{t^s}{t^2+1}\, dt,\end{aligned}$$

donde hemos realizado un cambio de variable e intercambiado la serie y la integral fácilmente justificable por el teorema de Fubini. Además, integrando por residuos se tiene $\int_0^{\infty} \frac{t^x}{t^2+1}\, dt = \frac{\pi}{2}(\cos\frac{\pi x}{2})^{-1}$ cuando x es real comprendido en $-1 < x < 0$ (ver [4]). De esta manera

$$\zeta(x)\Gamma(x) = 2(2\pi)^{x-1}\zeta(1-x)\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}, \quad \text{si } -1 < x < 0. \tag{1.21}$$

Y teniendo en cuenta la igualdad

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma(1-x)}{\pi}\operatorname{sen}(\pi x) = \frac{\Gamma(1-x)}{\pi} 2\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})\cos(\frac{\pi x}{2}),$$

obtenemos la famosa ecuación funcional[6]

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s)\Gamma(1-s)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \quad \text{si } s \in \mathbb{C}\setminus\{1\}, \tag{1.22}$$

ya que ambos lados de la igualdad de (1.22) son meromorfos en $\mathbb{C}$ y hemos visto que la igualdad anterior es cierta para $x \in (0,1)$. Por prolongación analítica, concluimos que es cierta para todo $s \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$.

[6]La demostración que hemos puesto es la quinta manera de demostrarlo (hay muchas) que se puede ver en [8], capítulo 2.

Capítulo 2

Teorema del número primo

En este capítulo daremos una demostración del teorema del número primo partiendo del resultado $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-1} = 0$ que ya hemos demostrado en el capítulo anterior. Denotando $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$, el teorema del número primo establece que $\pi(x) \sim x/\log x$. Empezaremos este capítulo estudiando unas estimaciones asintóticas previas para aplicarlas a la función divisor y acabaremos el capítulo presentando las ideas de una demostración diferente que permite intuir la conexión entre los ceros de la función zeta de Riemann y la distribución de los números primos.

2.1. Estimaciones asintóticas previas

Muchas funciones de la teoría de números se comportan de forma caótica. Por esta razón, para intentar saber más acerca de éstas se estudian sus promedios, lo que equivale a estudiar el comportamiento asintótico de $\sum_{n \leq x} f(n)$. Para estas situaciones hay dos herramientas fundamentales que son las que pondremos en práctica: el lema de Abel y el método de la hipérbola. Empezamos recordando las notaciones O-grande y o-pequeña para comparar dos funciones reales cualesquiera f, g omitiendo sus propiedades, que son muy conocidas e inmediatas de demostrar.

- f es o-pequeña de g, denotado como $f(x) = o(g(x))$ si $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
- f es O-grande de g, denotado como $f(x) = O(g(x))$ si existe una $a > 0$ tal que $|f(x)| \leq M\,g(x)$ para todo $x \geq a$ y cierta $M > 0$.

Proposición 2.1. *Sea γ la constante de Euler, con valor $\gamma = 1 - \int_1^{\infty} \{t\}t^{-2}\,dt$, siendo $\{t\}$ la parte fraccionaria de t. Entonces, para todo $x \geq 1$ se cumple:*

- $\displaystyle\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$.
- $\displaystyle\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + O(\log x)$.
- $\displaystyle\sum_{n \leq x} \frac{1}{\sqrt{n}} = O(\sqrt{x})$.

Demostración. La demostración en los tres casos se basa en el uso adecuado del Lema de Abel.

- Para $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$ tomamos $f(t) = t^{-1}$ si $t > 0$ y $a(n) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Teniendo en cuenta que $A(y) = 0$ para todo $0 < y < 1$, al hacer el límite cuando $y \longrightarrow 1^-$ se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= \frac{[x]}{x} + \int_1^x \frac{t - \{t\}}{t^2}dt = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) + \log x - \int_1^x \frac{\{t\}}{t^2}dt \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) + \log x - \int_1^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2}dt + \int_x^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2}dt, \qquad (2.1)\end{aligned}$$

donde la última igualdad se satisface gracias a que $\int_1^{\infty}\left|\frac{\{t\}}{t^2}\right|dt \leq \int_1^{\infty}\frac{1}{t^2}dt < +\infty$.

