



Universidad Zaragoza

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

MODELOS COSMOLÓGICOS NO ESTÁNDAR

Departamento de Física Teórica

Realizado por:
Leticia Pérez Sienes

Dirigido por:
Eduardo Follana Adin



Índice

1. Introducción	1
2. El Modelo Estándar	1
2.1. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	2
2.2. Ecuaciones de Friedmann	2
2.3. Corrimiento al rojo	3
2.3.1. Variación temporal del corrimiento al rojo	4
3. Modelos inhomogéneos de Lemaître-Tolman-Bondi	4
3.1. Geometría	5
3.2. Métrica LTB	5
3.3. Condiciones de regularidad	7
3.4. Embebimiento de los modelos LTB en soluciones de Schwarzschild y Friedmann .	8
3.5. Formación de estructuras	9
3.5.1. Formación de vacíos	9
3.5.2. Formación de otras estructuras	10
3.6. Corrimiento al rojo	11
3.6.1. Variación temporal del corrimiento al rojo	12
4. Confrontación con los datos observacionales	15
4.1. Datos observacionales	15
4.2. Restricciones impuestas por los datos	16
4.3. Modelos Λ LTB	17
5. Conclusiones	19

1. Introducción

La Cosmología es la ciencia que estudia el origen, formación y evolución del universo. En el siglo XX Albert Einstein formuló la Teoría General de la Relatividad y gracias a ella se han podido desarrollar modelos teóricos que expliquen la formación y evolución del cosmos. Los nuevos modelos, junto con la mejora en las observaciones astronómicas, han permitido que en los últimos años esta disciplina haya pasado de ser una Cosmología de precisión. El descubrimiento del Fondo Cósmico de Microondas (en inglés, *Cosmic Microwave Background* o CMB) y experimentos como COBE, WMAP, PLANK y LIGO constatan el importante avance teórico y experimental en la Cosmología. El modelo Λ CDM (por sus siglas en inglés *Lambda-Cold Dark Matter*) es el actual *Modelo Estándar Cosmológico*. Es el modelo más simple y elegante capaz de explicar el origen y la evolución del universo, así como la mayoría de los datos experimentales y observaciones realizados hasta el momento. El modelo estándar se apoya sobre ciertas hipótesis, como la homogeneidad e isotropía del universo, y resulta interesante poner a prueba estas hipótesis. El modelo de Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) relaja la hipótesis de la homogeneidad para ver si se pueden reproducir los datos observacionales.

El objetivo de este trabajo es presentar el modelo LTB, explicando sus características y exponiendo algunas confrontaciones con los datos experimentales estudiados en la literatura.

2. El Modelo Estándar

El Modelo Estándar Cosmológico explica de manera satisfactoria la evolución del universo desde una fracción de segundo desde el Big Bang hasta nuestros días. Se fundamenta sobre las siguientes bases teóricas y experimentales [1] [2] [3]:

a. Bases teóricas

- La Teoría General de la Relatividad de Einstein, que constituye el marco teórico para describir la evolución del universo en su conjunto.
- El Principio Cosmológico, que supone la homogeneidad e isotropía del universo a gran escala.

b. Bases experimentales

- La Ley de Hubble, que relaciona la velocidad a la que las galaxias se alejan de nosotros con la distancia a la que se encuentran. Se ha comprobado que la esta relación distancia-velocidad se corresponde con las observaciones obtenidas por los telescopios.
- La Radiación del Fondo Cósmico de Microondas, que apoya la hipótesis de que el universo es isótropo. En 1965 Penzias y Wilson detectaron la misma señal de fondo proveniente de cualquier dirección en la que apuntaba la antena, fenómeno ya predicho en el artículo *Alpher-Bethe-Gamow*, o más conocido como $\alpha\beta\gamma$ [4].
- La determinación de la abundancia de elementos primigenios formados durante los primeros instantes del universo. Este proceso lo describe la Nucleosíntesis del Big Bang (o por sus siglas en inglés, BBN).

- Las estructuras del universo a gran escala, que corroboran la homogeneidad del universo.

2.1. Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Para modelar el universo a gran escala es necesario llevar a cabo una serie de simplificaciones. Al asumir el Principio Cosmológico podemos escoger unas coordenadas comóviles $\{r, \theta, \phi, t\}$ en las cuáles la métrica sea:

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (1)$$

conocida como métrica FLRW. Los modelos cosmológicos que emplean esta métrica se llaman modelos FLRW o modelos de Friedmann. La función $a(t)$ representa el factor de escala del universo y es una función arbitraria, el parámetro k representa la curvatura y puede tomar los valores $-1, 0$ y $+1$ con una elección adecuada de las coordenadas.

Si consideramos las hipersuperficies espaciales ($t = cte$), cuando $k = +1$ el universo espacial es cerrado y tiene simetría esférica con radio $a(t)$. En cambio, cuando $k = -1$ y $k = 0$ el universo es abierto, hiperbólico en el primer caso y plano en el segundo.

2.2. Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (2)$$

son el punto de partida para describir la evolución del universo. Relacionan la geometría del espacio-tiempo con la presencia y distribución de la materia y energía. El tensor de energía-momento, $T_{\mu\nu}$, es el que describe tal distribución. Asumiendo el Principio Cosmológico y escogiendo coordenadas comóviles se tiene que:

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) U_\mu U_\nu, \quad (3)$$

donde p es la presión y ρ es la densidad de materia-energía. Por tanto, las ecuaciones de Einstein para la métrica FLRW se reducen a las llamadas ecuaciones de Friedmann:

$$3H^2 + 3\frac{k}{a^2(t)} = 8\pi G\rho + \Lambda \quad (4)$$

$$3\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -4\pi G(\rho + 3p) + \Lambda, \quad (5)$$

donde $H = \dot{a}(t)/a(t)$ es el parámetro de Hubble. El modelo estándar es un modelo de Friedmann con $k = 0$ y $\Lambda \neq 0$. Para obtener una solución explícita de las ecuaciones de Friedmann necesitamos además conocer la ecuación de estado que relaciona p con ρ .

2.3. Corrimiento al rojo

La información más importante que tenemos sobre el factor de escala cósmico viene de la observación del cambio en frecuencia de la luz emitida por fuentes distantes. Para calcular estos cambios nos situamos en el origen de coordenadas $r = 0$ y consideramos una onda electromagnética viajando hacia nosotros en la dirección $-r$, con θ y ϕ fijos. La trayectoria de un frente de la onda viene descrita por la geodésica radial nula:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (6)$$

Suponemos que el primer frente de la onda es emitido en el instante $t = t_e$ y el observador en $r = 0$ lo recibe en el instante $t = t_o$. Si el segundo frente es emitido un tiempo τ_e más tarde coincidente con un periodo de onda, $t = t_e + \tau_e$, al observador le llega en el instante $t = t_o + \tau_o$. Las trayectorias de los dos frentes vienen dados por las siguientes relaciones:

$$\text{Primer frente:} \quad \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_e}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (7)$$

$$\text{Segundo frente:} \quad \int_{t_e + \tau_e}^{t_o + \tau_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r_e}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (8)$$

Nos damos cuenta de que el lado derecho de las relaciones (7) y (8) son idénticos, por lo que igualamos la parte temporal del primer frente y la del siguiente:

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \tau_e}^{t_o + \tau_o} \frac{dt}{a(t)} \iff \int_{t_e}^{t_e + \tau_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_o}^{t_o + \tau_o} \frac{dt}{a(t)}. \quad (9)$$

El factor de escala cósmico cambia muy poco en el periodo típico de una señal electromagnética, por lo que podemos hacer las siguientes aproximaciones: $a(t_e) = a(t_e + \tau_e)$, $a(t_o) = a(t_o + \tau_o)$. Entonces:

$$\frac{\tau_e}{a_e} = \frac{\tau_o}{a_o} \quad \rightarrow \quad \frac{\tau_o}{\tau_e} = \frac{a_o}{a_e}. \quad (10)$$

Por definición, el parámetro del corrimiento al rojo es:

$$z := \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} - 1 = \frac{\tau_o}{\tau_e} - 1, \quad (11)$$

que expresado en función del factor de escala es:

$$z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1. \quad (12)$$

el universo se expande si $z > 0 \rightarrow a(t_o) > a(t_e)$.

el universo se contrae si $z < 0 \rightarrow a(t_o) < a(t_e)$.

