

Simulación numérica en registro de imágenes



Álvaro Pé de la Riva
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: Francisco Gaspar Lorenz,
Carmen Rodrigo Cardiel.

Prólogo

Inevitablemente, para poder hablar de registro de imágenes hay que introducir el cálculo variacional y por ello dedicaremos a este propósito el capítulo 1, comenzando por el planteamiento de problemas de minimización de funcionales. Tras concretar un espacio de soluciones y otro de perturbaciones o funciones test, el primer concepto importante que aparece en este ambiente es el de 1ª Variación.

Respecto a la búsqueda de extremos locales para el funcional, anular la 1ª Variación en todo punto proporciona lo que llamamos una forma débil, que no es útil en la práctica dado que es una condición que ha de cumplirse para todas las funciones test v . Por otra parte, de una condición más restrictiva se obtiene lo que se denomina Forma fuerte, la cual consiste en igualar a cero la parte del integrando dependiente de u en todo punto tras haber integrado por partes la 1ª Variación. Es así como llegaremos a la conocida ecuación de Euler-Lagrange.

Estas condiciones no aseguran que los extremos hallados sean mínimos, por ello también añadiremos un resultado basado en la 2ª Variación. No obstante, en algunos problemas tenemos más restricciones, como es el caso de los problemas isoperimétricos, a los que prestaremos algo de atención empleando el método de los multiplicadores de Lagrange. Para concluir con la teoría relacionada con el cálculo de variaciones, extenderemos el caso de una dimensión al caso bidimensional.

Mientras que el Capítulo 1 está enteramente dedicado al cálculo variacional, el Capítulo 2 se centra en el registro de imágenes exceptuando el concepto de derivada de Gâteaux, más adecuado para este tema. El enfoque que se da en este trabajo al problema de registro termina siendo casi en su totalidad teórico, parte de considerar una imagen de referencia y una plantilla con el objetivo de encontrar una transformación que actúe sobre la plantilla y produzca un resultado lo más parecido posible a la imagen de referencia.

Sin embargo, cabe destacar que en la práctica se trabaja con imágenes digitales, luego además de definir matemáticamente lo que es una imagen, también incidiremos en que es necesaria una matriz donde se almacenen los datos discretos de la imagen, dejando así preparado el camino para posibles simulaciones.

En el registro de imágenes, se consideran dos tipos de registro: Registro paramétrico y registro no paramétrico. El primero se fija en un conjunto finito de características de las imágenes y busca una transformación centrada en equipararlas, lo que conlleva obtener unos parámetros óptimos. Frecuentemente las características a las que nos referimos son ciertos puntos de referencia de las imágenes digitales.

No obstante, el trabajo se centra más en el registro no paramétrico, que está íntimamente ligado al cálculo variacional. El problema que plantea este registro consiste en minimizar una distancia definida entre las imágenes de misma dimensión y un regularizador, que caracterizará los dos tipos de registro no paramétrico que vamos a tratar: Registro elástico y registro de difusión.

Observaremos que el modelo que presenta el registro elástico tiene una profunda justificación física, que tiene como base la Ley de Hooke para obtener un modelo lineal, aplicable sólo a pequeñas deformaciones. Concretamente, la distancia en el registro será vista como una fuerza externa que actúa sobre el cuerpo elástico que representa la imagen de referencia, mientras el regularizador suaviza la tensión generada en la imagen.

La parte final del trabajo estará dedicada al registro de difusión, que puede interpretarse como un caso particular del registro elástico haciendo una elección especial de las constantes de Lamé, presentes en el anterior modelo. Por último, daremos una idea general del algoritmo general de registro e introduciremos la discretización por diferencias finitas como base para realizar simulaciones numéricas.

Summary

Image registration is one of the most important tasks within image processing. Its main idea lies in comparing the information given by different images, so firstly we can state two images in our problem: Reference image R and a template image T . Furthermore, the purpose of image registration is to find an optimal, suitable transformation between reference and template images such that the transformed template becomes similar to the reference. However, before starting our research in the image registration field, this work provides a necessary introduction to calculus of variations, due to image registration problem can be viewed as a variational problem.

The point of calculus of variations is the analysis of functionals, known as functions of functions. In addition, we are mainly interested in minimization problems with some boundary conditions. Then, let's start defining a solution space consisting on admissible functions u with certain boundary conditions, for instance, Dirichlet boundary conditions: $S = \{u \in \mathcal{C}^2([0, 1]) \mid u(0) = a, u(1) = b\}$. On the other hand, we define a test space as $S_0 = \{v \in \mathcal{C}^2([0, 1]) \mid v(0) = v(1) = 0\}$. Then, the simplest minimization problem would hold this general structure:

$$\text{Find } u \in S \text{ which minimizes: } \begin{cases} P[u] = \int_0^1 F(u, u') dx \\ u(0) = a \\ u(1) = b \end{cases}$$

where F is also called Lagrangian. In order to find critical functions for P , a logical way is to compare $P[u]$ and $P[u + v]$, with $v \in S_0$. If $u \in S$ satisfies $P[u] \leq P[u + v]$, $\forall v \in S_0$, then a local minimiser is obtained. Through a Taylor expansion $F(u + v, u' + v') = F(u, u') + v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} + \dots$ and computing the difference $P[u + v] - P[u]$ we get the so-called First Variation, which could be seen as a functional derivative:

$$\text{First Variation: } \frac{\delta P}{\delta u} = \int_0^1 \left(v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx .$$

To state $\frac{\delta P}{\delta u} = 0$ provides us the weak form, which is not interesting in practice since we need to satisfy that equation for all $v \in S_0$. However, using integration by parts on the weak form, that is, $\frac{\delta P}{\delta u} = \int_0^1 \left(v \frac{\partial F}{\partial u} - v \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right) dx + \left[v \frac{\partial F}{\partial u'} \right]_0^1$ and applying $v(1) = v(0) = 0$ yields the strong form, well-known as Euler-Lagrange equation by making the function multiplying v equal to zero:

$$\text{Euler-Lagrange equation: } \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 .$$

This equation guarantees its solutions are critical functions for P , but it is just a necessary condition for minimality. If a sufficient condition for minimality is desired, we need to do further research studying the second variation $Q[u; v]$, which appears in a larger Taylor expansion of the Lagrangian $F[u + v, u' + v'] = F[u, u'] + \frac{\delta P}{\delta u} + \frac{1}{2} Q[u; v] + \dots$ so the second variation takes the form:

$$\text{Second Variation: } \frac{1}{2} Q[u; v] = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} v^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} v v' + \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} (v')^2 \right] dx .$$

Additional constraints might be considered in some minimization problems, such as isoperimetric problems. This kind of constraints forces us to introduce a theorem which avoids solutions which are not extremals for P , but caused by constraints. Subsequently, the two-dimensional case is also studied and a further generalisation is given. Along the first chapter, some popular problems are solved or at least treated applying calculus of variations, for instance: Brachistochrone problem, Catenary problem and the minimal surface problem. Finally, we conclude our general approach to calculus of variations by introducing a generalisation of the first variation in the second and last chapter: The *Gâteaux* derivative.

Definition: Given a solution space U and a test space V , a functional $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ is *Gâteaux* differentiable in the direction of v if:

1. There exists a number $\hat{\tau} > 0$ such that $u_\tau = u + \tau v \in U \quad \forall |\tau| \leq \hat{\tau}$
2. The function defined as $J[\tau] := J[u_\tau]$ is differentiable in $\tau = 0$

The first order *Gâteaux* derivative of $J[u]$ in the direction of v is defined by:

$$\delta J[u; v] = J'(0) = \left. \frac{dJ[u + \tau v]}{d\tau} \right|_{\tau=0}.$$

The second part of this work is devoted to image registration. Image registration usually occurs when there are two images of different but similar objects, when each image was taken at different times... or even when both were taken with different image devices. Although the registration problem is easy to state, it is ill-posed, unstable and unique solution is not guaranteed. A mathematical definition of a d -dimensional image is given below:

Definition: Let $d \in \mathbb{N}$, a function $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is called a d -dimensional image if

1. b is compactly supported
2. $0 \leq b(x) < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
3. $\int_{\mathbb{R}^d} b(x)^k dx$ is finite for $k > 0$

We denote the set of all d -dimensional images by

$$\text{Img}(d) := \{b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid b \text{ is } d\text{-dimensional image}\}.$$

However, in practice only digital images with discrete data are used and we keep that data in a grid matrix. As we said, image registration consists to find a transformation $\varphi(x)$ between the reference and the template images and that transformation is split up into the identity mapping and a displacement or deformation part: $\varphi(x) = x + u(x)$. Sometimes an additional mapping could be needed, then the image registration problem is enunciated:

Image registration problem

Given a distance measure $\mathcal{D} : \text{Img}(d)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ and two images $R, T \in \text{Img}(d)$, find mappings $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ and $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\mathcal{D}(R, g \circ T_u)$ becomes minimal, that is, $\mathcal{D}(R, g \circ T_u) \xrightarrow{u} \min$

where $T_u(x) = T(x + u(x))$. There are two kinds of image registration: Parametric and non-parametric registration. Meanwhile parametric registration looks for a transformation in terms of a finite number of basis functions, the solution space appearing in non-parametric registration is infinite-dimensional and it leads to set non-parametric registration in a variational framework. Thus, we introduce the landmark registration problem and some transformations for parametric registration, but our main task is non-parametric registration.

Basically, non-parametric registration problem is a minimization problem on which the functional splits up into two blocks: A distance measure \mathfrak{D} and a smoother or regulariser S . Let's introduce the regularised registration problem:

Regularised Registration Problem: Given a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, the images R, T ; a distance measure $\mathfrak{D} : \text{Img}(\Omega) \times \text{Img}(\Omega) \times U \rightarrow \mathbb{R}^+$, a regulariser term $S : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^+$ and a positive weight $\alpha \in \mathbb{R}^+$, find $u \in U$ such that

$$\mathfrak{D}[R, T; u] + \alpha S[u] \xrightarrow{u} \min .$$

The main distance measure employed on this environment is the sum of squared differences defined by $\mathfrak{D}^{SSD} : \text{Img}(d)^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\mathfrak{D}^{SSD}[R, T; u] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} [R(x) - T_u(x)]^2 dx .$$

Using the same distance measure, non-parametric registration could be distinguished by its own regularisation term. With this idea, we focus our study on two different types of non-parametric registration: Elastic and Diffusion registration.

Elastic registration shows a linearized elastic potential of the displacement u and it takes the role of smoother:

$$S^{elas}[u] = \int_{\Omega} \frac{\mu}{4} \sum_{i,j=1}^d \left(\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{div } u(x))^2 dx ,$$

where λ and μ denote the so-called Lamé constants. Then, applying the Euler-Lagrange equations on Elastic registration, we obtain the Navier-Lamé equations, which have a physical motivation too:

$$\textbf{Navier-Lamé: equations} \quad f(x, u(x)) = \mu \Delta u(x) + (\lambda + \mu) \nabla \text{div}(u) .$$

A special choice of Lamé constants provides a different regulariser, the diffusion smoother:

$$S^{diff}[u] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{n=1}^d \|\nabla u_n(x)\|_2^2 dx .$$

With this smoother we built another kind of registration called Diffusion registration. Its name comes from applying again the Euler-Lagrange equations on $\mathfrak{D}^{SSD}[R, T; u] + \alpha S^{diff}[u]$, because it yields a semilinear diffusion equation:

$$\textbf{Semilinear diffusion equation} \quad -\alpha \Delta u = f(x, u(x)) .$$

Finally, numerical methods like finite differences method could be applied to these partial differential equations in order to solve the registration problem, sometimes adding an artificial time to our schemes getting then stability. However, there is an important remark to make about the registration models shown in this work: They are useful when the deformation u is not large. Some improvements for these models are possible such as variable regularisation.