Por otro lado, observamos que $\int_x^{\infty}\left|\frac{\{t\}}{t^2}\right|dt \leq \int_x^{\infty}\frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{x}$ y por tanto concluimos que $\int_x^{\infty}\frac{\{t\}}{t^2}dt = O\left(\frac{1}{x}\right)$. Continuando en (2.1) se tiene

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n} = 1+O\left(\frac{1}{x}\right)+\log x-\int_1^{\infty}\frac{\{t\}}{t^2}dt+O\left(\frac{1}{x}\right) = \log x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

- Para $\sum_{n\leq x}\log n$ se observa previamente que $\int_1^x\{t\}t^{-1}\,dt \leq \log x$, es decir, $\int_1^x\{t\}t^{-1}\,dt = O(\log x)$. Así, con $f(t) = \log t$ si $t > 0$ y $a(n)$ como antes, el procedimiento es análogo:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}\log n &= [x]\log x-\int_1^x\frac{[t]}{t}dt = x\log x+O(\log x)-\int_1^x dt+\int_1^x\frac{\{t\}}{t}dt\\ &= x\log x-x+O(\log x).\end{aligned}$$

- Para el último punto, con los mismos razonamientos que se han llevado para los casos anteriores, se toma $f(t) = t^{-1/2}$ si $t > 0$ y $a(n) = u(n)$ para todo $n \geq 1$. Así

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{[x]}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\int_1^x\frac{[t]}{t\sqrt{t}}dt \leq \frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \sqrt{x}+\sqrt{x}, \tag{2.2}$$

donde se concluye inmediatamente que

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{\sqrt{n}} = O(\sqrt{x}).$$ □

El siguiente teorema, conocido como el método de la hipérbola, sirve para estudiar las sumas parciales de una convolución. Más adelante lo refinaremos para obtener una mejor estimación de $\sum_{n\leq x}d(n)$, que será necesaria para la demostración del teorema del número primo.

Teorema 2.2. *Sean f,g,h funciones aritméticas tales que $h = f*g$. Para todo $x \geq 1$ llamamos:*

$$H(x) = \sum_{n\leq x}h(n), \qquad F(x) = \sum_{n\leq x}f(n), \qquad G(x) = \sum_{n\leq x}g(n).$$

Entonces se cumple

$$H(x) = \sum_{n\leq x}f(n)G\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\leq x}g(n)F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Demostración. Basta demostrar una igualdad (la otra es análoga usando la conmutatividad de la convolución). Se tiene

$$H(x) = \sum_{n\leq x}h(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{q\cdot d=n}f(q)g(d) = \sum_{\substack{q,d\\ qd\leq x}}f(q)g(d). \tag{2.3}$$

Observamos que en la suma anterior, para un q fijo, el rango de d es desde 1 hasta $[\frac{x}{q}]$. Gráficamente, consiste sumar los valores que toman f y g en los puntos reticulares de la figura 2.1. Como los posibles valores de q son $\{1,\ldots,[x]\}$, continuando en (2.3) queda

$$H(x) = \sum_{\substack{q,d\\ qd\leq x}}f(q)g(d) = \sum_{q\leq x}f(q)\sum_{d\leq\frac{x}{q}}g(d) = \sum_{q\leq x}f(q)G\left(\frac{x}{q}\right).$$ □

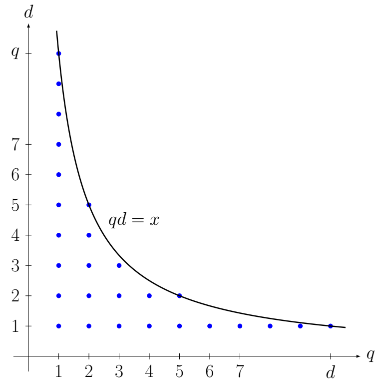


Figura 2.1

Proposición 2.3. *Sea $D(x) = \sum_{n \le x} d(n)$. Para todo $x \ge 1$ es cierta la igualdad*

$$D(x) = x \log x + \gamma x + O(x).$$

Demostración. Definimos $U(x) = \sum_{n \le x} u(n) = [x] = x - \{x\} = x + O(1)$. Como $d = u * u$, aplicando el teorema 2.2, tenemos

$$D(x) = \sum_{n \le x} 1 \cdot U\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \le x} \left(\frac{x}{n} + O(1)\right) = x \sum_{n \le x} \frac{1}{n} + O(x) = x \log x + \gamma x + O(x). \qquad \square$$

Como ya hemos dicho, para llegar a demostrar el teorema del número primo necesitamos ser más precisos con la función $D(x)$ y, para ello, lo que hacemos es mejorar el método de la hipérbola. La idea de la demostración es la misma pero ahora tenemos en cuenta algunas simetrías que nos aparecen.

Teorema 2.4. *Sean f, g, h funciones aritméticas tales que $h = f * g$ y sean a, b números reales positivos cumpliendo $ab = x$. Para todo $x \ge 1$ definimos:*

$$H(x) = \sum_{n \le x} h(n), \qquad F(x) = \sum_{n \le x} f(n), \qquad G(x) = \sum_{n \le x} g(n).$$

Entonces se cumple

$$H(x) = \sum_{n \le a} f(n) G\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n \le b} g(n) F\left(\frac{x}{n}\right) - F(a)G(b).$$

Demostración. Razonando como en el teorema 2.2, se tiene

$$H(x) = \sum_{\substack{q,d \\ qd \le x}} f(q)g(d).$$

Ahora, para contar los valores en los puntos reticulares tal como hacíamos en la demostración del teorema 2.2, dividimos la sección en 3 trozos (ver Figura 2.2) y contamos el número de puntos que hay en $A \cup B$ y $B \cup C$, restando nuevamente los que hay en B, pues están contados dos veces.

