



# Trabajo Fin de Grado

Diseño paramétrico de bobinas de Tesla

Parametric design of Tesla coils

Autor:

Saray Menjíbar Ruiz

Director:

Jesús Letosa Fleta

Departamento de Ingeniería Eléctrica  
Escuela de Ingeniería y Arquitectura de Zaragoza

2017



## DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD

(Este documento debe acompañar al Trabajo Fin de Grado (TFG)/Trabajo Fin de Máster (TFM) cuando sea depositado para su evaluación).

D./Dña. Saray Menjíbar Ruiz,

con nº de DNI 73014470 G en aplicación de lo dispuesto en el art. 14 (Derechos de autor) del Acuerdo de 11 de septiembre de 2014, del Consejo de Gobierno, por el que se aprueba el Reglamento de los TFG y TFM de la Universidad de Zaragoza,

Declaro que el presente Trabajo de Fin de (Grado/Máster) Grado en Ingeniería Eléctrica, (Título del Trabajo) Diseño paramétrico de bobinas de Tesla

---

---

---

---

---

---

---

es de mi autoría y es original, no habiéndose utilizado fuente sin ser citada debidamente.

Zaragoza, 21 abril 2017

Fdo: Saray Menjíbar Ruiz

# **AGRADECIMIENTOS**

A mi familia, por enseñarme que siempre hay que luchar por los sueños de uno mismo y por su apoyo incondicional.

A todos los profesores que he tenido a lo largo de mi vida, porque cada uno me ha enseñado algo nuevo.

Y, sobre todo, a todas aquellas personas que han dedicado o dedican su vida a la investigación, porque sin ellas no estaríamos aquí.

# RESUMEN

La bobina de Tesla es un generador electromagnético de alta frecuencia que crea descargas eléctricas de alta tensión. Se compone de dos circuitos eléctricos acoplados magnéticamente que forman un transformador resonante de núcleo de aire.

Tesla desarrolló esta máquina con el fin de trasmisir la energía eléctrica inalámbricamente, es decir, sin la necesidad de utilizar cableado. Actualmente, estas bobinas se emplean para demostraciones científicas.

Este proyecto presenta herramientas de diseño de bobinas de Tesla, en función de sus parámetros geométricos y eléctricos. Para ello, se presentan distintos métodos de cálculo:

- Cálculo de los parámetros mediante fórmulas analíticas.
- Calculo de los parámetros mediante la simulación del sistema con programas informáticos.

Los resultados se comparan con datos obtenidos de forma experimental haciendo uso de las bobinas de Tesla disponibles en el departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Zaragoza. De esta forma, se demuestra que se puede realizar un estudio previo a la construcción de la máquina sin necesidad de recurrir a cálculos complejos.

*El científico no busca un resultado inmediato.  
No espera que sus ideas avanzadas sean fácilmente aceptadas.  
Su deber es sentar las bases para los que vendrán, señalar el camino.*

**Nikola Tesla**

## **ÍNDICE GENERAL**

### **I. MEMORIA**

1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. Objetivo del proyecto .....	1
1.2. Nikola Tesla.....	1
1.3. La bobina de Tesla .....	2
2. TEORÍA DE OPERACIÓN .....	3
2.1. Principio de funcionamiento.....	3
2.1.1. El circuito LC .....	3
2.1.2. Frecuencia de resonancia .....	4
2.2. Modelo clásico .....	6
2.3. Bobina de Tesla de estado sólido .....	8
3. DIMENSIONAMIENTO DE LOS ELEMENTOS CONSTITUTIVOS.....	9
3.1. Circuito primario .....	9
3.1.1. Fuente de alimentación .....	9
3.1.2. Bobina, $L_1$ .....	9
3.1.3. Resistencia parásita, $R_{L1}$ .....	10
3.1.4. Capacidad parásita, $C_{L1}$ .....	11
3.1.5. Condensador, $C_1$ .....	12
3.2. Circuito secundario.....	12
3.2.1. Bobina, $L_2$ .....	12
3.2.2. Resistencia parásita, $R_{L2}$ .....	13
3.2.3. Capacidad parásita, $C_{L2}$ .....	14
3.2.4. Terminal superior, $C_{top}$ .....	14
3.2.5. Capacidad total, $C_2$ .....	16
4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA.....	18
4.1. Software de simulación .....	18
4.2. Circuito equivalente simulado .....	18
4.3. Simulación y resultados .....	19
4.3.1. Simulación de los elementos constitutivos del circuito.....	19
4.3.2. Simulación de la operación del sistema.....	23
5. COMPROBACIONES EXPERIMENTALES.....	28
5.1. Frecuencia de resonancia .....	28

---

---

**ÍNDICE GENERAL**

5.1.1. Circuito primario.....	28
5.1.2. Circuito secundario.....	29
5.2. Parámetros de los elementos constitutivos de la bobina de Tesla .....	31
5.2.1. Circuito primario.....	31
5.2.2. Circuito secundario.....	31
5.2.3. Coeficientes de inducción mutua y de acoplamiento.....	32
5.3. Tensión de salida .....	34
6. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS.....	36
7. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS .....	37
7.1. Conclusiones .....	37
7.2. Líneas futuras.....	37

## **II. ANEXOS**

ANEXO 1. Bibliografía.....	1
ANEXO 2. Configuraciones geométricas de bobinas.....	3
ANEXO 3. Precaución y seguridad .....	5
ANEXO 4. Cálculos justificativos .....	6
1. Cálculo de los parámetros de la bobina de Tesla de estado sólido del laboratorio de la Universidad de Zaragoza .....	6
2. Cálculo de los parámetros del modelo clásico de la bobina de Tesla del laboratorio de la Universidad de Zaragoza .....	12
3. Cálculo de las frecuencias de resonancia del circuito acoplado .....	16
ANEXO 5. Información adicional acerca del software empleado .....	18
1. FEMM (Finite Element Method Magnetics) .....	18
2. Scilab .....	19
ANEXO 6. Fotografías de las bobinas de Tesla empleadas.....	20
1. Modelo de estado sólido .....	20
2. Modelo clásico .....	22

# **I. MEMORIA**

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. Objetivo del proyecto

El principal objetivo del presente proyecto es hacer un estudio del diseño geométrico y eléctrico de los parámetros característicos de la bobina de Tesla, proporcionando así las herramientas necesarias para el cálculo de dichos parámetros. Para ello, primero será necesario realizar un estudio del estado de la técnica del diseño y construcción de bobinas de Tesla.