Índice general

Prólogo	III
Summary	V
1. Cálculo de Variaciones	1
1.1. Introducción	1
1.2. Problemas unidimensionales	2
1.3. Problemas con restricciones	7
1.4. Problemas bidimensionales:	10
2. Registro de Imágenes	13
2.1. Introducción	13
2.2. Registro paramétrico	14
2.3. Registro no paramétrico	16
2.4. Aproximación numérica	21
Bibliografía	25

Capítulo 1

Cálculo de Variaciones

1.1. Introducción

Mientras que el cálculo elemental se limita a tratar la búsqueda de extremos relativos de funciones de una o más variables, el objetivo del cálculo variacional es el de hallar máximos y mínimos de funcionales continuos. El cálculo de variaciones aparece con el problema de la braquistócrona: Dados dos puntos A y B unidos mediante un canal metálico y estando A más elevado que B, ¿ qué forma deberá tener dicho canal para que una bola situada en A llegue a B en el menor tiempo posible?

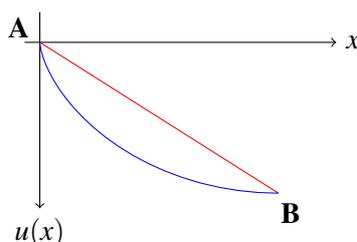


Figura 1.1: La braquistócrona.

Históricamente se le atribuye el primer resultado de cálculo variacional a Johann Bernoulli en 1696 tras dar la solución al anterior problema: La braquistócrona, tal y como comprobaremos más adelante, es la cicloide. Sin embargo cabe destacar que el primero en elaborar una teoría estructurada sobre cálculo variacional fue Leonhard Euler en su trabajo *Elementa Calculi Variationum* (1733). Entre otros matemáticos que contribuyeron al desarrollo del cálculo variacional se encuentran Lagrange, Legendre, Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Poisson...

En el cálculo variacional, las soluciones clásicas a problemas de minimización se determinan mediante problemas con condiciones de contorno que incorporan un cierto tipo de ecuaciones diferenciales, las llamadas Ecuaciones de Euler-Lagrange, que serán tratadas en detalle a lo largo de este capítulo. El lector comprobará que nos encontramos ante una herramienta realmente útil para hallar funciones, curvas, superficies... e imágenes ante problemas de minimización no necesariamente lineales y con condiciones de contorno arbitrarias.

Vamos a aplicar el cálculo de variaciones a los siguientes casos:

- Problemas unidimensionales, no necesariamente cuadráticos.
- Problemas con condiciones o restricciones no necesariamente lineales, multiplicadores de Lagrange.
- Problemas bidimensionales.

1.2. Problemas unidimensionales

Dada una función $u(x)$, queremos minimizar un funcional $P[u]$. Generalmente, dicho funcional $P[u]$ suele tener forma integral y también puede depender de las derivadas de u . Vamos a empezar considerando la clase de problema variacional más básica, en la que el funcional $P[u]$ depende a lo más de la primera derivada de u . Por lo tanto, en este problema sólo se necesita una suavidad de clase \mathcal{C}^2 para la función u , luego definimos el espacio $S = \{u \in \mathcal{C}^2([0, 1]) \mid u(0) = a, u(1) = b\}$ donde buscamos dicha función:

$$(P1) \quad \text{Encontrar } u \in S \text{ minimizando: } \begin{cases} P[u] = \int_0^1 F(u, u') dx \\ u(0) = a \\ u(1) = b \end{cases}$$

donde $F(u, u')$ suele recibir el nombre de Lagrangiano. ¿Cómo hacemos para minimizar $P[u]$? Procederemos comparando $P[u]$ con $P[u + v]$, donde a $v(x)$ se le exige ser una función test admisible para nuestro problema, es decir, tal que $u + v \in S$. De modo que si $(u + v)(0) = a$ $(u + v)(1) = b$ como consecuencia $v(0) = v(1) = 0$ y así definimos como $S_0 = \{v \in \mathcal{C}^2([0, 1]) \mid v(0) = v(1) = 0\}$ el espacio al que pertenecerán las posibles perturbaciones v . Tras hacer un desarrollo de Taylor de $P[u + v]$ y efectuar la diferencia entre $P[u + v]$ y $P[u]$, llamaremos 1ª Variación a la suma de los términos multiplicados por las derivadas de 1ª orden de F en $v(x)$ y lo denotaremos como $\frac{\delta P}{\delta u}$.

Si expresamos: $F(u + v, u' + v') = F(u, u') + v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} + \dots$, se tiene de manera inmediata que:

$$P[u + v] = P[u] + \int_0^1 v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} dx + \dots$$

Luego ya hemos hallado entonces la **1ª Variación**:

$$\boxed{\frac{\delta P}{\delta u} = \int_0^1 \left(v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx.}$$

Para encontrar la función $u(x)$ que minimiza $P[u]$, tendremos como condición necesaria que la "derivada" de P en toda dirección v deberá ser 0. Como P es un funcional, ya no hablamos de derivada, sino de 1ª variación. El exigir que se anule $\frac{\delta P}{\delta u}$ es lo que llamaremos:

$$\text{Forma débil} \quad \frac{\delta P}{\delta u} = \int_0^1 \left(v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx = 0 \quad \forall v \in S_0$$

En nuestro espacio S_0 hay infinitas funciones, y de hecho será lo habitual, luego comprobar la forma débil como condición para minimizar nuestro funcional queda lejos de ser satisfactoria. En concreto, lo que nos interesa es una condición fijada sobre la función u aunque pueda resultar más restrictiva que la anterior. Para ello empezamos integrando la 1ª variación por partes:

$$\frac{\delta P}{\delta u} = \int_0^1 \left(v \frac{\partial F}{\partial u} - v \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right) dx + \left[v \frac{\partial F}{\partial u'} \right]_0^1 = 0 \quad \forall v \in S_0$$

Dado que $v(0) = v(1) = 0$, el segundo sumando anterior es nulo y finalmente si igualamos a cero la parte del integrando no dependiente de v (pues es una perturbación cualquiera) obtenemos la **Forma fuerte** para nuestro problema de minimización, y la ecuación que determina esta última es precisamente la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\text{Ecuación de Euler-Lagrange:} \quad \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$$

Notar pues que el utilizar la anterior ecuación como herramienta para hallar extremos locales de $P[u]$ requiere cierta suavidad para el lagrangiano, en nuestro caso se necesita que $F \in \mathcal{C}^2$. Además no deja de ser una condición necesaria y no suficiente para afirmar que hemos hallado el mínimo, podría tratarse de un máximo o incluso cuando u dependa de más de una variable, de un punto silla. Llegados a este punto, presentamos el siguiente teorema:

Teorema 1.1. *Supongamos que el lagrangiano $F(u, u') \in \mathcal{C}^2$, entonces toda función $u(x)$ minimizando el funcional $P[u] = \int_0^1 F(u, u') dx$ sujeto a unas condiciones de contorno en los extremos, debe cumplir la ecuación de Euler-Lagrange*

Hasta ahora hemos considerado el tipo de problema variacional más básico, pero el funcional que intentemos minimizar puede depender a su vez de derivadas de mayor orden. Generalicemos pues los problemas unidimensionales para adaptarlos a funcionales de orden elevado definiendo para cada $n \in \mathbb{N}$ los espacios $S^n = \{u \in \mathcal{C}^n([0, 1]) \mid u \text{ con } n \text{ condiciones de contorno}\}$, ya que depende de cada problema variacional la mayor o menor suavidad exigida para la función $u(x)$. Presentamos el problema:

$$(P2) \quad \text{Encontrar } u \in S^n \text{ minimizando: } \begin{cases} P[u] = \int_0^1 F(u, u', u'', \dots, u^{(n)}) dx & F \in \mathcal{C}^{n+1} \\ \text{con } n \text{ condiciones de contorno fijadas en } S^n. \end{cases}$$

A su vez, la ecuación de Euler-Lagrange también se ve modificada y de hecho la que obtenemos ahora se conoce como ecuación de Euler-Poisson:

$$\text{Ecuación de Euler-Poisson: } \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} \right) = 0$$

De manera natural también se generaliza el Teorema 1.1. para lagrangianos de orden elevado. Para asegurar que los extremos locales que hallemos con las ecuaciones de Euler-Lagrange sean mínimos, vamos a necesitar otras condiciones. Al igual que ocurre con las funciones, donde recurríamos a la derivada segunda, en el cálculo de variaciones lo que determinará el carácter del extremo local será lo equivalente a una derivada segunda definida para nuestro funcional. Es lo que definiremos como **2ª Variación**.

Hacemos un desarrollo de Taylor de segundo orden del funcional con una perturbación $v(x)$:

$$F[u + v, u' + v'] = F[u, u'] + \langle \nabla F[u, u'], v \rangle + \frac{1}{2} Q[u; v] + \dots \quad \text{donde } \langle \nabla F[u, u'], v \rangle \text{ es la 1ª variación y}$$

$$\frac{1}{2} Q[u; v] = \frac{1}{2} \int_0^1 [A(x)v^2 + 2B(x)vv' + C(x)(v')^2] dx \quad \text{con } A(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, B(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}, C(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}$$

Notación: En el desarrollo de $F[u + v, u' + v']$ denotamos (v, v') con v en el producto escalar que representa la 1ª variación y en el argumento del funcional cuadrático Q .

Nos encontramos con un problema que no teníamos antes, en la 2ª Variación no se anulan los elementos multiplicados por v o su derivada mediante la integración por partes. De nuevo, imitando los criterios de los que disponemos para funciones, sostendremos que u satisfaciendo la ecuación de Euler-Lagrange minimizará el funcional $P[u]$ si el funcional cuadrático $Q[u; v]$ es definido positivo, es decir, si $Q[u; v] > 0 \quad \forall v(x) \neq 0$ con v variación permitida para nuestro problema (en el caso de (P1) se tendría $v \in S_0$). Una forma rápida de asegurar esto es exigir que el integrando sea positivo en todo punto del intervalo, lo cual se traduce en:

$$A(x)v^2 + 2B(x)vv' + C(x)(v')^2 > 0, \quad \forall 0 < x < 1, \quad v \neq 0 \Rightarrow Q[u; v] \text{ es definido positivo.}$$

Teorema 1.2. *Sean $A(x), B(x), C(x)$ funciones de clase $\mathcal{C}^0[0, 1]$ tal y como hemos definido anteriormente. Entonces el funcional cuadrático*

$Q[u; v] = \int_0^1 [A(x)v^2 + 2B(x)vv' + C(x)(v')^2] dx$ es definido positivo para toda $v \neq 0$ satisfaciendo las condiciones de contorno de tipo Dirichlet si se cumplen:

i) $C(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

ii) Para cualquier $c \in (0, 1]$ la única solución al problema de Euler-Lagrange con condiciones de contorno:

$$-(Cv')' + (A - B')v = 0, \quad v(0) = v(c) = 0.$$

es la función trivial $v(x) \equiv 0$.