$$\begin{aligned} H(x) = \sum_{\substack{q,d \\ qd \le x}} f(q)g(d) &= \sum_{d \le a} \sum_{q \le \frac{x}{d}} f(d)g(q) + \sum_{q \le b} \sum_{d \le \frac{x}{q}} f(d)g(q) - \sum_{d \le a} \sum_{q \le b} f(d)g(q) \\ &= \sum_{d \le a} f(d) G\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{q \le b} g(q) F\left(\frac{x}{q}\right) - F(a)G(b). \qquad \square \end{aligned}$$

Utilizando este teorema, ahora sí que obtenemos una estimación asintótica apropiada de la función $D(x)$ para utilizarla más adelante.

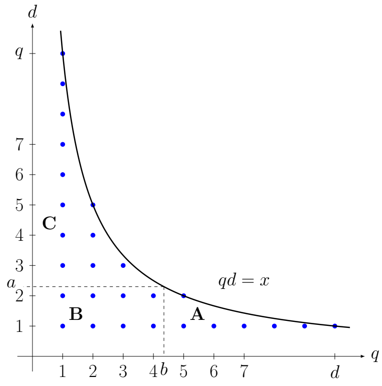


Figura 2.2

Teorema 2.5. *Sea* $D(x) = \sum_{n\leq x} d(n)$. *Para todo* $x \geq 1$ *es cierta la igualdad*

$$D(x) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).$$

Demostración. Tomamos $U(x) = \sum_{n\leq x} u(n)$. Para $x \geq 1$ fijo, se eligen $a = b = \sqrt{x}$. Aplicando el teorema anterior se cumple

$$\begin{aligned}
D(x) &= \sum_{n\leq\sqrt{x}} u(n)U\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n\leq\sqrt{x}} U\left(\frac{x}{n}\right)u(n) - U(\sqrt{x})U(\sqrt{x}) = 2\sum_{n\leq\sqrt{x}} U\left(\frac{x}{n}\right) - \left[\sqrt{x}+O(1)\right]^2 \\
&= 2\sum_{n\leq\sqrt{x}}\left[\frac{x}{n}+O(1)\right] - x + O(\sqrt{x}) = 2x\sum_{n\leq\sqrt{x}}\frac{1}{n} - x + O(\sqrt{x}) \\
&= 2x\left[\log\sqrt{x}+\gamma+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right] - x + O(\sqrt{x}) \\
&= x\log x + (2\gamma-1)x + O(\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

□

2.2. Demostración del teorema del número primo

Iniciamos la demostración del teorema del número primo. Como decíamos al comienzo del capítulo, partiremos del resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n} = 0.$$

La demostración la haremos en tres pasos, que son los tres teoremas que vienen a continuación:

Teorema 2.6. *Definimos* $M(x) := \sum_{n\leq x}\mu(n)$. *Entonces se cumple*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n} = 0 \Longrightarrow M(x) = o(x).$$

Demostración. Por Abel, tomando $f(t) = t$, cuando $t \in (0,\infty)$ y haciendo que $y \longrightarrow 1^-$ se llega a

$$M(x) = \sum_{n\leq x}\mu(n) = \sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n}n = x\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n} - \int_1^x \sum_{n\leq t}\frac{\mu(n)}{n}\,dt, \tag{2.4}$$

luego

$$\frac{M(x)}{x} = \sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n} - \frac{1}{x}\int_1^x\sum_{n\leq t}\frac{\mu(n)}{n}\,dt.$$

Así, hay que probar que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x \sum_{n\leq t} \frac{\mu(n)}{n}\, dt = 0$, ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} = 0$. Observamos que se cumple:

$$\exists C > 0 \ni \left|\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n}\right| < C \quad \forall x > 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists K = K(\varepsilon) > 0 \ni \left|\sum_{n\leq x} \frac{\mu(n)}{n}\right| < \varepsilon \quad \text{para todo } x > K.$$

Así, dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, quedará fija K. Para x suficientemente grande se tiene

$$\left|\frac{1}{x}\int_1^x \sum_{n\leq t} \frac{\mu(n)}{n}\, dt\right| \leq \frac{1}{x}\int_1^K \left|\sum_{n\leq t} \frac{\mu(n)}{n}\right| dt + \frac{1}{x}\int_K^x \left|\sum_{n\leq t} \frac{\mu(n)}{n}\right| dt < \frac{C(K-1)}{x} + \frac{\varepsilon(x-K)}{x}. \tag{2.5}$$

Luego

$$0 \leq \liminf_{x\to\infty} \left|\frac{1}{x}\int_1^x \sum_{n\leq t} \frac{\mu(n)}{n}\, dt\right| \leq \limsup_{x\to\infty} \left|\frac{1}{x}\int_1^x \sum_{n\leq t} \frac{\mu(n)}{n}\, dt\right| \leq \varepsilon,$$

válido para cualquier $\varepsilon > 0$, se concluye la existencia del límite, con valor $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x \sum_{n\leq t} \frac{\mu(n)}{n}\, dt = 0$. □

La siguiente formulación es nuestro segundo paso y de ahí se deducirá rápidamente el teorema del número primo. Recordamos la estimación asintótica $D(x) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$ que aquí será necesaria.