Se recopilan las expresiones analíticas utilizadas en la bibliografía para el cálculo de los principales parámetros de la bobina de Tesla.

Después, se presentan las simulaciones electromagnéticas, desarrolladas en este proyecto, para calcular dichos parámetros de una manera alternativa.

Por último, se comparan tanto los resultados analíticos como los resultados de la simulación con valores obtenidos de forma experimental realizando distintas pruebas en el laboratorio con las bobinas de Tesla que se encuentran disponibles en el departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Zaragoza.

## 1.2. Nikola Tesla

Conocido mayoritariamente por su gran aporte a la humanidad de la corriente alterna, Nikola Tesla fue un ingeniero eléctrico e inventor que revolucionó la forma de vivir en el siglo XX.

Nació en 1856 en Smiljan, un pueblo situado en la región montañosa de Lika, en la actual Croacia. Inspirado por su madre, Tesla ya arreglaba e inventaba cosas cuando era solo un niño.

Comenzó sus estudios de ingeniería en la Escuela Politécnica Joanneum Graz (Austria) y los continuó en Praga. En enero de 1881, Tesla dejó Praga y se trasladó a Budapest donde trabajó como diseñador en la oficina central de telégrafos del Gobierno húngaro, introduciéndose así en el trabajo eléctrico práctico. Más tarde, Tesla conseguiría un empleo en París en la organización de Edison donde trabajaría diseñando dinamos para instalaciones de luz incandescente.

En 1884 llegó a América un Tesla pobre, pero ansioso por progresar. Allí trabajó 6 meses para Edison con la intención de mejorar las dinamos producidas por la compañía del mismo. Después de esto, Tesla creó su propia compañía al no coincidir con las ideas de Edison. [1]

Años después, gracias a su mente prodigiosa, fue capaz de llevar a la realidad lo que tanto tiempo había estado estudiando en su imaginación, el motor de inducción de corriente alterna. A partir de aquí, obtuvo más de 278 patentes entre las que se encuentran un conmutador para generadores eléctricos, la lámpara de arco eléctrico, la transferencia inalámbrica de energía eléctrica, el control remoto, etc.



### 1.3. La bobina de Tesla

A la vez que desarrollaba sus generadores, Tesla estaba interesado en los experimentos con ondas electromagnéticas de Hertz, y pronto comenzó a repetirlos.

Hertz usaba una potente bobina de inducción, conocida como bobina de Ruhmkorff en honor a su inventor. El principio de funcionamiento de esta bobina era el de un transformador. El bobinado primario estaba conectado a un interruptor de corriente mecánico y a una batería, mientras que el bobinado secundario estaba conectado a un explosor. Cuando este interruptor abría y cerraba el circuito, la corriente que fluía de la batería al bobinado primario cambiaba y provocaba que el campo electromagnético alrededor de la bobina primaria cambiase, induciendo así una corriente en la bobina secundaria.

En sus experimentos, Tesla reemplazó el interruptor de corriente por su generador de alta frecuencia ya que el interruptor solo era capaz de producir pocos cientos de ciclos por segundo, mientras que su alternador producía de diez mil a veinte mil ciclos por segundo. También quitó el aislante que había entre los dos bobinados, ya que, al aumentar la frecuencia, el calor generado lo fundía, y colocó un núcleo de hierro que pudiera moverse dentro de la bobina primaria para poder ajustar la inductancia del bobinado primario. Además, movió el condensador de la bobina de inducción colocándolo entre su generador y el bobinado primario. Tras varias pruebas, se dio cuenta de que, si ajustaba el condensador y la bobina, la frecuencia podía aumentar de manera considerable produciendo una corriente que alternaba hasta treinta mil veces por segundo.

Los investigadores anteriores habían utilizado esta bobina para estudiar los efectos electrostáticos. Tesla, que estaba interesado en estos efectos, repitió las demostraciones que se realizaban habitualmente con la bobina de Ruhmkorff. Una de ellas era usar chispas eléctricas para mostrar gases incandescentes, para ello se conectaban unos tubos de Geissler a la bobina. La alta tensión provocaba que el gas se ionizase y se hiciese luminiscente.

Según Tesla, la carga acumulada creaba un campo eléctrico en el espacio rodeando la bobina, y cuando la chispa se extinguía, este campo se disipaba y, como consecuencia, los tubos brillaban. Con esto, concluyó que la transmisión inalámbrica de luz era una realidad.

En 1891, presentó su bobina en el Columbia College con una demostración de transmisión inalámbrica que impactó a los asistentes. Además, también aprovechó esta ocasión para demostrar que la corriente alterna no era peligrosa haciendo recorrer por su cuerpo 250000 voltios, ya que había aprendido que, aunque la tensión fuera elevada, la corriente de alta frecuencia producida en el bobinado secundario resultaba pequeña y en períodos cortos de exposición no producía daños serios debido a que viaja a lo largo de la superficie del cuerpo humano [1].

## 2. TEORÍA DE OPERACIÓN

### 2.1. Principio de funcionamiento

Se trata de un generador electromagnético de alta tensión compuesto por dos circuitos eléctricos L-C resonantes acoplados magnéticamente formando un transformador de núcleo de aire que produce una corriente de alta frecuencia. Estos dos circuitos no están unidos físicamente, pero se encuentran comunicados gracias a la inductancia mutua, la cual produce un campo electromagnético entre los dos bobinados que permite la transmisión de energía. [2]

La tensión resultante producida en el secundario no dependerá únicamente de la relación de espiras como en un transformador convencional, sino que también dependerá de la frecuencia con la que trabaje cada circuito L-C [3]. Si los dos circuitos funcionan a la misma frecuencia de resonancia, la tensión obtenida será máxima (véase el apartado 2.1.2).

