

Trabajo de fin de Grado. Departamento de Física teórica

4º grado en Física

Universidad de Zaragoza



**Universidad**  
Zaragoza



# Aplicaciones de la formulación geométrica de la Mecánica Cuántica

---

Evolución Markoviana en sistemas cuánticos abiertos

---

Apéndices

Desarrollado bajo la dirección de:

Dr. Jesús Clemente Gallardo, Dr. José Fernando Cariñena Marzo

Néstor González Gracia

# Apéndice A

## La formulación geométrica de la Mecánica Cuántica

### A.1. Introducción. Conceptos básicos de geometría diferencial

La mecánica cuántica, tal y como es usualmente construida, hace uso de un aparato matemático que podemos clasificar como *algebraico*. En efecto, los estados del espacio de Hilbert en la imagen de Schrödinger son con toda legitimidad vectores de un espacio vectorial complejo, y los observables físicos en los que se centra la imagen de Heisenberg son, a la vez, endomorfismos sobre el espacio de Hilbert<sup>1</sup> y vectores elementos de un espacio vectorial real. Es posible, sin embargo, plantearse una construcción de la mecánica cuántica en la que el aparato matemático empleado sea no de carácter algebraico sino de carácter *geométrico*. Veamos con un poco más de detalle qué significa esto.

Primero, el espacio de trabajo central del formalismo geométrico será lo que se conoce como *variedad*:

**Definición A.1 (Carta)** *Denominaremos carta  $n$ -dimensional en  $M$  a todo par  $(A, \pi)$ , donde  $M$  es un espacio topológico,  $A \subset M$  es un abierto de  $M$ , y  $\pi$  es la aplicación homeomorfa  $\pi : A \subset M \mapsto \pi(A) \subset \mathbb{R}^n$ , que asocia a cada punto de  $A_i$  un punto de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Definición A.2 (Variedad topológica)** *Denominaremos variedad topológica de dimensión  $N$  a todo espacio topológico  $M$  en el que para todo par de puntos existen entornos disjuntos y en el que puede definirse una base numerable de abiertos tal que  $\forall p \in M$  existe una carta  $n$ -dimensional en  $p$ .*

La existencia de una base numerable de abiertos en la topología de  $M$  es usualmente denominada por los matemáticos como *segundo axioma de numerabilidad* (ANII), así como la propiedad de separabilidad para todo par de puntos suele ser denominada *axioma  $T_2$* . Los espacios topológicos que cumplen el axioma  $T_2$  reciben el nombre de *espacios de Hausdorff*.

---

<sup>1</sup>En concreto, son aquellos endomorfismos que resultan invariantes bajo la llamada conjugación Hermítica.

Existe una basta cantidad de estudios y resultados sobre variedades y variedades diferenciables, recogidos bajo el nombre de *geometría diferencial*. La referencia [3] desarrolla de manera formal una amplia introducción al tema. No podemos reproducir aquí un desarrollo como el de [3], pero sí podemos introducir algunas ideas importantes que nos serán de gran utilidad más adelante:

- Una de las propiedades de mayor interés de las variedades es la posibilidad de definir *atlas*:

**Definición A.3 (Cartas  $C^{(k)}$ -compatibles)** *Denominaremos **cartas  $C^{(k)}$ -compatibles** a dos cartas  $(A_1, \pi_1), (A_2, \pi_2)$  que satisfacen o bien  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  o bien  $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$  y las composiciones*

$$\pi_2 \circ \pi_1^{-1} : \pi_1(A_2 \cap A_1) \mapsto \pi_2(A_2 \cap A_1),$$

$$\pi_1 \circ \pi_2^{-1} : \pi_2(A_2 \cap A_1) \mapsto \pi_1(A_2 \cap A_1)$$

*son de clase  $C^{(k)}$ .*

**Definición A.4 (Atlas)** *Denominaremos **Atlas  $C^{(k)}$ -compatible** a una familia de cartas  $\{(A_\alpha, \phi_\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{N}\}$  compatibles dos a dos y tales que  $\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}} A_\alpha = M$ .*

El concepto de atlas nos permite trabajar con los puntos de  $M$  y con los elementos definidos sobre ellos con el aparato usual de cálculo diferencial de  $\mathbb{R}^n$ , es decir, nos permite tratar localmente  $M$  como  $\mathbb{R}^n$ . Cuando un atlas no está contenido en ningún otro, recibe el nombre de *atlas maximal*. Una variedad sobre la que se define un atlas maximal se denomina *variedad diferenciable*.

- En cada punto  $q \in M$  es posible construir el conjunto de funciones infinitamente diferenciables en  $q$ , denotado como  $C^{(\infty)}(q)$ . Este conjunto juega un papel decisivo en la formulación geométrica de un sistema físico, ya que, si vemos el espacio de estados de dicho sistema como una variedad, las magnitudes físicas vendrán dadas por funciones sobre los estados, siendo por tanto elementos de  $C^{(\infty)}(M)$ .
- En cada punto  $p \in M$  es posible construir además el espacio de vectores tangentes a  $M$  en  $p$ :

**Definición A.5 (Vector tangente a una variedad en un punto)** *Denominaremos **vector tangente en un punto  $p \in M$**  a toda aplicación  $X_p : C^{(\infty)}(p) \mapsto \mathbb{R}$  que verifique:*

a) *Es lineal:  $X_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X_p(f) + \mu X_p(g), \forall f, g \in C^{(\infty)}(p), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .*

b) *Cumple la regla de Leibniz:  $X_p(fg) = g X_p(f) + f X_p(g)$*

El espacio de todos los vectores tangentes a  $M$  en un punto  $p$  recibirá el nombre de *espacio tangente a la variedad  $M$  en el punto  $p$*  y se denotará como  $T_p M$ . Además, el espacio de vectores tangentes a  $M$  en cualquiera de sus puntos recibirá el nombre de *fibrado tangente* y se denotará como:

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

- Finalmente, otro espacio relevante para el propósito de la descripción geométrica de la mecánica cuántica es el de *espacio de campos vectoriales sobre  $M$* .

**Definición A.6 (Campo vectorial)** *Denominaremos **campo vectorial** toda aplicación que asocia a cada punto de la variedad un vector de su espacio tangente:*

$$X : M \longrightarrow TM$$

$$X(p) := X_p \in T_pM$$

Al espacio de los campos vectoriales definidos sobre la variedad  $M$  se lo denotará como  $\mathfrak{X}(M)$ . Los campos vectoriales serán los encargados de codificar las ecuaciones de la dinámica, puesto que permiten representar ecuaciones diferenciales a través de lo que se conoce como sus *curvas integrales*:

**Definición A.7 (Curva integral de un campo vectorial)** *Denominaremos **curva integral de un campo vectorial**  $X \in \mathfrak{X}(M)$  a la curva  $\Gamma : I \longrightarrow M$ , donde  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  es un intervalo de la recta real, si dicha curva  $\Gamma$  verifica:*

- Es diferenciable.*
- $\frac{d}{dt}\Gamma|_{t=\tau} = X_{\Gamma(\tau)}, \forall \tau \in I$

Esto quiere decir que una curva en una variedad puede ser descrita mediante un campo vectorial que verifique que, en cada punto de la curva, dicho campo asocia un vector tangente a ella. En el formalismo geométrico, por tanto, la dinámica, que no será otra cosa que curvas en la variedad parametrizadas por la variable temporal, queda representada por las curvas integrales de ciertos campos vectoriales.