Teorema 2.7. *Sea la función Ψ de Chebyshev, definida por $\Psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ cuando $x > 0$. Se cumple*

$$M(x) = o(x) \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 1.$$

Demostración. Definimos $f(n) = d(n) - \log n - 2\gamma u(n)$ para $n \geq 1$. Si $x \geq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} F(x) :&= \sum_{n\leq x} f(n) = D(x) - \sum_{n\leq x} \log n - 2\gamma[x] \\ &= x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}) - x\log x + x + O(\log x) - 2\gamma x + O(1) = O(\sqrt{x}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Por otro lado, utilizando las propiedades del teorema 1.10 se sigue fácilmente que $(\mu * f)(n) = u(n) - \Lambda(n) - 2\gamma I(n)$ para $n \geq 1$, y por tanto:

$$\sum_{n\leq x} (\mu * f)(n) = [x] - \Psi(x) - 2\gamma \qquad \text{para todo } x \geq 1.$$

De esta manera, si demostramos que $\sum_{n\leq x} (\mu * f)(n) = o(x)$ queda justificado el teorema ya que

$$o(x) = [x] - \Psi(x) - 2\gamma \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{[x] - \Psi(x) - 2\gamma}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{\Psi(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\Psi(x)}{x} = 1.$$

Utilizando el método de la hipérbola, demostrar $\sum_{n\leq x} (\mu * f)(n) = o(x)$ equivale a demostrar

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left[\sum_{n\leq a} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n\leq b} f(n) M\left(\frac{x}{n}\right) - M(a)F(b)\right] = 0$$

con $ab = x$. Para ello, sea $\varepsilon > 0$ y veamos si existe $x_0 \in \mathbb{R}$ de manera que se pueda acotar la expresión anterior (nos referimos a la expresión en la que estamos tomando el límite) por ε para todo $x > x_0$.

- Para el primer sumatorio, sabiendo que $\sum_{n\leq x}\frac{1}{\sqrt{n}} = O(\sqrt{x})$ y $F(x) = O(\sqrt{x})$ y se cumple que $|\mu(n)| \leq 1$ para todo n, entonces existen constantes fijas positivas A, B, C_1, con $B > A$ tales que

$$\left|\sum_{n\leq a}\mu(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leq A\sum_{n\leq a}\sqrt{\frac{x}{n}} = A\sqrt{x}\sum_{n\leq a}\frac{1}{\sqrt{n}} \leq B\sqrt{x}\sqrt{a} = \frac{B}{\sqrt{b}}x, \qquad \forall x > C_1.$$

Como x es variable y a, b arbitrarias cumpliendo $ab = x$, fijamos b de manera que $\frac{B}{\sqrt{b}} < \frac{\varepsilon}{3}$ (a partir de ahora, solamente variará a cuando cambie x). Resulta así

$$\left|\sum_{n\leq a}\mu(n)F\left(\frac{x}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}x, \qquad \forall x > C_1.$$

- En el segundo caso, como b ya está fijo, definimos $K = \sum_{n\leq b}|f(n)|n^{-1}$ y como $M(x) = o(x)$, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\frac{|M(x)|}{x} < \frac{\varepsilon}{3K}, \qquad \text{para todo } x > C_2.$$

Así, si $\frac{x}{b} > C_2$ (implica que $\frac{x}{n} > C_2$ para todo natural $n \leq b$) se tiene

$$\left|\sum_{n\leq b}f(n)M\left(\frac{x}{n}\right)\right| < \sum_{n\leq b}|f(n)|\frac{\varepsilon}{3K}\frac{x}{n} = \frac{\varepsilon x}{3K}\sum_{n\leq b}\frac{|f(n)|}{n} = \frac{\varepsilon}{3}x, \qquad \forall x > C_2 b.$$

- Y en el tercer caso, de nuevo, como $M(x) = o(x)$ y $F(x) = O(\sqrt{x})$, existe $C_3 > 0$ cumpliendo simultáneamente $|M(a)| < a$ y $F(b) < A\sqrt{b} < B\sqrt{b}$ (con la misma B que el primer caso), si $x > C_3$. Teniendo en cuenta que además teníamos que $\frac{B}{\sqrt{b}} < \frac{\varepsilon}{3}$ llegamos a

$$|M(a)F(b)| < aB\sqrt{b} < ab\frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3}x, \qquad \forall x > \text{máx}\{C_1, C_3\}.$$

Juntando las tres partes, para todo $x > \text{máx}\{C_1, C_2 b, C_3\}$, se tiene

$$\frac{1}{x}\left|\sum_{n\leq a}\mu(n)F\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n\leq b}f(n)M\left(\frac{x}{n}\right) - M(a)F(b)\right| < \frac{3\varepsilon x}{3x} = \varepsilon.$$

Y con la libertad de elegir $\varepsilon > 0$ cualquiera, concluimos que el límite es 0. □

El tercer paso ya es la culminación de la demostración del teorema del número primo.