Las observaciones indican que z es positivo, por lo que nuestro universo se expande.

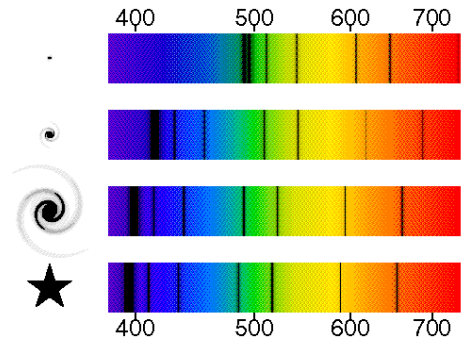


Figura 1: El espectro de los objetos distantes se desplaza al rojo porque el espacio se expande y con él las ondas electromagnéticas [5].

2.3.1. Variación temporal del corrimiento al rojo

Puede ser de interés conocer el parámetro z sea conocer su variación temporal, $\delta z/\delta t_o$. Es decir, observar su comportamiento a lo largo del tiempo. Para su cálculo tomamos la primera ecuación de (10) :

$$\delta z = z_e - z_o = \frac{a(t_o) + \delta t_o}{a(t_e) + \delta t_e} - \frac{a(t_o)}{a(t_e)} = \frac{a(t_o) + \delta t_o \dot{a}(t_o)}{a(t_e) + \delta t_e \dot{a}(t_e)} - \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \approx \quad (13)$$

$$\approx \frac{a(t_o)}{a(t_e)} \left(\frac{\dot{a}(t_o)}{a(t_o)} \delta t_o - \frac{\dot{a}(t_e)}{a(t_e)} \delta t_e \right). \quad (14)$$

Sustituyendo el parámetro de Hubble por su expresión, $H(t(z)) = \dot{a}(t)/a(t)$, y haciendo uso de (10) llegamos a la expresión:

$$\frac{\delta z}{\delta t_o} = H_o(1 + z) - H(t_e), \quad (15)$$

donde t_0 y H_0 son los valores de tiempo y parámetro de Hubble medidos en el presente y t_e es el tiempo en el que la fuente emitió la onda electromagnética.

3. Modelos inhomogéneos de Lemaître-Tolman-Bondi

En los años 1998-1999 dos grupos de observadores [6] [7] detectaron que el pico de luminosidad de las estrellas Supernova de tipo Ia era más pequeño que el que predecía el modelo de Friedmann con $\Lambda = 0$. Concluyeron que la causa de este hecho se debía a una “sustancia” que aceleraba la expansión del universo, a la que llamaron *energía oscura*, y que constituye aproximadamente el 68% de la densidad de energía del universo actual. La cantidad de ésta viene determinada por la constante cosmológica, la cuál dejó de considerarse nula. A pesar de ser una hipótesis muy aceptada, algunos expertos comenzaron a explorar otras posibilidades en las que un modelo cosmológico pudiera explicar la expansión acelerada sin necesidad de la energía oscura. Varios investigadores, motivados por las observaciones, se preguntaron por los fundamentos sobre los cuáles el modelo estándar está asentado. Uno de estos es el Principio Cosmológico. Descubrimientos como el CMB llevan a constatar la alta isotropía del universo. Ahora bien, es más complicado obtener resultados sobre la homogeneidad del universo a gran escala. En este contexto se retoman los modelos que desarrollaron Lemaître, Tolman y Bondi, que son los modelos inhomogéneos más simples estudiados. La idea principal de estos modelos se basa en la Teoría General de la Relatividad de Einstein: las regiones del espacio-tiempo donde la densidad de energía-materia es menor presentarán una mayor aceleración de expansión que aquellas donde la densidad sea mayor. Si viviéramos en una región de menor densidad que el espacio circundante, veríamos como el espacio se acelera con un ritmo mayor que el nuestro. Por consiguiente, estos modelos reemplazan la aceleración temporal por una aceleración que depende de la densidad de la región, evitándonos la necesidad de una constante cosmológica no nula. Los modelos inhomogéneos e isótropos son simétricos con respecto a un único punto situado en el centro, por lo que para explicar el descubrimiento del CMB deberíamos encontrarnos cerca del centro de la región LTB [8].

3.1. Geometría

Las observaciones sobre el cosmos que podemos realizar están sujetas a nuestra perspectiva, esto es, dependen del punto desde el que las efectuamos. Por ello cabría preguntarnos si lo que vemos nosotros es lo mismo que vería otro observador situado en otro punto del universo. Ante una cuestión sin resolver, la explicación más sencilla suele ser la más probable. Así pues, suponer que el universo es homogéneo nos lleva a simplificar en gran medida los cálculos. Además, sería una gran casualidad que fuéramos especiales en el universo y nos halláramos en el centro de éste. El descubrimiento del CMB nos da razones para imaginar que el universo es altamente isótropo, y además, hay observaciones que indican que a gran escala nuestro universo es altamente homogéneo, apoyando el modelo estándar. Para explicar la aceleración de expansión del universo en el modelo estándar se precisa la energía oscura, mientras que otros modelos alternativos intentan explicar el fenómeno de la expansión acelerada relajando el Principio Cosmológico: modelos isótropos pero no homogéneos. En los modelos LTB la densidad y el factor de escala son funciones ya no sólo dependientes del tiempo, sino también de la posición: $\rho = \rho(t, r)$, $R = R(t, r)$.

3.2. Métrica LTB

La métrica LTB es una solución exacta a las ecuaciones de Einstein que describe una nube de polvo con simetría esférica (finita o infinita) en expansión o colapso, sometida a la gravedad. La densidad de masa del universo es muy pequeña en el presente, del orden de $10^{-28} g/cm^3$, por lo que la presión no influye sustancialmente en la dinámica de la materia a gran escala. En consecuencia, la hipótesis de $p = 0$ es muy aceptable. Evidentemente, esta condición no puede aplicarse a las situaciones cosmológicas en las que la presión no puede despreciarse, como es el caso de la época previa a la recombinación. Como sucedía en el modelo estándar, podemos escoger coordenadas *comóviles-síncronas*. El elemento de línea en estas coordenadas es [9]:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R_{,r}^2}{1 + 2E} dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (16)$$

donde

$$R = R(t, r), \quad R_{,r} = \frac{\partial R}{\partial r}, \quad 1 + 2E(r) \geq 0.$$

R es el factor de escala del universo y viene determinado por (18), mientras que $E(r)$ es una función arbitraria que determina la curvatura local. La inecuación debe cumplirse en todo r para que la signatura de la métrica (16) sea la correcta: $(+ - - -)$. En el subespacio $t = cte$ R depende solo de r , por lo que puede utilizarse como coordenada radial.

Vamos a considerar un universo en expansión, es decir, $R_{,t} \neq 0$. Entonces, de la ecuación de Einstein correspondiente a la componente radial se obtiene:

$$2\frac{R_{,tt}}{R} + \frac{R_{,t}^2}{R^2} + \Lambda = 0, \quad (17)$$

donde multiplicando por $R^2 R_{,t}$ e integrando con respecto del tiempo tenemos la *ecuación de la evolución*:

$$R_{,t}^2 = 2E(r) + \frac{2M(r)}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^3. \quad (18)$$

$M(r)$ es una función arbitraria que aparece al integrar con respecto del tiempo, por lo que no depende de t . $M(r)$ representa la masa gravitacional dentro de una esfera comóvil de radio r . No necesariamente es una función creciente con la coordenada radial comóvil r , incluso cuando $\rho \geq 0$. Por simplificación suele asumirse que $M(r),r \geq 0$ en el dominio de r de interés, es decir, $M(r)$ es una función monótona y creciente con r . Al integrar la ecuación (18) aparece otra función arbitraria, el *tiempo bang* $t_B(r)$, dependiente de la posición pero independiente del tiempo. Integrando (18) con respecto de t :

$$t - t_B(r) = \int_0^R \frac{d\tilde{R}}{\sqrt{2E + \frac{2M}{\tilde{R}} + \frac{1}{3}\Lambda\tilde{R}}}. \quad (19)$$

Que t_B sea función de r significa que el Big Bang no es un único evento, como en los modelos de Friedmann, sino que ocurre en tiempos distintos para distancias al origen distintas.