Todos estos resultados resultados quedan mostrados ilustrativamente en la siguiente figura:

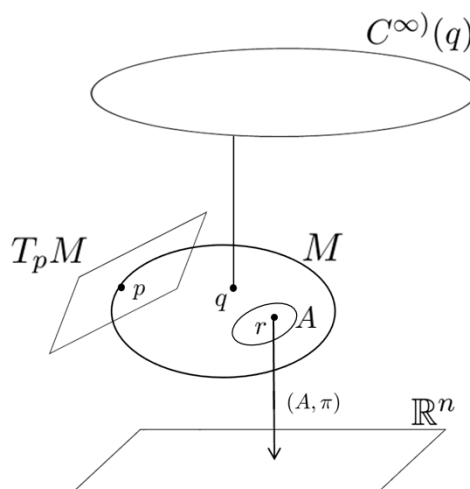


Figura A.1: Estructura general del espacio de trabajo del formalismo geométrico: como dicho espacio se tiene una variedad real de dimensión  $n$ , la cual puede ser vista localmente (para cada entorno  $A$  de  $r \in M$ ) como el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  vía una carta. Además, en cada punto  $p$  o  $q$  es posible construir el espacio de vectores tangentes a  $M$ ,  $T_pM$ , o el de funciones diferenciables en tal punto,  $C^\infty(q)$ .

Con estas ideas, podemos decir de manera informal que emprender el proceso de geometrización de la mecánica cuántica significa sustituir los espacios vectoriales por variedades, y los estados y observables por objetos como funciones y campos vectoriales definidos sobre tales variedades.

Las razones para pensar en una construcción como ésta son múltiples, e iremos incidiendo en ellas conforme surjan en los desarrollos posteriores; no obstante, en este punto inicial podemos aducir una primera justificación del formalismo geométrico. En la mecánica clásica la descripción de un sistema de  $n$  coordenadas generalizadas se realiza sobre su espacio de fases (el espacio de pares  $(q_i, p_i)$  de las coordenadas y sus momentos conjugados), que no es sino una variedad real de dimensión  $2n$ . Además, las magnitudes físicas vienen dadas por funciones definidas sobre dicha variedad real, y las ecuaciones de la dinámica, por ejemplo las ecuaciones de Hamilton,  $\partial_{q_i} H = -\dot{p}_i$  y  $\partial_{p_i} H = \dot{q}_i$ , son ecuaciones diferenciales de primer orden, cuyas soluciones pueden ser las curvas integrales de un campo vectorial. El formalismo clásico, por tanto, es de manera natural un formalismo geométrico<sup>2</sup>, de forma que el estudio del límite clásico de la mecánica cuántica podrá abordarse de una manera más directa si ésta está formulada también desde una perspectiva geométrica.

Llevar la mecánica cuántica en su totalidad a términos geométricos implica emprender un camino profundo y extenso, tanto que su exposición completa rebasa los límites a los que está sujeto este trabajo. Sin embargo, encontramos conveniente ofrecer al lector una serie de descripciones que, si bien no cubren todos los conceptos sobre los que podría trabajarse, le permitirán formarse una idea precisa y profunda de dicho formalismo: seguiremos [1] y [2] y nos enmarcaremos en la construcción conocida como *imagen de Heisenberg*, mostrando el proceso de geometrización de las estructuras algebraicas con las que está dotado el espacio central de dicha construcción, el espacio de observables. Asimismo, dado que los capítulos 1 y 2 se desarrollan bajo el formalismo de la matriz densidad, la versión geométrica de la ecuación de Liouville-von Neumann será derivada como aplicación del formalismo geométrico.

## A.2. La estructura algebraica del espacio de observables

Volvemos así nuestro interés hacia el espacio de observables. Nuestro objetivo principal será geometrizar las estructuras algebraicas que posee este espacio, pero para ello es necesario identificar primero tales estructuras. Como objetivo en esta sección tomaremos por tanto la caracterización algebraica del espacio de observables,  $\mathcal{O}$ , dejando para la siguiente el proceso de geometrización. Veremos que tal caracterización se traduce en dos resultados principales: (1) el espacio de operadores lineales sobre  $\mathcal{H}$ ,  $\text{End}(\mathcal{H})$ , al cual pertenece el espacio de observables, puede dotarse de forma natural de una estructura algebraica llamada de *de  $\mathbb{C}^*$ -álgebra* y (2) el espacio de observables  $\text{Herm}(\mathcal{H})$  conforma lo que se denomina la parte real de esa  $\mathbb{C}^*$ -álgebra, lo que quiere decir que posee estructura de espacio vectorial real y que puede ser dotado también de forma natural de una estructura algebraica llamada *álgebra de Lie-Jordan-Banach*. Proporcionaremos las definiciones formales de estos conceptos conforme avancemos en la materia.

---

<sup>2</sup>El lector puede notar la alta concordancia del formalismo clásico con la construcción geométrica mostrada en la figura A.1.

**A.2.1 La estructura de  $\mathbb{C}^*$ -álgebra en  $\text{End}(\mathcal{H})$ .** Comenzamos mostrando el primero de los resultados, i.e., que el espacio de operadores  $\text{End}(\mathcal{H})$  puede ser dotado de una estructura de  $\mathbb{C}^*$ -álgebra:

**Definición A.8 ( $\mathbb{C}^*$ -álgebra)** Se denomina  $\mathbb{C}^*$ -álgebra  $(\mathcal{A}, \cdot, \|\cdot\|, *)$  a un espacio vectorial complejo  $\mathcal{A}$  con una ley de composición interna  $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$  (que escribimos por yuxtaposición), una norma  $\|\cdot\|$  en  $\mathcal{A}$  y una aplicación  $*$  :  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ , denominada involución, que satisfacen  $\forall A, B \in \mathcal{A}$  y  $a \in \mathbb{C}$ :

1.  $(\mathcal{A}, \cdot)$  es un álgebra asociativa (i.e.,  $\cdot$  es bilineal y cumple propiedad asociativa).
2.  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach (i.e., completo con respecto a  $\|\cdot\|$ ).
3. La norma y el producto están relacionadas mediante:  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$  (lo cual asegura que  $\cdot$  es una aplicación continua).
4. La involución es de la forma  $*(A) := A^*$ ,  $A \in \mathcal{A}$  y cumple:
  - 4.1.  $(A + B)^* = A^* + B^*$
  - 4.2.  $(aA)^* = \bar{a}A^*$
  - 4.3.  $(A^*)^* = A$
5. La involución y el producto están relacionados mediante:  $(AB)^* = B^*A^*$
6. La involución, la norma y el producto están relacionados mediante la llamada identidad  $C^*$ :  $\|AA^*\| = \|A\|^2$