Definición. Diremos que c es un punto conjugado del extremo 0 si existe una solución $v(x)$ no trivial para el problema de Euler-Lagrange mencionado en el anterior teorema.

Por tanto, la condición ii) en dicho teorema puede resumirse como la no existencia de un punto conjugado en $(0, 1]$ para tal problema variacional. Esta última desarrollada en términos de nuestro problema original recibe el nombre de:

$$\text{Ecuación Variacional Lineal: } -\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}(u, u') v' \right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u, u') - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}(u, u') \right) v = 0.$$

Tomando $C(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}$, la condición i) se traduce en la condición de Legendre para el minimizador $u(x)$:

$$\text{Condición de Legendre: } \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} > 0.$$

Damos paso a la demostración del teorema:

Demostración: Notar que mediante integración por partes se tiene:

$$Q[u; v] = \int_0^1 [A(x)v^2 + 2B(x)vv' + C(x)(v')^2] dx = \int_0^1 \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}(u, u')}_{C(x)} (v')^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u, u') - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}(u, u') \right)}_{S(x)} v^2 dx$$

Aprovechando la positividad de $C(x)$ en todo el intervalo, el objetivo es expresar la integral de la forma:

$$\int_0^1 C(x)\varphi^2(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1]).$$

Para ello consideramos la siguiente integral y la añadimos al funcional cuadrático $Q[u; v]$: $\int_0^1 (\omega v^2)' dx$ con $\omega \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ lo cual no trae consigo ningún problema, ya que al cumplir v las condiciones de contorno de tipo Dirichlet homogéneas, la anterior integral es nula, pero como sumando nos aporta cierta observación sobre el nuevo integrando:

$$C(v')^2 + Sv^2 + \frac{d}{dx}(\omega v^2) = C(v')^2 + 2\omega vv' + (S + \omega')v^2.$$

Se trata de un cuadrado perfecto si elegimos $\omega(x)$ como solución de la ecuación diferencial:

$$C(S + \omega') = \omega^2.$$

En principio, sólo se puede asegurar la existencia de una solución local para esta ecuación. Sin embargo, se trata precisamente de una ecuación de Ricatti, que se reduce a una EDO lineal de segundo orden tras varios cambios de variable y se llega a que:

$$\omega(x) = -\frac{k'(x)}{k(x)} C(x) \quad \text{con } k(x) \in \mathcal{C}^1([0, 1]) \text{ desconocida.}$$

Es necesario comprobar que dicha función es una solución bien definida para poder completar un cuadrado perfecto en la integral, entonces vamos a considerar el funcional bicuadrático $Q[u;k]$ y a tomar la ecuación de Euler-Lagrange aplicada a su lagrangiano:

$$Q[u;k] = \int_0^1 (C k'^2 + S k^2) dx \longrightarrow -\frac{d}{dx}(Ck') + Sk = 0$$

Ahora empleamos el apartado ii) del teorema: Se trata de la misma ecuación de Euler-Lagrange, como tenemos como condición que no existen puntos conjugados del 0, existirá en efecto una solución $k(x)$ que no se anula para ningún $x \in [0, 1]$. Dicho esto, existe por tanto un $\omega(x)$ bien definido que resuelve la ecuación de Riccati a la que llegamos y así conseguimos completar cuadrados:

$$Q[u;v] = \int_0^1 (Cv'^2 + 2\omega vv' + (S + \omega')v^2) dx = \int_0^1 C \left(v' + \frac{\omega}{C}v \right)^2 dx$$

Finalmente, hemos obtenido una expresión de $Q[u;v]$ donde claramente el integrando es no negativo en todo el intervalo $[0,1]$. Notar además que si la integral tomase valor 0 para cierta $v(x)$ continua, necesariamente: $v' + \frac{\omega}{C}v = 0$ y la condición de contorno $v(0) = 0$ implica que $v(x) \equiv 0$ por el teorema de unicidad para las ecuaciones diferenciales de 1^{er} orden. En consecuencia, $Q[u;v]$ es definido positivo. \square

Finalizamos el caso unidimensional para el cálculo de variaciones con el siguiente teorema, que sintetiza todo lo que hemos comentado.

Teorema 1.3. *Dado un funcional $P[u]$, si la función u satisface la ecuación de Euler-Lagrange, y además, la condición de Legendre sin haber puntos conjugados en el intervalo, entonces u es un mínimo local para $P[u]$.*

Ejemplo: Retomemos como ejemplo el famoso problema de la braquistócrona: Sea $A=(0,0)$ el punto de origen de la bola. Para no toparnos con el signo negativo en la ecuación que obtengamos, vamos a tomar el eje y invertido, es decir, aumentando en dirección opuesta a lo que se conviene. En consecuencia, denotaremos la forma buscada del canal metálico mediante la función $u(x) \geq 0$ y el punto residiendo al final del canal metálico será $B = (b, u_b)$ con $b > 0$, $u_b > 0$, por lo tanto situado abajo a la derecha como seguía en la Figura 1.1. El tiempo total que dure el recorrido de la bola en el canal metálico vendrá dado por la expresión:

$$T[u] = \int_0^l \frac{ds}{v} = \int_0^b \frac{\sqrt{1+u'^2}}{v} dx,$$

donde $ds = \sqrt{1+u'^2}$ representa el espacio que avanza instantáneamente la bola, v la velocidad instantánea de la bola, y l la longitud del canal con forma $u(x)$. Nos interesa expresar dicha velocidad en función de la posición de la bola a lo largo del canal, pues así nuestro funcional T dependerá únicamente de $u(x)$. Conseguimos solucionar este problema usando la conservación de la energía. Así, la energía inicial de la bola, que era 0 al estar en reposo, es en todo momento igual a la suma de la energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ y de la energía potencial $P = -mgu$, en la que aparece un signo negativo debido a nuestro convenio. Entonces:

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgu \Rightarrow v = \sqrt{2gu}$$

Luego ya tenemos planteado nuestro problema variacional:

$$\text{Encontrar } u \in \mathcal{C}^2([0,b]) \text{ minimizando: } \begin{cases} T[u] = \int_0^b \frac{\sqrt{1+u'^2}}{\sqrt{2gu}} dx, \\ u(0) = 0 \\ u(b) = u_b \end{cases}$$

Tomaremos como lagrangiano $L(u, u') = \sqrt{\frac{1+u^2}{u}} \in \mathcal{C}^2$ y nos ahorramos arrastrar la constante $\frac{1}{\sqrt{2g}}$. Entonces apliquémosle la ecuación de Euler-Lagrange para hallar extremos locales del funcional $T[u]$:

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{\sqrt{1+u^2}}{2u^{3/2}}; \quad \frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{u'}{\sqrt{u(1+u^2)}}.$$

$$\text{Ecuación de Euler-Lagrange: } -\frac{\sqrt{1+u^2}}{2u^{3/2}} - \frac{d}{dx} \frac{u'}{\sqrt{u(1+u^2)}} = 0; \quad -\frac{2uu'' + (u')^2 + 1}{2(u(1+(u')^2))^{3/2}} = 0.$$

Luego como condición necesaria, los posibles mínimos para el funcional T tendrán que ser solución de esta ecuación diferencial no lineal de 2º orden:

$$2uu'' + (u')^2 + 1 = 0.$$

En lugar de intentar resolver esta ecuación directamente, nos fijamos en que el lagrangiano no depende de x y vamos a utilizar como ayuda la Identidad de Beltrami, veamos cómo llegar a ella:

La ecuación de Euler-Lagrange obliga a que:

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} = 0 \quad \Rightarrow \quad u' \frac{\partial L}{\partial u} - u' \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} = 0.$$

$$\text{Por otro lado: } \frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial u} u' + \frac{\partial L}{\partial u'} u'' + \frac{\partial L}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial u} u' = \frac{dL}{dx} - \frac{\partial L}{\partial u'} u'' - \frac{\partial L}{\partial x}.$$

Juntando ambos resultados se tiene:

$$\frac{dL}{dx} - \frac{\partial L}{\partial u'} u'' - \frac{\partial L}{\partial x} - u' \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u'} = 0; \quad \frac{d}{dx} \left(L - u' \frac{\partial L}{\partial u'} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Aquí es cuando usamos que el lagrangiano no depende de x , ya que entonces $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ y así obtenemos una ecuación equivalente a la de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dx} \left(L - u' \frac{\partial L}{\partial u'} \right) = 0.$$

Finalmente, lo que hace la Identidad de Beltrami es darnos una primitiva para la ecuación de Euler-Lagrange que origina el problema de la braquistócrona, evitando tener que solucionar la ecuación diferencial a la que habíamos llegado.

$$\textbf{Identidad de Beltrami: } L - u' \frac{\partial L}{\partial u'} = \text{cte} \quad (\text{si } \frac{\partial L}{\partial x} = 0).$$

Si aplicamos esto al problema de la braquistócrona, se tiene: $u(1+(u')^2) = C$ siendo $C > 0$ dado que $u(x) > 0$.

La última ecuación a la que hemos llegado es una ecuación diferencial autónoma de 1ª orden, despejamos u' y resolvemos por separación de variables tras hacer un cambio trigonométrico en el lado izquierdo $u = \frac{1}{2}C(1 - \cos \theta)$,

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{C-u}{u}}; \quad \int \sqrt{\frac{u}{C-u}} du = x+k; \quad x+k = \frac{C}{2} \int \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}} \sin \theta d\theta = \frac{C}{2} \int (1-\cos \theta) d\theta = \frac{C}{2} (\theta - \sin \theta).$$

La condición de contorno en el cero hace que la constante k se anule y así la curva que cumple la ecuación de Euler-Lagrange se parametriza siguiendo:

$$x = \frac{C}{2}(\theta - \sin \theta); \quad u = \frac{C}{2}(1 - \cos \theta) .$$

Dicha curva es precisamente la cicloide, es lógico suponer que es un mínimo puesto que trabajamos en un caso unidimensional, luego no hay puntos silla, y podemos alargar la duración del trayecto de la bola fácilmente, luego no será un máximo.

