

MODELO ÓPTICO BASADO EN FÍSICA DE LA ATMÓSFERA  
TERRESTRE

DAVID GUIMERÁ MESEGUR



Director: Adrián Jarabo  
Ponente: Diego Gutierrez  
Graphics and Imaging Lab  
Escuela de ingeniería y arquitectura  
Universidad de Zaragoza

David Guimerá Meseguer: *Modelo óptico basado en física de la atmósfera terrestre*, Noviembre 2016

A mi abuela, a mi tía, a mis padres, a mi hermana y a María



## RESUMEN

---

Reproducir la apariencia de la atmósfera ha suscitado gran atención en el campo de los gráficos por computador desde sus orígenes, por su importancia como fondo y fuente de luz. Por ello, numerosos modelos han sido propuestos, con distintos niveles de granularidad y detalle en el modelo atmosférico. En este proyecto presentamos un modelo óptico atmosférico basado en física, que a diferencia del trabajo previo es capaz de reproducir las variaciones espacio-temporales en la atmósfera y su efecto en la apariencia del cielo. Para ello, desarrollamos un modelo detallado de composición atmosférica basado en datos obtenidos por la comunidad de Ciencias Atmosféricas, y lo mapeamos a un modelo óptico utilizable dentro del marco de la Transferencia Radiativa. Finalmente, integramos nuestro modelo en un renderizador con soporte para transporte en medios participativos, añadiendo un conjunto de técnicas recientes para acelerar los cálculos. Nuestro modelo es espectral, y es capaz de mostrar los cambios debido a diferente situación geográfica.



## AGRADECIMIENTOS

---

En primer lugar, tengo mucho que agradecer al director de mi proyecto, Adrián, por toda su ayuda, su dedicación a la hora de enseñarme y por el apoyo que he recibido por su parte desde que empecé. A él y a Diego por darme la oportunidad de conocer el trabajo de un grupo de investigación y hacerme partícipe de él.

A todos los miembros del Graphics and Imaging Lab con los que alguna vez he compartido un café, una comida, una cena o una conversación.

A mis amigos y amigas, por todas las veces que han aguantado la charla sobre qué estoy haciendo como proyecto fin de carrera, por todas las veces que he disfrutado con vosotros.

A mi familia, en especial a mis padres y mi hermana, por soportar malas caras, enfados y estrés; por ser un puntal al que me he agarrado tantas veces.

A María, por estar, por todo.

Gracias.



## ÍNDICE GENERAL

---

1	INTRODUCCIÓN	1
2	TRABAJO RELACIONADO	3
3	TEORÍA DE TRANSPORTE DE LUZ	7
4	ATMÓSFERA TERRESTRE COMO MEDIO PARTICIPATIVO	11
4.1	Composición de la atmósfera . . . . .	12
4.1.1	Dispersión de Rayleigh . . . . .	12
4.1.2	Dispersión de Mie . . . . .	14
5	IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO	17
5.1	Geometría del modelo . . . . .	17
5.2	Componente molecular de la atmósfera . . . . .	17
5.3	Ozono . . . . .	18
5.4	Componentes de los aerosoles . . . . .	18
5.5	Coeficientes y funciones de fase . . . . .	20
6	RENDERIZADO ATMOSFÉRICO	23
6.1	Cálculo de la transmitancia y muestreo de la distancia de extinción. . . . .	23
6.2	Modelado del Sol . . . . .	24
6.2.1	Muestreo del Sol . . . . .	24
6.2.2	Irradiancia espectral del Sol . . . . .	25
6.3	Renderizado espectral . . . . .	25
7	RESULTADOS	27
7.1	Perfiles de aerosoles promedio . . . . .	27
7.2	Inclinaciones por debajo del horizonte . . . . .	29
7.3	Comparación con imágenes capturadas . . . . .	29
7.4	Comparación entre dispersión . . . . .	30
8	CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	33
A	TABLAS	35
	BIBLIOGRAFÍA	41

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1	Efectos de un medio . . . . .	8
Figura 2	Luz a través de un medio participativo . . . . .	8
Figura 3	Capas de la atmósfera . . . . .	12
Figura 4	Dispersión de la luz . . . . .	13
Figura 5	Efecto del ozono . . . . .	14
Figura 6	Diagramas de dispersion . . . . .	15
Figura 7	Absorción y densidad del ozono . . . . .	19
Figura 8	Irradiancia del Sol . . . . .	25
Figura 9	Imágenes desierto y urbano . . . . .	28
Figura 10	Imágenes desierto y urbano . . . . .	28
Figura 11	Imágenes cuando el sol está por debajo del horizonte	
Figura 12	Comparación resultados con Kider . . . . .	29
Figura 13	Patrones de Dispersión 2 . . . . .	31
Figura 14	Patrones de Dispersión 2 . . . . .	32

## ÍNDICE DE CUADROS

---

Cuadro 1	Distribuciones de aerosoles presentes en la Troposfera	35
Cuadro 2	Distribuciones de aerosoles presentes en la Estratosfera	36
Cuadro 3	Distribuciones de aerosoles presentes en la Mesosfera	36
Cuadro 4	Parámetros verticales de los aerosoles . . . . .	36
Cuadro 5	Distribución del ozono por mes . . . . .	37
Cuadro 6	Irradiancia del Sol . . . . .	38
Cuadro 7	Niveles de albedo del suelo . . . . .	39



## INTRODUCCIÓN

---

El cielo es uno de los elementos importantes a la hora de las descripciones visuales de una escena: es una de las principales fuentes de iluminación en escenas tanto interiores como exteriores, así como el fondo en escenas exteriores. No sólo eso, ayuda a establecer estado anímico de ciertas escenas, o incluso es el elemento protagonista en artes como la fotografía o la pintura. Por ello, desde los orígenes del campo de los gráficos por computador se ha prestado atención a cómo representar el cielo; desde las primeras aplicaciones orientadas a proveer con cielos radiométricamente realistas para su uso en arquitectura, hasta las animaciones renderizadas por NASA para ilustrar misiones espaciales usando los primeros modelos basados en física de la atmósfera [33].

La apariencia de la atmósfera, sin embargo, es resultado de las complejas interacciones entre la materia y la luz, fundamentalmente proveniente del Sol, pero también de otras fuentes de iluminación, como la luz reflejada por la Tierra [17], la Luna, polvo espacial o incluso radiación de fondo [24]. Así, un haz de luz en la atmósfera interactúa con las diversas partículas que forman la atmósfera, desde moléculas gaseosas hasta aerosoles suspendidos en la atmósfera. Esto hace que, para representar con precisión el cielo, se necesite considerar (con mayor o menor precisión) la estructura de la atmósfera y cómo cada partícula en la misma interactúa con la luz.

Hoy día, todos los campos de aplicación de los gráficos por ordenador usan modelos realistas, pero simplificados, de la atmósfera como base de su *background*. Desde videojuegos usando modelos analíticos simplificados [17] hasta producciones cinematográficas usando métodos por fuerza bruta (ver, por ejemplo, *The Good Dinosaur*). Sin embargo, interesantemente, todos los trabajos previos se basan en modelos medios de la atmósfera, considerando uniformidad en la atmósfera en el dominio espacial y temporal. Sin embargo, esta uniformidad no es cierta, ya que la apariencia de la atmósfera puede cambiar dramáticamente dependiendo de la situación geográfica o de la época del año.

En este trabajo tratamos de incorporar esa variabilidad espacio-temporal en la apariencia de la atmósfera, desarrollando un modelo atmosférico de bajo nivel, modelado en base a la composición precisa de los diversos componentes de la atmósfera. Nuestro modelo se basa en un exhaustivo análisis de la literatura en el campo de ciencias atmosféricas para modelar con precisión la distribución espacio-temporal de las moléculas en la atmósfera (incluyendo N, O<sub>2</sub> u ozono) y de los aerosoles suspendidos, siendo estos últimos variables con respecto del tipo de localización geográfica del observador. Basado en este conocimiento, y equipados con conocimiento de las propiedades ópticas de dichas partículas, desarrollamos nuestro modelo óptico dentro del marco del Transporte Radiativo [8]. Finalmente, integramos nuestro modelo en un motor de render con soporte para medios participativos, y lo extendemos para soportar recientes algoritmos para optimizar el cálculo del transporte de luz en medios participativos [42, 35], así como para soportar render espectral.

Este proyecto se enmarca dentro de un proyecto de investigación mayor, en el que se pretende obtener un modelo analítico preciso de la apariencia

de la atmósfera, incluyendo la dependencia espacio-temporal, así como soporte para cielos nocturnos, que los métodos estado-del-arte actuales [17] no pueden soportar. Este TFG es el primer paso dentro de ese proyecto, recopilando el vasto conocimiento de la composición de la atmósfera existente en Ciencias Atmosféricas, y poniéndolo dentro del marco del Transporte Radiativo.

Tanto el modelado de la iluminación de la cúpula celeste como la solar han sido estudiados a lo largo de la literatura por disciplinas como la ciencia atmosférica, la física y la informática gráfica. Mientras que el sol es la fuente de luz más importante en el cielo, una gran parte de esta luz se dispersa a través de la atmósfera antes de que llegue a la superficie. Además de la propia apariencia del cielo debido a esa transferencia de radiancia a lo largo de la atmósfera, también se han estudiado otros fenómenos atmosféricos, como arcoíris, para desarrollar modelos capaces de representarlos. A la hora de abordar este problema, se ha optado por dos modelos diferentes: la simulación por fuerza bruta de la interacción de la luz con la atmósfera, y el desarrollo de una fórmula analítica que se aproxima a la interacción real. En los siguientes párrafos describimos las diferentes aproximaciones al problema dentro del campo de los gráficos por ordenador. Nótese que el problema del transporte de luz en la atmósfera ha sido también ampliamente estudiado en las ciencias atmosféricas en otro dominio de aplicación; para más detalles, referimos a otras fuentes, como p.ej. [45].

**SIMULACIÓN POR FUERZA BRUTA.** El primer trabajo pensado con el fin de generar imágenes fue el desarrollado por Nishita y col. [33], donde se simula la apariencia del cielo debido a la dispersión simple (*single scattering*), ignorando otros eventos de dispersión entre el suelo y la atmósfera. Más adelante, el trabajo fue revisado por los mismos autores [34], donde se utilizan datos pre-computados y discretizados para simular la dispersión múltiple (*multiple scattering*), aunque seguía produciendo inexactitudes debido a que ignoraba la variación espacial de las partículas dentro del medio. Asimismo, O'Neil [36] presentó un trabajo basado en el de Nishita y col. [33], pero desarrollado sobre GPU pudiendo ser ejecutado de forma que sea interactivo, y aunque no sacrifica tanta precisión como los anteriores, sigue teniendo los problemas que presentaba Nishita y col. [33]. Basándose en la misma idea que Nishita y col. [34], es decir, dividir la atmósfera en bloques discretos y calcular la transferencia radiativa entre ellos, Haber, Magnor y Seidel [15] desarrollaron un modelo que simula la dispersión múltiple. Este modelo sí tiene en cuenta la variación espacial de las partículas de la atmósfera basándose solamente en la altitud, curva los rayos, y cuenta con un modelo de aerosoles bastante preciso, pero deja fuera la distribución horizontal, y tampoco considera la luz reflejada por el suelo. A pesar de sus inconvenientes, cuenta con un número suficientemente grande de condiciones atmosféricas, lo que hace que consiga una apariencia del cielo realista. Kutz [28] presenta un modelo más completo, donde se tiene en cuenta la absorción de luz por parte del ozono, y la generación de imágenes para el espectro visible y para ultravioletas e infrarrojos. Además, la parte molecular del modelo atmosférico está basado en datos reales de la atmósfera de la Tierra, y aunque incluye un perfil de aerosol, no es representativo de todo el planeta debido a que las partículas que los conforman varían mucho dependiendo de donde sean medidas, tanto en composición como en tamaño y distribución espacial. Si bien todos los modelos explicados hasta ahora han versado sobre

la generación de imágenes en cielos diurnos, Jensen y col. [24] se presenta un modelo para cielos nocturnos, donde se incluyen varias fuentes de luz, como la Luna, las estrellas o la luz zodiacal. En este trabajo se apoyan en estudios astronómicos para modelar las distintas fuentes de luz, siendo esta su mayor contribución debido a la complejidad y a la diversidad de las mismas. Para recrear las condiciones de la atmósfera se basan en un modelo similar a los de Nishita y col. [33, 34].