Ocurre que pueden definirse de forma natural en  $\text{End}(\mathcal{H})$  operaciones de producto, norma e involución que cumplen las propiedades anteriores, en virtud de lo cual afirmamos que  $\text{End}(\mathcal{H})$  posee estructura de  $\mathbb{C}^*$ -álgebra. Para verlo de forma intuitiva haremos uso de que, en dimensión finita  $N$ , el espacio  $\text{End}(\mathcal{H})$  es isomorfo al espacio de matrices  $N \times N$  con coeficientes complejos,  $M(N, \mathbb{C})$ , de forma que trasladamos la prueba a este último espacio vía dicho isomorfismo:

$$\phi : \text{End}(\mathcal{H}) \mapsto M(N, \mathbb{C}).$$

Ahora que nos encontramos en  $M(N, \mathbb{C})$ , es sencillo comprobar que, con el producto usual de matrices, la involución correspondiente a la conjugación Hermítica  $A^* = A^\dagger = \bar{A}^T$  y la norma derivada de la operación traza, llamada norma de Frobenius, dada por

$$\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^\dagger A)}, \quad \forall A \in M(N, \mathbb{C}),$$

$M(N, \mathbb{C})$  adquiere estructura de  $\mathbb{C}^*$ -álgebra. Construimos así las  $\mathbb{C}^*$ -álgebras

$$(M(N, \mathbb{C}), \cdot, \|\cdot\|, \dagger) \quad \text{y}$$

$$(\text{End}(\mathcal{H}), \cdot_E, \|\cdot\|_E, \dagger_E),$$

donde las operaciones con el subíndice E en  $\text{End}(\mathcal{H})$  resultan de trasladar las operaciones sin subíndice desde  $M(N, \mathbb{C})$  mediante el isomorfismo  $\phi$ , por ejemplo,  $\dagger_E = \phi^{-1} \circ \dagger \circ \phi$ .

**A.2.2 La estructura de LJB álgebra en  $\mathcal{O}$ .** Dentro de cualquiera de estas  $\mathbb{C}^*$ -álgebras podemos considerar su parte real, es decir, el conjunto de elementos invariantes bajo la involución; en el caso de los operadores lineales encontramos el conjunto de operadores autoadjuntos  $\mathcal{O} = \{A \in \text{End}(\mathcal{H}) | A^{\dagger E} = A\}$  y en el caso de las matrices el conjunto de matrices Hermíticas  $\text{Herm}(\mathcal{H}) = \{A \in M(N, \mathbb{C}) | A^{\dagger} = A\}$ . La figura 1.1 presenta de forma gráfica lo dicho hasta el momento:

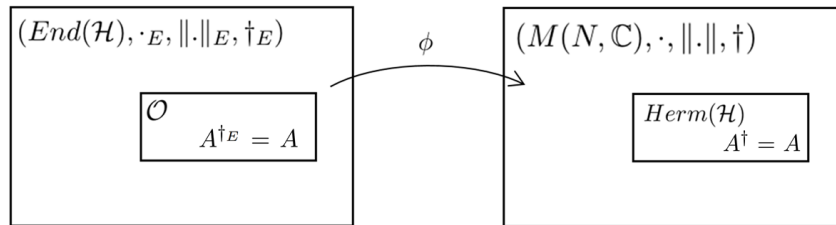


Figura A.2: Estructura de  $\mathbb{C}^*$ -álgebra de  $\text{End}(\mathcal{H})$  y estructuras asociadas: espacio isomorfo (vía  $\phi$ )  $M(N, \mathbb{C})$  y conjuntos  $\mathcal{O}$  y  $\text{Herm}(\mathcal{H})$  invariantes por la involución.

Volvemos ahora nuestro interés al conjunto de observables  $\mathcal{O}$ . Nos interesa conocer qué estructura algebraica tiene en función de la estructura de  $\mathbb{C}^*$ -álgebra en la que está contenido. Lo primero y más evidente es que  $\mathcal{O}$  conforma un espacio vectorial real, dado que la multiplicación por escalares complejos no preservaría la propiedad de invariancia bajo la conjugación Hermítica que lo caracteriza. Pero más allá de esto, el hecho de ser la parte real de una  $\mathbb{C}^*$ -álgebra lo coloca en una situación algebraicamente interesante. Como antes, para realizar un análisis más ilustrativo consideraremos los elementos del espacio de matrices  $\text{Herm}(\mathcal{H})$ , aunque todo lo dicho será válido en  $\mathcal{O}$  previo transporte por  $\phi$ . Con respecto a la norma y a la involución, es claro que podemos considerar las restricciones de las definidas en la  $\mathbb{C}^*$ -álgebra  $(M(N, \mathbb{C}), \cdot, \|\cdot\|, \dagger)$  a  $\text{Herm}(\mathcal{H})$ , dado que ambas son operaciones internas en el conjunto. La restricción del producto a  $\text{Herm}(\mathcal{H})$ , sin embargo, no es una operación interna:

$$A, B \in \text{Herm}(\mathcal{H}) \implies (AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} = BA \neq AB \implies AB \notin \text{Herm}(\mathcal{H})$$

Así que por el momento el espacio de matrices Hermíticas es de la forma  $(\text{Herm}(\mathcal{H}), \|\cdot\|, \dagger)$ . Vamos a ver a continuación que es posible completar esta estructura de forma natural para dotarlo de estructuras llamadas *de álgebra de Lie* y *de álgebra de Jordan*.

**Definición A.9 (Álgebra de Jordan)** Se denomina *álgebra de Jordan*  $(\mathcal{A}, \circ)$  a un espacio vectorial  $\mathcal{A}$  y a una aplicación bilineal  $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$  (producto de Jordan) si  $\circ$  cumple  $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$ :

1. Es **conmutativa**:  $A \circ B = B \circ A$
2. Es **asociativa con respecto al cuadrado**  $A^2 = A \circ A$ , i.e.,  $(A \circ B) \circ (A \circ A) = A \circ (B \circ (A \circ A))$

**Definición A.10 (Álgebra de Lie)** Se denomina *álgebra de Lie*  $(\mathcal{A}, [\cdot, \cdot])$  a un espacio vectorial  $\mathcal{A}$  y a una aplicación bilineal  $[\cdot, \cdot] : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$  (corchete de Lie) si  $[\cdot, \cdot]$  cumple  $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$ :