Las ecuaciones vistas hasta ahora y la métrica son covariantes bajo la transformación $r \rightarrow r' = f(r)$, por lo que utilizando esta libertad podemos eliminar una de las funciones arbitrarias. De este modo, el modelo LTB consiste en dos funciones arbitrarias. En particular, será conveniente la elección de $M(r) = M_0 r^3$, donde $M_0 = cte \geq 0$ es la masa de Friedmann.

De la ecuación de Einstein correspondiente a la componente temporal obtenemos la *ecuación de la densidad*:

$$\frac{2M_{,r}}{R^2 R_{,r}} = 8\pi G\rho. \quad (20)$$

Las ecuaciones de Einstein quedan, por tanto, reducidas a (18) y (20). En (20) nos damos cuenta de la posible existencia de dos singularidades: una tiene lugar cuando $R = 0$, y la otra cuando $R_{,r} = 0$, pues conllevan que $\rho \rightarrow \infty$ siempre y cuando $M_{,r} \neq 0$. La primera representa la singularidad del Big Bang, mientras que la segunda es la singularidad llamada *shell crossing* o cruce de capas, que indica un cambio en la densidad: ρ crece hasta el infinito y cambia su signo. En estos casos particulares, las distancias geodésicas entre esferas con r y $r + dr$ se vuelven cero, ya que el término que acompaña a dr^2 en la ecuación de la métrica se anula. Más adelante se analizarán las condiciones para evitar estas singularidades. Dependiendo del signo de la función arbitraria $E(r)$ y en el caso en que $\Lambda = 0$, la ecuación de evolución (18) tiene distintas soluciones:

- $E(r) > 0$: geometría hiperbólica.

$$R(t, r) = \frac{M(r)}{2E(r)} (\cosh \eta - 1), \quad \sinh \eta - \eta = \frac{(2E(r))^{3/2}(t - t_B(r))}{M(r)}. \quad (21)$$

- $E(r) = 0$: geometría parabólica.

$$R(t, r) = \left[\frac{9}{2} M(r) (t - t_B(r))^2 \right]^{1/3}. \quad (22)$$

- $E(r) < 0$: geometría elíptica.

$$R(t, r) = \frac{M(r)}{2E(r)} (\cos \eta - 1), \quad \sin \eta - \eta = \frac{(-2E(r))^{3/2}(t - t_B(r))}{M(r)}. \quad (23)$$

Cuando tomamos $t = cte$ tenemos que R depende sólo de r , por lo que puede utilizarse como coordenada radial. La curvatura es local, pues depende de r , y podría ser positiva en una región del subespacio y negativa en otra región del mismo. Recordamos que esto no sucede en los modelos de Friedmann, donde la curvatura es una propiedad global de todo el espacio. Estos modelos son un caso particular de los modelos LTB. Se obtienen a partir de estos últimos cuando se cumplen las siguientes condiciones:

- $t_B = cte$. Normalmente se toma el valor cero para indicar el evento del Big Bang.
- $\frac{|E|^{2/3}}{M} = cte$.

Entonces, la densidad sólo depende del tiempo:

$$8\pi G\rho c^2 = \frac{6M}{a^3}. \quad (24)$$

Puede escogerse convenientemente la coordenada radial como:

$$R(r, t) = ra(t), \quad (25)$$

donde $a(t)$ es el factor de escala en los modelos de Friedmann, y se tiene:

$$M(r) = M_0 r^3, \quad E(r) = -\frac{1}{2}r^2. \quad (26)$$

En el modelo de LTB encontramos que cada superficie $r = cte$ evoluciona de manera independiente con respecto de las otras, dependiendo de las condiciones iniciales de $M(r)$, $E(r)$ y $t_B(r)$ que especifican la distribución de masa inicial, la distribución de energía inicial y el instante en el que ocurre el Big Bang, respectivamente. La evolución de cada hipersuperficie sigue la misma ley que los modelos de Friedmann. Como estos son subcasos de los de LTB, es posible embeber un modelo LTB en el modelo de Friedmann. Los modelos LTB se convierten en una isla embebida en un fondo de Friedmann, y este fondo no siente la presencia de esta región si la hipersuperficie de separación es comóvil. Por tanto, el número de estas regiones no está limitado.

3.3. Condiciones de regularidad

Las dos singularidades que pueden aparecer en el modelo LTB han sido anteriormente mencionadas [10]:

1. La singularidad de cruce de capa, que tiene lugar cuando $R_{,r} = 0$.
2. La singularidad en el centro de simetría donde $R = 0$, también conocida como singularidad del *Big Bang/Crunch*.

Ambas llevan a un valor infinito de la densidad ρ . En la singularidad de cruce de capa colapsan las hipersuperficies de distinta r , reduciéndose a cero la distancia geodésica de una a otra. Sin embargo, puede evitarse con una adecuada elección de las funciones arbitrarias que aparecen en el modelo LTB. La singularidad en $R = 0$ es inevitable cuando $\Lambda = 0$. En general, no es

simultánea en el modelo LTB. La existencia de un centro de simetría regular en $r = 0$ implica que $R(t, 0) = R_{,t}(t, 0) = 0$, $M(0) = M_{,r}(0) =$ y $E(0) = E_{,r}(0) = 0$.

3.4. Embebimiento de los modelos LTB en soluciones de Schwarzschild y Friedmann

Los modelos LTB engloban a los de Friedmann y pueden utilizarse para regiones finitas del universo. Podrían explicar la evolución de regiones pequeñas embebidas en regiones de Friedmann. Anteriormente hemos visto cómo tomando adecuadamente las funciones arbitrarias $E(r)$, $M(r)$ y $t_B(r)$ llegamos a la expresión de la solución de Friedmann. Algunas veces se considera la unión cuándo se aborda la formación de un cúmulo de galaxias o de un vacío, pues se asume que hasta una distancia r_b determinada desde el centro del cúmulo o vacío la métrica es aquella de LTB; pero una vez se atraviesa la frontera la geometría del espacio-tiempo corresponde al modelo de Friedmann. En este apartado vemos cómo los modelos LTB pueden embeberse en modelos de fondo Schwarzschild y de Friedmann.

Si tomamos (16) con

$$R_{,t}^2 = 2E(r) + \frac{2m}{R}, \quad (27)$$

y $E(r)$ una función arbitraria, obtenemos la solución de Schwarzschild en las coordenadas *Lemaître-novikov*. La solución escrita de esta forma surge como el límite del modelo de LTB correspondiente a $\rho = 0$: cuando $M_{,r}(r) = 0 \rightarrow M(r) = m$, donde m es el parámetro masa de la solución de Schwarzschild. Por esta razón, un modelo puede considerarse como una combinación de estos dos: para $r \leq r_s$ se utiliza la descripción LTB, y para $r \geq r_b$ la solución de Schwarzschild. En consecuencia, la hipersuperficie de frontera la constituyen los puntos $r = r_s$. Las condiciones para poder embeber uno en el otro son:

$$R_{LTB}(t, r_b) = R_S(t, r_b), \quad \left[\frac{R_{,r}}{N} \right]_{LTB} = \left[\frac{R_{,r}}{N} \right]_S, \quad (28)$$

donde utilizamos el subíndice *LTB* para referirnos a la región interna de Lemaître-Tolman-Bondi, y *S* para la región externa de Schwarzschild. Se ha sustituido $R_{,r}/\sqrt{1+2E}$ por N para simplificar la notación. De (28) obtenemos:

$$E(r_b)|_{LTB} = E(r_b)|_S, \quad t_B(r_b)|_{LTB} = t_B(r_b)|_S, \quad M(r_b) = m. \quad (29)$$

Vemos que la función $M(r)$ en la región LTB tiende a ser constante al aproximarse a la frontera, adquiriendo el valor m en $r = r_b$. El mismo desarrollo hecho hasta ahora para la solución de Schwarzschild sirve para el caso de un modelo de fondo de Friedmann. Entonces, donde escribiáramos *S* escribiremos *F*:

$$R_{LTB}(t, r_b) = R_F(t, r_b), \quad \left[\frac{R_{,r}}{N} \right]_{LTB} = \left[\frac{R_{,r}}{N} \right]_F, \quad (30)$$

de donde obtenemos:

$$E(r_b)|_{LTB} = E(r_b)|_F, \quad t_B(r_b)|_{LTB} = t_B(r_b)|_F, \quad M_{LTB}(r_b) = M_F(r_b). \quad (31)$$

3.5. Formación de estructuras

3.5.1. Formación de vacíos

Se ha descubierto que existen amplias regiones en el universo en las que la densidad de materia-energía es extremadamente baja y que estas regiones constituyen gran parte de la estructura a gran escala del universo. Se estima que el 40 % del volumen del universo puede estar formado por regiones de vacío, que cada uno puede llegar a extenderse un centenar de megapársecs de diámetro.