#### 2.1.1. El circuito LC

Para comprender el funcionamiento de la bobina de Tesla, primero se debe entender el funcionamiento de un circuito simple L-C como el que se muestra en la figura 2.1:

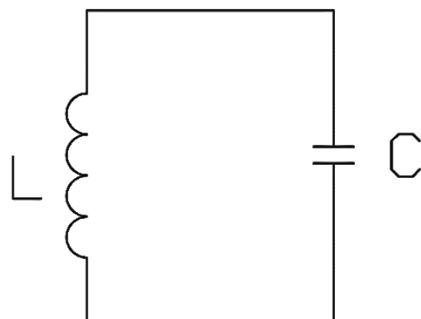


Figura 2.1. Circuito L-C.

Se parte de la hipótesis inicial de que el condensador está completamente cargado. Este condensador comienza a descargarse a través de la bobina. Aplicando la segunda ley de Kirchhoff, se puede comprobar que la diferencia de potencial entre las placas del condensador será igual a la fuerza electromotriz inducida en la bobina en cualquier instante de tiempo. A la vez que el condensador se descarga, la corriente va aumentando y la bobina crea un campo magnético en el espacio que la rodea.

Al inicio, toda la energía estaba almacenada en el campo eléctrico del condensador, pero conforme el condensador se va descargando, la energía se va almacenando en el campo magnético de la bobina, lo que quiere decir que la energía liberada por el condensador es igual a la absorbida por la bobina. Esto se debe al principio de conservación de la energía.

Aunque el condensador quede totalmente descargado, la corriente sigue circulando por el circuito, lo que hace que el condensador vuelva a empezar a cargarse, pero esta vez con

polaridad opuesta a la de su estado inicial. Ahora, la corriente vuelve a disminuir al igual que lo hace la magnitud del campo magnético de la bobina hasta que ambos valores alcanzan el valor de cero y el condensador queda cargado en el sentido opuesto.

Todo este proceso se repite en sentido contrario hasta que el condensador recupera su valor inicial. [4]

### 2.1.2. Frecuencia de resonancia

La frecuencia de resonancia es aquella frecuencia característica de un sistema que alcanza el grado máximo de oscilación [5]. Un circuito L-C, como el descrito en el punto anterior, en ausencia de generadores externos, oscila de forma natural a su frecuencia de resonancia.

En los circuitos que están formados por elementos reactivos, como son las bobinas y los condensadores, y que están sometidos a una excitación sinusoidal, se define la frecuencia de resonancia como aquella frecuencia a la que la tensión de excitación está en fase con la corriente que circula por la excitación, o lo que es lo mismo, la frecuencia a la que la impedancia o admitancia vista por el generador es puramente resistiva. En estas condiciones se dice que el circuito está en resonancia.

En el circuito L-C explicado en el punto anterior, la frecuencia de resonancia será aquella para la que la reactancia de la bobina sea igual a la reactancia del condensador, haciendo así que la impedancia sea mínima y tenga carácter resistivo.

Aunque en el punto anterior se ha descrito el circuito solo con una bobina y un condensador, el circuito también tiene parte resistiva, ya que las bobinas reales presentan una resistencia asociada en serie. Esto se debe a que una bobina es un conductor enrollado que disipa energía.

Siendo:

$$Z_{\text{equivalente}} = R_{\text{bobina}} + j \cdot X_L - j \cdot X_C \quad (2.1)$$

$$X_L = \omega \cdot L \quad (2.2)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (2.3)$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \quad (2.4)$$

Si el circuito es resonante, entonces:

$$X_L = X_C \quad (2.5)$$

$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (2.6)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad (2.7)$$



$$f_{\text{resonancia}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (2.8)$$

Y, además:

$$Z_{\text{equivalente}} = R_{\text{bobina}} \quad (2.9)$$

$$I = \frac{U_{\text{generador}}}{Z_{\text{equivalente}}} \quad (2.10)$$

$$\Delta U_{\text{condensador}} = I \cdot Z_{\text{condensador}} \quad (2.11)$$

En definitiva, cuando un circuito L-C serie está en resonancia:

- La impedancia equivalente que se obtiene es la más baja que puede presentar este circuito, por lo tanto, la corriente que circulará por el circuito será la máxima posible.
- La diferencia de potencial en la bobina será máxima.
- La bobina y el condensador tienen sus respectivos desfases, pero al ser estos iguales en módulo, pero de signo opuesto, se anulan, dando como resultado una corriente que se encuentran en fase con la tensión del generador externo. [6]

Para entender mejor este fenómeno, se puede poner el ejemplo de una emisora de radio. El circuito de la radio receptor trabaja a una frecuencia que entra en resonancia con la frecuencia de emisión de la emisora deseada [3]. El circuito de dicha radio puede ser ajustable para poder sintonizar la emisora deseada.

## 2.2. Modelo clásico

Este modelo es el más conocido y el más reproducido por los aficionados a las bobinas de Tesla. En la figura 2.2 se muestra el esquema básico que presenta el conjunto.

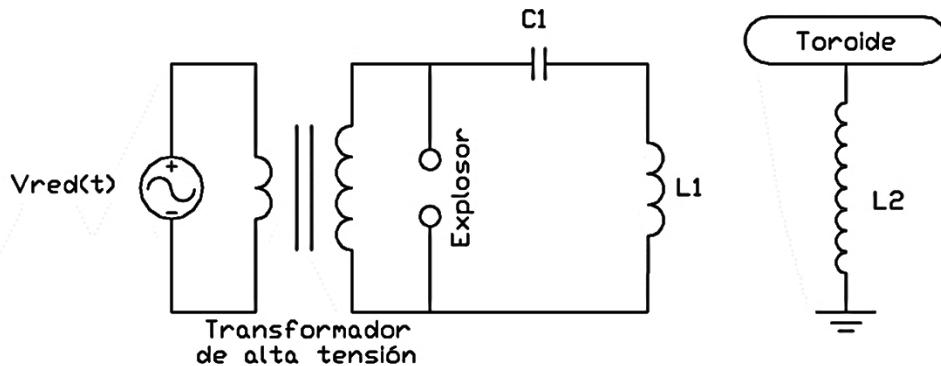


Figura 2.2. Circuito de una bobina de Tesla clásica.