1. Es **antisimétrica**:  $[A, B] + [B, A] = 0$

2. Satisface la **identidad de Jacobi**:  $[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$

Las operaciones que hacen de  $\text{Herm}(\mathcal{H})$  un álgebra de Lie y un álgebra de Jordan surgen de considerar dos construcciones a partir del producto de la  $\mathbb{C}^*$ -álgebra, una simétrica y otra antisimétrica. En concreto, el corchete de Jordan definido por:

$$[\cdot, \cdot]_+ : \text{Herm}(\mathcal{H}) \times \text{Herm}(\mathcal{H}) \mapsto \text{Herm}(\mathcal{H}),$$

$$A, B \in \text{Herm}(\mathcal{H}) \mapsto [A, B]_+ = \frac{1}{2}(AB + BA) \in \text{Herm}(\mathcal{H}),$$

hace de  $(\text{Herm}(\mathcal{H}), [\cdot, \cdot]_+)$  un álgebra de Jordan. De la misma forma, el corchete de Lie definido por

$$[\cdot, \cdot]_- : \text{Herm}(\mathcal{H}) \times \text{Herm}(\mathcal{H}) \mapsto \text{Herm}(\mathcal{H}),$$

$$A, B \in \text{Herm}(\mathcal{H}) \mapsto [A, B]_- = -i(AB - BA) \in \text{Herm}(\mathcal{H}),$$

que gracias al factor  $-i$  es una operación interna en  $\text{Herm}(\mathcal{H})$ , hace de  $(\text{Herm}(\mathcal{H}), [\cdot, \cdot]_-)$  un álgebra de Lie<sup>3</sup>.

De esta manera, la estructura algebraica del espacio de matrices Hermíticas queda como  $(\text{Herm}(\mathcal{H}), \|\cdot\|, \dagger, [\cdot, \cdot]_+, [\cdot, \cdot]_-)$ , donde los corchetes proporcionan las estructuras de álgebra de Jordan y de Lie, respectivamente. La subestructura  $(\text{Herm}(\mathcal{H}), \|\cdot\|, [\cdot, \cdot]_+, [\cdot, \cdot]_-)$  es un *álgebra Lee-Jordan-Banach*:

**Definición A.11 (Álgebra de Lie-Jordan-Banach)** *Se denomina **álgebra de Lie-Jordan-Banach** o **álgebra LJB**  $(\mathcal{A}, \circ, [\cdot, \cdot], \|\cdot\|)$  a un espacio vectorial  $\mathcal{A}$  dotado de un producto de Jordan  $\circ$ , un corchete de Lie  $[\cdot, \cdot]$  y una norma  $\|\cdot\|$  tal que  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach si  $\circ$ ,  $[\cdot, \cdot]$  y  $\|\cdot\|$  cumplen  $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$ :*

$$1. \text{ La norma } \|\cdot\| \text{ satisface:} \quad 1.1. \|A^2\| = \|A\|^2 \quad 1.2. \|A^2\| \leq \|A^2 + B^2\|$$

2. El producto de Lie y el corchete de Jordan están relacionados por:

2.1. El corchete de Lie satisface la regla de Leibniz con respecto a la composición de elementos del álgebra mediante el producto de Jordan:  $[A, B \circ C] = [A, B] \circ C + B \circ [A, C]$

2.2.  $\exists k > 0 \in \mathbb{R}$  t.q.:  $(A \circ B) \circ C - A \circ (B \circ C) = k[[A, B], C] - [A, [B, C]]$

4. La norma y el producto de Jordan están relacionados por:  $\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\|$

5. La norma y el corchete de Lie están relacionados por:  $\|[A, B]\| \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \|A\| \|B\|$

Esto nos permite volver al espacio de observables con las operaciones  $[\cdot, \cdot]_{+E}$  y  $[\cdot, \cdot]_{-E}$  y afirmar que  $(\mathcal{O}, \|\cdot\|_E, [\cdot, \cdot]_{+E}, [\cdot, \cdot]_{-E})$  posee una estructura de álgebra Lee-Jordan-Banach. La figura 1.1 se actualiza a la figura 1.2 para incluir las novedades:

<sup>3</sup>El lector encontrará sencillo probar que ambos corchetes, así definidos, son operaciones internas en  $\text{Herm}(\mathcal{H})$  y cumplen las propiedades citadas en las definiciones 1.4 y 1.5



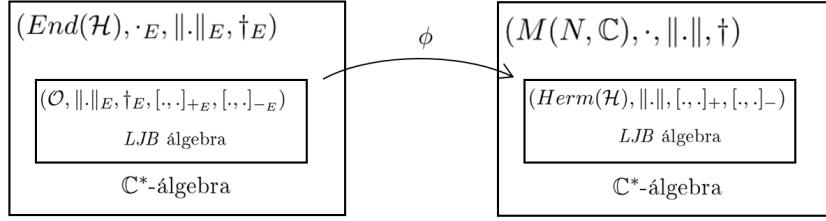


Figura A.3: Estructura de  $\mathbb{C}^*$ -álgebra de  $\text{End}(\mathcal{H})$  y estructuras asociadas: espacio isomorfo (vía  $\phi$ )  $M(N, \mathbb{C})$  y sus partes reales  $\mathcal{O}$  y  $\text{Herm}(\mathcal{H})$ , con estructura de LJB álgebra.

De esta forma queda mostrado el segundo de los resultados presentados al inicio. Para acabar, precisamos que  $M(N, \mathbb{C})$  está también dotado del producto escalar  $(A, B) = \text{tr}(A^\dagger B)$ , del cual derivan tanto la norma de Frobenius como una métrica o distancia  $d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{\text{tr}((A - B)^\dagger (A - B))}$ . En virtud de esto obtenemos finalmente que el espacio de matrices Hermiticas y por tanto el espacio de observables poseen las estructuras completas:

$$(\text{Herm}(\mathcal{H}), (\cdot, \cdot), d, \|\cdot\|, \dagger, [\cdot, \cdot]_+, [\cdot, \cdot]_-, \text{tr}),$$

$$(\mathcal{O}, (\cdot, \cdot)_E, d_E, \|\cdot\|_E, \dagger_E, [\cdot, \cdot]_{+E}, [\cdot, \cdot]_{-E}, \text{tr}_E)$$

Ambos espacios quedan así algebraicamente caracterizados. En adelante trabajaremos exclusivamente sobre el espacio de observables  $\mathcal{O}$ , por lo que para no cargar la notación omitiremos el subíndice E en las operaciones definidas en él.

**A.2.3 Los espacios  $\mathcal{O}^*$  y  $(\mathcal{O}^*)^*$ .** De cara a las posteriores secciones, es conveniente dedicar unas palabras a los espacios dual y bidual del espacio de operadores, que están definidos como los espacios de funciones lineales:

$$\mathcal{O}^* = \{f | f : \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}\} \quad (\mathcal{O}^*)^* = \{F | F : \mathcal{O}^* \mapsto \mathbb{R}\}.$$

La primera propiedad interesante es que la existencia de un producto escalar en  $\mathcal{O}$  establece un isomorfismo entre él y su dual:

$$\phi_1 : \mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}^*,$$

$$A \in \mathcal{O} \mapsto \phi_1(A) := f_A,$$

donde  $f_A$  viene dado por  $f_A(B) = (A, B), \forall B \in \mathcal{O}$ .  $\phi_1$  es en ocasiones llamado *isomorfismo no natural* debido a que requiere de un elemento ajeno al espacio vectorial como es el producto interno. Por ello podemos escribir el elemento del dual asociado al elemento  $A$  de  $\mathcal{O}$ ,  $f_A$ , como  $f_A = (A, \cdot)$ . Este resultado es conocido como *teorema de representación de Riesz*, y en mecánica cuántica establece la asociación entre los *kets* del espacio de Hilbert y los *bras* de su espacio dual.