**MODELOS BASADOS EN PRECOMPUTACIÓN** Los modelos de simulación por fuerza bruta, aunque preciosos, son muy costosos, lo que hace que se busquen otras soluciones, por ejemplo, con modelos acelerados por GPU. Bruneton y Neyret [4] y Elek y Kmoch [11] diseñaron dos modelos muy similares, ambos basados en la pre-computación de propiedades de la atmósfera, como la transmitancia y la dispersión dentro del medio para ser luego introducidos como parámetros de entrada en tablas, y aunque presenten resultados plausibles y estéticos en tiempo real, no son nada precisos y están restringidos a longitudes de onda dentro del espectro visual.

**MODELOS ANALÍTICOS.** Uno de los primeros modelos que se utilizaron para computar la distribución de la luz en un cielo despejado, fue Standard Clear Sky, desarrollado por CIE (Comisión Internacional en Iluminación), aunque no fue pensado en un principio para generar imágenes, si no para proveer a diseñadores y arquitectos de un modelo con el que fueran capaces de simular la cantidad de energía que iba a recibir un edificio. A pesar de no dar información espectral de la luz, fue utilizado como punto de inicio para el modelo de Perez, Seals y Michalsky [39]. Este modelo presentó una solución analítica, que luego fue modificada por CIE [7] con el fin de ser adaptado a los estándares actuales. Los trabajos de CIE [7] y Perez, Seals y Michalsky [39] utilizan parámetros de entrada que no están basados en física ni son intuitivos, por lo que Preetham, Shirley y Smits [41] desarrollaron una nueva propuesta donde computaba la radiancia emitida y dispersada por un cielo despejado utilizando parámetros mucho más intuitivos que los trabajos anteriores, también de forma analítica. Mientras que los parámetros de Perez, Seals y Michalsky [39], llamados con letras de A a E, son introducidos en el modelo de forma analítica, en el modelo de Preetham, Shirley y Smits [41] solamente utiliza un parámetro llamado *turbidity* [32] en un conjunto de funciones lineales que devuelven los mismos parámetros que usan los anteriores, de A a E, además de una función bicúbica con *turbidity* y el ángulo de inclinación del Sol como parámetros. Apoyados en Preetham, Shirley y Smits [41], Hosek y Wilkie [17] presentaron un nuevo modelo subsanando algunos de sus defectos, como los colores planos que producía cuando el Sol estaba próximo al del horizonte, la ausencia de brillo en el área próxima al Sol y un zenit muy iluminado, siendo estos defectos más acentuados con valores de *turbidity* más elevados. También, este modelo tiene en cuenta el efecto del albedo del suelo sobre la atmósfera y aunque es capaz de generar imágenes plausibles, el modelo atmosférico propuesto no tiene en cuenta la iluminación por debajo del horizonte, de modo que no puede reproducir efectos como la sombra del planeta reflejada en la atmósfera. Aún así, al tratarse de un ajuste de su modelo analítico a los datos obtenidos en simulación, comete poco error, haciéndolo dependiente de lo precisa que haya sido la simulación previa del transporte de luz en la atmósfera.

fera. Dentro de los modelos analíticos, no sólo se han presentado modelos capaces de generar un cielo basado en la transferencia de radiancia a lo largo de la atmósfera. Es el caso de Wilkie y col. [46], donde se presenta un modelo analítico para representar la polarización de la luz. En circunstancias muy concretas, como en las que la luz interacciona con superficies reflectantes o la luz emitida a través de un cielo despejado, la polarización de la luz hace que el comportamiento y la interacción con el medio varíe. Aunque no es físicamente correcto, y no es capaz de representar los puntos neutros de la polarización en la luz emitida por el cielo, sí que producen imágenes respetando los patrones de la polarización de la luz.

Varios de los modelos expuestos fueron comparados por Kider Jr y col. [27]. Gracias al diseño de un dispositivo capaz de adquirir datos radiométricos de la cúpula celeste, como la radiancia del Sol, la irradiancia de toda la cúpula celeste o imágenes en alto rango dinámico del cielo, fue posible generar un conjunto de datos con el que cotejar las imágenes generadas por los modelos con respecto a imágenes reales. Al comparar los modelos [4, 15, 17, 18, 41, 33, 34], con la irradiancia capturada, [41] y [18] producen un incremento muy alejado de los datos capturados cuando el Sol está en inclinaciones altas, mientras que Nishita y col. [33, 34] son los dos modelos que más se aproximan a los resultados medidos.

**OTROS FENÓMENOS ATMOSFÉRICOS.** Además del modelado de la atmósfera, también han sido estudiados diversos fenómenos físicos que ocurren en el cielo con el fin de ser renderizados. En el caso del estudio y la generación de nubes, Hufnagel y Held [19] recopilaron e investigaron diferentes técnicas de visualización y clasificación utilizadas para su iluminación, representación y *renderizado*. También, elaboraron un estudio de la fenomenología de las nubes con el fin de clasificarlas por tamaño, geometría o apariencia, con el fin de comprar los resultados generados con el fenómeno generado en la propia atmósfera. Ishikawa y col. [21] desarrollaron un modelo para la generación de auroras boreales usando datos recopilados de la observación desde satélites. Con esos datos, fueron capaces de representar los campos eléctricos y su distribución en altas latitudes, para poder finalmente simularlos y modelar así las formas de las auroras, incluyendo su variación temporal. Gutierrez y col. [13] presentan un modelo que representa el fenómeno conocido como *Green Flash*, un destello de luz verde en los puntos superiores del disco solar cuando está amaneciendo, producido por la curvatura de los rayos de luz mientras atraviesan la atmósfera. Esta curva se produce debido a que el índice de refracción del medio no es constante, siendo también responsable de otros fenómenos, como los espejismos. Sadeghi y col. [43] presentan un modelo basado en física para la generación de arcoiris donde utilizan un modelo geométrico que permite fenómenos sólo obtenibles utilizando óptica de ondas, por ejemplo, la teoría de Lorenzt-Mie [20], pero sin necesidad de los mismos, permitiéndoles generalizar a partículas no esféricas.



# 3

## TEORÍA DE TRANSPORTE DE LUZ

---

Cuando un haz de luz viaja por el vacío, su trayectoria y energía son invariantes hasta que interacciona con una superficie. Por otro lado, cuando la luz viaja a través de un medio participativo, es alterada por la interacción con las partículas suspendidas en cada punto diferencial de volumen. Cuando existe esta interacción se pueden producir varios efectos: que la luz se absorba por el propio medio ([Figura 1a](#)) y se transforme en otro tipo de energía (p.ej. calor), se disperse en otra dirección ([Figura 1c](#) y [Figura 1d](#)), o que se incremente la energía en forma de luz ([Figura 1b](#)). Este proceso fue descrito por Chandrasekhar [8], a través de la *RTE*, o ecuación de transferencia radiativa.

Para describir estos fenómenos, se utiliza los coeficientes de absorción y dispersión,  $\sigma_a(x)$  y  $\sigma_s(x)$  respectivamente. Debido a que ambos coeficientes son modelados de forma similar, y se miden en las mismas unidades, pueden ser unidos en otro coeficiente: el coeficiente de extinción,  $\sigma_t(x) = \sigma_a(x) + \sigma_s(x)$ . Estos coeficientes se usan como la probabilidad de que un evento, sea de absorción o de dispersión, ocurra cuando un haz de luz atraviesa el medio, siendo expresados en unidades  $m^{-1}$ . Para calcularlos, se opera multiplicando la densidad de partículas del medio  $C$  (expresada en unidades de partículas por volumen, por ejemplo,  $m^{-3}$ ), y la sección eficaz de dispersión o de absorción,  $\kappa_s(\lambda)$  y  $\kappa_a(\lambda)$  respectivamente,  $\sigma_a(x) = C\kappa_a(\lambda)$  (de forma análoga para la dispersión). En física, la sección eficaz cuantifica la probabilidad de que ocurra un evento de interacción de una partícula con otra, siendo representada como una proyección del volumen de la partícula sobre paso diferencial, expresado en unidades de área,  $m^2$ . En el caso del transporte de luz a través de un medio, esta interacción se puede establecer como la interacción de la luz con una partícula.

La luz absorbida se transforma en otro tipo de energía, por tanto la consideramos perdida. En cambio, la luz dispersada es desviada hacia otros otros puntos del medio de forma que cuando se quiere calcular la energía en un punto se debe tener en cuenta la luz dispersada desde otros puntos hacia el primero. Esta energía dispersada entrante ([Figura 1d](#)) produce un incremento de la energía en la dirección en la que viaja la luz. Para modelar el modo en el que la luz se dispersa, cuánta luz se dispersa y en qué dirección se utiliza una función a la que denominamos *función de fase*. Una función de fase  $\rho(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o)$  define cuánta luz en un punto  $x$  desde la dirección  $\vec{\omega}_i$  es dispersada en una dirección de salida  $\vec{\omega}_o$ . Así, esta función puede ser isotrópica, es decir, la luz se dispersa de igual forma en cualquiera de las dirección de la esfera alrededor de  $x$ , o anisotrópica, donde la dirección de salida varía dependiendo de la dirección en la que es examinada; también puede considerarse que la función de fase como *backward*, donde la dirección  $\vec{\omega}_o$  va a tener valores opuestos a la dirección  $\vec{\omega}_i$ ; en caso contrario, a la función de fase se la denomina *forward*, donde la dirección de salida va a tender a ser similar a la de entrada.

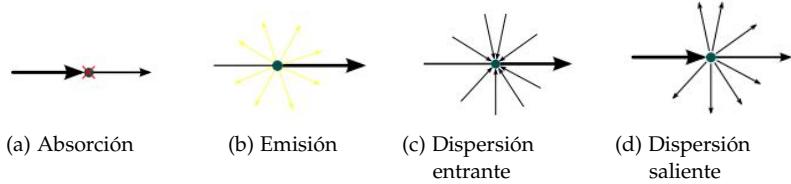


Figura 1: Efectos de un medio. Las interacciones de la luz que ocurren cuando atra-  
vesa el medio pueden producir cuatro tipos de efectos: absorción, emisión,  
dispersión saliente y dispersión entrante [31].

La RTE, en su forma integral, define de forma recursiva la radiancia que llega al observador en la posición  $x$ , dispersada hacia la dirección  $\vec{\omega}_o$  como el sumatorio de la radiancia reflejada por la superficie más cercana y la radiancia acumulada desde el medio entre el observador y la superficie (Figura 2):

$$L(x, \vec{\omega}_o) = \int_{s_0}^{s_1} T_r(x \leftrightarrow x_s) L_i(x_s, \vec{\omega}_o) ds + T_r(x \leftrightarrow x_p) L_r(x_p, \vec{\omega}_o), \quad (1)$$

donde  $T_r(x \leftrightarrow x_s)$  corresponde a la transmitancia entre el punto  $x$  y la posición  $x_s$ , y  $L_i(x, \vec{\omega}_o)$  a la dispersión entrante. Por simplicidad se ha eliminado de la ecuación el término referente a los medios que emiten luz.