Teorema 2.8. *TEOREMA DEL NÚMERO PRIMO. Se cumple*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Psi(x)}{x} = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x} = 1.$$

Demostración. Veamos que para todo $x \geq 2$ se cumple la desigualdad

$$\frac{\Psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)\log x}{x} \leq \frac{1}{\log x} + \frac{\Psi(x)}{x}\,\frac{\log x}{\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)}.$$

En consecuencia, tomando límites a ambos lados, habremos demostrado el teorema del número primo.

- Primera desigualdad: Para todo $x \geq 2$ se verfica

$$\Psi(x) = \sum_{n\leq x}\Lambda(n) = \sum_{\substack{n\leq x\\ n=p^m}}\Lambda(n) = \sum_{p^m\leq x}\log p. \tag{2.7}$$

En la suma anterior, obviamente, m no toma valores infinitos; de hecho, m ha de cumplir

$$m \leq \frac{\log x}{\log p}$$

para cada primo. Además, si m cumple lo anterior, el valor que toma $\Lambda(p^m)$ es independiente de m (siempre valdrá $\Lambda(p^m) = \log p$), por tanto, en (2.7) podemos acotar por

$$\Psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p \leq \sum_{p \leq x} m \log p \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \log x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \log x.$$

- Segunda desigualdad: Para todo $2 < y < x$ se sigue

$$\pi(x) - \pi(y) = \sum_{y < p \leq x} 1 \leq \sum_{y < p \leq x} \frac{\log p}{\log y} \leq \frac{1}{\log y} \sum_{p^m \leq x} \log p = \frac{\Psi(x)}{\log y},$$

luego

$$\pi(x) \leq \pi(y) + \frac{\Psi(x)}{\log y} \leq y + \frac{\Psi(x)}{\log y}. \tag{2.8}$$

Eligiendo $y = \dfrac{x}{\log^2 x}$, gracias a la expresión (2.8) resulta

$$\frac{\pi(x) \log x}{x} \leq \left[\frac{x}{\log^2 x} + \frac{\Psi(x)}{\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)} \right] \frac{\log x}{x} = \frac{1}{\log x} + \frac{\Psi(x)}{x} \frac{\log x}{\log\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)}. \qquad \square$$

Nota. Con respecto a este último teorema, se puede demostrar fácilmente que también se cumple el recíproco. Nosotros solo hemos presentado una implicación ya que nuestro objetivo era llegar a demostrar el teorema del número primo, además de que no aportaría información relevante a nuestro trabajo. No obstante, esta equivalencia es un hecho importante en la teoría de números.

2.3. Idea sobre otra demostración

En esta sección presentamos otra demostración del teorema del número primo cuyas ideas están más cercanas a la primera demostración (conocida como clásica) dada por Hadamard [3] y de la Vallée Poussin [9] siguiendo las ideas de Riemann [6], [2]. Para esta demostración hace falta tener un mayor conocimiento de la función zeta; de hecho, su uso es tal que la demostración permite ver la relación de sus ceros con la mejora del término error del teorema del número primo. De la misma manera que hemos hecho nosotros, para demostrar el teorema basta probar que $\Psi(x) \sim x$.

La fórmula de Perron[1] afirma que, dada $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$ definida en el semiplano de convergencia absoluta de la serie, entonces para todo $c > \sigma_a$ se tiene [2]

$$\sum_{n \leq x} f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} F(z) \frac{x^z}{z} dz := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-Ti}^{c+Ti} F(z) \frac{x^z}{z} dz, \quad \text{para todo } x > 0. \tag{2.9}$$

Por otro lado, ya sabemos que

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad \text{cuando } \sigma > 1.$$

[1] Tan solo la nombramos para no extendernos. La demostración se puede encontrar en [1], teorema 11.18.

[2] En realidad, la fórmula es cierta si x no es entero. Para x entero sigue siendo cierta si el último término en la suma, $f(x)$, se reemplaza por $f(x)/2$.