Además, dado que nos hallamos en dimensión finita podemos hacer uso del conocido resultado de Álgebra Lineal y establecer otro isomorfismo (natural, esta vez) entre  $\mathcal{O}$  y  $(\mathcal{O}^*)^*$ :

$$\phi_2 : \mathcal{O} \mapsto (\mathcal{O}^*)^*,$$

$$A \in \mathcal{O} \mapsto \phi_2(A) := \hat{A},$$

donde  $\hat{A}$  viene dado por  $\hat{A}(f) = f(A), \forall f \in \mathcal{O}^*$ .

La existencia de los isomorfismos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  nos permite transportar todas las estructuras de  $\mathcal{O}$  a su espacio dual o su espacio bidual, hecho que será de gran utilidad en su geometrización.

### A.3. Formulaci3n geométrica del espacio de observables

Hemos concluido en la secci3n anterior que el espacio de observables  $\mathcal{O}$  posee estructuras de espacio vectorial real, de álgebra LJB y adem3s est3 dotado a trav3s de la traza de un producto escalar, lo que induce tanto la norma de la LJB álgebra como una métrica. Resum3mos estas características mediante la forma  $(\mathcal{O}, (\cdot, \cdot), d, \|\cdot\|, \dagger, [\cdot, \cdot]_+, [\cdot, \cdot]_-, tr)$ .

Emprendemos ahora el proceso de geometrización de las estructuras de Jordan y Lie del espacio de observables. Esencialmente, esto significará traducirlas a objetos tensoriales sobre  $\mathcal{O}^*$ , motivo por el que hemos introducido la discusi3n acerca de los espacios dual y bidual al de observables. Como imagen general consideremos los siguientes hechos. El espacio de observables  $\mathcal{O}$  es un espacio vectorial real, por lo que su espacio  $\mathcal{O}^*$  dual tambi3n lo será. Un espacio vectorial real es, de manera trivial, una variedad real de la misma dimensi3n, dado que tomar una base del espacio equivale a definir una carta entre él y  $\mathbb{R}^n$ , la carta de coordenadas en dicha base<sup>4</sup>. Asociado al espacio dual  $\mathcal{O}^*$ , visto ya como variedad real, podemos considerar el espacio  $C^\infty(\mathcal{O}^*)$  de funciones infinitamente diferenciables definidas sobre él. Algunas de estas funciones serán funciones lineales  $F : \mathcal{O}^* \mapsto \mathbb{R}$ , por lo que el espacio bidual  $(\mathcal{O}^*)^*$  formará parte de  $C^\infty(\mathcal{O}^*)$ , i.e.,  $(\mathcal{O}^*)^* \subset C^\infty(\mathcal{O}^*)$ . La siguiente figura resume estos hechos, y permite ver de forma clara cómo la construcci3n realizada hasta el momento adopta el carácter geométrico que introdujimos al comienzo del capítulo:

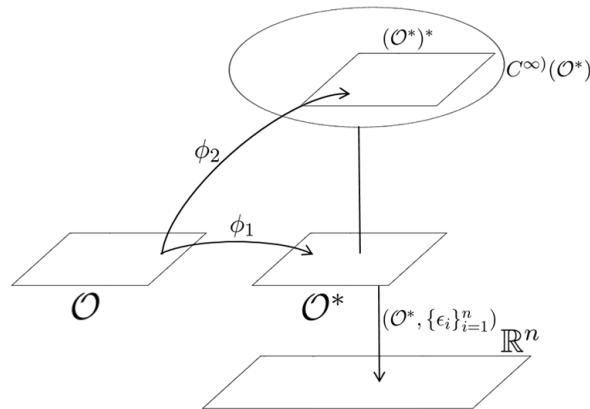


Figura A.4: El espacio  $\mathcal{O}^*$  como variedad real de dimensi3n  $n$  y disposici3n de espacios asociados: espacio de funciones sobre él,  $C^\infty(\mathcal{O}^*)$ , al que pertenece el bidual  $(\mathcal{O}^*)^*$ , y espacio  $\mathbb{R}^n$  asociado a él vía la carta definida por la elecci3n de una base,  $(\mathcal{O}^*, \{\epsilon_i\}_{i=1}^n)$ .

<sup>4</sup>Este razonamiento es el mismo que empleamos en la geometrización de  $\mathcal{H}$  al afirmar que el espacio  $\mathbb{R}^{2n}$  era una variedad real de dimensi3n  $2n$ .

**A.3.1 Los tensores  $\Lambda$  y  $\mathcal{R}$ .** Para completar la formulación geométrica de las estructuras de Lie y Jordan necesitamos un último objeto: la 1-forma diferencial. Definirlo adecuadamente requiere considerar las siguientes extensiones a los conceptos introducidos al comienzo:

**Definición A.12 (Espacio cotangente)** *Denominaremos **espacio cotangente a una variedad  $M$  en un punto  $p$**  al espacio dual del espacio tangente a  $M$  en  $p$ ,  $T_p^*M$ . Dicho espacio será denotado usualmente como  $T_p^*M$ .*

Los elementos de  $T_p^*M$  serán funciones lineales sobre los elementos de  $T_pM$  y con imagen en  $\mathbb{R}$ . De forma similar a lo que ocurría con el fibrado tangente, la unión de los espacios cotangentes en cada punto recibe el nombre de *fibrado cotangente*:

$$T^*M := \bigcup_{p \in M} T_p^*M.$$

Y, al igual que ocurría en el caso de los campos vectoriales, podemos pensar en campos de covectores (vectores elementos del espacio dual a un espacio vectorial dado):

**Definición A.13 (1-forma diferencial)** *Denominaremos **1-forma diferencial** en la variedad  $M$  a toda aplicación que asocia a cada elemento de  $M$  un elemento del fibrado cotangente:*

$$\omega : M \mapsto T^*M,$$

$$\omega(p) = \omega_p \in T_p^*M.$$

Es posible definir una 1-forma a partir de un elemento del espacio de funciones diferenciables en  $M$ . En efecto, para cada  $f \in C^\infty(M)$  podemos construir la 1-forma diferencial  $df$ :

$$df : M \mapsto T^*M,$$

$$df(p) = (df)_p \in T_p^*M.$$

El covector  $(df)_p$  está definido por su actuación sobre los elementos  $X_p \in T_pM$ :

$$(df)_p : T_pM \mapsto \mathbb{R},$$

$$(df)_p(X_p) = X_p(f) \in \mathbb{R}.$$

Ahora ya podemos traducir a términos geométricos los corchetes de Lie y de Jordan, logrando con ello codificar las estructuras algebraicas del espacio de observables de un sistema cuántico. Siguiendo [1] y [2], tales corchetes quedan recogidos en los siguientes objetos:

$$\Lambda_f(d\hat{A}, d\hat{B}) = f([A, B]_-) \quad \mathcal{R}_f(d\hat{A}, d\hat{B}) = f([A, B]_+).$$