El descubrimiento de estas regiones comenzó cuando los astrónomos empezaron a medir la distribución de los clústeres de galaxias. Tolman [11] y Sen [12] estudiaron la estabilidad de los modelos de Friedmann con respecto a perturbaciones inhomogéneas en la densidad, y concluyeron que estos modelos eran inestables. En consecuencia debían existir regiones de alta y baja densidad.

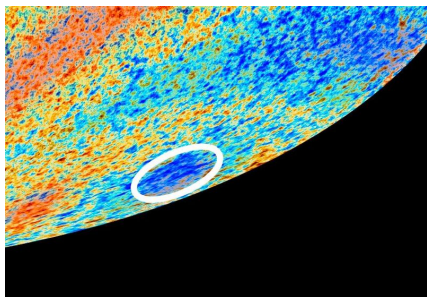


Figura 2: Localización de una región de poca densidad en el CMB [13].

A finales de los años 70 se descubrieron las regiones de vacío. A partir de entonces se han descubierto regiones extremadamente grandes que las galaxias evitan: se les ha llamado *supervacíos*. El tamaño de éstos depende de la luminosidad de las galaxias que lo rodean. El tamaño medio se sitúa entre los 10 y $35h^{-1}$ Mpc [14] (donde h es la constante de Hubble en unidades de 100 km/s/Mpc). La forma de los vacíos pequeños es casi esférica, mientras que los vacíos mayores o supervacíos tienen una forma irregular. Sin embargo estos pueden descomponerse en esferas de tamaño menor, lo que lleva a pensar que la formación de un supervacío sea el resultado de la expansión y posterior colisión de vacíos de tamaño inferior.

Además se ha llegado a la conclusión de que la forma esférica proporciona estabilidad a los vacíos. Estos hechos otorgan importancia a los modelos LTB, pues sus soluciones nos proporcionan un posible mecanismo para la formación de vacíos.

A continuación, vamos a llegar al resultado al que llegó Tolman sobre el crecimiento de las inhomogeneidades en un modelo de Friedmann. Tomamos en el tiempo inicial $t = t_1$ el factor de escala del modelo de LTB con valor en el límite de Friedmann, esto es: $R_{LTB}(t_1, r) = rR_F(t_1)$, y en consecuencia $R_{LTB,t}(t_1, r) = rR_{F,t}(t_1)$. $R_{,tt}$ puede escogerse como se desee, y podemos asumir que las densidades en t_1 son diferentes. Veamos el comportamiento de la densidad en función del tiempo, para lo que utilizamos (20) y (18) así como las expresiones respectivas en el modelo de Friedmann:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \right]_{LTB} = \left[\frac{1}{2} 8\pi G \rho + \Lambda + 2 \frac{R_{,t}^2}{R^2} + \frac{R_{,tr}^2}{R_{,r}^2} \right]_{LTB}, \quad (32)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \right]_F = \left[\frac{1}{2} 8\pi G \rho + \Lambda + 3 \frac{R_{,t}^2}{R^2} \right]_{LTB}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\ln \rho_{LTB} - \ln \rho_F) = \frac{1}{2} 8\pi G (\rho_{LTB} - \rho_F). \quad (34)$$

Vemos que allí donde la densidad de los modelos de LTB sea distinta que la correspondiente en el modelo de Friedmann, la diferencia se incrementará con el tiempo. Esto significa que los modelos LTB con vacíos evolucionarán de manera distinta a como lo hacen los modelos de Friedmann. Predice que los modelos de Friedmann son inestables en cuanto a la formación de regiones ricas en materia y vacíos.

Las principales limitaciones del modelo de LTB para explicar los vacíos son [15]:

- I. Al tratarse de un modelo con simetría esférica la rotación no se tiene en cuenta y la densidad y la velocidad resultan ser funciones únicamente dependientes de la coordenada radial. Los datos recogidos de las observaciones astronómicas, sin embargo, apoyan esta condición con bastante precisión.
- II. Otra limitación la constituye el hecho de que tomamos la presión de la materia y la radiación como cero. Ciertamente la presión puede considerarse despreciable en el presente pero no tenemos evidencias de que haya sido así en otras épocas.



Figura 3: Los supervacíos más grandes observados pueden extenderse hasta unos 200 Mpc [16].

Se han efectuado simulaciones numéricas para la evolución de vacíos según los modelos LTB:

- Se ha encontrado que las perturbaciones de la densidad son mucho menos significativas que las perturbaciones de la velocidad en el proceso de la formación de las regiones de vacío.
- No se constata una diferencia en cuanto a la formación del vacío con y sin constante cosmológica.
- Se ha descubierto que las regiones de vacío están rodeadas de zonas donde la densidad es alta.

3.5.2. Formación de otras estructuras

El modelo LTB ha sido bastante estudiado aunque algunas cuestiones como la formación de estructuras cósmicas a partir de perturbaciones iniciales pequeñas no ha sido aclarada. Bonnor [17] consideró un modelo en el que una región interna LTB se unía con una externa de Friedmann. Aceptando que hubo un alto grado de homogeneidad en el momento de desacople y se determina cuán rápido las condensaciones pueden crecer una vez que hayan aparecido en un fondo homogéneo. Asumiremos que en este escenario la masa de las fluctuaciones es bastante menor que la que aparecerá en la condensación, por lo que durante la evolución se irá capturando masa. En el modelo de Bonnor se asume que la densidad de las regiones interna y externa es diferente y que la frontera entre ambas es comóvil. Con los índices i y e nos referiremos a magnitudes de la región interna y externa respectivamente.

- Si ambas regiones presentan $k_{i,e} > 0$ y $\rho_i > \rho_e$ entonces la región interna colapsará antes que la externa, formando una condensación. Bonnor pensó que tal condensación debería de suponer el total de la masa que más adelante formaría una galaxia típica, es decir, de unas 10^{67} nucleones. Para que esto ocurriera el contraste de densidad inicial debía ser $\delta\epsilon/\epsilon = |\epsilon_i - \epsilon_e|/\epsilon_e = 10^{-34}$. Para poder formar una galaxia la perturbación inicial tiene que ser del orden de $\delta\epsilon/\epsilon \approx 10^{-5}$. Aunque por otro lado una perturbación estadística de este orden involucraría solo 10^{10} partículas.
- Si la región interna presenta $k_i < 0$ y la externa $k_e > 0$ entonces las perturbaciones iniciales deberían de ser del orden de 10 veces mayores que en el caso anterior.
- Si ambas regiones presentan $k_{i,e} < 0$ no hay modo de que se forme una galaxia.

Actualmente se considera que las fluctuaciones de densidad iniciales son debidas a fluctuaciones cuánticas del campo escalar, que da lugar a la inflación y que precisamente son del orden de 10^{-5} . Sin embargo, uno de los resultados de Krasinski y Hellaby (2004a) es que las fluctuaciones de la densidad por sí solas no pueden formar las estructuras, sino que la distribución de velocidad inicial también es responsable.