En el modelo clásico (figura 2.3), el circuito primario, alimentado por un transformador de alta tensión a la frecuencia de red, está compuesto de un *spark gap* o explosor, un condensador,  $C_1$ , y una bobina,  $L_1$ , de sección mayor y menor número de vueltas que la bobina del circuito secundario. Cabe destacar que este bobinado tiene una componente resistiva que se reflejará en el circuito equivalente como  $R_{L1}$ .

La fuente sinusoidal que alimenta al circuito primario necesariamente tendrá que ser de alta tensión para poder generar la tensión de ruptura del aire necesaria para que se produzca un arco eléctrico entre los terminales del explosor. La distancia entre los terminales se ajustará de modo que se obtenga la frecuencia correcta [7]. Además, la tensión de ruptura del aire dependerá de la distancia a la que estén separados dichos terminales y de su forma.

El circuito secundario está formado por una bobina,  $L_2$ , de mayor tamaño que la del circuito primario, la cual también tendrá una componente resistiva,  $R_{L2}$ , y una componente capacitiva  $C_{L2}$ , y un terminal superior por donde se producirán las descargas eléctricas, normalmente un toroide o una esfera, que tendrá una componente capacitiva respecto a tierra,  $C_{top}$ . La suma de estas capacidades será la capacidad total del circuito secundario, es decir,  $C_{L2} + C_{top} = C_2$ .

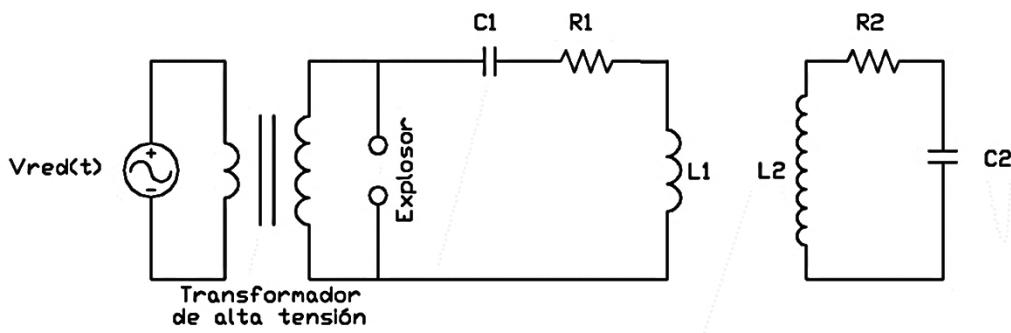


Figura 2.3. Circuito equivalente del modelo clásico de una bobina de Tesla.

Debido a la baja frecuencia de operación del transformador que alimenta al circuito primario, la reactancia de la bobina primaria será despreciable frente a la reactancia del condensador primario, haciendo que la corriente que circula por el circuito primario quede solo en función de la impedancia propia del transformador y de la reactancia del condensador. Esto quiere decir que la bobina se comportará como un cable haciendo que la corriente cargue solo el condensador [2].

Cuando el condensador  $C_1$  se ha cargado lo suficiente, se produce el arco eléctrico entre los dos terminales del explosor. De esta manera, el explosor funciona como un cortocircuito y se generan oscilaciones a la frecuencia de resonancia del circuito [8].

El condensador primario,  $C_1$ , comienza a descargarse a través de la bobina  $L_1$ . Igual que en el circuito L-C explicado en el apartado 2.1.1., la energía almacenada en el campo eléctrico del condensador ha sido absorbida y almacenada por el campo magnético de la bobina  $L_1$ , la cual forma un transformador de núcleo de aire con la bobina del circuito secundario,  $L_2$ .

Debido a la inductancia mutua, se produce un campo electromagnético que permite la transmisión de energía entre las dos bobinas. De esta manera, las oscilaciones que se producen en el circuito primario inducirán una fuerza electromotriz en el circuito secundario. El condensador del circuito primario se va descargando gradualmente mientras la energía se va almacenando en el condensador del secundario.

Finalmente, la tensión del condensador secundario alcanza un valor suficiente para ionizar el aire a su alrededor, produciendo descargas visibles del toroide hacia tierra.

Para conseguir la máxima tensión en el circuito secundario con la finalidad de producir descargas visibles que tengan la máxima longitud posible, es necesario que ambos circuitos estén en resonancia, es decir, que oscilen a la misma frecuencia. Utilizando la ecuación 2.8:

$$f_{\text{primario}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_1 \cdot C_1}} \quad (2.12)$$

$$f_{\text{secundario}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_2 \cdot C_2}} \quad (2.13)$$

$$f_{\text{primario}} = f_{\text{secundario}} \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_1 \cdot C_1}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_2 \cdot C_2}} \quad (2.15)$$

$$L_1 \cdot C_1 = L_2 \cdot C_2 \quad (2.16)$$

Por lo tanto, si los dos circuitos funcionan a la misma frecuencia de resonancia (ecuación 2.16), la impedancia será mínima, ya que en cada circuito las reactancias capacitivas e inductivas serán iguales y se anularán entre sí (véase apartado 2.1.2), quedando como única impedancia la resistencia parásita de cada bobina. Esto, además, hará que la tensión de salida en el secundario sea máxima, puesto que, circulando la misma corriente, si la impedancia es menor, la tensión aumentará [6].

Sin embargo, hay que tener en cuenta, que cuando el sistema se encuentra acoplado, el conjunto presenta dos frecuencias de resonancia, distintas de las frecuencias de cada circuito por separado [9]. El cálculo de estas dos nuevas frecuencias de resonancia se desarrolla en el anexo 4.