En estas definiciones,  $f \in \mathcal{O}^*$ . Los objetos  $\Lambda$  y  $\mathcal{R}$  definen, en cada punto de  $\mathcal{O}^*$  un tensor de rango  $(0, 2)$  o bivector, de forma que cada uno de ellos constituye un *campo tensorial* sobre dicho

espacio. Cada uno de los  $\mathcal{R}_f$  y  $\Lambda_f$  podrá expresarse en función de la base del espacio de tensores  $(0, 2)$  sobre  $(\mathcal{O}^*)^*$  definidos en cada punto  $f \in \mathcal{O}^*$ . Si  $\{e_i\}_{i=1}^n$  es la base de  $\mathcal{O}$  y  $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$  y  $\{\hat{\epsilon}_i\}_{i=1}^n$  sus bases dual y en  $(\mathcal{O}^*)^*$  asociadas, entonces la base del espacio de  $(0, 2)$  tensores sobre  $(\mathcal{O}^*)^*$  es  $\{\epsilon_i \otimes \epsilon_j\}_{i,j=1}^n$ . Dado que  $\mathcal{R}_f$  y  $\Lambda_f$  son tensores simétricos y antisimétricos, respectivamente, podemos sustituir el producto tensorial por sus versiones simétrizada y antisimetrizada:

$$\phi_1 \odot \phi_2 := \frac{1}{2}(\phi_1 \otimes \phi_2 + \phi_2 \otimes \phi_1) \quad \phi_1 \wedge \phi_2 := \frac{1}{2}(\phi_1 \otimes \phi_2 - \phi_2 \otimes \phi_1).$$

Y por tanto podremos escribir:

$$\mathcal{R}_f = \sum_{i,j} \mathcal{R}_{ij} \epsilon_i \odot \epsilon_j, \quad \Lambda_f = \sum_{i,j} \Lambda_{ij} \epsilon_i \wedge \epsilon_j.$$

Es posible obtener los coeficientes  $\mathcal{R}_{ij}$  y  $\Lambda_{ij}$  haciendo actuar los bivectores sobre pares  $(e_i, e_j)$  de vectores de la base de  $\mathcal{O}$ . Por ejemplo, para el caso del tensor  $\Lambda_f$  se obtiene:

$$\Lambda_{ij} = \Lambda_f(d\hat{e}_i, d\hat{e}_j) = f\left(\sum_k c_{ijk} e_k\right) = \sum_k c_{ijk} f(e_k) = \sum_k c_{ijk} (A_f, e_k) = \sum_k c_{ijk} x_k(A_f),$$

donde por  $A_f$  denotamos al elemento de  $\mathcal{O}$  asociado a  $f$  y por  $x_k(A_f)$  denotamos la coordenada  $k$ -ésima de tal elemento. En adelante, tal dependencia se omitirá,  $x_k(A_f) := x_k$ , entendiendo que la coordenada es la del elemento de  $\mathcal{O}$  asociado al elemento de  $\mathcal{O}^*$  que marca el subíndice del tensor. Esto nos lleva a escribir finalmente:

$$\mathcal{R}_f = \sum_{i,j} d_{ijk} x_k \epsilon_i \odot \epsilon_j, \quad \Lambda_f = \sum_{i,j} c_{ijk} x_k \epsilon_i \wedge \epsilon_j.$$

**A.3.2 Ejemplo: versión geométrica de la dinámica de la matriz densidad.** Como ejemplo final y por su relación con los capítulos 1 y 2 consideremos una curva en  $\mathcal{O}^*$  que cumpla:

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = F\gamma,$$

donde  $F$  es un operador lineal. Este es el caso de la dinámica en el espacio de matrices densidad  $D(\mathcal{H})$ , donde la curva  $\rho(t)$  vienen dadas por la ecuación de Liouville-von Neumann (en unidades de  $\hbar$ ):

$$\frac{d}{dt} \rho = -i[H, \rho] = [H, \rho]_-.$$

Siguiendo el ánimo geométrico, podemos reescribir una ecuación así como:

$$\frac{d}{dt} \gamma(t) = X_{\gamma(t)}^F$$

,y decir que las soluciones  $\gamma(t)$  son las curvas integrales del campo  $X^F$ . Recordamos que  $X^F$  produce en cada punto de  $f \in \mathcal{O}^*$  un vector  $X_f^F$ , el cual  $(\mathcal{O}^*)^*$  actúa a su vez como:  $\hat{A} \in (\mathcal{O}^*)^* \mapsto X_f^F(\hat{A}) \in \mathbb{R}$ . Debido a que  $\frac{d}{dt} \gamma(t)$  es también una curva en  $\mathcal{O}^*$ , podemos escribirla en

función de la base de tal espacio:

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) = \sum_i \frac{d}{dt}\gamma_i(t)\epsilon_i,$$

donde

$$\frac{d}{dt}\gamma_i(t) = \left(\frac{d}{dt}\gamma(t), \epsilon_i\right) = (F\gamma(t), \epsilon_i).$$

Estos coeficientes, en cada punto de la curva, deben coincidir con las componentes del vector tangente en ese punto, los cuales se obtienen evaluando dicho vector sobre la base de  $(\mathcal{O}^*)^*$ . Por ello, escribimos:

$$\frac{d}{dt}\gamma_i(t) = X_{\gamma(t)}^F(\hat{\epsilon}_i).$$

De esta forma, el vector tangente a la curva en cada punto viene dado por:

$$X_{\gamma(t)}^F(\hat{\epsilon}_i) = (F\gamma(t), \epsilon_i).$$

O, para un elementos genéricos  $f \in \mathcal{O}^*$  y  $\hat{A} = \sum_i \hat{A}_i \hat{\epsilon}_i \in (\mathcal{O}^*)^*$ :

$$X_f^F(\hat{A}) = (Ff, A) = (f, F^\dagger A).$$

Si volvemos ahora a la ecuación de Liouville-von Neumann, el operador genérico  $F$  toma la forma  $ad_H = [H, \cdot]_-$ , de modo que aplicando el resultado anterior:

$$X_f^{ad_H}(\hat{A}) = (f, ad_H^\dagger(A)) = (f, -[H, A]_-) = -f([H, A]_-) = -\Lambda_f(d\hat{H}, d\hat{A}),$$

donde hemos usado la propiedad  $ad_H^\dagger = -ad_H$ . Así, obtenemos que el campo asociado a la dinámica de la matriz densidad por la mencionada ecuación de Liouville-von Neumann es:

$$X^{ad_H} = -\Lambda(d\hat{H}, \cdot).$$

Y de la misma forma podemos calcular:

$$X_f^J(\hat{A}) = (f, [J, A]_+) = f([J, A]_+) \implies X^J = \mathcal{R}(J, \cdot).$$

## Apéndice B

# Algoritmo de resolución del sistema de 3 niveles

Como se indicó en el capítulo 2, dejamos, por completitud y para el lector que desee consultarlo, el algoritmo, escrito en lenguaje *Mathematica*, que contiene la resolución propuesta del sistema de 3 niveles, aplicado a la evolución individual de los campos hamiltoniano gradiente y de Kraus y a la evolución total de Lindblad. También se halla el código fundamental para realizar el control por enfriamiento de láser.