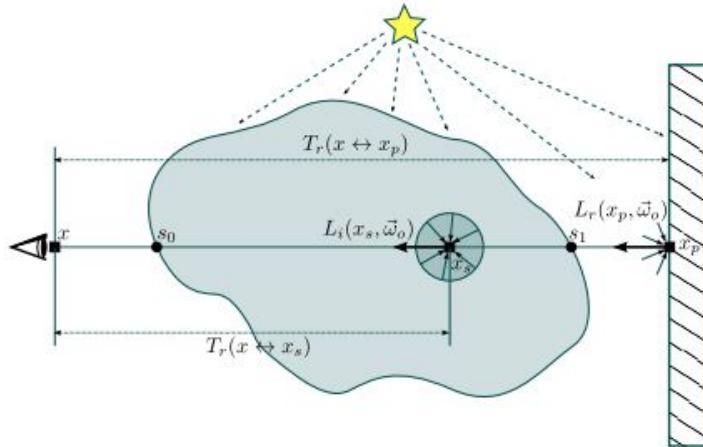


Figura 2: Integración de la luz al paso por un medio participativo. La radiancia que alcanza a la cámara,  $L(x \rightarrow \vec{\omega})$  es la suma de la radiancia reflejada por la superficie  $L_r(x_p \rightarrow \vec{\omega}_o)$  y la acumulada a lo largo del rayo  $L_i(x \rightarrow \vec{\omega})$  [31].

La radiancia entrante se modela, de forma recursiva, en el punto  $x_s$ , desde todas las direcciones  $\vec{\omega}_i$ , integrando sobre la esfera de direcciones  $\Omega_{4\pi}$ ,

$$L_i(x, \vec{\omega}_o) = \sigma_s(x) \int_{\Omega_{4\pi}} \rho(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) L(x, \vec{\omega}_i) d\vec{\omega}_i, \quad (2)$$

siendo  $\rho(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o)$  es la función de fase normalizada,  $\vec{\omega}_i$  la dirección de entrada y  $\vec{\omega}_o$  la de salida. La función de fase es la función que describe la

distribución angular de la luz dispersada por partícula, y se mide en  $\text{sr}^{-1}$ , siendo un estereorradián una unidad que mide el ángulo sólido. Está normalizada cuando integrando sobre toda la esfera  $\Omega_{4\pi}$  el resultado es 1. La radiancia de la superficie,  $L_r(x_p \rightarrow \vec{\omega}_o)$ , se calcula con la *ecuación de render* [25]. El coeficiente de dispersión  $\sigma_s(x)$  se puede dejar fuera de la integral ya que sólo depende de su posición en el espacio, simplificando así las operaciones.

El término  $T_r(x \longleftrightarrow x_s)$  corresponde a la transmitancia entre el punto  $x$  y la posición  $x_s$ , o la cantidad de luz que no se ha extinguido entre un punto y otro. La transmitancia es definida como la luz que no se ha extinto entre  $x$  y  $x_s$ , y se modela como:

$$T_r(x \longleftrightarrow x_s) = e^{-\int_0^{\|x-x_s\|} \sigma_t(x+\vec{\omega}) dt}. \quad (3)$$

La densidad y la composición del medio pueden variar según su posición dentro del espacio. Según la uniformidad de las características del medio se distingue entre medios homogéneos y heterogéneos. Un medio es considerado heterogéneo cuando alguna de sus características varía con respecto al espacio que ocupa, y por tanto la interacción del medio con la luz es variante dependiendo de donde se mida, mientras que se considera como homogéneo cuando su interacción con la luz no varía dependiendo de la posición donde se mida. Esto quiere decir que, al no depender de la posición en el medio, los coeficientes  $\sigma_a(x)$  y  $\sigma_s(x)$  pasan a ser considerados valores constantes y a denominarse como  $\sigma_a$  y  $\sigma_s$  respectivamente, y a la función de fase como  $\rho(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o)$ . Gracias a esto, podemos simplificar la el cálculo de la transmitancia de forma que la integral de [Ecuación 3](#) por un producto:

$$T_r(x \longleftrightarrow x_s) = e^{-\sigma_t \|x-x_s\|}. \quad (4)$$



# 4

## ATMÓSFERA TERRESTRE COMO MEDIO PARTICIPATIVO

---

Para poder modelar un medio participativo, es necesario conocer su composición y su distribución espacial, con el fin de poder calcular las distintas propiedades ópticas necesarias. Como el fin último de este proyecto es *renderizar* cielos basándonos en física, el medio que se quiere modelar es la propia atmósfera terrestre.

La atmósfera se modela como una serie de capas de gases y partículas que rodea al planeta. Cada una de estas capas se diferencia de las demás por sus diferentes densidades, composición y grosor. La densidad de la atmósfera va decreciendo con la altura, siendo modelada con una función basada en la diferencia de presión y temperatura en base a la altura [5]. La primera de estas capas es la troposfera. En la troposfera se encuentra la mayor parte de la masa molecular atmosférica. Además, dentro de esta capa, es también donde se concentran prácticamente la mayor diversidad de elementos del medio, como los aerosoles. Por encima de la troposfera, se encuentra la estratosfera. En esta capa, que se extiende hasta los 50 kilómetros aproximadamente, la existencia de otros elementos que no sean moléculas es prácticamente testimonial [1], con la excepción de algunos aerosoles característicos de zonas montañosas muy elevadas [1]. La última capa que se va a tratar aquí es la mesosfera. Esta última división de la atmósfera se extiende desde el final de la estratosfera hasta los 80 kilómetros, teniendo ya una densidad de partículas muy baja, aunque en los últimos kilómetros de esta capa se concentre la capa de ozono.

Hay que tener en cuenta además dos capas de transición entre las capas antes nombradas, la tropopausa y la mesopausa. En estas dos capas, las condiciones de temperatura y presión varían, haciendo que también varíe la densidad molecular. La tropopausa es la zona de transición entre la troposfera y la estratosfera, situada entre unos 9 km de altura (polos) y los 17 (en el ecuador). Marca el límite superior de la troposfera, donde la temperatura generalmente decrece con la altura. A partir de la tropopausa la temperatura comienza a aumentar por la presencia de ozono y su interacción con la radiación ultravioleta procedente del sol. La mesopausa es la región de la atmósfera que determina el límite entre una atmósfera con masa molecular constante de otra donde predomina la difusión molecular, aproximadamente por debajo de los 86 km.

A pesar de tener una separación de capas tan clara, no se tiene un límite especificado entre el espacio exterior y la atmósfera terrestre debido a la escasa densidad de las capas superiores. La Federación Aeronáutica Internacional (FAI) establece el límite de la atmósfera a 100 kilómetros por encima del nivel del mar. A este límite se le conoce como la línea de Kármán [44]. Como se ve en la [Figura 3](#) por encima de la línea de Kármán existen más capas, como la exosfera y la termosfera, aunque no son tenidas en cuenta en este trabajo debido a la baja densidad de partículas a esa altura.

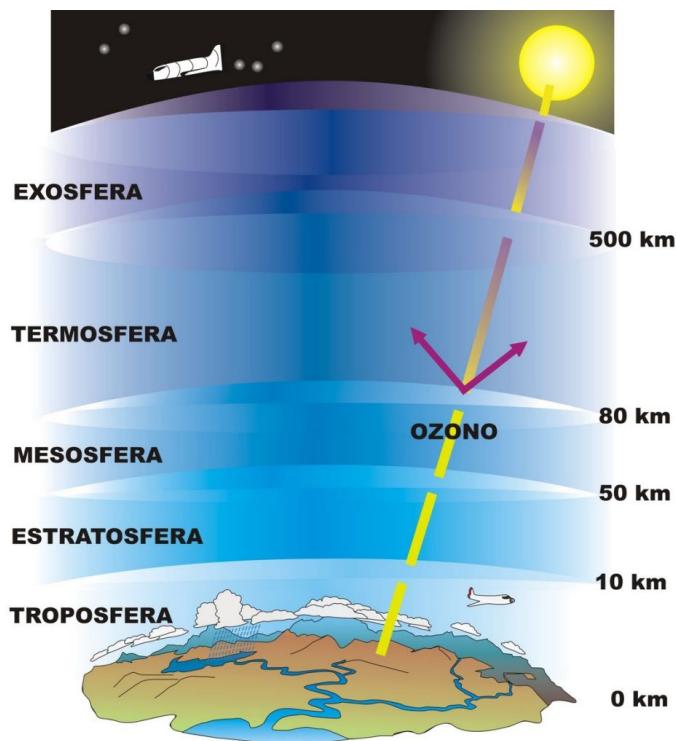


Figura 3: División por capas de la atmósfera terrestre. Las altitudes aportadas son promediadas, la altitud de cada capa varía con respecto a la latitud y longitud del punto desde el que se mide. Fuente: [www.comofuncionaque.com](http://www.comofuncionaque.com)

#### 4.1 COMPOSICIÓN DE LA ATMÓSFERA

En la atmósfera distinguimos dos grandes grupos de partículas que la componen: moléculas y aerosoles. Cuando hablamos de moléculas, nos referimos a oxígeno, nitrógeno, o dióxido de carbono, es decir, elementos químicos o composiciones de los mismos; y cuando hablamos de aerosoles, nos referimos a polvo, vapor de agua o contaminación, partículas mucho más complejas que una molécula y de mayor tamaño. Mientras que una molécula tiene un radio varios órdenes de magnitud menor que la longitud de onda de la luz (al menos 10 veces menor), las partículas que componen los aerosoles tienen un radio entre 0.1 a 100 micrómetros, es decir, próximos al orden de magnitud de la propia onda. Este hecho hace que la forma que tenemos de calcular cómo se va a comportar la luz sea diferente. Mientras que para la interacción con moléculas, el comportamiento de la luz se describe con la función de fase de Rayleigh [3], para los componentes de los aerosoles utilizamos la función de fase de Mie [20], ya que asumimos que son partículas sólidas esféricas.

##### 4.1.1 *Dispersión de Rayleigh*

La coloración del cielo es fundamentalmente el resultado de la dispersión de Rayleigh. Este tipo de dispersión describe la forma en la que la luz interactúa con moléculas mucho más pequeñas que la longitud de onda, como las moléculas que componen el aire limpio. A partir de aquí, entendemos *aire limpio* o *aire estándar* como el aire que contiene un 0,03 % de CO<sub>2</sub> por unidad de volumen a una presión de 1013,23 mb y una temperatura de

15°C. La cantidad de dispersión es inversamente proporcional a la longitud de onda, lo que hace que los tonos azules se dispersen mucho más que las tonalidades rojas. Esto hace, que cuando el ángulo entre el sol y el observador es próximo a 0°, es decir, cuando el sol está cerca del horizonte, la luz tenga que atravesar más atmósfera, y las longitudes de onda más pequeñas se dispersen menos, dándole al cielo más próximo al sol colores anaranjados como se ilustra en la [Figura 4](#).

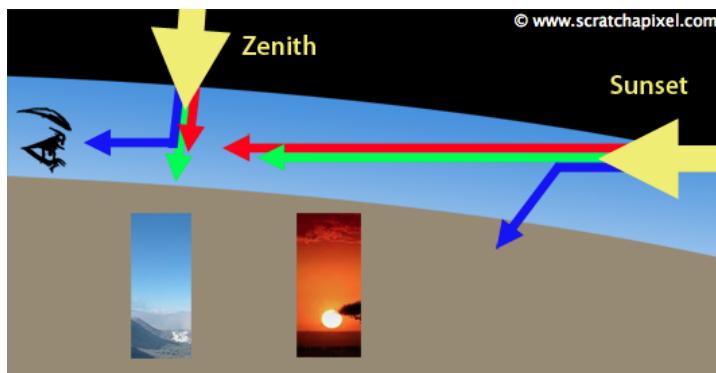


Figura 4: Esquema donde se muestra el comportamiento de la luz en el momento del amanecer y del medio día. En el amanecer, donde el ángulo entre el observador y el sol es próximo a 0°, de forma que los rayos que salen del mismo discurren de forma paralela a la tangente de la superficie del planeta, los tonos azules se dispersan mucho más al tener que atravesar más atmósfera y los rojos llegan de forma más directa al observador. Fuente: [www.scratchapixel.com](http://www.scratchapixel.com)

Para poder estimar de forma precisa la dispersión de Rayleigh dentro de la atmósfera, es necesario calcular los parámetros que la caracterizan. La sección eficaz por molécula  $\kappa(\lambda)$ , se modela utilizando la fórmula propuesta por Bucholtz [5],

$$\kappa(\lambda) = \frac{24\pi^3(n_s^2 - 1)^2}{(\lambda^4 N_s^2 + 2)^2} \left( \frac{6 + 3\rho_n}{6 - 7\rho_n} \right), \quad (5)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda,  $n_s$  es el índice de refracción del aire estándar para  $\lambda$ ,  $N_s$  es el número de densidad molecular para el aire estándar y  $\rho_n$  es el factor de despolarización. El factor de despolarización es un término que define la anisotropía del medio, es decir, la propiedad del medio por la que la propagación de la luz que lo atraviesa varía con respecto a la posición desde la que se observa. Además, el factor de anisotropía es también dependiente de la longitud de onda.