### 2.3. Bobina de Tesla de estado sólido

Este modelo propone eliminar el explosor del modelo clásico y sustituir el transformador de red por una fuente de potencia conmutada (figura 2.4) que genera una señal cuadrada a la frecuencia deseada que actuará como excitación del circuito primario.

Algunas ventajas de este modelo son la sustitución del transformador, evitando así el trabajar a alta tensión en el circuito primario y que, además, el conjunto pese menos, y la eliminación del explosor el cual produce ruido que puede ser desagradable y molesto y luminosidad. Sin embargo, el modelo clásico cuenta con menos elementos y más robustos que los utilizados en el modelo de estado sólido.

Otra diferencia respecto al modelo clásico es que el modelo de estado sólido trabaja con valores de corriente mayores, pero con valores de tensión mucho más bajos, lo que hace que ya no sea necesario un transformador de alta tensión alimentando al circuito primario.

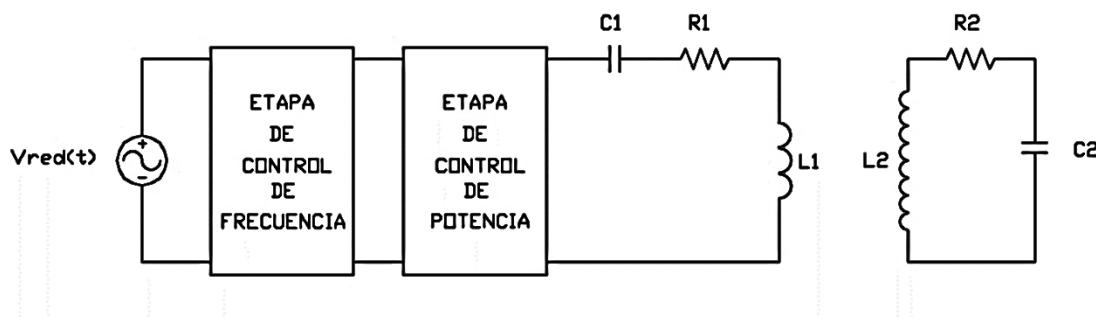


Figura 2.4. Circuito equivalente de una bobina de Tesla de estado sólido.

Las etapas de control de frecuencia y de potencia de las que consta la fuente de potencia conmutada se dejan indicadas mediante bloques ya que su estudio no es objeto de este proyecto. Estas etapas son las encargadas de generar la señal cuadrada de excitación, regular la frecuencia de operación del circuito y filtrar la tensión de red.

## 3. DIMENSIONAMIENTO DE LOS ELEMENTOS CONSTITUTIVOS

En este capítulo se explica detalladamente el cálculo de los elementos que forman el circuito de una bobina de Tesla de estado sólido, sin embargo, los cálculos de capacidades, inductancias y resistencias pueden ser, también, aplicados al modelo clásico.

### 3.1. Circuito primario

Se trata de un circuito L-C alimentado por una fuente de potencia conmutada que genera una señal cuadrada de excitación a la frecuencia de resonancia del circuito.

#### 3.1.1. Fuente de alimentación

Este circuito de control de frecuencia alimenta al circuito primario con una señal de onda cuadrada modulada a la frecuencia de resonancia del circuito con el fin de obtener la máxima tensión posible.

El diseño de la fuente de alimentación no es objeto de este proyecto, pero se deja indicado como calcular la potencia necesaria de la fuente.

A partir del valor medio de la corriente que circula a lo largo del tiempo por la resistencia parásita de la bobina del circuito primario, podemos calcular la potencia de la fuente como:

$$P = I_m^2 \cdot R_{L1} \quad (3.1)$$

Dado que la señal generada está en régimen transitorio, la forma de onda de la señal de la corriente es compleja y el cálculo de la potencia media consumida requiere cálculo numérico, este valor se puede obtener con programas de simulación (véase el apartado 4.3.2.1).

#### 3.1.2. Bobina, $L_1$

La bobina del circuito primario debe tener pocas espiras y una sección de cable mayor que la bobina del circuito secundario para poder elevar la tensión de forma parecida a un transformador convencional con núcleo de hierro, salvo que en este caso la tensión obtenida en el secundario también dependerá de la frecuencia a la que ambos circuitos trabajen. Normalmente, la bobina primaria suele tener entre 5 y 12 espiras [10].

Existen distintas configuraciones geométricas para el diseño de la bobina, sin embargo, la más utilizada en el modelo de estado sólido es la de tipo helicoidal. En este proyecto se ha tenido en cuenta únicamente esta geometría, por lo que todos los cálculos que se presentarán a continuación se basan en dicha configuración. Para ver otras geometrías y sus respectivos cálculos, véase el anexo 2.

El arrollamiento que forma esta bobina tendrá un diámetro mayor que el de la bobina secundaria ya que ésta última se colocará coaxialmente en el interior del arrollamiento primario. Además, de esta manera se consigue la protección de la bobina primaria frente a las posibles descargas que se puedan producir en el circuito secundario [11].

La bobina primaria estará acoplada magnéticamente a la bobina del circuito secundario. En las bobinas de Tesla el coeficiente de acoplamiento de las bobinas suele estar comprendido entre un 10 y un 25% [24]. Véase el apartado 5.2.3 para obtener más información acerca del cálculo del coeficiente de acoplamiento.

Esta bobina será la que actúe como primaria del transformador de núcleo de aire, y, por tanto, la que generará el campo electromagnético que permitirá la transferencia de energía a la bobina secundaria. Cabe destacar que, gracias a que los dos circuitos están sintonizados, en estas máquinas se puede conseguir una transferencia de hasta el 85% de la energía que se almacena en el condensador primario [3, 12].