1.3. Problemas con restricciones

Con frecuencia los problemas variacionales suelen venir acompañados de una o más restricciones para el espacio donde buscar extremos. Pueden considerarse, por ejemplo, condiciones algebraicas, ecuaciones diferenciales, desigualdades... Para resolver este tipo de problemas se recurrirá al método de los multiplicadores de Lagrange, así problemas de n variables con m restricciones se reducen a problemas no restringidos con $n + m$ variables. En este capítulo vamos a considerar los siguientes tipos de restricciones:

- Restricciones holomónicas
- Restricciones no holomónicas
- Problemas isoperimétricos

Veamos cada problema restringido con más detalle:

Restricciones holomónicas: Nos proponemos buscar los extremos del funcional $P[u]$, con $u \in \mathcal{C}^2[0, 1]$, en el siguiente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} P[u] = \int_0^1 F(x, u, u') dx \\ u(0) = u_0 \\ u(1) = u_1 \\ \phi(x, u) = 0, \text{ con } \phi \in \mathcal{C}[0, 1] \quad \leftarrow \text{Restricción holomónica} \end{array} \right.$$

Para hallar los extremos, se plantean las ecuaciones de Euler-Lagrange aplicadas al funcional auxiliar:

$$L[u] = \int_0^1 [F(x, u, u') + \lambda \phi(x, u)] dx ,$$

donde el parámetro λ es multiplicador de Lagrange. También podemos considerar un funcional que dependa de más de una función. En tal caso se pueden imponer más condiciones, un número menor que el de los argumentos de P :

$$\left\{ \begin{array}{l} P[u_1, u_2, \dots, u_n] = \int_0^1 F(x, u_1, \dots, u_n, u'_1, \dots, u'_n) dx, \quad u_i \in \mathcal{C}^2[0, 1], \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ (2n \text{ condiciones de contorno}) \\ \phi_i(x, u_1, u_2, \dots, u_n) = 0 \quad i = 1, \dots, m < n \quad \leftarrow m \text{ restricciones holomónicas} \end{array} \right.$$

De nuevo, la forma de proceder es definir el funcional

$$L[u_1, \dots, u_n] = \int_0^1 \left[F + \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi_i \right] dx ,$$

y resolver las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange.

Restricciones no holomónicas: En estas restricciones también se incluyen las derivadas de las funciones u_i , luego engloban las condiciones del tipo anterior. Por tanto ahora la condición (considerando que el funcional tiene un sólo argumento) será de la forma: $\phi(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0$.

Problemas isoperimétricos: Consideramos los funcionales $I, J : \mathcal{C}^2[x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ y planteamos el siguiente problema:

$$\text{Problema isoperimétrico: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar los extremos del funcional } J \text{ en } \mathcal{C}^2[x_0, x_1] : \\ J[u] = \int_{x_0}^{x_1} f(x, u, u') dx, \quad f \in \mathcal{C}^2 \\ u(x_0) = u_0 \\ u(x_1) = u_1 \\ \text{bajo la restricción isoperimétrica: } I[u] = \int_{x_0}^{x_1} g(x, u, u') dx = L, \quad g \in \mathcal{C}^2. \end{array} \right.$$

En los problemas con restricciones encontramos una dificultad extra, los llamados extremos rígidos. Estos extremos aparecen debido exclusivamente a la intrusión de las condiciones añadidas al problema, dado que pueden restringirlo de tal forma que las soluciones se ven afectadas pasando a ser extremos del funcional que no estamos minimizando. Por ejemplo, si añadiésemos la condición $I[u] = \int_0^1 \sqrt{1+u'^2} dx = \sqrt{2}$, con condiciones de contorno $u(0) = 0, u(1) = 1$ la única solución posible sería $u(x) = x$ sin importar cuál sea el funcional que pretendamos minimizar.

Con el objetivo de evitar obtener extremos rígidos como soluciones a problemas isoperimétricos, recurrimos al siguiente resultado:

Teorema 1.4. *Sea $u \in \mathcal{C}^2[x_0, x_1]$ un extremo del funcional J sujeto a las condiciones de contorno y a la restricción isoperimétrica $I[u] = L$. Si además $u(x)$ no es un extremo del funcional I , entonces $\exists \lambda$ tal que $F = f - \lambda g$ es solución al problema isoperimétrico.*

Ahora resolvamos a modo de ejemplo el siguiente conocido problema:

Problema de la Catenaria: Consideramos un cable flexible de longitud L cuyos extremos se sitúan en dos postes situados en las posiciones x_0, x_1 y con respectivas alturas u_0, u_1 . El cable adoptará aquella forma en la que su energía potencial se vea reducida al mínimo. Dicha energía vendrá dada por el funcional

$$J[u] = \int_{x_0}^{x_1} mgu\sqrt{1+u'^2} dx.$$

siendo m la masa por unidad de longitud de cable y g la constante gravitatoria (el producto de estas dos constantes no afectará a nuestro problema a la hora de minimizar, luego no lo tendremos en cuenta). En último lugar, notamos la necesidad de imponer que la longitud del cable se mantenga constante y así, añadiendo la restricción isoperimétrica $I[u] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+u'^2} dx = L$, formulamos el problema de la catenaria. En el caso particular que vamos a tratar, consideramos $x_0 = 0, x_1 = 1$ y que los extremos del cable cuelgan a la misma altura h :

$$\text{Problema de la Catenaria } \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar los extremos del funcional } J \text{ en } \mathcal{C}^2[0, 1] : \\ J[u] = \int_0^1 u\sqrt{1+u'^2} dx, \\ u(0) = h \\ u(1) = h \\ \text{sujeto a: } I[u] = \int_0^1 \sqrt{1+u'^2} dx = L \end{array} \right.$$

En primer lugar, observamos que $F = (u - \lambda)\sqrt{1+u'^2}$ no depende explícitamente de x , luego podemos aplicar la Identidad de Beltrami. Denotamos $y = u - \lambda$:

$$\text{Identidad de Beltrami: } y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F = y' \frac{y y'}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = C_1 \Rightarrow \frac{y^2}{1+y'^2} = C_1^2.$$

(Si fuese $C_1 = 0$, entonces $y(x) \equiv 0 \Rightarrow u(x) \equiv \lambda$)

Procedemos integrando la igualdad obtenida tras aplicar la Identidad de Beltrami separando variables y obtenemos:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1}} = C_1 \log \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - C_1^2}}{C_1} \right) + C_2$$

Con lo que deducimos:

$$\left. \begin{aligned} C_1 e^{\frac{x-C_2}{C_1}} &= y + \sqrt{y^2 - C_1^2} \\ C_1 e^{-\frac{x-C_2}{C_1}} &= \frac{C_1^2}{y + \sqrt{y^2 - C_1^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_1 \left(e^{\frac{x-C_2}{C_1}} + e^{-\frac{x-C_2}{C_1}} \right) = y + \sqrt{y^2 - C_1^2} + \frac{C_1^2}{y + \sqrt{y^2 - C_1^2}} = 2y.$$

Por tanto, las soluciones al problema isoperimétrico son de la forma: $u(x) = \lambda + C_1 \cosh \left(\frac{x-C_2}{C_1} \right)$

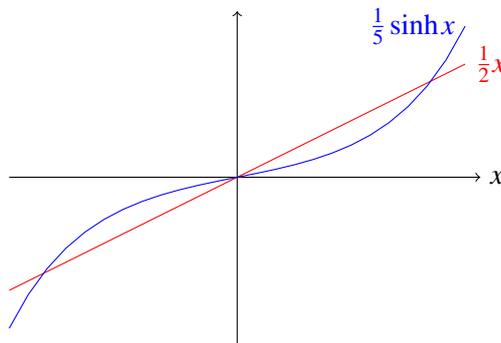
Empleando las condiciones iniciales y denotando $k_1 = C_1$, $k_2 = -\frac{C_2}{C_1}$:

$$\left. \begin{aligned} x=0: \quad h - \lambda &= k_1 \cosh(k_2) \\ x=1: \quad h - \lambda &= k_1 \cosh\left(\frac{1}{k_1} + k_2\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \cosh(k_2) = \cosh\left(\frac{1}{k_1} + k_2\right) \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{2k_1}$$

Llegados a este punto, observamos que la condición isoperimétrica implica que

$$\begin{aligned} L = I[u] &= \int_0^1 \sqrt{1+u'^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{x}{k_1} + k_2 \right)} dx = \int_0^1 \cosh \left(\frac{x}{k_1} + k_2 \right) dx = \\ &= k_1 \sinh \left(\frac{x}{k_1} + k_2 \right) \Big|_0^1 \Rightarrow L = 2k_1 \sinh \left(\frac{1}{2k_1} \right) \xrightarrow{\xi = \frac{1}{2k_1}} \boxed{L\xi = \sinh(\xi)} \end{aligned}$$

Para la última ecuación siempre se tiene como solución $\xi = 0$, pero esto equivaldría a que k_1 valiese infinito y por tanto que $u(x) = \lambda + \cosh(0) = \text{constante}$, que claramente no es solución para el problema isoperimétrico propuesto. Aunque no hayamos incidido en ello, es lógico pensar que la longitud L del cable es mayor que la distancia $d(x_0, x_1) = 1$ entre los dos postes. Dicho esto, la ecuación que nos ocupa presenta dos soluciones $\hat{\xi}, -\hat{\xi}$ no nulas siempre que $L > 1$. En el caso $L = \frac{5}{2}$ se tendría:



Finalmente, se sustituyen $k_1 = \frac{1}{2\hat{\xi}}$, $k_2 = -\hat{\xi}$ en la evaluación de las condiciones iniciales y así hallamos $\lambda = h - \frac{1}{2\hat{\xi}} \cosh(\hat{\xi})$. Por tanto el extremo para el problema de la catenaria es:

$$u(x) = h + \frac{1}{2\hat{\xi}} \left[\cosh(\hat{\xi}(2x-1)) - \cosh(\hat{\xi}) \right]$$

(Notar que: $\cosh(\hat{\xi}(2x-1)) - \cosh(\hat{\xi}) \leq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$)

1.4. Problemas bidimensionales:

Ahora las funciones que busquemos para minimizar funcionales dependerán de dos variables y vamos a tener que realizar un nuevo estudio para esta situación. Estos problemas variacionales serán la clase de problemas que trataremos para el registro de imágenes y suelen tener aplicaciones para muchos otros problemas físicos. Una vez tratado este caso, el pasar a mayores dimensiones no conlleva mayor dificultad.

Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación de clase \mathcal{C}^2 , con Ω una región del plano. Consideremos el siguiente funcional a minimizar: $P[u] = \iint_{\Omega} L(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$, siendo L el lagrangiano con el que trabajaremos, a posteriori comprobaremos cuánta suavidad se le requiere. Para terminar de construir el problema variacional necesitamos imponer unas condiciones de contorno en la frontera $\partial\Omega$, podríamos considerar por ejemplo condiciones de tipo Dirichlet. Entonces obtenemos:

$$(P3) \text{ Encontrar } u \in \mathcal{C}^2 \text{ minimizando: } \begin{cases} P[u] = \iint_{\Omega} L(x, y, u, u_x, u_y) dx dy \\ u(x, y) = g(x, y) \text{ en } \partial\Omega \end{cases}$$

Procedemos de la misma manera que en el caso unidimensional para hallar extremos relativos. Ahora la variación v tendrá que cumplir la condición de tipo Dirichlet homogénea en toda la frontera de Ω : $v(x, y) = 0$ en $\partial\Omega$. Por lo tanto:

$$L(x, y, u + v, u_x + v_x, u_y + v_y) = L(x, y, u, u_x, u_y) + v \frac{\partial L}{\partial u} + v_x \frac{\partial L}{\partial u_x} + v_y \frac{\partial L}{\partial u_y} + \dots \text{ y se tiene que:}$$

$$\frac{\delta P}{\delta u} = P[u + v] - P[u] = \iint_{\Omega} \left(v \frac{\partial L}{\partial u} + v_x \frac{\partial L}{\partial u_x} + v_y \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) dx dy .$$

Para deshacerse de las derivadas de primer orden de la función test v , hay que recurrir al teorema de Riemann-Green. Sea $\omega = v\omega_1 dx + v\omega_2 dy$ 1-forma diferencial de clase \mathcal{C}^1 , entonces se tiene:

$$\oint_{\partial\Omega} \omega = \iint_{\Omega} d\omega = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial(v\omega_2)}{\partial x} - \frac{\partial(v\omega_1)}{\partial y} \right) dx dy .$$

Tomando $\omega_1 = -\frac{\partial L}{\partial u_y}$, $\omega_2 = \frac{\partial L}{\partial u_x}$, dado que $v = 0$ en $\partial\Omega$ se sigue que:

$$0 = \iint_{\Omega} \left(v_x \frac{\partial L}{\partial u_x} + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) + v_y \frac{\partial L}{\partial u_y} + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) \right) dx dy ;$$

$$\iint_{\Omega} \left(v_x \frac{\partial L}{\partial u_x} + v_y \frac{\partial L}{\partial u_y} \right) dx dy = - \iint_{\Omega} v \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) \right) dx dy$$

Así es como llegamos a que la 1ª variación es: $\frac{\delta P}{\delta u} = \iint_{\Omega} v \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) \right) dx dy$

Finalmente, imponiendo como forma fuerte que la parte del integrando no dependiente de v sea nula en todo Ω , obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange para el caso bidimensional:

$$\text{Ecuación de Euler-Lagrange: } \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) = 0$$

Con ésta última se localizan los extremos del funcional $P[u]$. Observamos que es necesaria una suavidad de al menos clase \mathcal{C}^2 para el lagrangiano, desde el momento en el que hemos empleado la fórmula de Green. Para mayores dimensiones habría que buscar resultados similares, por ejemplo en un problema tridimensional habría que acudir al teorema de Gauss-Ostrogradski (o de la divergencia).

Ejemplo: Problema de la superficie mínima

Para ilustrar este ejemplo, suele hacerse referencia a la producción de una pompa de jabón: Al estirar una superficie se requiere energía proporcional a dicha superficie con una constante dependiente del material utilizado. En el problema físico, la tensión superficial minimiza el area generada y al mismo

tiempo la energía empleada. Notar que las condiciones de contorno están presentes tras generar la superficie a partir de un molde. Dicho esto, el problema planteado es el siguiente:

$$\text{Encontrar } u \in \mathcal{C}^2 \text{ minimizando: } \begin{cases} E[u] = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \, dx dy, & E \in \mathcal{C}^2 \\ u(x, y) = g(x, y) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Hallemos los extremos para el funcional $E[u]$ aplicando la ecuación de Euler-Lagrange, llamando $L(x, y, u, u_x, u_y) = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$ al lagrangiano:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u_x} &= \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \\ \frac{\partial L}{\partial u_y} &= \frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \end{aligned} \right\} \rightarrow -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) = 0,$$

$$\frac{u_{xx}(1 + u_y^2) - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(1 + u_x^2)}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} = 0 \quad ; \quad \overbrace{u_{xx}(1 + u_y^2) - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}(1 + u_x^2)}^{\text{Ecuación de superficie mínima}} = 0.$$

La ecuación de superficie mínima es pues una ecuación en derivadas parciales de 2º orden no lineal y requiere técnicas más avanzadas para hablar de sus soluciones.

Generalización para problemas de mayor orden:

Otros problemas variacionales bidimensionales pueden depender de derivadas de mayor orden de la función u . Presentamos su estructura general con la siguiente notación:

$$D_0u = u; D_1u = \frac{\partial u}{\partial x}; D_2u = \frac{\partial u}{\partial y}; D_3u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; D_4u = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; D_5u = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}; \dots$$

Entonces las tres posibles formas para cada problema variacional de estas características son:

Forma variacional: $Minimizar P[u] = \iint_{\Omega} L(x, y, u, u_x, u_y, \dots) \, dx dy$

Forma débil: $\frac{\delta P}{\delta u} = \iint_{\Omega} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial D_i u} \right) (D_i v) \, dx dy = 0 \quad \text{con } v = 0 \text{ en } \partial\Omega$

Euler-Lagrange/Forma fuerte: $\sum_i D_i^T \left(\frac{\partial L}{\partial D_i u} \right) = 0$

siendo $D_i^T = \begin{cases} D_i & \text{para derivadas de orden par} \\ -D_i & \text{para derivadas de orden impar} \end{cases}$

Capítulo 2

Registro de Imágenes

2.1. Introducción

El registro de imágenes es una de las principales tareas en procesamiento de imágenes cuyo fin es encontrar una transformación geométrica óptima entre dos imágenes, de forma que una de ellas se parezca a la otra. El problema de registro de imágenes suele estar ambientado en situaciones en las que dos imágenes exhiben un mismo objeto desde posiciones distintas, lo cual puede deberse al movimiento del objeto o del dispositivo que produce la imagen, a que las imágenes se tomaron en tiempos diferentes... o incluso a que cada imagen se tomó con un dispositivo distinto.

Podríamos considerar entonces que una de las imágenes es la imagen de referencia R mientras que la otra ha sufrido una transformación y por tanto es vista como una plantilla T . Sin embargo, en este problema no suele haber una relación directa entre las dos imágenes y no es la única dificultad que encontramos: Aunque el problema de registro es fácil de proponer, es difícil de resolver, principalmente porque es un problema mal planteado, inestable. Incluso la unicidad de la solución no está asegurada.

A pesar de que hay una gran variedad de técnicas de registro, todas se fundamentan en emplear una medida de similitud \mathcal{D} , sobre la que se basa principalmente el registro, y en un regularizador o suavizador S que sirve para controlar la transformación en el caso del registro no paramétrico. Por otro lado, los tipos de registro de imágenes suelen clasificarse en:

- Registro de imágenes paramétrico
- Registro de imágenes no paramétrico

Centraremos nuestro estudio principalmente en el registro no paramétrico, pero también introduciremos brevemente las transformaciones más conocidas en el registro paramétrico. Antes de tratar los tipos de registro y de formalizar el problema, hay que empezar dando una definición en sentido matemático de lo que es una imagen:

Definición. Dado $d \in \mathbb{N}$, diremos que una función $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es una imagen d -dimensional si

1. b tiene soporte compacto
2. $0 \leq b(x) < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$
3. $\int_{\mathbb{R}^d} b(x)^k dx$ es finito para $k > 0$

Y denotaremos el conjunto de todas las imágenes d -dimensionales con

$$\text{Img}(d) := \{b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid b \text{ es imagen } d\text{-dimensional}\}$$

En otras palabras lo que entendemos por imagen es una aplicación d -dimensional que a cada punto le asigna un determinado nivel de intensidad, traducido en la intensidad del color gris asociado. Para imágenes en color, extenderíamos la anterior definición a funciones del tipo $c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$ exigiéndole a cada componente cumplir la anterior definición.

Analizando nuestra definición de imagen, observamos que las condiciones impuestas no son demasiado restrictivas, sino que están justificadas: La primera condición simplemente plasma el formato finito que presenta toda imagen, la segunda remarca que no es posible asociarle a un punto una intensidad infinita y la tercera acota la energía de la luz. En adelante, aprovecharemos que las imágenes tienen soporte compacto suponiendo sin pérdida de generalidad que dicho compacto estará contenido en $\Omega = (0, 1)^d$.

Sin embargo, en el registro de imágenes se trabaja con datos discretos, es decir, con imágenes digitales:

Definición. Sea $d \in \mathbb{N}$, $\Omega = (0, 1)^d$, $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$. Los puntos $x_{j_1, \dots, j_d} = (x_{j_1}, \dots, x_{j_d})^T \in \Omega \cup \partial\Omega$ con $1 \leq j_l \leq n_l$, $1 \leq l \leq d$ son los puntos considerados en la malla. Llamamos matriz de la malla donde almacenamos los datos discretos de la imagen a

$$X = (x_{j_1, \dots, j_d})_{\substack{1 \leq j_l \leq n_l \\ l=1, \dots, d}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times \dots \times n_d}$$

Los resultados que requieran cierta suavidad por parte de la imagen no generarán conflicto con el hecho de que trabajemos con imágenes digitales tan pronto como utilicemos métodos de interpolación para construir la función de intensidad $b(x)$, podemos obtener imágenes arbitrariamente suaves.

Ahora formalicemos el problema de registro: Tal como habíamos enunciado, la idea principal es buscar una transformación $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ de manera que la imagen de referencia R y la plantilla transformada $T_\varphi = T \circ \varphi$ sean similares. No obstante, hay que cuantificar, dar un sentido matemático a esa similitud. Para ello, ya decíamos que es necesario emplear una medida adecuada \mathfrak{D} , pero no es sencillo: En algunos casos no se encuentra una correspondencia directa entre las intensidades $R(x)$ y $T_\varphi(x)$ para un φ óptimo. Esto motiva que consideremos añadir una función adicional $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y comparemos $R(x)$ con $g \circ T_\varphi(x)$.

Para acabar, es conveniente separar la transformación geométrica en la diferencia entre la identidad y lo que llamaremos deformación o desplazamiento $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. Así queda $\varphi(x) = x - u(x)$, y denotando $T_u(x) = T(x - u(x))$ la esencia del problema de registro de imágenes se resume en:

Registro de imágenes

Dada una medida $\mathfrak{D} : \text{Img}(d)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y dos imágenes $R, T \in \text{Img}(d)$, encontrar dos aplicaciones $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que minimice $\mathfrak{D}(R, g \circ T_u)$, lo cual denotamos con $\mathfrak{D}(R, g \circ T_u) \xrightarrow{u} \min$

Finalmente se hace visible el papel importante que desempeñará el cálculo variacional que hemos trabajado en el capítulo anterior: En el registro no paramétrico, la medida \mathfrak{D} será un funcional con forma integral y el tipo de problemas que aparezcan se adaptará al modelo de problemas variacionales estudiado. Tras esta introducción, veamos por separado los dos tipos de registro.