3.6. Corrimiento al rojo

El comportamiento de z depende en gran medida de la tasa de expansión del universo y dónde nos situamos como observadores. Cuando consideramos el modelo estándar, que se asienta sobre el Principio Copernicano puesto que no nos sitúa en un punto privilegiado del cosmos, podemos explicar los datos observados con bastante precisión. No obstante, al carecer de una justificación firme para considerar que el Principio Copernicano se cumple es inevitable preguntarse si las observaciones también se ajustan a otro modelo que no cumpla este principio. Para decidir qué modelo se ajusta mejor a la realidad se deben obtener medidas físicas de parámetros y predicciones de las teorías para ver qué teoría se ajusta mejor. El parámetro z es uno de los parámetros clave para tal fin. En caso de encontrarnos en un punto especial, en un centro de simetría, encontraríamos una desviación de z con respecto al que predice el modelo estándar. Casi todos los modelos no Copernicanos se basan en los modelos de LTB. La ventaja que presentan éstos, como ya se ha comentado anteriormente, es que no es necesario introducir la energía oscura para explicar la dinámica del universo.

Supongamos que un rayo de luz es emitido desde un punto del universo situado a una distancia r del centro de simetría, dónde se haya el observador. La onda recorrerá una geodésica radial nula:

$$ds^2 = 0 = dt^2 - \frac{R_{,r}(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}} dr^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dr} = -\frac{R_{,r}(t,r)}{\sqrt{1+2E(r)}}. \quad (35)$$

El primer frente de la onda luminosa es emitido en el instante $t_1 = t_e$. Si llamamos a τ_e al periodo de la onda electromagnética cuando fue emitida por la fuente que se encuentra a distancia r_e , podemos considerar entonces que el segundo frente fue emitido en el instante $t_2 = t_e + \tau_e$. Procedemos de igual modo para el observador situado en $r = r_o = 0$: el primer frente llegará en el instante $t = t_o$ y el segundo en $t = t_o + \tau_o$ (τ_o el periodo de la onda medido por el observador

situado en el centro de simetría). En este modelo tenemos que el factor de escala ya no depende sólo del tiempo (como ocurre en el modelo estándar), por lo que no puede desarrollarse el mismo procedimiento por el cual teníamos a un lado de la ecuación solo funciones de t , $dt/a(t)$, y al otro lado de la ecuación nos quedaba todo en función de r , $dr/\sqrt{1-kr^2}$. En este modelo tenemos que escribir la trayectoria que seguirán los dos frentes de la onda, que deben verificar la ecuación (35):

$$\frac{dt_e}{dr} = -\frac{R_{,r}(t_e, r)}{\sqrt{1+2E(r)}}, \quad \frac{d(t_e + \tau_e)}{dr} = -\frac{R_{,r}(t_e + \tau_e, r)}{\sqrt{1+2E(r)}}. \quad (36)$$

además suponemos que el periodo de la onda es muy pequeño, por lo que podemos aproximar en serie de Taylor a primer orden en τ :

$$R_{,r}(t_e + \tau_e, r) = R_{,r}(t_e, r) + \tau_e \frac{d}{dt} R_{,r}(t_e, r). \quad (37)$$

Desarrollando la ecuación (36) en la que sustituimos la relación (37) llegamos a:

$$\begin{aligned} \frac{d(t_e + \tau_e)}{dr} &= \frac{dt_e}{dr} + \frac{d\tau_e}{dr} = -\frac{R_{,r}(t_e, r) + \tau_e \frac{d}{dt} R_{,r}(t_e, r)}{\sqrt{1+2E(r)}} \\ &\quad - \frac{R_{,r}(t_e, r)}{\sqrt{1+2E(r)}} - \tau_e \frac{d}{dt} \frac{R_{,r}(t_e, r)}{\sqrt{1+2E(r)}} \\ &= \frac{dt_e}{dr} - \tau_e \frac{R_{,tr}(t_e, r)}{\sqrt{1+2E}}, \end{aligned} \quad (38)$$

y finalmente nos queda:

$$\frac{d\tau_e}{dr} = -\tau_e \frac{R_{,tr}(t_e, r)}{\sqrt{1+2E}}. \quad (39)$$

Recordamos que el parámetro del z para un observador situado en $r = 0$ que recibe una onda luminosa desde r es:

$$z(r) + 1 = \frac{\tau_o(0)}{\tau_e(r)} \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dr} = -\frac{\tau_o(0)}{\tau(r)^2} \frac{d\tau(r)}{dr} = (z(r) + 1) \frac{R_{,tr}(T(r), r)}{\sqrt{1+2E(r)}}, \quad (40)$$

integrando la última expresión de (40) se obtiene el valor de z :

$$\ln(z(r) + 1) = \int_r^0 \frac{R_{,tr}(T(r), r)}{\sqrt{1+2E(r)}} dr. \quad (41)$$

3.6.1. Variación temporal del corrimiento al rojo

En [18] se introduce una clase de modelos LTB llamados *vacíos* que presentan las siguientes condiciones:

1. $r = 0$ es un centro regular ¹.
2. La derivada del factor de escala con respecto a la coordenada radial es positiva: $\partial_r R > 0$.
3. La densidad es no negativa: $\rho(t, r) \geq 0$.

¹Cumple con las condiciones requeridas expuestas en (3.3)

4. La derivada de la densidad con respecto a la coordenada radial es no negativa: $\partial_r \rho(t, r) \geq 0$
5. El parámetro de z se comporta de manera normal, esto es, $z(r)$ es una función monótona creciente con r .

En este artículo se demuestra que para dichos modelos la variación temporal del corrimiento al rojo es negativa: $\delta z / \delta t_0 < 0$. Para el cálculo debemos hacer uso de la ecuación de la geodésica nula. A partir de la definición del parámetro z escribimos su derivada con respecto a r y junto con la condición de geodésica nula llegamos a (40):

$$\frac{dz}{dr} = \frac{(1+z)\partial_t \partial_r R}{\sqrt{1+2E}}, \quad \frac{dt}{dr} = -\frac{\partial_r R}{\sqrt{1+2E}}. \quad (42)$$

Consideramos dos frentes de una onda electromagnética emitidas en t_0 y $t_0 + \delta_0$:

$$\begin{aligned} \text{Primer frente: } \quad z &= z_1(r; t_0), \\ t &= t_1(r; t_0), \\ \text{Segundo frente: } \quad z &= z_2(r; t_0 + \delta t_0) = z_1(r; t_0) + \delta z(r), \\ t &= t_2(r; t_0 + \delta_0) = t_1(r; t_0) + \delta t(r). \end{aligned}$$

Sustituyendo z_1, t_1, z_2 , y t_2 en las relaciones de (42) y desarrollando llegamos a:

$$\frac{d}{dr} \delta z = \frac{\partial_t \partial_r R}{\sqrt{1+2E}} \delta z \frac{(1+z)\partial_t^2 \partial_r R}{\sqrt{1+2E}} \delta t, \quad \frac{d}{dr} \delta t = \frac{\partial_t \partial_r R}{\sqrt{1+2E}} \delta t. \quad (43)$$

Si consideramos que z crece de manera monótona cuando la coordenada radial crece, esto es, tiene un comportamiento *normal*, podemos reemplazar r por $z = z(r; t_0)$ y fácilmente obtenemos:

$$\frac{d}{dz} \delta z = \frac{\delta z}{1+z} + \frac{\partial_t^2 \partial_r R}{\sqrt{1+2E}} \delta t, \quad \frac{d}{dz} \delta t = -\frac{\delta t}{1+z}. \quad (44)$$

Utilizando los resultados anteriores llegamos a la expresión:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\delta z}{1+z} \right) = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{\partial_t^2 \partial_r R}{\partial_t \partial_r R} \delta t_0. \quad (45)$$

Nos interesa el comportamiento del z en el entorno próximo al centro de simetría, esto es, cuando $r \rightarrow 0$. En ese caso podemos escribir las siguientes funciones de esta manera:

$$\rho(t_0, r) = \rho_0, \quad H_0 = \frac{4}{3} \pi \rho_0 r^3, \quad R(t_0, r) = r + O(r), \quad (46)$$

$$z(r) = 0, \quad \delta z(r) = 0, \quad k(r) = k_0, \quad t_B = 0. \quad (47)$$

Ahora sólo necesitamos calcular $\partial_t^2 \partial_r R$ y $\partial_t \partial_r R$ en las proximidades de $r = 0$ para dar con $\delta z / \delta t$ utilizando (45). Haciendo $\Omega_{m0} = 8\pi G\rho/3H_0^2$ tenemos:

$$\frac{\delta z}{\delta t_0} = -\frac{1}{2} \Omega_{m0} z. \quad (48)$$

Este último resultado es muy importante porque nos dice que el $\delta z / \delta t_0$ siempre va a ser negativo

para un observador situado cerca del centro de simetría.