Por tanto, aplicando la fórmula de Perrón, para todo $c>1$ fijo se cumple:

$$\Psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds, \quad \text{si } c>1,\quad x\notin\mathbb{N}. \tag{2.10}$$

$$\Psi(x)=\sum_{n\leq x}\Lambda(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\frac{x^s}{s}\,ds+\frac{1}{2}\Lambda(x) \quad \text{si } c>1,\quad x\in\mathbb{N}. \tag{2.11}$$

Como queremos ver que $\Psi(x)\sim x$, solo nos restringiremos a (2.10) y supondremos que x admite tomar valores en $\mathbb{N}$ ya que, para x grande, el término $\Lambda(x)/x$ es pequeño. Tras dividir por x y parametrizar, se tiene

$$\frac{\Psi(x)}{x}=\frac{x^{c-1}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\zeta'(c+it)}{\zeta(c+it)}\right)\frac{x^{it}}{c+it}\,dt=\frac{x^{c-1}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\zeta'(c+it)}{\zeta(c+it)}\right)\frac{e^{it\log x}}{c+it}\,dt \quad \text{si } c>1. \tag{2.12}$$

El que esté familiarizado con el Análisis de Fourier, sabrá que dada cualquier $f\in L^1(\mathbb{R})$, tiene sentido hablar de su transformada de Fourier, que por definición es

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-2\pi i\xi x}\,dx \quad \text{válido para todo } \xi\in\mathbb{R}; \tag{2.13}$$

y en tal caso se verifica el lema de Riemann-Lebesgue, que dice $\exists \lim\limits_{|\xi|\to\infty}\widehat{f}(\xi)=0$.
Observamos que la expresión de (2.12) se puede pensar como una transformada de Fourier que, haciendo el límite, tendríamos una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$ por culpa del término x^{c-1}. Aún así, esta situación es demasiado esperanzadora, pues no está nada claro que la función que acompaña a $e^{it\log x}$ en el integrando sea integrable, además de no ser exactamente igual sino solo 'parecerse' las expresiones (2.12) y (2.13). Parecería sensato eliminar el término que más molesta, que es x^{c-1} ya que al tomar límites es lo que hace que se vaya a infinito. Si pudiésemos elegir $c=1$ todo iría estupendamente, pero lamentablemente no es así. No obstante, esta va a ser la idea a desarrollar.

Ya sabemos que la función $\zeta(s)$ tiene un polo simple en $s=1$, y en consecuencia, por la caracterización de polos, existirá una función entera $g(s)$ tal que $\zeta(s)(s-1)=g(s)$ para todo $s\in\mathbb{C}$ con $g(1)\neq 0$. Derivando se tiene

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}=-\frac{g'(s)}{g(s)}+\frac{1}{s-1}, \tag{2.14}$$

válido siempre que $\zeta(s)\neq 1$. Si manipulamos la expresión de (2.10) tenemos

$$\frac{\Psi(x)}{x}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}\right)\frac{x^{s-1}}{s}\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s-1}}{s(s-1)}\,ds \tag{2.15}$$

Como $-\zeta'(s)/\zeta(s)-1/(s-1)$ es holomorfa en $\mathrm{Re}\,s\geq 1$ (acabamos de ver que para $s=1$ lo es y ζ no se anula precisamente en $\mathrm{Re}\,s\geq 1$), entonces la integral sobre el camino de la figura 2.3 es cero.

Imaginémonos ahora que la integral sobre los segmentos horizontales es pequeña para valores grandes de T. En tal caso, el valor de la integral sobre la recta vertical que pasa por $s=1$ sería el mismo que sobre la recta vertical que pasa por $s=c$ cuando hiciésemos $T\to\infty$. En en consecuencia

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}\right)\frac{x^{s-1}}{s}\,ds&=\frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\frac{1}{s-1}\right)\frac{x^{s-1}}{s}\,ds\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\zeta'(1+it)}{\zeta(1+it)}-\frac{1}{it}\right)\frac{e^{it\log x}}{1+it}\,dt.\end{aligned} \tag{2.16}$$

El camino a seguir parece favorable para nuestro objetivo porque al trasladar la integral de línea sobre la recta $c=1$, tal como queríamos hacer, conseguimos eliminar el término x^{c-1} y solventamos un

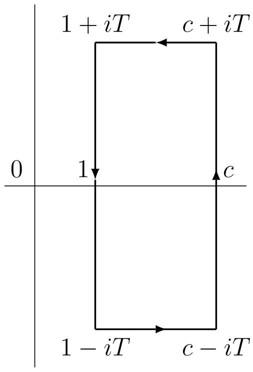


Figura 2.3

primer problema que teníamos (ya no tendríamos la indeterminación $\infty \cdot 0$). Para lograr este propósito de llevar la integral a la recta $\sigma = 1$, hace falta dar acotaciones de la función ζ y de otras relacionada con ella. Las demostraciones no son difíciles, pero sí lo demasiado extensas como para redactarlas aquí[3]. Conseguimos de esta manera abordar satisfactoriamente nuestro primer problema.