2.2. Registro paramétrico

En esta primera parte, los esquemas y las técnicas de registro se fundamentan en un conjunto finito de parámetros y/o en un conjunto finito de características de la imagen. El objetivo es hallar una transformación que a cada característica de la plantilla le asocie la correspondiente característica de la imagen de referencia. Cuando hablamos de características, hablamos principalmente de puntos de referencia en los que se distinguen las intensidades más relevantes de la imagen, aunque también se suele tener en cuenta el conocimiento a nivel global de las intensidades en R . Empecemos dando un enunciado general al problema en términos de dichas características:

Problema de registro de características: Sea $m \in \mathbb{R}$. Dadas las características $\mathcal{F}(R, j)$ y $\mathcal{F}(T, j)$, $j = 1, \dots, m$, encontrar una transformación $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$\mathcal{F}(R, j) = \varphi(\mathcal{F}(T, j)), \quad j = 1, \dots, m$$

Para aproximar el anterior problema de interpolación, definimos la distancia

$$\mathfrak{D}^{LM}[R, T; \varphi] := \sum_{j=1}^m \|\mathcal{F}(R, j) - \varphi(\mathcal{F}(T, j))\|_f^2$$

Siendo $\|\cdot\|_f$ la norma considerada en el espacio de la característica. Profundizando en el caso de que la característica fuese la posición de unos puntos de referencia tendríamos: $\|\cdot\|_f = \|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$, $\mathcal{F}(R, j) = x^{R,j}$, $\mathcal{F}(T, j) = x^{T,j}$ con $j = 1, \dots, m$. Si además consideramos un espacio de funciones de dimensión finita n (como el conjunto de los polinomios de grado $\leq n - 1$) y una base de dicho espacio $\{\psi_k\}_{1, \dots, n}$, tras expresar cada una de las componentes de la transformación como una combinación lineal de las funciones base $\varphi_l = \sum_{k=1}^n \alpha_{l,k} \psi_k$ construimos el problema de registro paramétrico basado en puntos de referencia como sigue:

Problema de registro de puntos de referencia: Dado un espacio de funciones de dimension finita E con base $\{\psi_k\}_{1, \dots, n}$ y una transformación $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, encontrar los coeficientes $\alpha_{l,k}$ que minimicen:

$$\mathfrak{D}^{LM}[R, T; \varphi] = \sum_{j=1}^m \|x^{R,j} - \varphi(x^{T,j})\|_{\mathbb{R}^d} = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^d \left(x_l^{R,j} - \sum_{k=1}^n \alpha_{l,k} \psi_k(x^{T,j}) \right)^2$$

siendo $x^{R,j}, x^{T,j}$ $j = 1, \dots, m$ los puntos de referencia de la imagen de referencia R y de la plantilla T respectivamente.

Como ya anunciábamos previamente, no vamos a profundizar en el registro paramétrico ya que el campo donde podemos aplicar el cálculo variacional es el registro no paramétrico. Sin embargo, antes de retomar el capítulo 1 cabe añadir algunas de las transformaciones paramétricas más trascendentes:

- **Transformaciones rígidas.** Su nombre es debido a que a este tipo de transformaciones sólo pertenecen rotaciones y traslaciones. Dada $Q \in \mathbb{R}^{d \times d}$ matriz ortogonal, $\det(Q) = 1$ y $b \in \mathbb{R}^d$, las transformaciones son de la forma:

$$\varphi(x) = Qx + b$$

- **Transformaciones lineales afines.** Dada $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ con $\det(A) > 0$ y $b \in \mathbb{R}^d$: $\varphi(x) = Ax + b$
- **Transformaciones polinómicas:** En este caso, las transformaciones son polinomios $\varphi \in \Pi_q^d(\mathbb{R}^d)$, donde denotando $\Pi_q(\mathbb{R}^d) := \{p : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid p(x) = \sum_{k \leq q} \alpha_k x^k\}$ nos referimos al conjunto:

$$\Pi_q^d(\mathbb{R}^d) := \{\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \varphi_l \in \Pi_q(\mathbb{R}^d), \quad l = 1, \dots, d\}$$

- **Transformaciones B-spline:** Cada componente de este tipo de transformaciones es un B-spline de grado $q \in \mathbb{N}$ y respecto a unos determinados nodos. Notar que un B-spline es una función spline con el mínimo soporte respecto a un grado, suavidad y partición del dominio.

2.3. Registro no paramétrico

En el registro no paramétrico, los espacios en los que buscamos las soluciones tienen dimensión infinita, en concreto trataremos de resolver problemas diferenciales con condiciones de contorno. En lo sucesivo, para obtener funciones con la suficiente suavidad y para no entrar en conflicto con los resultados empleados, centraremos la búsqueda de soluciones y funciones tests en los espacios:

$$\begin{cases} U = \{u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^d), u \text{ cumpliendo ciertas condiciones de contorno}\} \\ V = \{v \mid v = u - \hat{u}, u, \hat{u} \in U\} \end{cases}$$

El problema que mencionábamos acerca de la estabilidad se soluciona añadiendo un término regularizador o suavizador S , de modo que el problema de minimización que se nos presenta es de la siguiente forma:

Problema de registro suavizado: Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, las imágenes R, T ; una medida $\mathcal{D} : \text{Img}(\Omega) \times \text{Img}(\Omega) \times U \rightarrow \mathbb{R}^+$, un término regularizador $S : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}^+$ y un peso $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hallar $u \in U$ tal que

$$\mathcal{D}[R, T; u] + \alpha S[u] \xrightarrow{u} \min$$

La elección del suavizador dependerá del caso al que apliquemos el registro, por ejemplo: Un suavizador elástico es muy apropiado para el registro de radiografías del cuerpo humano, pero para el mismo caso no es nada recomendable el uso de un suavizador de fluidos. Por otro lado, los suavizadores serán formas bilineales basadas en el producto escalar definido en $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$S[u] = \frac{1}{2} a[u, u].$$

Observamos que en el problema de registro suavizado se distinguen dos bloques en el funcional. Sería interesante que para hallar la solución sólo tuviésemos que preocuparnos de trabajar por separado con cada uno de los dos términos. Esto último es posible, pero para justificarlo vamos a introducir un concepto que extiende la definición que dimos de 1ª Variación en el capítulo anterior. Se trata de la derivada de Gâteaux:

Definición. Dados un espacio de funciones U y un espacio V de funciones test, decimos que el funcional $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ es Gâteaux diferenciable en la dirección v si se cumplen:

1. Existe un número $\hat{\tau} > 0$ tal que $u_\tau = u + \tau v \in U \quad \forall |\tau| \leq \hat{\tau}$
2. La función $J(\tau) := J[u_\tau]$ es derivable en $\tau = 0$

Y la derivada de Gâteaux de $J[u]$ en la dirección v se define como:

$$\delta J[u; v] = J'(0) = \left. \frac{dJ[u + \tau v]}{d\tau} \right|_{\tau=0}.$$

De acuerdo con esta definición, los puntos estacionarios para el funcional J serán aquellos $\hat{u} \in U$ tal que $\delta J[\hat{u}; v] = 0, \forall v \in V$. Notar que esta condición es equivalente a exigir que se anule la 1ª Variación.

Con esta herramienta es evidente que podemos trabajar de manera independiente con la distancia por un lado y con el suavizador por el otro, sólo hace falta observar que la derivada de Gâteaux de un funcional es lineal. Consecuentemente, empezamos tratando la distancia \mathcal{D} . Aunque no lo hemos mencionado, podría darse el caso de que tuviéramos que registrar imágenes digitales de distintos tamaños y necesitaríamos distancias un tanto complicadas para adaptarse a ese problema. No obstante consideraremos que nuestras imágenes son del mismo tamaño y por ello vamos a emplear una medida muy conocida en este ámbito: La suma de diferencias elevadas al cuadrado.

Definición. Dadas dos imágenes $T, R \in \text{Img}(\Omega)$ y un desplazamiento $u \in U$, se define la suma de diferencias elevadas al cuadrado como

$$\mathfrak{D}^{SSD}[R, T; u] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} [R(x) - T_u(x)]^2 dx$$

Para poder aplicar esta medida, se requiere que las imágenes sean diferenciables. Como queremos hallar los extremos locales de este funcional, aplicamos la ecuación de Euler-Lagrange al integrando $F = \frac{1}{2}[R(x) - T_u(x)]^2$ y obtenemos el sistema:

$$\nabla_u F - \nabla \cdot \nabla_{\nabla_u} F = [R(x) - T_u(x)] \nabla T_u(x) \implies \boxed{[R(x) - T_u(x)] \nabla T_u(x) = 0 \text{ en } \Omega}$$

siendo $\nabla_u F - \nabla \cdot \nabla_{\nabla_u} F = 0$ una generalización de la ecuación de Euler-Lagrange donde $\nabla_u F$ denota el gradiente del lagrangiano respecto las componentes de u , $\nabla \cdot \nabla_{\nabla_u} F$ el operador de divergencia aplicado al gradiente de F respecto a las derivadas parciales de las componentes de u . Esta es la medida que consideraremos para los tipos de registro no paramétrico, luego caracterizaremos los siguientes registros por el suavizador en el que se basan. El suavizador sirve para controlar que el desplazamiento o deformación u sea suave y en algunos casos permite que las condiciones de contorno aparezcan de forma implícita en el problema, esto es, en principio no sería necesario incluirlas en el problema ni en los espacios de soluciones. Sin embargo, conviene añadirlas explícitamente a la hora de implementar esquemas numéricos más eficientes y cuando necesitamos aplicar resultados como la fórmula de Green para anular integrales sobre $\partial\Omega$.

Ahora procedamos a estudiar los registros no paramétricos más conocidos y sus respectivos suavizadores:

REGISTRO ELÁSTICO

La idea sobre la que se basa es concebir la imagen de referencia R y la plantilla T como dos observaciones de un cuerpo elástico, una antes y otra después de producirse una deformación. Con aspiración a generar un modelo sencillo, partimos de una linealización de la elasticidad y entonces el suavizador se puede ver como una linealización P del potencial elástico de la deformación u :

$$P[u] = \int_{\Omega} \frac{\mu}{4} \sum_{i,j=1}^d \left(\frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\lambda}{2} (\text{div } u(x))^2 dx$$

donde λ, μ son las llamadas constantes de Lamé. Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange al lagrangiano de $\mathfrak{D}^{SSD}[R, T; u] + P[u]$ se obtienen las conocidas ecuaciones de Navier-Lamé:

$$\text{Ecuaciones de Navier-Lamé: } f(x, u(x)) = \mu \Delta u(x) + (\lambda + \mu) \nabla \text{div}(u)$$

siendo $f(x, u(x)) = [R(x) - T_u(x)] \nabla T_u(x)$ lo que llamaremos fuerza externa originada por la distancia $\mathfrak{D}^{SSD}[R, T; u]$. Más adelante volveremos a tratar las constantes de Lamé y el efecto que tienen en el registro, pero antes debemos anticipar una justificación física de cómo se obtiene el modelo lineal elástico propuesto.

Lo que caracteriza a un cuerpo elástico es que las relaciones existentes entre sus partículas puedan variar, mientras que en un cuerpo rígido el único cambio que puede producirse es una fragmentación. Por supuesto los cuerpos elásticos también presentan cierta rigidez y, dependiendo de la tensión que puedan soportar, el estiramiento puede aumentar en mayor o menor medida pudiendo o no alcanzar el límite elástico (el cuerpo se queda estirado) o incluso un punto en el cual el esfuerzo al que se somete el material es insoportable, se supera la resistencia a la tracción y se origina una fractura. Una de las cuestiones importantes es entender cuál es la relación entre la deformación y la tensión de un cuerpo y traducir esta relación al registro elástico.