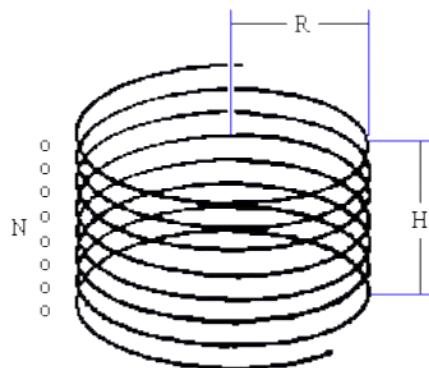


Figura 3.1. Bobina helicoidal [12].

La inductancia de esta bobina se puede calcular utilizando la fórmula de Wheeler [2]:

$$L_1 = \frac{N_1^2 \cdot R_1^2}{(9 \cdot R_1 + 10 \cdot H_1) \cdot 2540} \text{ [mH]} \quad (3.2)$$

Siendo:

$N_1$ : número de vueltas de la bobina primaria.

$R_1$ : radio de la circunferencia de la base de la bobina primaria [cm].

$H_1$ : altura de la bobina primaria [cm].

### 3.1.3. Resistencia parásita, $R_{L1}$

Puesto que una bobina es un arrollamiento de conductor, ésta tendrá una resistencia parásita. La resistencia de un conductor por el que circula corriente continua, se puede calcular como:

$$R_{C1} = \rho \cdot \frac{l_1}{S_1} \text{ [\Omega]} \quad (3.3)$$

Siendo:

$\rho$ : resistividad del cobre ( $1,75 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{mm}$ ).

$l_1$ : longitud total del conductor de la bobina primaria [mm].

$S_1$ : sección de conductor utilizado para la bobina primaria [ $\text{mm}^2$ ].

Sin embargo, a frecuencias elevadas, la corriente empieza a circular por los bordes del conductor, disminuyendo la sección efectiva por donde circula la corriente [13]. Este fenómeno se conoce como efecto pelicular. Según la ecuación 3.3, se puede comprobar que, si la sección efectiva por donde circula la corriente disminuye, el valor de la resistencia tiende a aumentar. Como una bobina de Tesla trabaja con altas frecuencias, es necesario tener en cuenta la resistencia debida al efecto pelicular [25]:

$$R_{L1} = R_{c1} \cdot k_R [\Omega] \quad (3.4)$$

Siendo:

$R_{L1}$ : resistencia parásita de la bobina debida al efecto pelicular [ $\Omega$ ].

$R_{c1}$ : resistencia en continua [ $\Omega$ ].

$k_R$ : coeficiente de pérdidas adicionales.

$$k_R = \sqrt[6]{\frac{3^6}{4} + \frac{S_1^6}{p \cdot \delta}} + 0,25 \quad (3.5)$$

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot \rho}{\mu_0 \cdot f}} \quad (3.6)$$

Donde:

$\delta$ : espesor de la envolvente [m].

$\rho$ : resistividad del cobre [ $\Omega/\text{m}$ ].

$\mu_0$ : permeabilidad en el vacío,  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  [ $\text{T} \cdot \text{m}/\text{A}$ ].

$f$ : frecuencia [Hz].

$p$ : perímetro del conductor [m].

### 3.1.4. Capacidad parásita, $C_{L1}$

Si las espiras de la bobina están muy próximas entre sí, se producirá una capacidad parásita. En el circuito primario, esta capacidad resultará muy pequeña comparada con la que se producirá en el circuito secundario, ya que las espiras de la bobina primaria estarán separadas entre sí lo bastante como para que la capacidad entre ellas sea casi nula [2].

Además, dado que se emplea un condensador de capacidad elevada en el circuito primario siempre es despreciable frente a esta y puede despreciarse en el diseño.

### 3.1.5. Condensador, $C_1$

El valor de la capacidad y de la tensión de trabajo de este condensador dependerá de la fuente que alimenta al circuito primario y de la frecuencia de resonancia del circuito.

El valor de la capacidad de este condensador se puede calcular como:

$$C_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_{\text{res}} \cdot \sqrt{L_1}} [\text{F}] \quad (3.7)$$

Siendo:

$L_1$ : inductancia de la bobina primaria [H].

$f_{\text{res}}$ : frecuencia de resonancia [Hz].

En el caso de que no exista ningún valor comercial para la capacidad hallada, se puede formar un condensador a partir de la unión en paralelo o en serie de condensadores de otros valores hasta conseguir la capacidad deseada.

Para el modelo clásico, la energía almacenada en este condensador se puede calcular como:

$$E_p = \frac{C_1 \cdot V_p^2}{2} [\text{J}] \quad (3.8)$$

Siendo:

$C_1$ : capacidad del condensador del circuito primario [F].

$V_p$ : tensión en bornes del condensador [V].

## 3.2. Circuito secundario

El circuito secundario está compuesto por otro circuito L-C acoplado magnéticamente al primario. La diferencia con el primario es que solo está conectado a tierra por el extremo inferior del conductor de la bobina secundaria. El otro extremo del conductor está unido a un terminal superior, normalmente un toroide o una esfera, por el que se producirán las descargas eléctricas al aire.

### 3.2.1. Bobina, $L_2$

Igual que en el circuito primario, para la bobina secundaria se suele utilizar la geometría de tipo helicoidal. Esta bobina será de mayor altura y menor sección de conductor que la primaria ya que, teniendo en cuenta que se tiene que cumplir que la frecuencia de resonancia sea la misma tanto para el circuito primario como para el secundario (ecuación 2.16), y sabiendo que el condensador primario presenta mayor capacidad que el secundario, la bobina secundaria debe tener una inductancia mayor que la primaria.

Como ya se ha explicado en el apartado 3.1.2., la bobina secundaria estará colocada concéntricamente en el interior de la bobina primaria, por lo que tendrá un diámetro menor que la bobina del circuito primario.

El número de espiras que constituyen la bobina secundaria es mucho más elevado que en el caso de la bobina del circuito primario, del orden de mil espiras. Además, en esta bobina las espiras están muy próximas las unas de las otras, por lo que el conductor utilizado para el arrollamiento debe ser esmaltado o estar aislado para evitar que se puedan producir arcos eléctricos entre espiras. Por este mismo motivo, el arrollamiento de la bobina primaria debe estar separado lo suficiente de la bobina secundaria [3].