En el caso del aire limpio, la absorción es insignificante, por lo que se asume de forma general que el coeficiente de extinción se conforma solamente del coeficiente de dispersión. De este modo, para calcular el coeficiente de dispersión de Rayleigh, caracterizada por  $\sigma_s(x)$ , se calcula mediante el producto entre la sección eficaz por molécula  $\kappa$ , en  $\text{cm}^2$ , y la densidad molecular  $C$ , en  $\text{cm}^{-3}$ , para una altura  $z$ :

$$\sigma(\lambda, z) = C(z)\kappa(\lambda). \quad (6)$$

Al tratarse de un medio anisotrópico, es necesario saber la distribución angular de la luz dispersada de forma que se conozca cuánta cantidad de

luz se dispersa y en qué dirección. La función de fase de Rayleigh para una luz incidente no polarizada se representa como,

$$\rho(\theta) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2 \theta). \quad (7)$$

En la fórmula de la función de fase,  $\theta$  es el ángulo entre el haz de luz incidente en la partícula, y la dirección hacia la que se dispersa.

Como se ha explicado anteriormente, el aire limpio apenas absorbe luz, con una excepción: la capa de ozono. El ozono se acumula principalmente en la parte final de la mesosfera, aunque está presente en menor medida en otras altitudes. En las zonas donde la capa de ozono es más densa, se aumenta la absorción de la luz siendo responsable, por ejemplo, del color azul más oscuro que se ve al atardecer como se puede ver en la [Figura 5](#). Si no estuviera la capa de ozono, esas tonalidades más oscuras desaparecerían, apareciendo en su lugar tonos azules más apagados, casi grises. Además, el ozono es uno de los gases que provocan la absorción de radiación ultravioleta del sol, la cual es muy dañina, protegiendo así la biosfera (las capas de la atmósfera por debajo de la capa de ozono).

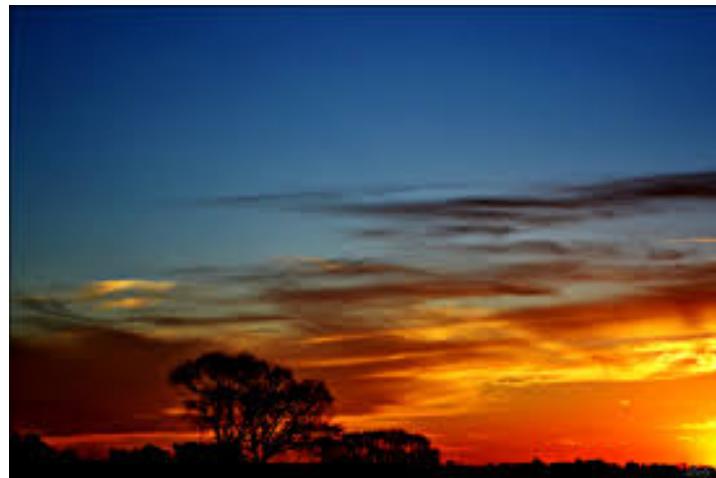


Figura 5: Fotografía de un atardecer, donde se puede ver el azul más oscuro provocado por la absorción del ozono. Fuente: [www.eluniversohoy.com](http://www.eluniversohoy.com).

#### 4.1.2 Dispersión de Mie

A los aerosoles podemos encontrarlos en las zonas bajas de la atmósfera, zonas próximas al suelo, y aunque presenten formas diferentes entre ellos, se asume a lo largo de este trabajo que todos tienen formas esféricas. A pesar de la naturaleza variable de los componentes que los constituyen, sus características físicas y ópticas promedio están medidas.

Las partículas de los aerosoles que están en la atmósfera debido a fenómenos naturales, se denominan aerosoles atmosféricos, mientras que aquellas que han sido formadas por acción del hombre, son llamados aerosoles artificiales. Los aerosoles atmosféricos se han formado a partir de acciones propias de la naturaleza, como la acción del viento sobre la superficie (polvo,

gotas de agua con alta concentración de sal) o formadas por la condensación de gases (gotas de ácido sulfúrico, sulfatos o agua), mientras que los aerosoles artificiales son fruto de la acción humana, como el hollín.

La concentración y composición de los aerosoles depende de la localización y composición de la zona donde se originan. Es posible hacer una clasificación en base a su fuente, composición química aproximada y distribución de tamaños. Esta clasificación se extiende en la [Sección 5.4](#), siendo su elaboración en base al *Global Aerosol Models*, [1].

Aunque el modelado de la partícula individual es similar al de las moléculas, la interacción con la luz no. De la misma forma que la función de fase de Rayleigh describe cómo se dispersa la luz al colisionar con una partícula más pequeña que la longitud de onda, la función de fase de Mie explica la dispersión de la luz al colisionar con una partícula esférica de un tamaño similar a la longitud de onda. Esta función de fase se le atribuye al físico británico Gustav Mie, el cual encontró una solución analítica a las ecuaciones de Maxwell. Esta función de fase describe un comportamiento altamente anisotrópico, como se ejemplifica en la [Figura 6a](#).

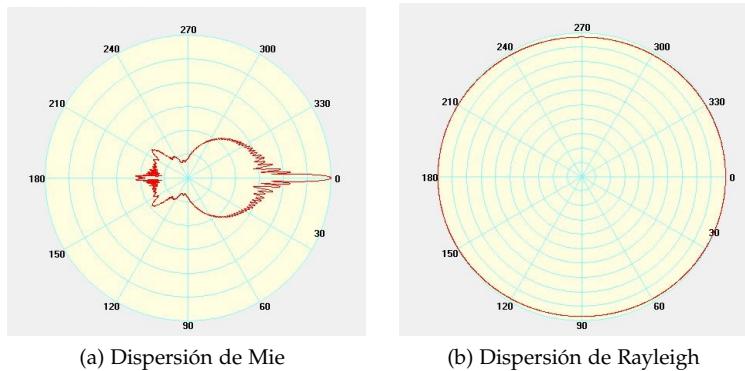


Figura 6: Diagrama polar de la dispersión de la luz con una longitud de onda  $\lambda = 700$  nm producida al interaccionar con una partícula de agua de radio  $10 \mu\text{m}$  en el caso de [Figura 6a](#), y una partícula *aire limpio* de radio  $0.0001 \mu\text{m}$  en [Figura 6b](#).



Nuestro modelo está basado en tanto en las partículas de los aerosoles, como en las moléculas que constituyen el aire. Para modelar el conjunto completo, asumimos que el planeta es una esfera perfecta de radio 6.360 kilómetros, y la atmósfera otra esfera perfecta con el punto central emplazado en el mismo lugar que el del planeta, pero con un radio de 6.460 kilómetros. Aunque en la [Sección 4.1](#) se ha hablado de variaciones en las capas de la atmósfera dependiendo desde qué punto eran medidas, para modelarla se han tenido en cuenta valores promedio.

### 5.1 GEOMETRÍA DEL MODELO

La esfera que representa el planeta debe devolver un porcentaje de la luz que le llega. Este porcentaje se denomina albedo. El valor del albedo del suelo afecta brillo de todo el cielo, especialmente con los aerosoles más densos. Hosek y Wilkie [\[17\]](#) se dieron cuenta de este comportamiento, incluyendo en su modelo este parámetro y demostrando en sus resultados la contribución del mismo para distintos rangos de valores.

### 5.2 COMPONENTE MOLECULAR DE LA ATMÓSFERA

La dispersión de una sola partícula de aire se caracteriza por su sección eficaz, como explica Bucholtz [\[5\]](#), utilizando la [Ecuación 5](#). Los resultados de aplicar esta ecuación para cada longitud de onda, desde 0.2 a 1  $\mu\text{m}$ , se presentan en [\[5\]](#). Para obtener estos resultados se necesita el índice  $n_s$  de refracción del aire estándar. Este índice se calcula con las ecuaciones de Peck y Reeder [\[38\]](#). Además, hay que tener en cuenta la anisotropía de las moléculas del aire, y eso se da cuenta con el factor de corrección de King  $F_k$ , definido por el segundo factor de la [Ecuación 5](#),

$$F_k = \frac{6 + 3\rho_n}{6 - 7\rho_n}, \quad (8)$$

siendo  $\rho_n$  el factor de despolarización.

Conociendo la sección eficaz por molécula calculada, se puede obtener así el coeficiente de dispersión por volumen, lo que es necesario para obtener la cantidad de dispersión que ocurrirá dentro de ese volumen. Esto se calcula con la [Ecuación 6](#), multiplicando la sección eficaz por molécula, con la densidad molecular  $C$  a una presión, temperatura y altitud dadas. Para conocer estos valores, nos hemos apoyado en los estudios publicados en *U.S. Standard Atmosphere 1976* [\[2\]](#).

Para describir la distribución angular de la luz dispersada por el aire se describe con la función de fase de Rayleigh, definida por la [Ecuación 7](#), donde  $\theta$  representa el ángulo de dispersión. Sin embargo, como la anisotropía

molecular también afecta a la dispersión de Rayleigh, Chandrasekhar [8] propone una fórmula mucho más precisa,

$$\rho(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o) = \frac{3}{4(1+2\gamma)} [(1+3\gamma) + (1-\gamma)\cos^2\theta], \quad (9)$$

donde  $\cos(\theta)$  es el producto escalar entre  $\vec{\omega}_i$  y  $\vec{\omega}_o$ , y  $\gamma$  es definido como

$$\gamma = \frac{\rho_n}{2 - \rho_n}, \quad (10)$$

con  $\rho_n$  como factor de despolarización.

Para relacionar la dispersión con la longitud de onda de factor de despolarización de forma consistente en el cálculo del coeficiente de dispersión  $\sigma(\theta, \lambda, z)$  se consigue:

$$\sigma(\theta, \lambda, z) = \frac{\sigma(\theta, \lambda)}{4\pi} \rho(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o), \quad (11)$$

donde  $\sigma(\lambda, z)$  se calcula con [Ecuación 6](#) y  $\rho(\vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o)$  con [Ecuación 9](#).

### 5.3 OZONO

Dentro de este apartado donde se ha presentado el componente molecular de la atmósfera, hay que hablar sobre una molécula que tiene unos parámetros distintos al del aire estándar: el ozono. Para describir espesor de la capa de ozono se utiliza una unidad llamada Dobson. Un Dobson equivale a 0,01 milímetros de espesor de ozono en condiciones normales, es decir, 1 atmósfera de presión y 0°C. Expresado en número de moléculas, un Dobson equivale  $2,69 \times 10^{16}$  moléculas por centímetro cuadrado. En la [Tabla 5](#) se presenta los Dobson de ozono medios, divididos por mes, y sus desviaciones típicas. Esta tabla fue presentada por Dütsch [10].