Para entender el modelo físico, empezamos definiendo una transformación dependiente del tiempo $\varphi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ donde $\tilde{x} = \varphi(x, t)$ es la posición de la partícula x en el tiempo t . Como ya advertíamos, al contrario que en las transformaciones rígidas, aquí la distancia r entre dos partículas puede

variar, luego si consideramos que la transformación se lleva a cabo en un tiempo t_F y tomamos una aproximación de primer orden:

$$\tilde{r} = \tilde{y} - \tilde{x} = \varphi(y, t_F) - \varphi(x, t_F) \approx \nabla \varphi(x, t_F)(y - x) = \nabla \varphi(x, t_F) r ,$$

$$\text{con } \nabla \varphi(x, t) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_d} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d} .$$

En la justificación que vamos a llevar a cabo, expresamos la transformación como suma de una deformación $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ y de la identidad, por lo que se tiene $\nabla \varphi(x, t) = I_d + \nabla u(x, t)$. Es importante observar que con este cambio le hemos cambiado el signo a la fuerza f , pero en el resultado final lo corregimos. Ahora notar que si los elementos de $\nabla u(x, t) \ll 1$ se deduce que el determinante del jacobiano de la transformación es estrictamente positivo y como consecuencia del teorema de la función inversa aseguramos que φ es un difeomorfismo y que en la imagen no van a aparecer pliegues ni grietas. Con esta observación queremos incidir en que nuestro modelo funcionará bien cuando lo aplicamos para deformaciones cumpliendo la condición anterior y en que, en lo que respecta a la elasticidad, nos interesa no sólo medir las deformaciones, sino conocer las alteraciones de éstas. Todo esto nos conduce a introducir el concepto de tensor de deformación:

$$\textbf{Tensor de deformación: } V(x, t) := \frac{1}{2} (\nabla u(x, t) + (\nabla u(x, t))^T) .$$

Éste puede ser visto como una medida de la no rigidez de la transformación φ a partir de la aproximación:

$$[\nabla \varphi(x, t)]^T \nabla \varphi(x, t) \approx I_d + \nabla u(x, t) + (\nabla u(x, t))^T \approx (I_d + V(x, t))^2 .$$

Para transformaciones rígidas $\varphi(x) = Qx + b$ se tiene que el tensor de deformación es idénticamente nulo $V(x, t) = 0$ debido a la ortogonalidad de Q . Otros análisis también nos aportan una visión de $V(x, t)$ como medida de los cambios en las longitudes y ángulos en el cuerpo elástico tras la transformación φ .

Sin embargo el tensor de deformación no es suficiente para completar el modelo, debemos tener en cuenta las fuerzas internas que mantienen el cuerpo elástico unido. Para describir dichas fuerzas recurrimos a lo que llamaremos tensión $\gamma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$. La tensión γ puede interpretarse como la energía necesaria para mantener la forma de una parte aislada del cuerpo elástico o como un campo de fuerzas actuando en su correspondiente parte de la frontera $\partial\Omega$. Denotando con f un campo de fuerzas externo actuando sobre el cuerpo elástico Ω , las ecuaciones de equilibrio para dicho cuerpo son:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f dx + \int_{\partial\Omega} \gamma dx &= 0, \\ \int_{\Omega} (x \times f) dx + \int_{\partial\Omega} (x \times \gamma) dx &= 0, \end{aligned}$$

Consideramos para nuestro modelo que existen unas funciones $\sigma_{j,k} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $j, k = 1, \dots, d$ tal que

$$\int_{\partial\Omega} \gamma_j dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^d \sigma_{j,k} n_k dx = \int_{\partial\Omega} \langle \sigma_{j,:}, \vec{n} \rangle dx ,$$

donde denotamos con $\sigma_{j,:} = (\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,d})$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar euclídeo estándar en \mathbb{R}^d . En virtud del teorema de la divergencia: $\int_{\partial\Omega} \gamma dx = \int_{\Omega} \text{div } \sigma_{j,:} dx$ con $j, k = 1, \dots, d$. Esto motiva que almacenemos las tensiones $\sigma_{j,k}$ en lo que definimos como tensor de tensión:

$$\textbf{Tensor de tensión: } \Sigma(x, t) := (\sigma_{j,k})_{j,k=1,\dots,d} \in \mathbb{R}^{d \times d} .$$

Este tensor evidencia que las ecuaciones de equilibrio ya nombradas no dejan de ser las dos primeras leyes de Newton una vez aplicadas a cada fragmento posible del cuerpo elástico.

$$\begin{cases} f = -\operatorname{div} \Sigma & \text{Equilibrio de fuerzas.} \\ x \times f = -x \times \operatorname{div} \Sigma & \text{Equilibrio de momentos.} \end{cases}$$

Llegados a este punto ya podemos buscar la relación entre la tensión y la deformación basándonos en sus respectivos tensores $V(x, t) = (\varepsilon_{j,k})_{j,k=1,\dots,d}$ y $\Sigma(x, t) = (\sigma_{j,k})_{j,k=1,\dots,d}$. La respuesta se halla en la Ley de Hooke, cuyo enunciado esclarece que la deformación es una reacción ante la tensión. El modelo lineal que buscamos se simplifica teniendo en cuenta que los dos tensores son simétricos, esto reduciría el sistema lineal a la mitad. No obstante, para el registro de imágenes podemos incluso suponer que hablamos de un cuerpo isótropo, es decir, que presenta el mismo comportamiento sin importar la dirección del estiramiento. Esto último permite diagonalizar simultáneamente los dos tensores, denotando con $(\varepsilon_j)_{j=1,\dots,d}$ y $(\sigma_j)_{j=1,\dots,d}$ los valores propios de V y Σ se tiene:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_d \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_d \end{pmatrix}.$$

Así construiríamos el modelo lineal:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{d,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{d,1} & \cdots & b_{d,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_d \end{pmatrix}.$$

Considerar que trabajamos con un cuerpo elástico isótropo aporta más aún: Como la reacción del cuerpo será independiente de la dirección de la deformación, la matriz de coeficientes en el sistema anterior será circular y los elementos no diagonales b_2, \dots, b_d tendrán el mismo valor. Notar que una matriz circular determinada por un vector $b = (b_1, \dots, b_d)$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{d-1} & b_d \\ b_d & b_1 & b_2 & \cdots & b_{d-1} \\ \vdots & b_d & b_1 & \ddots & \\ b_3 & & \ddots & \ddots & b_2 \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_d & b_1 \end{pmatrix}.$$

Observamos pues con cierto asombro que para nuestro modelo sólo serán necesarios dos parámetros. Ambos tienen nombre propio y son el módulo de Young de elasticidad E y el radio de contracción de Poisson ν , ocupando su lugar en nuestro modelo de modo que: $b_1 = E^{-1}$, $b_2 = \dots = b_d = -\nu E^{-1}$. Las ecuaciones que relacionan la deformación con la tensión expresadas en términos de las dos constantes que hemos introducido tras diagonalizar los tensores son:

$$E\varepsilon_j = (1 + \nu)\sigma_j - \nu \sum_{k=1}^d \sigma_k, \quad j = 1, \dots, d \quad \implies \quad EV = (1 + \nu)\Sigma - \nu \operatorname{traza}(\Sigma) I_d.$$

Notar que la implicación se debe a volver a la base original y a igualar matricialmente. Tras igualar las trazas se observa que: $E \operatorname{traza}(V) = (1 + \nu(1 - d)) \operatorname{traza}(\Sigma)$, y al despejar la traza del tensor de tensiones y sustituir en el sistema se tiene finalmente:

$$(1 + \nu)\Sigma = EV + \frac{E\nu}{1 + \nu(1 - d)} \operatorname{traza}(V) I_d.$$

Es ahora cuando introducimos los coeficientes de Lamé, así podremos expresar las tensiones en función de las deformaciones:

Constantes de Lamé: $\mu := \frac{1}{2} \frac{E}{1+\nu}, \quad \lambda := \frac{E\nu}{(1+\nu)(1+\nu(1-d))}.$

Entonces:

$$\sigma_{j,k} = 2\mu \varepsilon_{j,k} + \lambda \operatorname{traza}(V) \delta_{j,k} = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) + \lambda \operatorname{div} u \delta_{j,k},$$

$$\operatorname{div} \sigma_{j,:} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \sigma_{j,k}}{\partial x_k} = \mu \Delta u_j + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{div}(u_j)$$

Extendiendo la última igualdad a todas las filas del tensor de tensiones y recordando las ecuaciones de equilibrio llegamos a las ecuaciones de Navier-Lamé, finalizando así nuestra justificación física del modelo:

$$f = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div}(u).$$

En el registro elástico podemos interpretar que, aunque por un lado busquemos una deformación u que minimice la distancia \mathfrak{D} , al incluir el regulador S en el problema de minimización tratamos de suavizar la tensión a la que sometemos la imagen. Aquí entra en juego el papel del parámetro α : Su función es permitirnos elegir cuánta importancia le damos a que la deformación sea suave respecto a la importancia de minimizar las diferencias entre la imagen de referencia y la plantilla, dar prioridad a un objetivo u otro. Por tanto, cuando tomemos valores pequeños para α , lo que esperamos obtener es una transformación muy influenciada por la medida \mathfrak{D} pero poco suave, mientras que para valores elevados la transformación será muy suave en detrimento de que minimice bien la distancia.

No obstante, en el registro elástico podemos hacer caso omiso y decir simplemente que $\alpha = 1$, puesto que en este caso tenemos las constantes de Lamé de por medio. Dividiendo las ecuaciones de Navier-Lamé entre μ y expresándolas en términos del módulo de Young y del radio de contracción de Poisson comprobamos que:

$$\frac{2(1+\nu)}{E} f = \Delta u + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \operatorname{div}(u)$$

Los valores que puede tomar ν están contenidos en el intervalo $[0, 0.5)$ y el otro coeficiente, que puede ser visto como un peso sobre la fuerza f , oscilará en $[\frac{2}{E}, \frac{3}{E}]$. Con la elección de ν controlamos la influencia del laplaciano respecto a la de la divergencia: Con $\nu = 0$ damos el mismo valor a ambas y conforme ν se acerca a 0.5 damos importancia exclusivamente a la divergencia. Sin olvidar que λ dependerá de la dimensión, el intervalo en el que elegimos ν implica que podamos elegir λ en $[0, +\infty)$ y lo mismo podríamos decir respecto a μ ya que E dependerá del material del cuerpo elástico.

Sin embargo no es tanta la libertad que se tiene para elegir las constantes de Lamé debido a la ley de Hooke, que es válida para deformaciones pequeñas. Por ello no conviene valores elevados de λ y es ventajoso que el cociente λ/μ tampoco sea elevado. De hecho en la práctica se recomienda tomar $\lambda = 0$, pues así se da la mayor expansión del cuerpo elástico.

Como último comentario, al añadir ciertas condiciones de contorno en la frontera, como las condiciones de contorno periódicas, se conocen los valores y funciones propias del operador de Navier-Lamé. Este conocimiento sirve de base a la hora resolver las ecuaciones con métodos numéricos. Además, el modelo que hemos presentado de registro elástico puede mejorarse notablemente cuando hacemos depender de la deformación u a α y a las constantes de Lamé, es lo que se conoce como regularización elástica variable.

REGISTRO DE DIFUSIÓN

El registro de difusión puede ser visto como un caso particular del registro elástico, partiendo de la advertencia que hacíamos sobre la prioridad que otorga la elección de los parámetros de Lamé sobre la actuación del laplaciano o de la divergencia en el regularizador. Cuando se toma $\lambda = -\mu$, el término de

la divergencia se anula y deja de tener efecto en el registro. Es entonces cuando hablamos de registro de difusión y centramos el registro de imágenes en el laplaciano. Por tanto, este camino nos evita dar una justificación física para el registro de difusión puesto que la base es la misma.