Por otro lado, integrando por residuos se tiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{s-1}}{s(s-1)}\,ds = 1-\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1.$$

A la vista de (2.15) y (2.16), para alcanzar el teorema del número primo ya solo restaría verificar que se puede aplicar el lema de Riemann-Lebesgue en (2.16) y para ello solo hace falta ver que

$$\left(-\frac{\zeta'(1+it)}{\zeta(1+it)}-\frac{1}{it}\right)\frac{1}{it+1} \tag{2.17}$$

es integrable en $\mathbb{R}$. Pero aquí nos encontramos con otro obstáculo más que nos detiene por completo; y es que no somos capaces de probar que esta función es integrable. Para conseguir que la expresión anterior sea integrable, necesitaríamos mejorar el término $it+1$ del denominador. Lo que se hace para arreglar este atasco es considerar una función regularizada de la que ya teníamos:

$$\Psi_1(x) := \int_0^x \Psi(t)\,dt, \qquad \text{cuando } x>1;$$

e intentar hacer un razonamiento análogo con esta nueva función. Un teorema tauberiano[4] establece que $\Psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$ implica $\Psi(x) \sim x$; así, si logramos ver que se cumple la relación $\Psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$ habremos visto el teorema del número primo. Utilizando el Lema de Abel y con un pequeño ejercicio de integración por residuos, se llega a la expresión

$$\Psi_1(x) = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{(x/n)^s}{s(s+1)}\,ds.$$

Y ahora, con el teorema de Fubini y dividiendo por x^2 obtenemos

$$\frac{\Psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\,ds;$$

[3] El lector puede encontrarlas en Apostol [1], capítulo 13.
[4] ver [1], capítulo 13 Lema 2 y teorema 13.1.

ecuación muy parecida a la de (2.10), con la considerable diferencia de $s(s+1)$ en el denominador. Con la idea de hacer $c=1$, restando de nuevo la parte singular tal como hacíamos cuando tratábamos la función $\Psi(x)$, llegamos a la expresión (ya parametrizada)

$$\frac{\Psi_1(x)}{x^2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\zeta'(1+it)}{\zeta(1+it)}-\frac{1}{it}\right)\frac{e^{it\log x}}{(1+it)(2+it)}\,dt. \tag{2.18}$$

Observamos que el integrando es una expresión similar a la de (2.17) pero con la diferencia de que el término $it+1$ está mejorado a nuestro favor, pudiéndose argumentar que la expresión es integrable y por el lema de Riemann-Lebesgue se establece la veracidad de $\Psi_1(x)\sim\frac{x^2}{2}$. En otras palabras, lo que hemos llegado a demostrar es que

$$\Psi(x)=x+E(x),$$

donde $E(x)$, que representa el término error, sería $E(x)=o(x)$.

2.4. La hipótesis de Riemann

Un verdadero quebradero de cabeza ha supuesto lo que en 1859 conjeturó Riemann en su tesis doctoral acerca de su famosa función $\zeta(s)$: "todos los ceros no triviales de la función $\zeta(s)$ se sitúan sobre la recta $\sigma=1/2$". Muchos intentos ha habido por parte de brillantes matemáticos para dar una respuesta acertada a esta conjetura y aún, a día de hoy, nadie ha sido capaz de resolverla.

Ya hemos presentado la ecuación funcional como

$$\zeta(s)=2(2\pi)^{s-1}\zeta(1-s)\Gamma(1-s)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right)\quad \text{si } s\in\mathbb{C}\setminus\{1\};$$

donde es muy fácil ver que los puntos de la forma $s=-2n$ con $n\in\mathbb{N}$ hacen que $\zeta(s)=0$, que son los llamados ceros triviales.
Una propiedad conocida de la función real $\Gamma(x)$ cuando x no es entero dice que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x},\quad \text{si } 0<x<1.$$

Por prolongación analítica podemos afirmar que

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi s},\quad \text{si } s\notin\mathbb{N}.$$

Por tanto, para cualquier complejo s tal que $\sigma<0$ y $s\neq-2n$ con n natural, tenemos que $\Gamma(1-s)\neq0$ y también sabemos que $\zeta(1-s)\neq0$ por pertenecer $1-s$ al semiplano $\sigma>1$. En consecuencia, gracias a la ecuación funcional deducimos que

$$\zeta(s)\neq0\quad \text{si } \sigma<0,\ (s\neq-2n).$$

Y de nuevo, gracias a la ecuación funcional, también es fácil ver que $\zeta(s)\neq0$ si $\sigma=0$.

Pero, ¿qué pasa si $\sigma\in(0,1)$? Aquí, argumentos sencillos como los que hemos hecho no bastan para hallar los ceros de la función ζ (si es que los hay). Esta región del plano complejo se conoce como la banda crítica o región crítica de la función zeta y los posibles ceros existentes en esta región son los llamados ceros no triviales.
Asumiendo que hay algún s en la banda crítica que anule a la función ζ, por la ecuación funcional tendremos que el punto $1-s$ (que de nuevo está en la banda crítica) también anula a la función ζ. En otras palabras, los ceros son simétricos respecto de la recta $\sigma=1/2$.
De la misma manera, como trivialmente se cumple

$$\zeta(\bar{s})=\overline{\zeta(s)},\quad \text{si } \sigma>1;$$

entonces por prolongación analítica se tiene que $\zeta(\bar{s})=\overline{\zeta(s)}$ si $s\neq1$ por ser meromorfa. Ya es inmediato afirmar que los ceros también van a ser simétricos con respecto al eje real.