La gran diferencia entre el ozono y el aire estándar que hemos modelado, es la absorción. Mientras que el aire estándar tiene una absorción tan baja que la hemos considerado despreciable, para el ozono no podemos hacer esa suposición. Nos apoyamos en los trabajos de Gorshelev y col. [12], en los que se estudia la sección eficaz de la absorción del ozono puro, comparando sus resultados con los de trabajos anteriores. Apoyados en este trabajo, obtenemos los resultados de las secciones eficaces absolutas de la absorción del ozono, a temperaturas medidas.

### 5.4 COMPONENTES DE LOS AEROSOLES

Para modelar los aerosoles presentes en la atmósfera, utilizamos el *Guide to Global Aerosols Model* [1], donde dividen las condiciones atmosféricas según la distribución de sus aerosoles, en un número de tipos dependiendo de regiones de la superficie de la tierra o de la atmósfera donde se encuentran. Existen siete tipos de distribuciones de aerosoles troposféricos, aunque se considera como los principales a cuatro (Polar, Marítimo, Continental y Desértico), siendo las principales divisiones de la superficie de la Tierra donde hay muy poca (o no hay) influencia del hombre. Otros dos (Urbano y Rural)

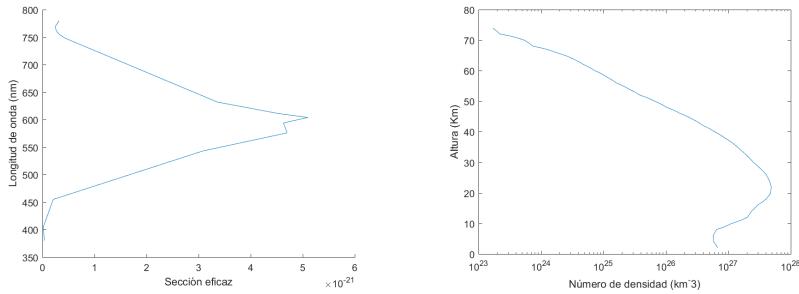


Figura 7: Gráficas donde se muestra la variación de la sección del eficaz respecto a la longitud de onda de la luz con la que interacciona una partícula de ozono (izquierda), y la densidad de ozono con respecto a la altitud (derecha).

se corresponden a divisiones donde hay una mayor o menor influencia antrópica, y una última división, a la que denominaremos *Background*, la cual representa la troposfera media, y sólo es utilizada para describir zonas montañosas. Además, cuenta con dos divisiones para la estratosfera, *Background* y *Volcánica*, aunque la última fue descartada por no encontrar un modo de modelar la ceniza volcánica de la que está compuesta, y por ser un aerosol muy excepcional, ya que sólo está presente en las horas siguientes a una gran erupción. El aerosol *Background* es similar a la de la troposfera. También se cuenta con un tercer tipo, que tampoco se ha tenido en cuenta, que son las llamadas nubes polares estratosféricas. Este tipo de nubes se forman en el invierno del ártico y el antártico a muy bajas temperaturas, además de a mucha mayor altura, próxima a la mesopausa. Cuando pueden ser vistas desde la superficie de la Tierra, se les da el nombre de nubes noctilucentes. En la mesosfera se encuentran nubes de polvo meteórico, aunque también fueron descartados debido a su baja densidad en el aerosol y la dificultad que entraña modelarlo.

Estos aerosoles son mezclas de componentes con diferentes composiciones químicas, y también es necesario clasificarlos. A pesar de la naturaleza variable de estos componentes, sus características físicas y ópticas promedio están medidas, y van a ser utilizadas para la elaboración del modelo de aerosoles. Esta distribución se explica en las tablas [Tabla 1](#), [Tabla 2](#) y [Tabla 3](#).

En este modelo, cada aerosol se va a dividir en 10 rangos de tamaño de sus radios, los cuales van desde 0.1 a 100 micrómetros. Además, para representar la distribución de los tamaños, se utiliza una función log-normal, la cual tiene tres constantes:  $A$ , que describe el número de partículas totales;  $r_q$ , que es el radio medio; y  $\sigma_q$ , que determina el ancho de la distribución de tamaño.

Se cuenta además, que la densidad de los aerosoles no permanece invariante a lo largo de la atmósfera, si no que tiene un decrecimiento progresivo en base a,

$$p = p_0 \left\{ \exp \frac{-z}{H_p} + \left\{ \frac{p_b}{p_0} \right\}^v \right\}^v : H_p \neq 0; v = \frac{H_p}{|H_p|}, \quad (12)$$

siendo  $p$  la concentración de partículas a altitud  $z$ ,  $p_0$  es el valor de  $p$  en la superficie de la Tierra, y  $p_b$  su valor de *background*,  $H_p$  el escalado de altura del aerosol. Cada aerosol cuenta con valores distintos tanto para el escalado de la altura, como la de altitud. Todos estos parámetros se especifican en [1].

Teniendo definido los tipos de aerosoles, sus componentes y su distribución vertical, queda definir sus características ópticas. Debido a que se centra sólo en longitudes de onda superiores a 0.35 micrómetros, y es muy interesante ver el comportamiento para longitudes de onda más pequeñas, se calculan los índices de refracción para dichas longitudes con un método de extrapolación cúbica.

Conociendo estos parámetros, calculamos la sección eficaz para la absorción, la dispersión, y la extinción, con la herramienta [30] desarrollada por Phillip Laven. Para utilizar este software, asumimos que todos los componentes de los aerosoles son esferas perfectas. También, podemos calcular los valores la función de fase de Mie para un cada ángulo entre 0° y 180°, con pasos de 0,1°, una longitud de onda, y un índice de refracción dados. Aunque el programa da los datos finales divididos en componente perpendicular y paralelo, sólo necesitamos la suma de ellos, debido a que no se ha introducido la polarización de la luz.

Tanto las secciones eficaces, como los valores de la función de fase de Mie y las densidades de los componentes con respecto a la altitud, son pre-calculados y tabulados para cada uno de los tipos de aerosoles descritos con el fin de ahorrar tiempo de cálculo.

### 5.5 COEFICIENTES Y FUNCIONES DE FASE

Una vez conocidas las secciones eficaces por molécula para la absorción y para la dispersión y las funciones de densidad tanto para el ozono, como para el componente molecular, y para las diferentes distribuciones de aerosoles, calcular cada coeficiente de dispersión o absorción se reduce al uso de la [Ecuación 6](#). En esta ecuación debemos sustituir  $\kappa(\lambda)$  por las secciones eficaces a modelar por la longitud de onda  $\lambda$  en la que lo hacemos, y  $C(z)$  por la densidad molecular a la altura  $z$  dada. En el caso del ozono, y dado que hemos obtenido datos sobre diferentes densidades moleculares a lo largo de un año clasificadas por meses([Tabla 5](#)), hemos utilizado como densidad para nuestras pruebas los datos referidos al mes de enero.

Al obtener la absorción y la dispersión del modelo completo, y por tanto, el coeficiente de extinción, podemos evaluar la transmitancia ([Ecuación 3](#)) y obtener cuánta luz se ha dispersado a lo largo de un camino dado. Esta operación no es para nada trivial, siendo explicado el método elegido para su evaluación en el siguiente capítulo, en la [Sección 6.1](#).

En la RTE ([Ecuación 1](#)), en el término  $L_i(x, \vec{\omega}_o)$  resolvemos la integral muestreando la función de fase  $\rho(x, \vec{\omega}_i, \vec{\omega}_o)$  sobre toda la esfera  $\Omega_{4\pi}$ . Para el caso de la dispersión de Rayleigh ([Ecuación 7](#)), la cual se produce en el medio molecular. Esta función de fase no puede muestrearse de forma analítica, así que como cálculo de su función de probabilidad se ha utilizado la inversa del área de una esfera unitaria. En el caso de la dispersión en los aerosoles, hemos utilizados los datos recopilados y explicados en la [Sección 5.4](#), que al estar normalizada (el resultado de la integral es 1) puede ser usada como su propia función de densidad. Nótese que al hablar de dos funciones de fase, debemos resolver la [Ecuación 2](#) dos veces, una para función de fase y para cada tipo de coeficiente de dispersión. Al final, esta operación se resume en una suma pesada, entre el coeficiente de dispersión

de Rayleigh multiplicado por el resultado de la función de fase Rayleigh y el coeficiente de dispersión de Mie multiplicado por el resultado de la función de fase de Mie.



# 6

## RENDERIZADO ATMOSFÉRICO

---

Resolver la RTE ([Ecuación 1](#)) de forma analítica es prácticamente imposible debido especialmente a dos razones: la geometría arbitraria de la que se compone la escena y características complejas tanto de los medios participativos como de las superficies de objetos sólidos. Generalmente, se busca una solución aproximada mediante integración por Monte Carlo, la cual utiliza muestras aleatorias con el fin de evaluar las integrales. Este método no es rápido, e introduce un error en forma de varianza (representado en la imagen final como ruido). Existen muchas técnicas y algoritmos existentes para resolver tanto la RTE como la ecuación de *render*. Para nuestro modelo, hemos elegido implementarlo sobre un *path tracer* volumétrico [[26](#), [37](#), [29](#)]. Para más detalles referimos a otras excelentes fuentes como [[40](#), [22](#)].

Hemos elegido este método por dos razones: por un lado, no presenta sesgo estadístico y por tanto converge a la solución correcta; por el otro, y más crítico para nuestra aplicación, es que no es necesario precomputar datos: dadas las dimensiones de la atmósfera, hacer una cache de la radiancia de la atmósfera (usando p.ej. fotones o *photom beams* [[23](#)]), podría ser impráctico por la enorme cantidad de datos a guardar.

A la hora de resolver la RTE utilizando path tracing, hay fundamentalmente tres términos a evaluar: la función de fase, la transimancia  $T_r(x \longleftrightarrow x_s)$ , y la iluminación incidente por parte del Sol. Mientras que el primero lo resolvemos como se describe en el [Capítulo 5](#), los otros dos requieren estrategias más sofisticadas, como explicamos en lo siguiente.

### 6.1 CÁLCULO DE LA TRANSMITANCIA Y MUESTREO DE LA DISTANCIA DE EXTINCIÓN.

El coeficiente de extinción  $\sigma_t(x) = \sigma_a(x) + \sigma_s(x)$  es la pérdida de luz debido a la absorción y la dispersión saliente por unidad de distancia viajada. Si consideramos un rayo diferencial de luz viajando a través de un medio participativo, la fracción de luz que no se ha extinguido después de viajar de  $x$  a  $x'$  se denomina como transmitancia. Si estuviéramos en el caso de un medio homogéneo, el cálculo de esa fracción () se simplifica a una función exponencial (ley de Beer-Lambert), ya que el coeficiente de extinción no varía con respecto a su posición en el espacio. Sin embargo, en un medio heterogéneo, la función exponencial no se mantiene, ya que la extinción varía en punto diferencial entre  $x$  y  $x'$ .

La forma estándar de resolver el problema es el denominado Woodcock tracking [[47](#), [9](#), [42](#)] (o delta tracking). Este método, se basa en la idea de que, además de tener las partículas que interactúan con la luz, tenemos unas partículas ficticias que ni la absorben ni la dispersan. Si el rayo de luz golpea una de estas partículas ficticias, al no haber interacción, el método da un paso más. Por contra, si el rayo de luz interactúa con una partícula real, entonces se asume que el haz de luz ha sido extinguido por un evento de

absorción o dispersión.

La decisión de si ha intersectado o no con una partícula real se realiza de forma estocástica, de modo que la probabilidad de golpear una partícula real es:

$$p(x) = \frac{\sigma_t(x)}{\sigma_t^*}, \quad (13)$$

donde  $\sigma_t^*$  es la extinción máxima de todo el medio.

De esta forma, cuanto más próximo esté al coeficiente de extinción máximo del medio, más probable será que el haz de luz sea extinguido, tal que si está el rayo de luz atravesando una zona poco densa del medio, dé pasos muy largos, y si está en una zona muy densa, los pasos sean más cortos.