Para calcular la inductancia de la bobina secundaria, se utiliza también la fórmula de Wheeler para una bobina de tipo helicoidal [2]:

$$L_2 = \frac{N_2^2 \cdot R_2^2}{(9 \cdot R_2 + 10 \cdot H_2) \cdot 2540} \text{ [mH]} \quad (3.9)$$

Siendo:

$N_2$ : número de vueltas de la bobina secundaria.

$R_2$ : radio de la circunferencia de la base de la bobina secundaria [cm].

$H_2$ : altura de la bobina secundaria [cm].

### 3.2.2. Resistencia parásita, $R_{L2}$

Como la bobina secundaria también es un arrollamiento de conductor, tendrá una resistencia parásita. Su cálculo es exactamente igual al utilizado para la obtención de la resistencia del circuito primario.

$$R_{L2} = R_{C2} \cdot k_R [\Omega] \quad (3.10)$$

Siendo:

$$R_{C2} = \rho \cdot \frac{l_2}{S_2} [\Omega] \quad (3.11)$$

$\rho$ : resistividad del cobre ( $1,75 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{mm}$ ).

$l_2$ : longitud total del conductor de la bobina secundaria [mm].

$S_2$ : sección de conductor utilizado para la bobina secundaria [ $\text{mm}^2$ ].

$R_{L2}$ : resistencia parásita de la bobina debida al efecto pelicular [ $\Omega$ ].

$R_{C2}$ : resistencia en continua [ $\Omega$ ].

$k_R$ : coeficiente de pérdidas adicionales.

$$k_R = \sqrt[6]{\frac{3^6}{4} + \frac{S_2^6}{\rho \cdot \delta}} \quad (3.12)$$

Donde:

$\delta$ : espesor de la envolvente (ecuación 3.6) [m].

$\rho$ : resistividad del cobre [ $\Omega/m$ ].

$f$ : frecuencia [Hz].

### 3.2.3. Capacidad parásita, $C_{L2}$

En este circuito sí que se producirá una capacidad parásita ya que las espiras de la bobina secundaria están muy próximas entre sí. Aunque esta capacidad será de bajo valor, será necesario tenerla en cuenta pues puede afectar a la frecuencia de resonancia.

La capacidad parásita de una bobina se puede calcular utilizando la fórmula empírica de Medhurst [14]:

$$C_{L2} = K \cdot D \text{ [pF]} \quad (3.13)$$

Donde:

$$K = 0,1126 \cdot \frac{H}{D} + 0,08 + \frac{0,27}{\sqrt{\frac{H}{D}}} \quad (3.14)$$

Siendo:

$H$ : altura de la bobina secundaria [cm].

$D$ : diámetro de la bobina secundaria [cm].

### 3.2.4. Terminal superior, $C_{top}$

El terminal superior del circuito secundario de la bobina de Tesla es el encargado de producir las descargas eléctricas al aire. Normalmente se suele emplear un toroide (figura 3.2) o una esfera de aluminio como terminal superior.

Este elemento se comporta como un condensador almacenando la carga eléctrica en la superficie exterior. Como consecuencia de ello, el aire que hay alrededor del terminal se ioniza convirtiéndose en conductor de la electricidad y produciendo las descargas eléctricas [3].

#### 3.2.4.1. Toroide

El toroide es la opción más utilizada ya que disminuye el campo eléctrico que rodea la parte superior de la bobina secundaria evitando así que se produzcan arcos eléctricos que puedan dirigirse al arrollamiento de la bobina pudiendo dañarla. Gracias a esto, las descargas eléctricas serán lanzadas directamente al aire. Además, se requiere menor volumen de material

que el que se necesitaría si se quisiera colocar una esfera para obtener la misma capacidad [3, 2].

Cabe destacar que la capacidad con respecto a tierra que presenta este elemento afectará a la frecuencia de resonancia del circuito.

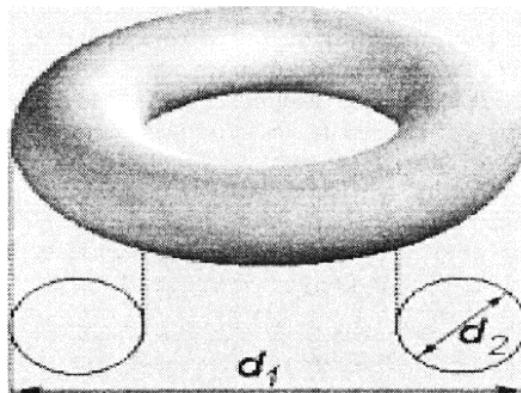


Figura 3.2. Toroide [15]

La capacidad de un toroide se puede calcular a partir de la siguiente fórmula empírica (cortesía de Bert Pool) [8]:

$$C_{\text{toroide}} = 2,8 \cdot \left( 1,2781 - \frac{d_2}{d_1} \right) \cdot \sqrt{0,1217 \cdot d_2 \cdot (d_1 - d_2)} \quad [\text{pF}] \quad (3.15)$$

Siendo:

$d_1$ : radio exterior del toroide [cm].

$d_2$ : radio interior de la sección transversal [cm].

### 3.2.4.2. Esfera

Aunque el toroide resultará más eficiente como terminal superior que la esfera, si se desea cambiar éste por una esfera, la capacidad será [16]:

$$C_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot R \quad [\text{F}] \quad (3.16)$$

Siendo:

$\epsilon_0$ : permitividad del vacío ( $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$ ).

R: radio de la esfera [m].

### 3.2.5. Capacidad total, $C_2$

La capacidad total del circuito secundario será la suma de la capacidad parásita de la bobina secundaria y la capacidad propia del toroide o terminal superior:

$$C_2 = C_{\text{top}} + C_{L2} \quad [\text{F}] \quad (3.17)$$

Siendo:

$C_{\text{top}}$ : capacidad del terminal superior correspondiente.

