

La sucesión *look and say*

por

J. M. GAIRÍN, V. MANERO, J. M. MUÑOZ Y A. M. OLLER
(Universidad de Zaragoza)

Las sucesiones numéricas son un contenido clásico de la matemática escolar. Actualmente, aparecen en el currículo en el curso de 3.º de la ESO. Tanto en el caso de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas como en el de la asignatura Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas las sucesiones se encuentran en el Bloque 2 (Números y álgebra) donde se especifica, en sus contenidos:

— Sucesiones numéricas. Sucesiones recurrentes. Progresiones aritméticas y geométricas.

Por otra parte, a lo largo de los cuatro cursos de la ESO se insiste en el Bloque 1 (Procesos, métodos y actitudes matemáticas) en aspectos como la necesidad de encontrar patrones y regularidades y de realizar investigaciones matemáticas. En particular, en la sección contenidos del currículo podemos encontrar las siguientes especificaciones:

- Estrategias y procedimientos puestos en práctica: [...] empezar por casos particulares sencillos, buscar regularidades y leyes, etc.
- Planteamiento de investigaciones escolares en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos.

Una revisión de varias propuestas editoriales parece indicar que la enseñanza de las sucesiones presta especial atención a los procedimientos de cálculo (término n -ésimo, suma o interpolación de términos, etc.) y que se centra principalmente en el caso de las progresiones aritméticas y geométricas.

En consecuencia, la visión que los alumnos adquieren sobre las sucesiones es muy limitada desde el punto de vista conceptual y está muy orientada hacia el manejo y uso de las expresiones algebraicas que las definen. Más en particular, esto implica que no se aprovechan las potencialidades que el uso de ciertos tipos de sucesiones «no habituales» puede tener a la hora de trabajar algunos de los contenidos correspondientes al Bloque 1.

En esta breve nota queremos presentar las denominadas sucesiones *look and say* como recurso a la hora de abordar contenidos relacionados con la búsqueda de patrones, así como para plantear pequeñas investigaciones en el aula.

El contenido de este artículo viene motivado por la sesión «Sucesiones *look and say*» desarrollada el 4 de Noviembre de 2016 dentro del Taller de Talento Matemático para 4.º de la ESO [3].

La sucesión *look and say*

En un interesante video disponible en YouTube <<https://www.youtube.com/watch?v=ea7lJkEhytA>>, John Horton Conway, antiguo profesor en Cambridge, relata cómo esta sucesión le llegó en forma de acertijo propuesto por un alumno. A la postre, el acertijo que le propuso ese alumno fue, en palabras del propio Conway:

the stupidest problem you could conceivably imagine, that led to the most complicated answer that you could conceivably imagine.

Así pues, un alumno se acercó a Conway y le invitó a descubrir el siguiente número de la sucesión cuyos primeros términos son:

1
11
21
1211
...

Conway no supo responder, por lo que el alumno escribió el siguiente elemento de la sucesión:

111221

Puesto que el profesor seguía sin adivinar como continuaba la sucesión, el alumno escribió el número siguiente:

312211

Como relata el propio Conway:

I knew for the way he was saying it that, somehow, I was supposed to be able to guess. I still didn't [...] in the end he had to tell me



El acertijo planteado por este alumno es lo que actualmente se denomina sucesión *look and say* con raíz (primer término) el número 1.

Veamos otro ejemplo similar usando otra raíz. Consideremos una cadena de números naturales, por ejemplo:

1 3

Esta cadena se puede describir verbalmente como: «un uno y un tres»; es decir:

1 1 1 3

que, a su vez, se puede describir verbalmente como «tres unos y un tres»; es decir:

3 1 1 3

que no es más que «un tres, dos unos y un tres»:

1 3 2 1 1 3

Como es natural, este proceso puede continuar indefinidamente. Este tipo de sucesiones consisten en mirar y decir, de ahí su nombre. Por tanto, la sucesión *look and say* se puede definir como aquella en la que cada elemento se obtiene como la expresión numérica de la descripción verbal del elemento anterior.

Pese a la aparente dificultad de expresar esta sucesión en términos puramente matemáticos, pueden demostrarse resultados interesantes sobre ella. El propio Conway [2] demostró que, salvo para el caso particular de la raíz 2 2, esta sucesión no se estabiliza nunca. Más aún, el ritmo de crecimiento (definido como el cociente entre el número de cifras de dos términos consecutivos de la sucesión) viene dado en última instancia por la denominada constante de Conway:

$$\phi = 1,3035772690342\dots$$

La secuencia *look and say* ordenada

La sucesión *look and say ordenada* es una versión modificada de la sucesión *look and say*. En este caso, cada elemento de la sucesión es el número obtenido como descripción verbal del anterior, donde contamos primero el número total de unos, luego el total de doses, luego el número de treses y así sucesivamente.