El enfoque de Woodcock tracking es óptimo para muestrear la distancia de muestreo (ver [42] para detalles) sin sesgo; sin embargo, resulta subóptimo para la transmitancia, ya que la decisión de si la partícula se ha extinguido es binaria. En su lugar, para calcular  $T_r(x \rightarrow x_s)$  usamos una versión mejorada de ese método llamado Ratio Tracking [35].

En este método se asume lo mismo que en Woodcock Tracking [47, 9, 42]. Sin embargo, en lugar finalizar el recorrido del rayo cuando se produzca una colisión, continúa hasta el final del camino. Durante el recorrido del rayo vamos teniendo en cuenta la probabilidad conjunta de las colisiones anteriores:

$$T(d) = \prod_i^K \left(1 - \frac{\sigma_t(x_i)}{\sigma_t^*}\right), \quad (14)$$

donde el parámetro de entrada  $d$  es la distancia recorrida entre el punto  $x$  y el punto  $x'$ ,  $\sigma_t^*$  el coeficiente de extinción máximo y  $K$  el número de puntos de colisión antes de que se ha alcanzando la distancia  $d$ . Esta variable  $K$  depende de  $\sigma_t^*$  y de  $d$ .

## 6.2 MODELADO DEL SOL

El Sol es la única fuente de luz en este modelo, cubriendo una pequeña fracción del cielo, aproximadamente  $\approx 0,00047\%$ . Si en nuestro *path tracer* hubiéramos querido tratar la fuente de luz de una forma *naive* la mayor parte de los rayos se hubieran perdido en el espacio, lo que hubiera hecho que el algoritmo convergiera muy lentamente. Una solución más práctica es muestrear el Sol directamente, en lo que tradicionalmente se denomina *Next Event Estimation*. Para ello, muestreamos el ángulo sólido del Sol en la atmósfera.

### 6.2.1 Muestreo del Sol

El ángulo sólido es el ángulo espacial que abarca un objeto visto desde un punto dado, correspondiéndose con la zona del espacio limitada por una superficie cónica. La unidad en la que se mide es el estereorradián.

Así, conociendo que el ángulo sólido del Sol es  $6,87 \times 10^{-5}$  estereoradianes, nos permite que, en cada punto en el que el rayo haya sido dispersado, comprobar si ese punto se encuentra subtendido bajo el ángulo sólido del Sol. Para obtener cuánta luz llega a ese punto, lanzamos un rayo en dirección al Sol con el fin de calcular cuánta luz se ha dispersado hasta llegar ahí y cuánta luz se ha atenuado, siendo pesada por la probabilidad de que un rayo lanzado en cualquier dirección hubiera podido ir dentro del cono del ángulo sólido del Sol.

### 6.2.2 Irradiancia espectral del Sol

Para computar la irradiancia proveniente del Sol que llega a la atmósfera, nos hemos basado en el modelo de Jakob [22]. Este modelo asume que el Sol es un cuerpo negro introduciendo en el modelo unidades físicas. La irradiancia es medida en unidades de potencia (Watios) por unidad de área ( $\text{m}^2$ ) por estereoradian por unidad de longitud de onda ( $\text{nm}^{-1}$ ). La irradiancia del Sol en función de su longitud de onda se describe en la [Tabla 6](#) y se muestra en la [Figura 8](#).

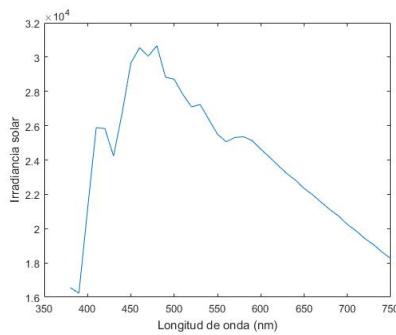


Figura 8: Irradiancia del Sol expresada en unidades de potencia (Watios) por unidad de área ( $\text{m}^{-2}$ ) por unidad de ángulo sólido ( $\text{sr}^{-1}$ ) por unidad de longitud de onda ( $\text{nm}^{-1}$ ), obtenida en Jakob [22].

## 6.3 RENDERIZADO ESPECTRAL

Tradicionalmente, los motores de render sólo han generado imágenes con tres canales de color RGB, debido a que luego éstas van a ser mostradas en pantalla. Sin embargo, para rendereizar medios turbios en los que la componente espectral es tan importante requiere la simulación en más canales espectrales para producir imágenes convincentes. Nuestro modelo genera imágenes espectrales, siendo la longitud de onda uno de los parámetros de entrada del mismo. Para obtener cualquiera de las imágenes finales, se han generado 81 imágenes, con longitudes de onda desde 380 a 780 nm, con diferencias de 5 nm cada una. Después, todas las imágenes son transformadas al espacio de color XYZ utilizando las funciones de *color matching* del CIE 1964, y son sumadas en una sola imagen. A esta imagen resultante, le aplicamos una corrección gamma transformándola al espacio de color xyY y aplicando la corrección al valor de Y con  $\gamma = 2,5$ . Finalmente, volvemos a transformarla al espacio de color XYZ, y desde XYZ al espacio de color RGB utilizando el Estándar de Iluminación D65 del CIE. Para más información acerca de las conversiones espectrales, consultar [48] y [16].



## RESULTADOS

---

En este capítulo, presentamos los resultados finales de nuestro modelo, el cual es capaz de generar imágenes realistas de distintos tipos de cielos basados en datos reales de la composición de la atmósfera. Además, somos capaces de renderizar imágenes con cualquier posición del Sol, siendo incluidas aquellos ángulos de inclinación próximos al crepúsculo, donde el ozono tiene una influencia muy fuerte sobre el color del cielo, e incluso cuando el Sol está por debajo del horizonte, donde la sombra de la Tierra se ve proyectada en la atmósfera. Todas las imágenes generadas en este capítulo han sido renderizadas con un computador con procesador i5-6200U 2.8 GHz y 8GB de memoria RAM DDR3, habiendo necesitado para ello entre 30 minutos y 3 horas.

### 7.1 PERFILES DE AEROSOLES PROMEDIO

Para comprobar los resultados de nuestro modelo, hemos generado tres imágenes para cada distribución de aerosoles que hemos modelado con tres distintas inclinaciones sobre el horizonte:  $0^\circ$ ,  $5^\circ$  y  $25^\circ$ . En esta sección mostramos dos de las atmósferas que más diferencias deberían presentar, una atmósfera sobre una zona desértica y una atmósfera marítima limpia ([Figura 9](#)). Aunque la diferencia es inapreciable, eso es debido a que hemos utilizado unas densidades de aerosoles promediadas dadas en [\[1\]](#). Aumentando la turbidez del medio con cada uno de esos aerosoles hace que estas diferencias sean aún más visibles.

En la [Figura 10](#) podemos ver que, al haber aumentado la densidad de la distribución de aerosoles, se aprecian diferencias entre ambos medios participativos. En las imágenes con una inclinación del Sol de  $25^\circ$  se puede apreciar cómo, para la imagen generada con el medio participativo propio de un desierto, el color azul ha perdido saturación, y además a lo largo del horizonte se ve una línea gris. Para el caso de la imagen generada para un medio participativo propio de un entorno urbano, las tonalidades azules apenas han notado diferencia, y aunque también existe una zona gris a lo largo de todo el horizonte, es menor que la de imagen generada para el desierto.

En el caso de las imágenes con ángulo de inclinación del Sol a  $5^\circ$ , el comportamiento para las tonalidades azules se mantiene. En las imágenes generadas con una densidad promediada, en las zonas próximas al horizonte empezaban a aparecer los tonos anaranjados propios del crepúsculo. Si con comparamos los resultados de la [Figura 9](#), podemos observar como en las imágenes del desierto, aunque persisten, esos tonos se han oscurecido siendo aún visible la zona gris. Para el cielo urbano, el comportamiento es parecido, aunque preservando más los tonos amarillos. La mayor diferencia reside cuando el ángulo de inclinación del Sol es de  $0$ , donde en la imagen para el clima desértico ha perdido la coloración en las zonas más próximas al horizonte.<sup>o</sup>

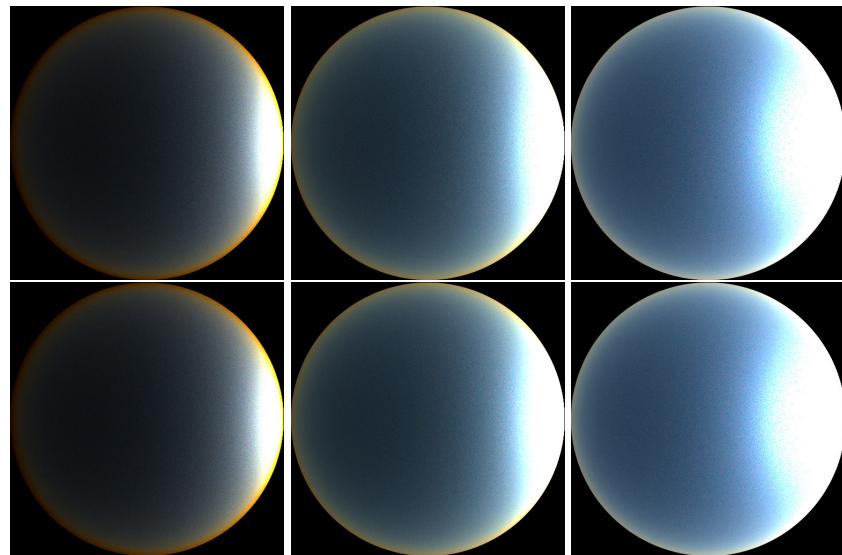


Figura 9: Imágenes generadas para distribuciones de aerosoles propias de zonas desérticas (arriba) y para zonas urbanas (debajo), ambas con inclinaciones del Sol de  $0^\circ$ ,  $5^\circ$  y  $25^\circ$  por encima del horizonte respectivamente.

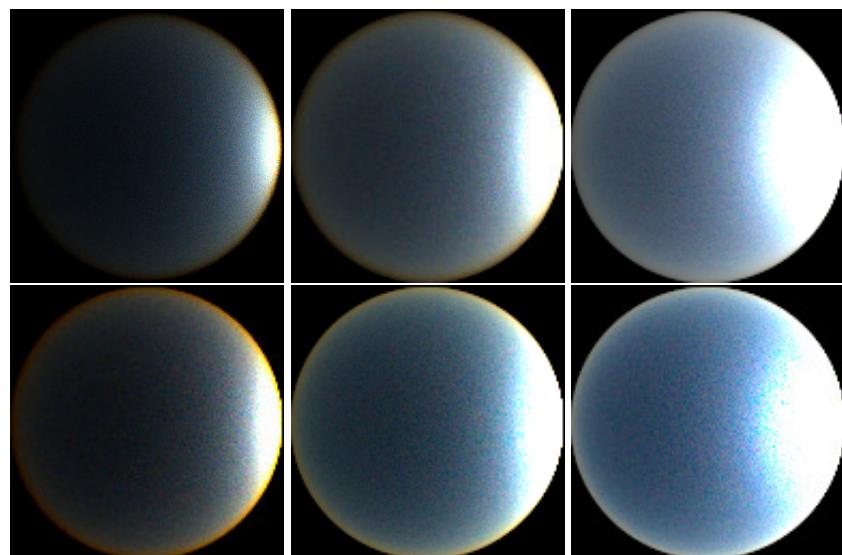


Figura 10: Imágenes generadas para distribuciones de aerosoles propias de zonas desérticas (arriba) y para zonas urbanas (debajo), ambas con inclinaciones del Sol de  $0^\circ$ ,  $5^\circ$  y  $25^\circ$  por encima del horizonte respectivamente.