En cambio, si existe un dominio en el que la densidad de materia decrezca conforme la coordenada radial crece, $\delta z/\delta t_0$ puede ser positivo. A continuación, tomamos dos de los ejemplos analizados en [18], representados en la figura 4:

$$\begin{aligned} \text{Modelo (a): } k(r) = 0, t_B(r) = f(r; a, r_1, r_2), \\ \text{con } a = -1,7H_0^{-1}, r_1 = 0,12H_0^{-1}, r_2 = 0,9H_0^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Modelo (b): } t_B(r) = 0, k(r) = f(r; a, r_1, r_2), \\ \text{con } a = -100H_0^{-1}, r_1 = 0,1H_0^{-1}, r_2 = 0,2H_0^{-1}, \end{aligned}$$

habiendo tomado

$$f(r; a, r_1, r_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq r_1 \\ \frac{a(r-r_1)^3(r_1^2-5r_1r_2+10r_2^2+3r_1r-15r_2r+6r^2)}{(r_2-r_1)^5} & \text{si } r_1 \leq r \leq r_2 \\ 0 & \text{si } r \geq r_2 \end{cases} \quad (49)$$

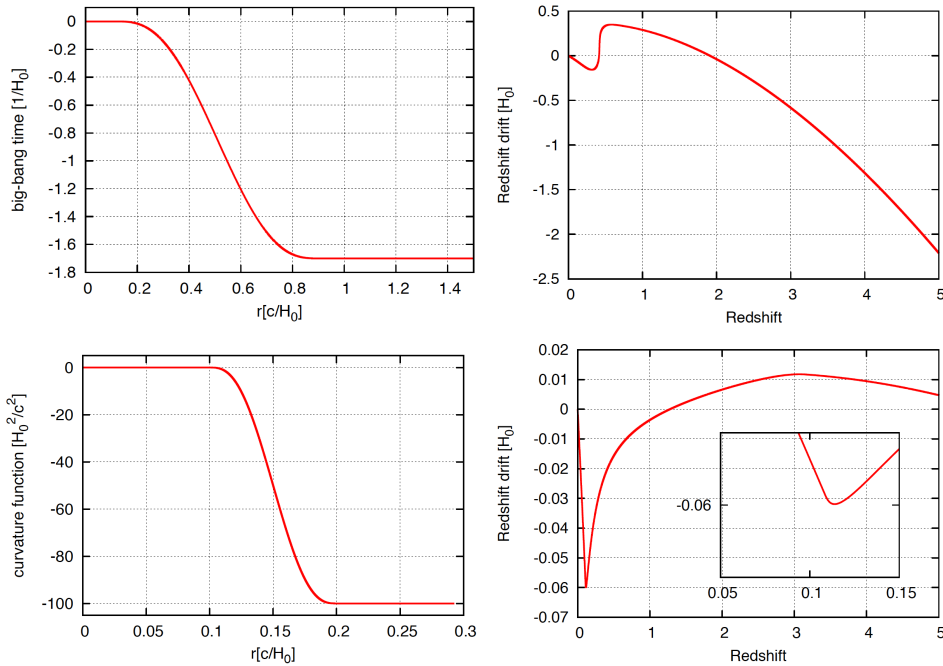


Figura 4: Comparativa del comportamiento de z para diversos valores de los parámetros del modelo LTB [18].

Los dos casos considerados sitúan al observador en el centro de simetría. Si se asume que la densidad de materia es no negativa, entonces la variación temporal de z de una fuente situada fuera del centro es negativa y la función densidad y el factor de escala aumentan con r . Observando, por tanto, δz podemos restringir las condiciones del modelo de universo para que se ajuste mejor a los datos observacionales: si $\delta z \geq 0$ entonces en algún dominio de z los modelos de vacío podrían desecharse. Si existe una región con una gran densidad que rodea el centro de simetría, δz puede ser positivo. Así pues, las inhomogeneidades han de ser extremadamente

grandes para que esto ocurra. Esto sugiere que el signo de δz puede ser un buen indicador para elegir el modelo: un modelo de vacío LTB. Sin embargo, cabe destacar que para obtener un valor positivo de $\delta z/\delta t_0$ en los modelos con un cambio drástico en la función densidad las inhomogeneidades tienen que ser extremadamente grandes, y las relaciones distancia-corrimiento al rojo en estos modelos no concuerdan con los datos observacionales. Existen proyectos internacionales que están midiendo la variación temporal del corrimiento al rojo, tales como *Cosmic Dynamics Experiment* en el Gran Telescopio Europeo y *Precision Super Stable Observations* en el Very Large Telescope Array, que han conseguido obtener mediciones muy precisas y fiables. Observando el signo de δz en el dominio de $z \leq 2$ nos permite restringir parámetros del modelo de vacío en contraposición con los modelos Copernicanos, ya que estos últimos modelos con materia oscura o gravedad modificada predicen un valor de $\delta z > 0$ en el dominio de interés, mientras que $\delta z < 0$ en el modelo de vacío LTB.

4. Confrontación con los datos observacionales

Al comparar los datos observacionales con los modelos LTB hay que tener cuidado de no utilizar implícitamente propiedades del modelo estándar. Además, el formalismo para analizar la formación de estructuras (como datos de galaxias, clúster, filamentos) no se ha desarrollado suficiente, por lo que no podemos utilizar datos que se refieran a ello. En esta sección seguiremos la discusión de [19].

4.1. Datos observacionales

Parámetro de Hubble. Hemos visto anteriormente el significado de este observable: $H = R_{,t}(t, r)/R(t, r)$ indica el ritmo de expansión del universo en función de r para un t dado. Los últimos resultados del parámetro de Hubble dan un valor [20]: $H_0 = 67,27 \pm 0,66$ km/s/Mpc. Sin embargo, en [19] considera un valor anterior algo superior: $H_0 = 73,8 \pm 2,4$ km/s/Mpc.

Supernovas Ia. Las supernovas de tipo Ia son estrellas que explotan cuando su masa alcanza 1,5 veces aproximadamente la masa del Sol antes de explotar, por lo que todas presentan una luminosidad similar. Se conoce la magnitud absoluta que alcanzan en el pico de luminosidad, por lo que midiendo la magnitud aparente puede calcularse la distancia a la que se encuentran. Si se mide además el corrimiento al rojo de estas supernovas, entonces podemos calcular la velocidad de recesión. Del análisis de las magnitudes aparentes y la observación del parámetro z de varias de estas supernovas, se pueden representar los datos en una gráfica velocidad-distancia y ajustarla a una relación lineal para obtener el valor de la constante de Hubble.

CMB. El cálculo de las anisotropías primarias del CMB podemos evitarlo si asumimos que el universo en épocas tempranas antes del desacoplo era altamente homogéneo e isótropo, por lo que el modelo estándar describiría bien el universo hasta ese momento. Para el cálculo de las anisotropías secundarias en los modelos inhomogéneos se necesita una teoría lineal de perturbaciones para explicar formación de estructuras, la cuál todavía no está suficientemente desarrollada. En [19] han desarrollado técnicas para obtener las restricciones impuestas por el CMB, de modo que dependan débilmente de los detalles de la formación de estructuras.

Variación temporal de z . Ya hemos visto que $\delta z/\delta t$ puede presentar distinto signo para el modelo estándar y el modelo LTB. Es necesario observar el parámetro z durante un periodo de unos 10 años para tener medidas de $\delta z/\delta t$ precisas.

4.2. Restricciones impuestas por los datos

A continuación, veremos cómo los datos observacionales condicionan los parámetros de los modelos LTB. En [19] se examina computacionalmente un modelo LTB con un tamaño radial de $L = 3$ Gpc, varios perfiles de densidad y un tiempo bang constante, por lo que todo el universo tiene la misma edad t_0 . La finalidad será concluir si estos modelos suponen una buena descripción para regiones del universo embebidas en modelos de Friedmann.