Se ha aprovechado la capacidad de *Mathematica* para extraer en código las expresiones explícitas que adopta la matriz densidad  $\rho(t)$  cuando evoluciona por cada uno de los campos tratados. También se muestran los valores de pureza y traza. El lector podrá comprobar cómo la información que se ofreció gráficamente en 2.1 2.2 se corresponde con dichas expresiones.

# Evolución temporal de la matriz densidad en el sistema de 3 niveles

## 1. El sistema

### 1.1 Base de Gell-Mann

```
In[314]= G1 = {{0, 1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 0}};
          G2 = {{0, -I, 0}, {I, 0, 0}, {0, 0, 0}};
          G3 = {{1, 0, 0}, {0, -1, 0}, {0, 0, 0}};
          G4 = {{0, 0, 1}, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}};
          G5 = {{0, 0, -I}, {0, 0, 0}, {I, 0, 0}};
          G6 = {{0, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}};
          G7 = {{0, 0, 0}, {0, 0, -I}, {0, I, 0}};
          G8 = 1 / Sqrt[3] {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, -2}};
          G9 = Sqrt[2 / 3] {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
```

### 1.2 Operadores de evolución: Hamiltoniano, de Krauss y gradiente

```
In[323]= e1 = {{0, 1, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}};
          e2 = {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 1, 0}};
          g1 = 1;
          g2 = 1 / 2;
          K1 = Sqrt[g1] * e1;
          K2 = Sqrt[g2] * e2;
          H = {{1, 0, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 1}};
          J = Transpose[K1] . K1 + Transpose[K2] . K2;
```

## 2. Evolución

### 2.1 Estado genérico

```
In[338]= Γ = Sum[αk * Gk, {k, 1, 9}];
          ρ0 = {{1 / 2, 0, 0}, {0, 1 / 3, 0}, {0, 0, 1 / 6}};
          Cρ0 = Table[Simplify[1 / 2 Tr[Gk . ρ0]], {k, 1, 9}];
          MatrixForm[Γ]
          MatrixForm[ρ0]
```

2 | Evolución Ap.nb

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_3 + \frac{\alpha_8}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_9 & \alpha_1 - i \alpha_2 & \alpha_4 - i \alpha_5 \\ \alpha_1 + i \alpha_2 & -\alpha_3 + \frac{\alpha_8}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_9 & \alpha_6 - i \alpha_7 \\ \alpha_4 + i \alpha_5 & \alpha_6 + i \alpha_7 & -\frac{2\alpha_8}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_9 \end{pmatrix}$$

## 2.2 Parte hamiltoniana

### Operador PH

```
In[351]:= PHGamma = -I (H.Gamma - Gamma.H);
CPHGamma = Table[Simplify[1/2 Tr[Gk.CPHGamma]], {k, 1, 9}];
PH = Table[D[CPHGamma[[j]], alpha_k], {j, 1, 9}, {k, 1, 9}];
```

### Evolución bajo PH

```
CrhoH = Simplify[MatrixExp[PH * t].Crho0];
rhoH = Sum[Simplify[Part[CrhoH, k] * Gk], {k, 1, 9}];
TH = Simplify[Tr[rhoH]]
PH = Simplify[Tr[rhoH.rhoH]]
```

```
MatrixForm[rhoH]
```

```
NH1 = Part[rhoH, 1, 1];
```

```
NH2 = Part[rhoH, 2, 2];
```

```
NH3 = Part[rhoH, 3, 3];
```

```
TH = 1
```

```
PH
 7
 18
```

$$\rho_H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$



## 2.3 Parte gradiente

### Operador PJ

```
In[366]:= PJT = -1 / 2 (J.G + G.J);
CPJT = Table[Simplify[1 / 2 Tr[Gk.PJT]], {k, 1, 9}];
PJ = Table[D[CPJT[[j]], αk], {j, 1, 9}, {k, 1, 9}];
```

### Evolución bajo PJ

```
In[416]:= CρJ = Simplify[MatrixExp[PJ * t].Cρ0];
ρJ = Sum[Simplify[Part[CρJ, k] * Gk], {k, 1, 9}];
TJ = Simplify[Tr[ρJ]]
PJ = Simplify[Tr[ρJ.ρJ]]
```

MatrixForm[ρJ]

NJ1 = Part[ρJ, 1, 1];

NJ2 = Part[ρJ, 2, 2];

NJ3 = Part[ρJ, 3, 3];

$$T_J = \frac{1}{3} (2 + e^{-3t/2})$$

$$P_J = \frac{5}{18} + \frac{e^{-3t}}{9}$$

$$\rho_J = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{6} e^{-3t/2} + \frac{1}{9} (2 + e^{-3t/2}) + \frac{1}{36} (1 + 2 e^{-3t/2}) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} + \frac{1}{6} e^{-3t/2} + \frac{1}{9} (2 + e^{-3t/2}) + \frac{1}{36} (1 + 2 e^{-3t/2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.4 Parte Krauss

### Operador PK

```
In[389]:= PKT = K1.G.Transpose[K1] + K2.G.Transpose[K2];
CPKT = Table[Simplify[1 / 2 Tr[Gk.PKT]], {k, 1, 9}];
PK = Table[D[CPKT[[j]], αk], {j, 1, 9}, {k, 1, 9}];
```

4 | Evolución Ap.nb

### Evolución bajo PK

```
In[424]:= CρK = Simplify[MatrixExp[PK * t].Cρ0];
ρK = Sum[Simplify[Part[CρK, k] * Gk], {k, 1, 9}];
TK = Simplify[Tr[ρK]]
PK = Simplify[Tr[ρK.ρK]]
```

```
MatrixForm[ρK]
```

```
NK1 = Part[ρK, 1, 1];
```

```
NK2 = Part[ρK, 2, 2];
```

```
NK3 = Part[ρK, 3, 3];
```

$$T_K = \frac{2+t}{2}$$

$$P_K = \frac{1}{36} (14 + 14t + 5t^2)$$

$$\rho_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} + \frac{2+t}{6} + \frac{1}{12} (1+2t) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} + \frac{1}{12} (-1-2t) + \frac{2+t}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} + \frac{2+t}{6} \end{pmatrix}$$