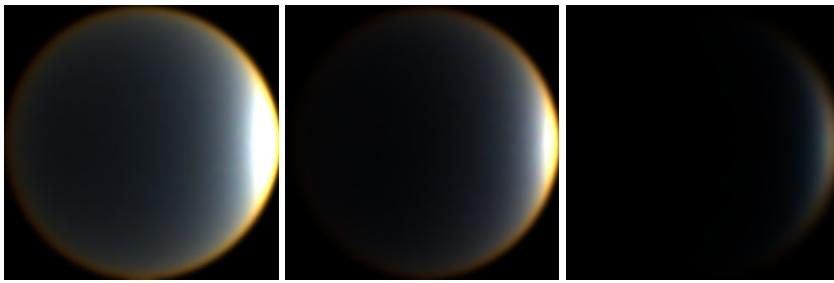


Figura 11: Imágenes generadas para distribuciones de aerosoles denominadas *continental remoto*, con inclinaciones del Sol de  $-0,5^\circ$ ,  $-2,5^\circ$  y  $-5^\circ$  con respecto al horizonte.

## 7.2 INCLINACIONES POR DEBAJO DEL HORIZONTE

Uno de las metas de este modelo es la de generar la sombra del planeta proyectada sobre la atmósfera cuando el sol está por debajo del horizonte. En la tabla Figura 11 vemos como la luz va desapareciendo cada vez más, aunque no podemos apreciar la sombra proyectada sobre la atmósfera.

## 7.3 COMPARACIÓN CON IMÁGENES CAPTURADAS

Gracias a que los resultados obtenidos por Kider Jr y col. [27] están publicados, podemos acceder a una colección de imágenes capturadas en cielos medidos con el fin de comparar nuestros resultados generados. Aunque este conjunto de datos es limitado, y no cuenta con imágenes en la que el Sol esté próximo al crepúsculo, hemos podido comparar (Figura 12) dos imágenes con ángulos de inclinación del Sol similar.

Las imágenes generadas para comparar con las de Kider Jr y col. [27] han sido realizadas con una distribución de aerosoles rural y con unos ángulos de inclinación de  $5^\circ$ (arriba) y  $15^\circ$ (abajo). Nótese que la distribución de la intensidad lumínica, así como de los colores es similar. Sin embargo, el tono de los colores puede ser algo distinto debido a posibles diferencias en la transformación espectral a RGB, así como el bloom (y otros efectos de difracción) en la cámara real

## 7.4 COMPARACIÓN ENTRE DISPERSIÓN

En esta sección mostramos dos imágenes, en las que hemos plasmado con colores escalados los patrones de la dispersión de la luz para diferentes longitudes de onda con el fin de visualiza cómo se ha dispersa la luz en diferentes condiciones.

En la primera columna de la Figura 13, la que corresponde al ángulo de dispersión se puede observar el patrón de dispersión de las longitudes de onda más próximas al azul, y cómo mientras las longitudes de onda aumentan, la dispersión se vuelve menos intensa reduciéndose a la posición del Sol. Sin embargo, en las columnas que corresponden a imágenes generadas bajo un ángulo de inclinación del Sol de  $5$  y  $0$  grados, la intensidad de la dispersión aumenta conforme la longitud de onda crece, dando la explicación a los colores anaranjados y amarillos presentes en las imágenes completas.

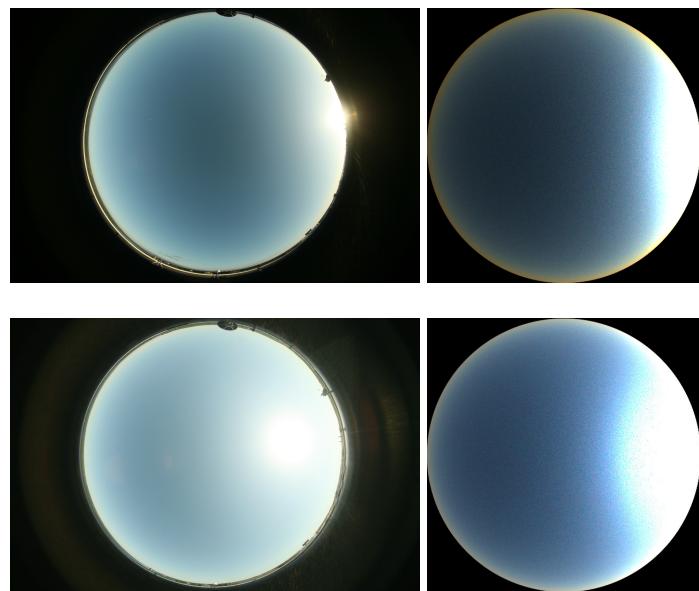


Figura 12: Comparación de nuestros resultados (derecha) con los capturados por Kider Jr y col. [27] (izquierda).

Cuando el ángulo de inclinación del Sol está por debajo del horizonte [Figura 14](#) el comportamiento que se observa es similar al visto en la [Figura 13](#), para las inclinaciones próximas al horizonte. Se comprueba, además, el descenso de energía que llega a la atmósfera conforme el ángulo va decreciendo es muy notable.

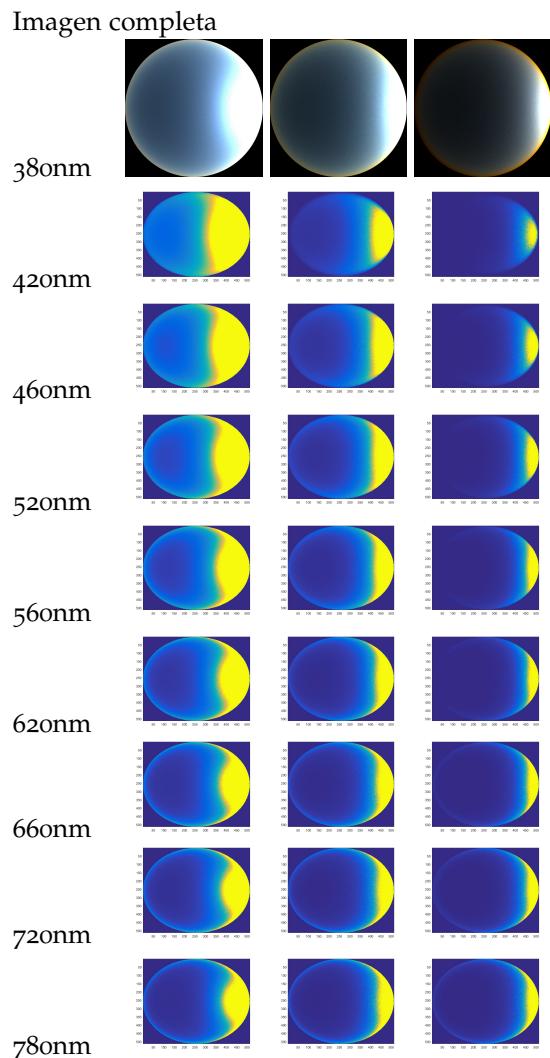


Figura 13: Patrones de dispersión de luz para tres diferentes inclinaciones del Sol, 0 grados, 5 grados y 25 grados respectivamente.

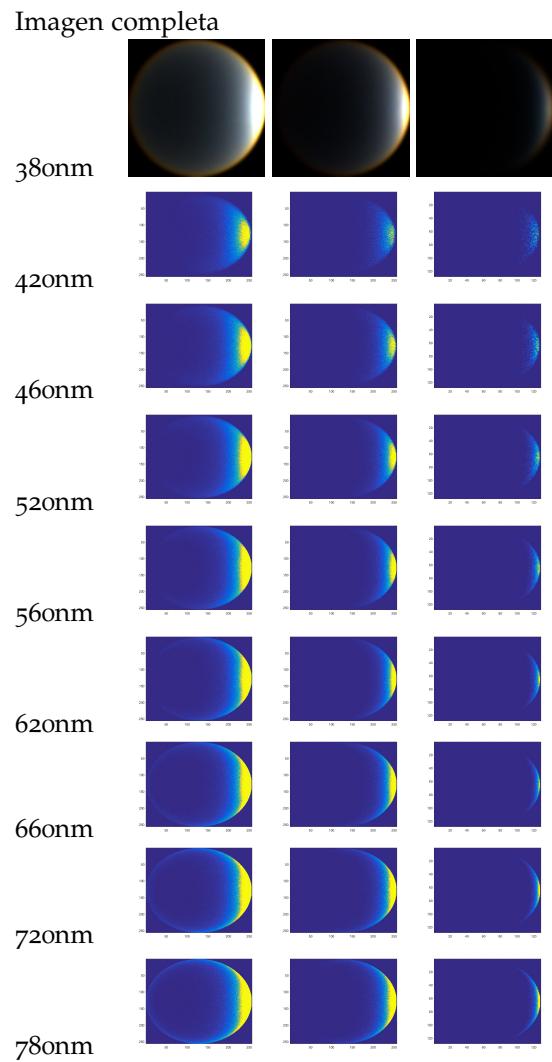


Figura 14: Patrones de dispersión de luz para tres diferentes inclinaciones del Sol, -0,5 grados, -2,5 grados y -5 grados respectivamente.

# 8

## CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

---

En este trabajo hemos presentado un modelo óptico de la atmósfera basada en física. Para ello, hemos estudiado la composición de la atmósfera en su componente molecular, la contribución del ozono a la absorción de radiación, y las distintas distribuciones de aerosoles presentes en varias latitudes del planeta. Habiendo conocido estos datos, fueron integrados en un *path tracer* volumétrico. Finalmente, hemos presentado un modelo atmosférico basado en física preciso, robusto y sin sesgo con el fin de renderizar imágenes de cielos. Además, proveemos un número de distribuciones de aerosoles basados en datos reales, dando a nuestro modelo la capacidad de generar imágenes para diferentes climas y zonas en base a su latitud y longitud. Aunque con los datos promedio consultados la diferencia entre las imágenes finales es mínima, hemos comprobado que aumentando la densidad de los aerosoles las diferencias son notables. También hemos sido capaces de reproducir la proyección de la sombra de la Tierra sobre la atmósfera cuando el Sol está por debajo del horizonte.

Como trabajo futuro, consideramos que añadir nubes [19] a nuestro modelo heterogéneo, ya que podría tener un efecto crucial en la apariencia. También, cambio de la coloración del terreno con respecto a la distancia del observador. En el futuro, también queremos estudiar los patrones de polarización de la luz en la atmósfera [46], así como intentar recrear el fenómeno del *green flash* [14] producido por la curvatura de los rayos de luz.



# A

## TABLAS

En este apéndice se presentan una serie de datos tabulados que han sido utilizados en alguna de las partes del proyecto.

AEROSOLES EN TROPOSFERA		
Polar	-Antártico	0.99 Ácido sulfúrico 0.005 Sal 0.005 Mineral
	-Ártico	0.25 Hollín 0.25 Sal 0.25 Mineral 0.25 Sulfatos
Background		0.5 Sulfatos 0.5 Ácido Sulfúrico
Marítimo	-Limpio	0.6 Sal 0.4 Sulfatos
	-Mineral	0.3 Sal 0.3 Mineral 0.3 Sulfatos
	-Contaminado	0.6 Acuoso soluble 0.4 Sal
Continental		0.3 Tipo polvo 0.3 Acuoso soluble 0.3 Hollín
Desértico		1.0 Mineral
Rural		0.94 Acuoso soluble 0.06 Hollín
Urbano		0.6 Acuoso soluble 0.3 Hollín

Cuadro 1: Distribución de aerosoles existentes en la troposfera. El número que precede al componente del aerosol corresponde al porcentaje del mismo dentro de la distribución [1].

AEROSOLES EN ESTRATOSFERA	
Background	1.0 Ácido Sulfúrico
Volcánico	0.5 Ácido Sulfúrico
	0.5 Ceniza volcánica

Cuadro 2: Distribución de aerosoles existentes en la estratosfera. El número que precede al componente del aerosol corresponde al porcentaje del mismo dentro de la distribución [1].

AEROSOLES EN MESOSFERA	
Aerosol único	0.5 Polvo Meteórico
	0.5 Hielo

Cuadro 3: Distribución de aerosoles existentes en la mesosfera. El número que precede al componente del aerosol corresponde al porcentaje del mismo dentro de la distribución [1].