Para ilustrar esta sucesión presentamos el ejemplo siguiente. Consideremos nuevamente la cadena de números naturales 1 3. La descripción verbal de esta cadena es: «un uno y un tres». Por tanto el segundo término de la sucesión es 1 1 1 3. La descripción verbal es en este caso: «tres unos y un tres», por lo que el siguiente término será 3 1 1 3. Ahora, a diferencia de la sucesión *look and say* original, la descripción verbal es «dos unos y dos treses» por lo que el término siguiente es justamente 2 1 2 3. Si continuamos con este proceso no es difícil comprobar que el término undécimo de esta sucesión es:

2 1 3 2 2 3 1 4

Cuya descripción es «dos unos, tres doses, dos treses y un cuatro», llegando a la conclusión de que el duodécimo término es:

2 1 3 2 2 3 1 4

Así, quizás sorprendentemente, ¡la sucesión *look and say* ordenada de raíz 1 3 se estabiliza!

A pesar de la clara similitud que existe con la sucesión *look and say*, la sucesión *look and say ordenada* difiere en muchos aspectos de la sucesión original. La principal diferencia es que la sucesión *look and say ordenada* se estabiliza siempre [1].

Las sucesiones *look and say* como recurso didáctico en el aula

Pensamos que estas sucesiones tienen propiedades que las convierten en objetos muy útiles e interesantes para su uso en el aula. Para empezar, son fáciles de presentar y se pueden plantear desde un punto de vista lúdico. Además, aportan una visión totalmente distinta de las sucesiones, al no tratarse de una progresión aritmética ni geométrica ni tener un término general expresable algebraicamente.

Por otra parte, pese a que la comprensión de estas sucesiones no requiere de conocimientos matemáticos previos, el planteamiento de actividades relacionadas con ellas puede fomentar la adquisición de competencias matemáticas.

A modo de ejemplo, vamos a presentar actividades de tres tipos (exploración, análisis y vuelta atrás) que pueden llevarse a cabo en el aula.

EXPLORACIÓN	
<i>Sucesión original</i>	<i>Sucesión ordenada</i>
Calcula el sexto término de la sucesión <i>look and say</i> ordenada cuyo primer término es 3.	Calcula los cinco primeros términos de la sucesión <i>look and say</i> cuyo primer término es 2.
Calcula los once primeros términos de la sucesión cuyo primer término es 1 4.	Calcula los trece primeros términos de la sucesión cuyo primer término es 1 2.
Calcula tantos términos como puedas de la sucesión cuyo primer término es 2. ¿Qué observas?	Calcula tantos términos como puedas de la sucesión cuyo primer término es 3. ¿Qué observas?
ANÁLISIS	
<i>Sucesión original</i>	<i>Sucesión ordenada</i>
¿Puede ser el 1 1 3 un término de la sucesión?	¿Puede ser el 1 1 3 un término de la sucesión?
¿Qué puedes decir sobre el número de cifras de los términos de la sucesión?	¿Qué puedes decir sobre el número de cifras de los términos de la sucesión?
¿Qué forma pueden tener los números que aparecen en la secuencia?	¿Qué forma pueden tener los números que aparecen en la secuencia?
¿Puede ser el 1 2 3 1 un número de la sucesión?	¿Puede ser el 1 2 3 1 un número de la sucesión.
VUELTA ATRÁS	
¿Cuál es el término anterior al 1 4?	¿Cuál es el término anterior al 1 1?
¿Cuál es el término anterior al 2 3?, ¿y el anterior?, ¿y el anterior?, ¿y el anterior?	¿Cuál es el término anterior al 2 3?, ¿y el anterior?, ¿y el anterior?, ¿y el anterior?
¿Cuál es el término anterior al 3 2 1 4?, ¿es único?	¿Cuál es el término anterior al 3 2 1 4?, ¿es único?

Bibliografía

- [1] V. BRONSTEIN y A. FRAENKEL. «On a Curious Property of Counting Sequences». *Amer. Math. Monthly*. 101 n.º 6, 560-563, 1994.
 [2] J. H. CONWAY. The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay. *Eureka* 46 5—18, 1986.
 [3] F. DE LA CUEVA. «Taller de Talento Matemático». *Entorno Abierto*. n.º 12, 5-7, 2016.