Dada la importancia y la dificultad del tema, Hilbert propuso el problema como uno de los más importantes a resolver durante el siglo XX. Hoy en día, sigue siendo un problema abierto y es uno de los problemas del milenio del Instituto Clay de Matemáticas, dotado con una considerable cuantía económica al que lo demuestre o refute.

Concluimos nuestro trabajo dando una ligera idea de la relación del término del error en el teorema del número primo con esta conjetura. Recordamos que, en la idea de esta segunda demostración, el término x^{c-1} lo intentábamos eliminar porque era el que molestaba cuando tomábamos límites ya que obteníamos una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$. La idea que desarrollamos en ese momento era intentar dar el valor $c=1$ (que en un principio no estaba permitido) y el principal motivo para que esto funcionara era que la función $\zeta(s)$ no se anulaba si $\operatorname{Re} s \geq 1$ porque así concluíamos que

$$-\frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

era holomorfa en $\operatorname{Re} s \geq 1$ y podíamos obtener fácilmente la ecuación (2.16), donde ya habíamos conseguido que $c=1$. Recordamos también que culminábamos el apartado con la expresión

$$\Psi(x) = x + E(x),$$

donde $E(x)$, que representa el término del error, es $E(x) = o(x)$.

Supongamos por un momento que fuese cierta la hipótesis de Riemann. Lo razonable sería intentar aprovecharnos de esta nueva situación y sacarle partido a la función

$$\frac{-\zeta(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

que sería holomorfa en $\operatorname{Re} s \geq 1/2+\varepsilon$, con $\varepsilon > 0$. En un tal caso, si todo fuese igual de bien que antes, la fórmula análoga a (2.18) sería

$$\frac{\Psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\zeta'(\frac{1}{2}+\varepsilon+it)}{\zeta(\frac{1}{2}+\varepsilon+it)} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+\varepsilon+it}\right)\frac{x^{-1/2+\varepsilon}e^{it\log x}}{(\frac{1}{2}+\varepsilon+it)(1+\frac{1}{2}+\varepsilon+it)}\,dt. \tag{2.19}$$

Y de este modo se habría probado que $\Psi_1(x)/x^2 = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{x})^2 + o(x^{-1/2+\varepsilon})$, lo que implica

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^{3/2+\varepsilon}).$$

Si pudiésemos derivar esta expresión gracias a un teorema tauberiano tal vez llevaría a

$$\Psi(x) = x + E(x),$$

donde ahora el error sería $E(x) = o(x^{1/2+\varepsilon})$, que es una estimación mucho más precisa que la de antes.

No obstante, esta situación requiere un detenimiento más profundo porque hemos pasado por alto algunos aspectos importantes. En primer lugar, tendríamos que ser capaces de dar algunas acotaciones sobre la función $\zeta(s)$ (o variantes de ella) similares a las que nos sirven en la otra demostración para garantizar que la expresión (2.19) es verdaderamente una función integrable (para poder hacer la transformada de Fourier y aplicar el lema de Riemann-Lebesgue). También tendríamos que estudiar otras cotas de esta misma función ya que, cuando se integra sobre el respectivo rectángulo (como hacíamos en la otra demostración), las integrales sobre los segmentos horizontales han de ser nulas. Y por último tendríamos que verificar que en efecto el teorema tauberiano nos conduce a lo que hemos intuido.
Afortunadamente, todos estos problemas pueden solucionarse, aunque el camino para abordarlos ya no son las ideas expuestas anteriormente sino que se toman otros procedimientos (ver [2]), llegando a demostrar incluso que la hipótesis de Riemann es cierta si y solo si

$$\Psi(x) = x + O(x^{1/2}\log^2 x).$$

Bibliografía

[1] T. M. APOSTOL, *Introducción a la teoría analítica de números*, Editorial Reverté, S.A. 1980.

[2] H. M. EDWARDS, *Riemann's Zeta Function*. New York and London: Academic Press. 1974.

[3] J. HADAMARD, *Sur la distribution des zéros de la fonction* $\zeta(s)$ *et ses conséquences arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France, 24 (1896), pp. 199-200.

[4] D. S. MITRINOVIC, *Calculus of residues*, P. Noordhoff LTD-Groningen, 1966.

[5] D. J.NEWMAN *Analytic Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer.

[6] B. RIEMANN, *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse*, Monastsber. Akad. Berlin, (1859), pp. 671-680.

[7] W. RUDIN, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1973.

[8] E. C. TITCHMARSH, *The theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford University Press, Ely House, London 1967.

[9] C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers*, Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 20 (1896), pp. 183-256, 281-297.