PARÁMETROS VERTICALES	
Tipo de aerosol	Escalado por altura $H_p$
Oceánico	900
Continental remoto	730
Desértico	2000
Polar	30.000
<i>Background</i>	$\infty$

Cuadro 4: Parámetros necesarios para poder calcular la distribución vertical de los distintos perfiles de aerosoles existentes en la atmósfera [1].

DISTRIBUCIÓN DE LA CAPA DE OZONO		
Mes	Valores	Desviación típica
I	347	43,7
II	340	50,5
III	381	42,8
IV	384	36,3
V	372	28,6
VI	352	22,9
VII	333	19,7
VIII	317	18,4
IX	298	20,4
X	285	23,1
XI	290	26,1
XII	315	33,3

Cuadro 5: Valores medios mensuales de la cantidad total de ozono, obtenidos a partir de 45 años de observación en Arosa, Suiza (47°N) expresado en Dobson.  
 Fuente: Dütsch [10]

IRRADIANCIA DEL SOL	
Longitud de onda	Irradiancia
380	16559
390	16233
400	21127
410	25888
420	25829
430	24232
440	26760
450	29658
460	130545
470	30057
480	30663
490	28830
500	28712
510	27825
520	27100
530	27233
540	26361
550	25503
560	25060
570	25311
580	25355
590	25134
600	24631
610	24173
620	23685
630	23212
640	22827
650	22339
660	21970
670	21526
680	21097
690	20728
700	20240
710	19870
720	19427
730	19072
740	18628
750	18259

Cuadro 6: Irradiancia del Sol expresada en unidades de potencia (Watos) por unidad de área ( $\text{m}^{-2}$ ) por unidad de ángulo sólido ( $\text{sr}^{-1}$ ) por unidad de longitud de onda ( $\text{nm}^{-1}$ ), obtenida en Jakob [22]

ALBEDO DEL SUELO	
Superficie	Albedo
Suelo de tierra mojada	0.40
Suelo de tierra seca y oscura	0.05
Arena	0.15 - 0.45
Hierba larga	0.16
Hierba corta	0.26
Campos de agricultura	0.18 - 0.25
Tundra	0.18-0.25
Bosque de árboles caducos	0.15 - 0.20
Bosque de coníferas	0.05 - 0.15
Agua ángulo de zenit bajo	0.03 - 0.10
Agua ángulo de zenit alto	0.10 - 1.00
Nieve vieja	0.40
Nieve recién caída	0.95
Hielo en el mar	0.30 - 0.45
Hielo de glaciar	0.20 - 0.40
Nubes gruesas	0.60 - 0.90
Nubes finas	0.30 - 0.50

Cuadro 7: Rangos de valores de albedo para distintos tipos de componentes que constituyen el suelo del planeta [6].



## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] AIAA. *Guide to Global Aerosol Models*. 1801 Alexander Bell Drive, Reston, VA 22091: American Institute of Aeronautics y Astronautics, 1999.
- [2] US Standard Atmosphere. «NOAA, NASA, USAF». En: *Washington DC* (1976).
- [3] Craig F Bohren y Donald R Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 2008.
- [4] Eric Bruneton y Fabrice Neyret. «Precomputed atmospheric scattering». En: *Computer Graphics Forum*. Vol. 27. 4. Wiley Online Library. 2008, págs. 1079-1086.
- [5] Anthony Bucholtz. «Rayleigh-scattering calculations for the terrestrial atmosphere». En: *Applied Optics* 34.15 (1995), págs. 2765-2773.
- [6] D. Budikova. *Albedo*. 2013. URL: <http://www.eoearth.org/view/article/149954>.
- [7] S CIE. 011/E: 2003 *Spatial distribution of daylight-CIE standard general sky*. 2004.
- [8] S Chandrasekhar. «Radiative transfer, ed». En: *Chandrasekhar, S* 20 (1960).
- [9] WA Coleman. «Mathematical verification of a certain Monte Carlo sampling technique and applications of the technique to radiation transport problems». En: *Nuclear science and engineering* 32.1 (1968), págs. 76-81.
- [10] HU Dütsch. «The ozone distribution in the atmosphere». En: *Canadian journal of chemistry* 52.8 (1974), págs. 1491-1504.
- [11] Oskar Elek y Petr Kmoch. «Real-time spectral scattering in large-scale natural participating media». En: *Proceedings of the 26th Spring Conference on Computer Graphics*. ACM. 2010, págs. 77-84.
- [12] V Gorshelev, A Serdyuchenko, M Weber, W Chehade y JP Burrows. «High spectral resolution ozone absorption cross-sections–Part 1: Measurements, data analysis and comparison with previous measurements around 293K.» En: *Atmospheric Measurement Techniques Discussions* 6.4 (2013).
- [13] Diego Gutierrez, Francisco J Seron, Oscar Anson y Adolfo Muñoz. «Chasing the green flash: a global illumination solution for inhomogeneous media». En: *Proceedings of the 20th spring conference on Computer graphics*. ACM. 2004, págs. 97-105.
- [14] Diego Gutierrez, Wojciech Jarosz, Craig Donner y Srinivasa G. Narasimhan. «Scattering». En: *ACM SIGGRAPH Courses*. New Orleans, Louisiana: ACM, ago. de 2009, 21:1-21:397. doi: [10.1145/1667239.1667260](https://doi.org/10.1145/1667239.1667260).
- [15] Jörg Haber, Marcus Magnor y Hans-Peter Seidel. «Physically-based simulation of twilight phenomena». En: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 24.4 (2005), págs. 1353-1373.
- [16] Roy Hall. *Illumination and color in computer generated imagery*. Springer Science & Business Media, 2012.

- [17] Lukas Hosek y Alexander Wilkie. «An analytic model for full spectral sky-dome radiance». En: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 31.4 (2012), pág. 95.
- [18] Lukas Hosek y Alexander Wilkie. «Adding a Solar-Radiance Function to the Hoek-Wilkie Skylight Model». En: *Computer Graphics and Applications, IEEE* 33.3 (2013), págs. 44-52.
- [19] Roland Hufnagel y Martin Held. «A survey of cloud lighting and rendering techniques». En: (2012).
- [20] Hendrik Christoffel Hulst. *Light scattering by small particles*. Courier Corporation, 1957.
- [21] Tomokazu Ishikawa, Yonghao Yue, Kei Iwasaki, Yoshinori Dobashi y Tomoyuki Nishita. «Modeling of aurora borealis using the observed data». En: *Proceedings of the 27th Spring Conference on Computer Graphics*. ACM. 2011, págs. 13-16.
- [22] Wenzel Jakob. «Mitsuba renderer, 2010». En: URL: <http://www.mitsuba-renderer.org> 3 (2015).
- [23] Wojciech Jarosz, Derek Nowrouzezahrai, Iman Sadeghi y Henrik Wann Jensen. «A comprehensive theory of volumetric radiance estimation using photon points and beams». En: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 30.1 (2011), pág. 5.
- [24] Henrik Wann Jensen, Frédo Durand, Julie Dorsey, Michael M Stark, Peter Shirley y Simon Premože. «A physically-based night sky model». En: *Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. ACM. 2001, págs. 399-408.
- [25] James T Kajiya. «The rendering equation». En: *ACM Siggraph Computer Graphics*. Vol. 20. 4. ACM. 1986, págs. 143-150.
- [26] James T Kajiya y Brian P Von Herzen. «Ray tracing volume densities». En: *ACM Siggraph Computer Graphics*. Vol. 18. 3. ACM. 1984, págs. 165-174.
- [27] Joseph T Kider Jr, Daniel Knowlton, Jeremy Newlin, Yining Karl Li y Donald P Greenberg. «A framework for the experimental comparison of solar and skydome illumination». En: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 33.6 (2014), pág. 180.
- [28] Peter Z Kutz. «Physically-Based Atmosphere Rendering». En: (2012).
- [29] Eric P Lafourture e Yves D Willems. «Rendering participating media with bidirectional path tracing». En: *Rendering Techniques' 96*. Springer, 1996, págs. 91-100.
- [30] P. Laven. *MiePlot v4.5*. 2015. URL: <http://www.philiplaven.com/mieplot.htm>.
- [31] Julio Marco. «Transient Light Transport in Participating Media». Tesis de mtría. Universidad de Zaragoza, 2013.
- [32] Earl J McCartney. «Optics of the atmosphere: scattering by molecules and particles». En: *New York, John Wiley and Sons, Inc., 1976*. 421 p. 1 (1976).
- [33] Tomoyuki Nishita, Takao Sirai, Katsumi Tadamura y Eihachiro Nakamae. «Display of the earth taking into account atmospheric scattering». En: *Proceedings of the 20th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. ACM. 1993, págs. 175-182.

- [34] Tomoyuki Nishita, Yoshinori Dobashi, Kazufumi Kaneda e Hideo Yamashita. «Display method of the sky color taking into account multiple scattering». En: *Pacific Graphics*. Vol. 96. 1996, págs. 117-132.
- [35] Jan Novák, Andrew Selle y Wojciech Jarosz. «Residual ratio tracking for estimating attenuation in participating media». En: *ACM Transactions on Graphics (TOG)* 33.6 (2014), pág. 179.
- [36] Sean O'Neil. «Accurate atmospheric scattering». En: *GPU Gems 2* (2005), págs. 253-268.
- [37] Mark Pauly, Thomas Kollig y Alexander Keller. «Metropolis light transport for participating media». En: *Rendering Techniques 2000*. Springer, 2000, págs. 11-22.
- [38] Edson R Peck y Kaye Reeder. «Dispersion of Air\*». En: *JOSA* 62.8 (1972), págs. 958-962.
- [39] Richard Perez, Robert Seals y Joseph Michalsky. «All-weather model for sky luminance distribution—preliminary configuration and validation». En: *Solar energy* 50.3 (1993), págs. 235-245.
- [40] Matt Pharr y Greg Humphreys. *Physically based rendering: From theory to implementation*. Morgan Kaufmann, 2004.
- [41] Arcot J Preetham, Peter Shirley y Brian Smits. «A practical analytic model for daylight». En: *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co. 1999, págs. 91-100.
- [42] Matthias Raab, Daniel Seibert y Alexander Keller. «Unbiased global illumination with participating media». En: *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2006*. Springer, 2008, págs. 591-605.
- [43] Iman Sadeghi, Adolfo Munoz, Philip Laven, Wojciech Jarosz, Francisco Seron, Diego Gutierrez y Henrik Wann Jensen. «Physically-based Simulation of Rainbows». En: *ACM Transactions on Graphics (Presented at SIGGRAPH)* 31.1 (feb. de 2012), 3:1-3:12. doi: [10.1145/2077341.2077344](https://doi.org/10.1145/2077341.2077344).
- [44] S. Sanz Fernández. *100km Altitude Boundary for Astronautics*. Published in Fédération Aéronautique Internationale. 2004. URL: <http://www.fai.org/icare-records/100km-altitude-boundary-for-astronautics>.
- [45] Gary E. Thomas y Knut Stammes. *Radiative transfer in the atmosphere and ocean*. Cambridge atmospheric and space science series. Autre tirage : 2002. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 1999. ISBN: 0-521-40124-0. URL: <http://opac.inria.fr/record=b1095234>.
- [46] Alexander Wilkie, Claudia Ulbricht, Robert F Tobler, Georg Zotti y Werner Purgathofer. «An analytical model for skylight polarisation». En: *Rendering Techniques*. 2004, págs. 387-398.
- [47] E Woodcock, T Murphy, P Hemmings y S Longworth. «Techniques used in the GEM code for Monte Carlo neutronics calculations in reactors and other systems of complex geometry». En: *Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems*. Vol. 557. 1965, pág. 2.
- [48] Gunter Wyszecki y Walter Stanley Stiles. *Color science*. Vol. 8. Wiley New York, 1982.