La relevancia de este registro radica en su estabilidad y en que, siendo N el número de incógnitas, en cada iteración realizamos $O(N)$ operaciones, frente a las $O(N \log N)$ que se efectúan en el registro elástico. El registro de difusión fue introducido por Fischer y Modersitzki, utiliza la distancia de diferencias elevadas al cuadrado y el regularizador:

$$S^{diff}[u] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{n=1}^d \|\nabla u_n(x)\|_2^2 dx.$$

Al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange al funcional $J[u] = \mathfrak{D}^{SSD}[R, T; u] + \alpha S^{diff}[u]$, obtenemos precisamente un problema de difusión semilineal, de ahí procede el nombre de este registro:

$$\text{Ecuación de difusión semilineal:} \quad -\alpha \Delta u = f(x, u(x)).$$

Nota: Volvemos a descomponer la transformación como suma de la identidad y de la deformación, es decir, $\varphi(x) = x + u(x)$, de ahí que el lector haya podido percibir un cambio de signo en $f(x, u(x))$. El interés en este cambio para el registro de difusión se hace visible en su implementación.

Por otro lado, recordamos que la formulación variacional del problema de registro era de la forma:

$$J[u] := \alpha \frac{1}{2} a[u, u] + b[u], \quad \text{siendo } a[u, v] = \sum_{l=1}^d \int_{\Omega} \langle \nabla u_l, \nabla v_l \rangle dx, \quad b[v] = \int_{\Omega} \langle f, v \rangle dx.$$

Ésta proporciona las condiciones de contorno de forma natural, dado que $S^{diff}[u] = \frac{1}{2} a[u, u]$, y la derivada de Gâteaux en la dirección v es:

$$\delta S^{diff}[u; v] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} (a[u + hv, u + hv] - a[u, u]) = a[u, v].$$

Para cada componente $l = 1, \dots, d$, aplicando la fórmula de Green se obtiene:

$$\tilde{a}[u_l, v_l] = \int_{\Omega} \langle \nabla u_l, \nabla v_l \rangle dx = \int_{\partial\Omega} v_l \langle \nabla u_l, \vec{n} \rangle dA - \int_{\Omega} (\Delta u_l) v_l dx = - \int_{\Omega} (\Delta u_l) v_l dx.$$

La última igualdad es cierta porque conocemos la forma fuerte mediante la ecuación de Euler-Lagrange aplicada al regularizador, y por tanto el aporte de cada componente en la forma débil. Finalmente deducimos que el término no dependiente de v en la integral sobre $\partial\Omega$ es nulo en cada componente y así obtenemos de forma implícita al problema unas condiciones de contorno de tipo Neumann:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = \langle \nabla u(x), n(x) \rangle = 0, \quad \text{con } x \in \partial\Omega.$$

2.4. Aproximación numérica

Finalmente, vamos a dar una idea general de cómo implementar el registro. Las ecuaciones de Euler-Lagrange nos originan siempre la misma estructura: La fuerza $f(x, u(x))$ es igual a un operador de ecuaciones en derivadas parciales $\mathcal{A}[u](x)$ en el dominio Ω . Para resolver estas EDPs semilineales lo que se hace es recurrir a esquemas de punto fijo, se da una aproximación inicial $u^{(0)}$ y a partir de ella calculamos $u^{(k+1)}$ con el esquema implícito:

$$\mathcal{A}[u^{(k+1)}](x) = f(x, u^{(k)}(x)), \quad x \in \Omega, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

El paso que sigue sirve para estabilizar el esquema: Introducimos un tiempo ficticio t y hacemos que la deformación $u = u(x, t)$ pase a depender también del tiempo. Entonces modificamos el esquema de la siguiente forma:

$$u^{(k+1)}(x) + \tau \mathcal{A}[u^{(k+1)}](x) = u^{(k)}(x) + \tau f(x, u^{(k)}(x)), \quad x \in \Omega, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\frac{u^{(k+1)}(x) - u^{(k)}(x)}{\tau} + \mathcal{A}[u^{(k+1)}](x) = f(x, u^{(k)}(x)), \quad x \in \Omega, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

donde $u^{(k)}(x) = u(x, k\tau)$ con τ paso fijo de tiempo. Así lo que hemos obtenido es un esquema semiimplícito correspondiendo a la EDP:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \mathcal{A}[u](x, t) = f(x, u(x, t)), \quad x \in \Omega$$

Notar pues que en el registro de difusión, lo que hacemos es resolver numéricamente la ecuación del calor no homogénea, para la cual se conocen esquemas estables y eficientes. Conociendo el operador $\mathcal{A}[u]$, se procede a una aproximación por diferencias finitas y en la implementación se emplea la malla digital de las imágenes. El algoritmo general de registro es el siguiente:

Algoritmo 1 Algoritmo general de registro

Entrada: $k=0$, \vec{X} y $\vec{U}^{(k)} = 0$.

for $k = 0, 1, \dots$:

 Calcular: $\vec{F}^{(k)} = f(\vec{X}, \vec{U}^{(k)})$;

 Resolver el sistema: $A\vec{U}^{(k+1)} = \vec{F}^{(k)}$;

 si converge, parar;

end for

Aplicar el método de diferencias finitas permitirá aproximar el operador de ecuaciones en derivadas parciales y reducir el problema de registro a resolver un sistema de ecuaciones lineales. Como el caso más frecuente es el de imágenes bidimensionales, presentamos sin pérdida de generalidad una discretización del dominio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Dado $h = \frac{1}{N+1}$ con $N \in \mathbb{N}$, definimos

$$\Omega_h := \{x_{i,j} = (ih, jh) \mid i, j = 0, \dots, N+1\}$$

Notar que la condiciones de contorno serán las que determinen los valores de los puntos en

$$\partial\Omega_h := \{x_{i,j} \in \Omega_h \mid i = 0, N+1 \text{ o/y } j = 0, N+1\}$$

Por tanto vamos a aproximar los puntos de Ω_h que no pertenecen a la frontera. Mediante desarrollos de Taylor, se obtienen las siguientes aproximaciones de las derivadas para cada una de las $n = 1, 2$ componentes de u . Mostramos pues algunas aproximaciones de las derivadas de primer orden respecto a x :

$$\partial_1^- u_1 = \frac{u_1(x, y, t) - u_1(x-h, y, t)}{h} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + O(h) \quad \text{Esquema de diferencias backward.}$$

$$\partial_1^+ u_1 = \frac{u_1(x+h, y, t) - u_1(x, y, t)}{h} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + O(h) \quad \text{Esquema de diferencias forward.}$$

$$\partial_1^\pm u_1 = \frac{u_1(x + \frac{h}{2}, y, t) - u_1(x - \frac{h}{2}, y, t)}{h} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + O(h^2) \quad \text{Esquema de diferencias centrales.}$$

Y las aproximaciones de las derivadas de segundo orden son:

$$\partial_{1,1} u_1 = \frac{u_1(x-h, y, t) - 2u_1(x, y, t) + u_1(x+h, y, t)}{h^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + O(h^2)$$

$$\partial_{1,2} u_1 = \frac{u_1(x+h, y+h, t) - u_1(x+h, y-h, t)}{h^2} - \frac{u_1(x-h, y+h, t) - u_1(x-h, y-h, t)}{h^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + O(h^2)$$

Definiendo un vector \vec{U}_{actual} de longitud $2N^2$, guardaríamos la aproximación de $u_n(ih, jh)$ en la posición dada por $\xi(i, j, n) = (i-1)N + j + (n-1)N^2$, con $i, j = 1, \dots, N$, $n = 1, 2$. Recordando que

hemos considerado un tiempo ficticio y la aproximación que hemos presentado antes de la derivada temporal, para guardar en cada iteración la solución tras resolver el sistema se define otro vector \vec{U}_{nuevo} con las mismas dimensiones que \vec{U}_{actual} . De la misma forma con la que guardamos las aproximaciones de u , almacenamos previamente las evaluaciones de $f(x, u(x))$ en un vector \vec{F} y al final de cada iteración hacemos $\vec{U}_{actual} = \vec{U}_{nuevo}$, pero antes, para analizar la convergencia también habremos tenido que definir un $\vec{U}_{anterior}$, que pasa a ser $\vec{U}_{anterior} = \vec{U}_{actual}$. Queda por concretar la construcción de la matriz de coeficientes A , que dependerá obviamente del tipo de registro que estemos aplicando, puesto que aproxima el operador en derivadas parciales basándose en los esquemas de diferencias finitas que hemos presentado y teniendo en cuenta el efecto de las condiciones de contorno en los elementos de la matriz que multiplican las aproximaciones de u en puntos colindantes a la frontera.

Terminada la discretización del problema, nos falta dar un criterio de parada que además sirva para comprobar la convergencia en el registro. Existen varios criterios de convergencia, como fijarse en que la norma $\|\cdot\|_{\infty}$ de las fuerzas no sea muy elevada, o hacer lo mismo con la deformación u , puesto que los registros que hemos tratado convergen cuando las deformaciones son pequeñas. No obstante, es bastante frecuente emplear un test sobre las oscilaciones de la distancia \mathcal{D}^{SSD} : Cuando aparecen tras una iteración dan cabida a pensar que un mínimo local se ha alcanzado entre esa iteración y la anterior. Para detectar dichas oscilaciones se emplea el cociente:

$$\frac{\|\mathcal{D}^{SSD}[R, T; \vec{U}_{anterior}] - \mathcal{D}^{SSD}[R, T; \vec{U}_{actual}]\|}{\varepsilon + \|\mathcal{D}^{SSD}[R, T; \vec{U}_{anterior}] - \mathcal{D}^{SSD}[R, T; \vec{U}_{nuevo}]\|}$$

donde $\varepsilon > 0$ es pequeño. Lógicamente este cociente se calcula antes de actualizar \vec{U} , suele emplearse la norma $\|\cdot\|_2$ o la $\|\cdot\|_{\infty}$ definida en \mathbb{R}^d y para construir las plantillas deformadas hay que emplear métodos de interpolación. Otras conclusiones que podemos sacar de este cociente son la llegada a la solución cuando casi es 1 y la divergencia del registro cuando alcanza valores bastante más elevados.

Bibliografía

- [1] B. VAN BRUNT, *The Calculus of Variations*, Springer, New York, 2004.
- [2] B. FISCHER, J. MODERSITZKI, *Fast inversion of matrices arising in image processing*, Numerical Algorithms, 22:1-11, 1999.
- [3] G. STRANG, *Computational Science and Engineering*, Wellesley, MA: Wellesley-Cambridge Press, 2007.
- [4] I.M. GELFAND, S. V. FOMIN , *Calculus of Variations*, Moscow State University, Prentice-Hall, New Jersey, 1963.
- [5] J. MODERSITZKI, *Numerical methods for Image Registration*, Oxford University Press, New York, 2004.
- [6] P. PAPADOPOULOS, *Introduction to the finite element method*, Department of Mechanical Engineering, University of California, Berkeley, 2010.
- [7] P. OLVER, *Introduction to the Calculus of Variations*, University of Minnesota, 2016.
- [8] M.V. MAKARETS, V.YU. RESHETNYAK, *Ordinary differential equations and Calculus of Variations*, World Scientific, Singapore, 1995.
- [9] S. KABUS, *Multiple-Material Variational Image Registration*, University of Lübeck, Lübeck, 1963.