Parámetro de Hubble y supernovas Ia.

Como modelo de fondo de Friedmann se toma el más simple de todos, el de Einstein-de Sitter, esto es, constante cosmológica y curvatura nulas. Para explicar la aceleración que sugieren las observaciones de las supernovas, los resultados favorecen regiones LTB de gran tamaño y perfiles de densidad que decrecen gradualmente conforme $r \rightarrow 0$. El contraste típico de densidad arroja un valor de $\delta\rho(t_0, r=0) = (\rho(0) - \rho_{bg})/\rho_{bg} \approx -0,75$. La restricción en el perfil de densidad se debilita conforme el tamaño de la región aumenta. Esta libertad demuestra que los modelos LTB pueden ajustarse fácilmente a los datos sin la necesidad de la constante cosmológica y con un modelo de fondo con curvatura nula. Por otro lado, si la densidad de materia ω_m de fondo disminuye, también lo hace el parámetro de Hubble de fondo, H_{bg} . Así pues, en la región LTB la densidad debe disminuir rápidamente en las proximidades del centro para mantener el alto valor del parámetro de Hubble local observado. Puede definirse la cantidad $\delta H = H_{LS} - H_{bg}$ como la diferencia entre el valor del parámetro de Hubble en el centro de la región LTB, calculado por mínimos cuadrados (“*least-squares*”), y el del modelo de fondo. De la estadística de los datos se extrae un valor de $H_{bg} = 56$ km/s/Mpc, lo que lleva a un $\delta H \approx 18$ km/s/Mpc para coincidir con el valor observado $H_{LS} \approx 74$ km/s/Mpc. Raramente el incremento de la diferencia supera los 24 km/s/Mpc.

Esta libertad demuestra que los modelos LTB pueden ajustarse fácilmente a los datos sin la necesidad de la constante cosmológica y con un modelo de fondo con curvatura nula. Por otro lado, si la densidad de materia ω_m de fondo disminuye, también lo hace el parámetro de Hubble de fondo, H_{bg} . Así pues, en la región LTB la densidad debe disminuir rápidamente en las proximidades del centro para mantener el alto valor del parámetro de Hubble local observado. Puede definirse la cantidad $\delta H = H_{LS} - H_{bg}$ como la diferencia entre el valor del parámetro de Hubble en el centro de la región LTB, calculado por mínimos cuadrados (“*least-squares*”), y el del modelo de fondo. De la estadística de los datos se extrae un valor de $H_{bg} = 56$ km/s/Mpc, lo que lleva a un $\delta H \approx 18$ km/s/Mpc para coincidir con el valor observado $H_{LS} \approx 74$ km/s/Mpc. Raramente el incremento de la diferencia supera los 24 km/s/Mpc.

CMB. Se lleva a cabo una simulación en [19], en la que únicamente tenemos modelos de Friedmann con $k \neq 0$ y $\Lambda = 0$, limitados sólo por las observaciones del CMB. Los modelos favorecidos son aquéllos con $h = 0,33 \pm 0,01$, densidad de materia $\Omega_m = 1,26 \pm 0,04$ y parámetro de curvatura $\Omega_k \approx -0,026$. Se trata de un valor del parámetro de Hubble extremadamente bajo, lo que contradice las mediciones. La siguiente simulación considera un modelo LTB como el analizado en el apartado anterior: una región de 3 Gpc embebida en un modelo de Friedmann con $k \neq 0$. En este caso, los modelos se ajustan perfectamente a los datos, favoreciendo idéntico

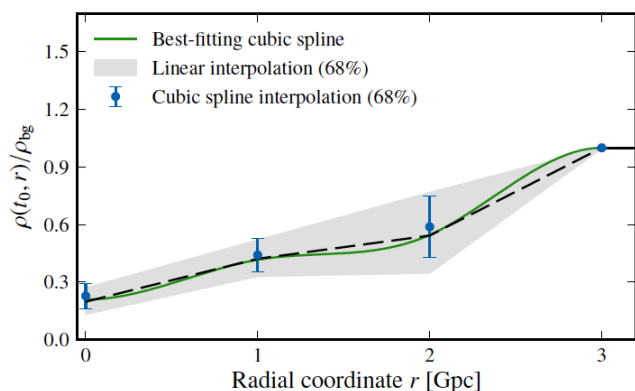


Figura 5: Limitaciones en la forma de la densidad radial de la región LTB de tamaño 3 Gpc [19].

h y ω_m al caso en el que sólo teníamos un modelo de Friedmann. Por tanto, se concluye que los datos del CMB por sí solos no condicionan el modelo LTB, sino el modelo de Friedmann de fondo con un parámetro de Hubble muy bajo. En la tabla 1 se recogen los distintos valores obtenidos para los diferentes tamaños radiales de las regiones LTB.

L	h	Ω_m	H_{LS}
3	0,39	1,10	56,01
4,5	0,39	1,18	60,13
7,5	0,39	1,37	62,52

Tabla 1: Tamaño de la región LTB, parámetro adimensional de Hubble y parámetro de densidad de materia del modelo de Friedmann de fondo y parámetro de Hubble en el origen de la región LTB [19].

Parámetro de Hubble, supernovas y CMB. En [19] inicialmente consideran sólo modelos de Friedmann con k y Λ nulas para ajustar los datos. Los modelos favorecidos presentan los valores $h = 0,719$, $\Omega_m = 0,265$, $\Omega_\Lambda = 0,735$. La siguiente simulación considera una región LTB de las mismas características que en las anteriores ocasiones. Ahora en cambio, se ve favorecido el modelo de Friedmann de fondo con $h = 0,39 \pm 0,01$ y $\Omega_m = 1,09 \pm 0,03$, mejorando incluso la simulación en la que no se contemplan modelos LTB y sólo limitan los datos del CMB. En consecuencia, vemos cómo el ajuste de modelos LTB al CMB limita considerablemente el parámetro de Hubble, llevándolo a valores muy bajos, lejos del valor observado. La densidad prácticamente se anula en el origen para aumentar en la medida de lo posible H_{LS} . Incluso ajustando finamente la densidad de materia radial y aumentando el tamaño de la región LTB, no es suficiente. Así pues, estos modelos no pueden competir con el modelo estándar de Friedmann de curvatura nula y constante cosmológica distinta de cero.

4.3. Modelos Λ LTB

En esta sección vamos a ver cómo de manera natural aparece la constante cosmológica en los modelos LTB. En la sección anterior vimos cómo al ajustar los modelos LTB a los datos del CMB cuanto más disminuye la densidad en las proximidades del centro de simetría mayor es el parámetro de Hubble. Veamos cómo puede obtenerse este resultado a partir de las ecuaciones de Friedmann con $\Lambda = 0$ y $p = 0$. Tomamos la ecuación

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G\rho}{3}, \quad (50)$$

donde sustituimos $\ddot{a}/a = \dot{H} + H^2$ e introducimos el parámetro de densidad $\Omega_m = 8\pi G\rho/3H^2$ en (50):

$$-\frac{\dot{H}}{H^2} = 1 + \frac{1}{2}\Omega_m \quad \rightarrow \quad H(t_f) = \frac{1}{\frac{1}{H(t_i)} + \int_{t_i}^{t_f} (1 + \frac{1}{2}\Omega_m(t)) dt}. \quad (51)$$

Comprobamos que cuando $\Omega_m \rightarrow 0$ entonces $H_{LS} \rightarrow H_{LS_{m\acute{a}x}}$.