## 2.5 Evolución global

### Operador L

```
LΓ = PHΓ + PJΓ + PKΓ;
```

```
CLΓ = Table[Simplify[1/2 Tr[Gk.LΓ]], {k, 1, 9}];
```

```
L = Table[D[CLΓ[[j]], αk], {j, 1, 9}, {k, 1, 9}];
```

### Evolución bajo L

```
In[432]:= CρL = Simplify[MatrixExp[L * t].Cρ0];
ρL = Sum[Simplify[Part[CρL, k] * Gk], {k, 1, 9}];
TL = Simplify[Tr[ρL]]
PL = Simplify[Tr[ρL.ρL]]
```

```
MatrixForm[ρL]
```

```
NL1 = Part[ρL, 1, 1];
```

```
NL2 = Part[ρL, 2, 2];
```

```
NL3 = Part[ρL, 3, 3];
```

```
TL = 1
```

$$P_L = \frac{1}{162} e^{-3t} (28 - 62 e^{3t/2} + 97 e^{3t})$$

$$\rho_J = \begin{pmatrix} \frac{25}{36} - \frac{5}{18} e^{-3t/2} + \frac{1}{36} (1 + 2 e^{-3t/2}) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{36} + \frac{5}{18} e^{-3t/2} + \frac{1}{36} (1 + 2 e^{-3t/2}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{18} - \frac{1}{9} e^{-3t/2} \end{pmatrix}$$

# El sistema de 3 niveles y su enfriamiento por láser

## 1. Dinámica libre

### 1.1 Construcción del sistema

#### Base de SU(3): Matrices de Gell-Mann

```
In[206]:= G1 = {{0, 1, 0}, {1, 0, 0}, {0, 0, 0}};
G2 = {{0, -I, 0}, {I, 0, 0}, {0, 0, 0}};
G3 = {{1, 0, 0}, {0, -1, 0}, {0, 0, 0}};
G4 = {{0, 0, 1}, {0, 0, 0}, {1, 0, 0}};
G5 = {{0, 0, -I}, {0, 0, 0}, {I, 0, 0}};
G6 = {{0, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}};
G7 = {{0, 0, 0}, {0, 0, -I}, {0, I, 0}};
G8 = 1/Sqrt[3] {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, -2}};
G9 = Sqrt[2/3] {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}};
```

#### Elección de la dinámica: operadores de Krauss

```
In[215]:= e1 = {{0, 1, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}};
e2 = {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 1, 0}};
g1 = 1;
g2 = 1/2;
K1 = Sqrt[g1] * e1;
K2 = Sqrt[g2] * e2;
```

#### Operador Linbladiano

```
In[297]:= Γ = Sum[αk * Gk, {k, 1, 9}];

H = {{1, 0, 0}, {0, 2, 0}, {0, 0, 1}};
J = Transpose[K1] . K1 + Transpose[K2] . K2;
PH = -I (H . Γ - Γ . H);
PR = 1/2 (J . Γ + Γ . J);
PK = K1 . Γ . Transpose[K1] + K2 . Γ . Transpose[K2];
LΓ = PH - PR + PK;
CLΓ = Table[Simplify[1/2 Tr[Gk . LΓ]], {k, 1, 9}];
L = Table[D[CLΓ[[j]], αk], {j, 1, 9}, {k, 1, 9}];
MatrixForm[L]
```

2 | 3-LevelAp.nb

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4\sqrt{3}} & \frac{5}{2\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.2 Evolución temporal

### Ecuación de Linblad

```
In[230]:= Evolucionar[t_, V_] := MatrixExp[L * t] . V;
```

### Estado inicial

```
 $\rho_0 = \{\{0, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 0\}\};$ 
```

```
MatrixForm[ $\rho_0$ ]
```

```
C $\rho_0$  = Table[Simplify[1 / 2 Tr[Gk. $\rho_0$ ]], {k, 1, 9}];
```

```
In[234]:=  $\rho_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 
```

```
Out[234]= {{0, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}}
```

### Evolution del estado: Poblaciones y Pureza

```
In[280]:= C $\rho_t$  = Evolucionar[t, C $\rho_0$ ];
```

```
 $\rho_t$  = Sum[Simplify[Part[C $\rho_t$ , k] * Gk], {k, 1, 9}];
```

```
N1 = Part[ $\rho_t$ , 1, 1];
```

```
N2 = Part[ $\rho_t$ , 2, 2];
```

```
N3 = Part[ $\rho_t$ , 3, 3];
```

```
PT = Simplify[Tr[ $\rho_t$ . $\rho_t$ ]]
```

```
ST = -Tr[ $\rho_t$ .MatrixLog[ $\rho_t$ ]];
```

$$P(\rho_t) = \frac{1}{9} (5 + 14 e^{-3t} - 10 e^{-3t/2})$$

$$\rho_t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{2}{3} e^{-3t/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t/2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-3t/2} \end{pmatrix}$$

## 2. Dinámica controlada

### 2.1 La transformación de control

```
In[307]:= A = Sum[αk * Gk, {k, 1, 9}];
CA = Table[Simplify[1/2 Tr[Gk.A]], {k, 1, 9}];
U = {{1, 0, 0}, {0, 0, 1}, {0, 1, 0}};
B = Transpose[U].A.U;
CB = Table[Simplify[1/2 Tr[Gk.B]], {k, 1, 9}];
Y = Table[D[CB[[j]], αk], {j, 1, 9}, {k, 1, 9}];
MatrixForm[Y]
```

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 2.2 Evolución

#### Estadio 0

```
In[248]:= M0 = {{0, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 0}};
CM0 = Table[Simplify[1/2 Tr[Gk.M0]], {k, 1, 9}];

CT0 = Evolucionar[t, CM0];
T0 = Sum[Simplify[Part[CT0, k] * Gk], {k, 1, 9}];

P0 = Simplify[Tr[T0.T0]];
S0 = -Tr[T0.MatrixLog[T0]];
```

#### Control 0

```
In[254]:= CM1 = Y.Evolucionar[6, CM0];
```

#### Estadio 1

```
In[255]:= CT1[t_] := Evolucionar[t, CM1];
T1[t_] := Sum[Simplify[Part[CT1[t], k] * Gk], {k, 1, 9}];

P1[t_] := Simplify[Tr[T1[t].T1[t]]];
S1[t_] := -Tr[T1[t].MatrixLog[T1[t]]];
```

#### Control 1

```
In[259]:= CM2 = Y.Evolucionar[12, CM1];
```

## Estadio 2

```
In[260]:= CT2[t_] := Evolucionata[t, CM2];  
T2[t_] := Sum[Simplify[Part[CT2[t], k] * Gk], {k, 1, 9}];  
  
P2[t_] := Simplify[Tr[T2[t] . T2[t]]];  
  
S2[t_] := -Tr[T2[t] . MatrixLog[T2[t]]];
```