A continuación, veremos por qué $H_{LS_{m\acute{a}x}}$ no es lo suficientemente grande en comparación con el valor observado. Para simplificar las cuentas consideraremos un espacio de Friedmann

con una esfera completamente vacía embebida en él, en cuyo centro se encuentra el observador. El parámetro de Hubble cumple en ambas regiones: $H^2(a) = H_0(\Omega_m a^{-3} + \Omega_k a^{-2})$, donde a es el factor de escala que toma valor 1 en el tiempo presente t_0 . Sustituyendo $\Omega_k = 1 - \Omega_m$ e integrando con respecto de t tenemos:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} f(\Omega_m), \quad \text{donde} \quad f(\Omega_m) = \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_m a^{-1} + (1 - \Omega_m)}} da. \quad (52)$$

Podemos relacionar el parámetro de Hubble presente de ambas regiones, tomando la primera expresión de (52): $f(\Omega_m^{int}(\rho = 0) = 1)$, luego $H_0^{int} = H_0^{ext}/f(\Omega_m^{ext})$. Si fijamos un valor $H_0^{out} = 40$ km/s/Mpc, que es el valor favorecido por los análisis de [19] presentados anteriormente e introducimos la esfera vacía en un modelo de fondo de Einstein-de Sitter, esto es, $\Lambda, k = 0$ obtenemos un valor de $f(\Omega_m^{ext} = 1) = 2/3$ que conlleva un parámetro de Hubble $H_0^{int} = 60$ km/s/Mpc. Para conseguir un valor más alto de H_0^{int} necesitaríamos una densidad de materia extremadamente alta, lo que contradice las medidas tomadas hasta el momento. Por tanto, se concluye que ni siquiera aumentando el tamaño de la región LTB a varios Gpc y con densidad nula en el origen podemos explicar el parámetro de Hubble y CMB observados. Por otro lado, se tiene que si permitimos que distintas regiones del universo tengan distinta edad entonces fácilmente podemos aumentar el valor de H_0^{int} . Reescribimos el tiempo bang introduciendo los parámetros densidad Ω_m, Ω_k y ω_Λ tenemos:

$$t - t_B(r) = \frac{1}{H_0(r)} \int_0^1 \frac{da}{\Omega_k(r)a^{-2} + \Omega_m(r)a^{-3} + \Omega_\Lambda}. \quad (53)$$

El parámetro de Hubble local por tanto puede ser incrementado si $t_B(r)$ disminuye conforme r aumenta. Krasinski (2014) demostró que puede ajustarse el tiempo bang de tal forma que describa la misma relación distancia-corrimiento al rojo que el modelo estándar con energía oscura. Las variaciones en el tiempo bang se relacionan con un alto nivel de inhomogeneidades en el universo temprano, que contradice el análisis estándar del CMB. La hipótesis de que la edad del universo dependa de r complica el modelo y conviene, entonces, decantarse por aquél más simple que verifique las observaciones. Sin embargo, estas complicaciones pueden evitarse si se incluye en los modelos LTB una constante cosmológica distinta de cero. De hecho, Lovelock demostró que bajo condiciones generales simples cualquier teoría métrica de gravedad cuadrimensional donde se conserve localmente la energía-momento tiene dos constantes de acoplo: la constante de gravitación de Newton G y la constante cosmológica Λ . Por tanto, para suprimir ésta última debe haber una sólida justificación que lo respalde. En este punto, los modelos LTB ya no buscan explicar la aceleración sin necesidad de la energía oscura, sino comprobar si nos encontramos en un punto privilegiado de una región inhomogénea del universo, es decir, verificar el Principio Copernicano.

5. Conclusiones

Dos de las preguntas más importantes que debemos hacernos a la hora de considerar la posible relevancia de los modelos LTB son:

1. si las observaciones nos permiten determinar la distribución de la masa en la región en la que nos situamos,
2. si los demás datos observacionales pueden explicarse a partir de los modelos LTB.

Ha sido conveniente considerar un tiempo bang homogéneo para explicar de manera simplificada la isotropía de los fotones en el momento del desacople. Un problema que surge al contrastar los datos observacionales es que si bien es posible ajustar los parámetros para obtener el parámetro de Hubble, entonces es difícil obtener el espectro CMB, y viceversa. A continuación vamos a resumir los resultados de la comparación entre los datos observacionales y los modelos LTB con $\Lambda = 0$:

- a. *Parámetro de Hubble y Supernovas Ia*: los modelos LTB con $\Lambda = 0$ pueden predecir tanto H_0 como la luminosidad de las Supernovas Ia igual de bien que el modelo estándar. Sin embargo, conviene matizar: la medida de luminosidad de las supernovas se ve muy influenciada por el modelo bajo consideración. Al considerar un modelo de Friedmann, la medida arroja una preferencia por una $\Lambda \neq 0$, sin embargo al asumir que $\Lambda = 0$ y $t_B \neq cte$ se favorece el modelo LTB.
- b. *CMB*: el espectro CMB por sí solo no restringe la forma de la función de densidad en el modelo, pero sí limita la geometría y la variación de H_0 de los modelos de fondo. Si no se tiene en cuenta Λ entonces se requieren modelos de fondo muy curvados con un parámetro de Hubble muy pequeño que no concuerda con el observado.
- c. *Parámetro de Hubble, Supernovas Ia y CMB*: un buen ajuste de los parámetros al espectro CMB conlleva un H_0 muy bajo, y aún considerando gran variedad en los perfiles de densidad seguimos teniendo un valor demasiado bajo. Las soluciones para conseguir un buen ajuste para ambas observaciones requeriría desviaciones del modelo inflacionario o introduciría complejidad.

Con todo lo anterior, uno debería decantarse por el modelo estándar y explorar la vía de los modelos LTB con $\Lambda \neq 0$ para testear la inhomogeneidad, ya que estos suponen los modelos isótropos, inhomogéneos más simples que podrían complementar al modelo estándar. Debe incidirse por un lado en el hecho de que por el momento no hay una teoría simple que explique la formación de estructuras en los modelos LTB, por lo que se han debido rechazar las observaciones que dependen de esta teoría, y por otro lado en que otras observaciones, en cambio, no son las más idóneas, puesto que se utilizan típicamente para el estudio de modelos homogéneos e isótropos. Avances en la teoría que explique la formación de estructuras nos llevará a dar con distribuciones de densidad más afines a los datos observados.

Referencias

- [1] ZORZANO, J. *El Modelo Estándar. Pilares básicos de la Cosmología*. Departamento Física Aplicada a la Ingeniería Industrial, U.P.M.
- [2] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the theory of relativity*, John Wiley and Sons, 1972.
- [3] WEINBERG, S. *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [4] ALPHER, R. A., BETHE, H., GAMOW, G. *The Origin of Chemical Elements*. Phys. Rev. 73, 803 (1948).
- [5] physics.stackexchange.com
- [6] Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goo- bar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, L. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMa- hon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, and W. J. Couch, *Astrophys. J.* 517, 565 (1999).
- [7] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Krischner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry, *Astron. J.* 116, 1009 (1998).
- [8] KRASINSKI A. *Phys. Rev. D* 89, 023520 (2014).
- [9] PLEBANSKI J., KRASINSKI A. *An Introduction to General Relativity and Cosmology*.
- [10] KRASINSKI A. *Proceedings of the 49th Yamada conference* Universal Academy Press, Tokio.
- [11] TOLMAN, R. C. *Effect of inhomogeneity on cosmological models* (1934) *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 20, 169; reprinted, in *Gen. Rel. Grav.* 29, 931(1997).
- [12] SEN, N. R. *On the stability of cosmological models* (1934). *Z. Astrophysik* 9, 215; reprinted, in *Gen. Rel. Grav.* 29, 1473 (1997).
- [13] dailygalaxy.com
- [14] LINDNER U., EINASTO J., EINASTO M., FRICKE K. J.(1996) astro-ph/9604108.
- [15] BOLEJKO K., KRASINSKI A., HELLABY C. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 362:213-228,2005.
- [16] img.scoop.it
- [17] BONNOR, W. B. *The formation of the nebulae* (1956). *Z. Astrophysik* 39, 143; reprinted, in *Gen. Rel. Grav.* 30, 1111 (1998).
- [18] CHUL-MOON YOO, TOMOHIRO KAI, KEN-ICHI NAKAO (2011). *Phys. Rev. D* 83, 043527.

- [19] REDLICH M., BOLEJKO K., MEYER S., LEWIS G. F., BARTELMANN N. *Astronomy & Astrophysics*, A 570, A63 (2014).
- [20] Planck 2015 Results XIII. Cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594, A13 (2016).