$C_{L2}$ : capacidad parásita de la bobina secundaria.

Se debe tener en cuenta que la capacidad del secundario es muy sensible ya que cualquier objeto que haya alrededor o incluso una persona puede modificar la capacidad total del circuito secundario, afectando así a la frecuencia de resonancia [10].

Por ejemplo, si una persona se acerca al toroide puede modificar la capacidad total aumentándola. Esta persona se comportará como un condensador que almacena carga eléctrica también conectado a tierra y que quedará en paralelo a la capacidad que presenta el toroide con respecto a tierra.

El aumento de esta capacidad provocará un cambio en la frecuencia de resonancia del circuito secundario, lo que hará que cada circuito trabaje a una frecuencia distinta, disminuyendo así la tensión obtenida en el secundario.

De nuevo, para el modelo clásico, a partir de la energía almacenada en el condensador primario, se puede calcular la energía transferida al circuito secundario de una forma aproximada como [24]:

$$E_s = E_p \cdot \rho(\%) \quad [\text{J}] \quad (3.18)$$

Siendo:

$\rho(\%)$ : eficiencia con la que se transfiere la energía. Este valor suele estar comprendido entre el 60 y el 85% [24].

$E_p$ : energía almacenada en el condensador primario [J].

A partir de esta expresión se puede calcular la tensión de salida que se produce en el circuito secundario, sabiendo que:

$$E_s = \frac{C_2 \cdot V_{\text{out}}^2}{2} \quad [\text{J}] \quad (3.19)$$

Siendo:

$C_2$ : capacidad total del circuito secundario [F]

$V_{\text{out}}$ : tensión de salida que se produce entre el terminal superior y tierra [V].

Entonces:

$$\frac{C_2 \cdot V_{out}^2}{2} = \frac{C_1 \cdot V_p^2}{2} \cdot \rho(\%) \quad (3.20)$$

$$V_{out} = V_p \cdot \sqrt{\rho(\%) \cdot \frac{C_1}{C_2}} [V] \quad (3.21)$$

Para el cálculo analítico de la tensión de salida de la bobina de Tesla de estado sólido se puede consultar el documento de la referencia número 9 donde se muestra el desarrollo de la misma.

## 4. SIMULACIÓN DEL SISTEMA

En este capítulo se describen las diferentes herramientas informáticas que se han utilizado para simular la operación del sistema, a partir de su circuito equivalente, y para calcular los parámetros característicos de la bobina de Tesla, inductancias y capacidades, los cuales serán comparados con los resultados obtenidos de forma experimental y analítica.

### 4.1. Software de simulación

Como herramienta para análisis numérico, diseño y simulación de circuitos con procesamiento de señales se ha utilizado el software libre Scilab. Con este programa se ha conseguido simular la operación del sistema mediante su circuito equivalente.

También se ha utilizado el software libre FEMM, como herramienta de resolución numérica de problemas electromagnéticos por el método de elementos finitos. En este caso, se han realizado simulaciones para calcular las capacidades e inductancias de los circuitos primario y secundario.

Estas simulaciones han sido realizadas con el fin de verificar y contrastar los datos obtenidos a partir de los cálculos matemáticos que se presentan en el capítulo 3 y los resultados obtenidos de forma experimental en el laboratorio que son descritos en el capítulo 5.

Para obtener más información acerca de los dos softwares empleados, véase anexo 5.

### 4.2. Circuito equivalente simulado

El circuito de la bobina de Tesla se comporta como un transformador de n\'cleo de aire con dos bobinas acopladas que tienen un coeficiente de acoplamiento, k.

Para una bobina de Tesla, el valor del coeficiente de acoplamiento suele estar comprendido entre 0,1 y 0,25 aproximadamente [24]. Este coeficiente se puede obtener a partir del coeficiente de inducción mutua y las inductancias de cada bobina [8]:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \quad (4.1)$$

Siendo:

k: coeficiente de acoplamiento de las bobinas.

M: coeficiente de inducción mutua [H].

L<sub>1</sub>: inductancia de la bobina del circuito primario [H].

L<sub>2</sub>: inductancia de la bobina del circuito secundario [H].

Véase el apartado 5.2.3 para obtener más información acerca del c\'lculo de estos coeficientes.

El acoplamiento entre bobinas es equivalente a una inductancia mutua entre las bobinas de los dos circuitos, esto se puede demostrar f\'cilmente aplicando el an\'lisis de circuitos el\'ctricos al circuito original.

Para la simulación de este circuito se han utilizado los parámetros de las dos bobinas de Tesla disponibles en el departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Zaragoza. Dado que no había datos disponibles del valor de cada componente, estos han sido calculados a partir de las medidas tomadas en el laboratorio. Para más información acerca del cálculo de estos parámetros, véase el anexo 4.

El circuito equivalente simulado para el caso de la bobina de Tesla de estado sólido es el que se muestra en la figura 4.1.

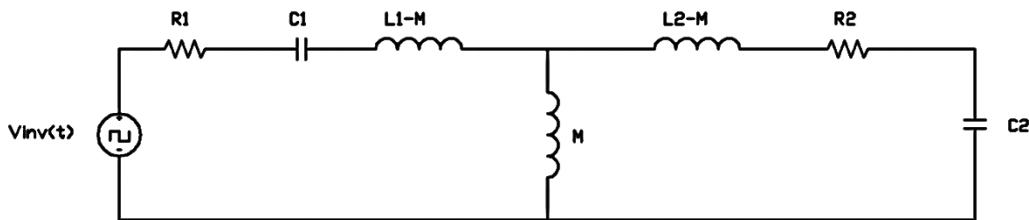


Figura 4.1. Circuito equivalente de la bobina de Tesla.

Para la simulación de la bobina de Tesla clásica se utiliza el circuito de la figura 4.1, pero, en este caso, sin la excitación externa, ya que cuando salte el arco eléctrico entre los terminales del explosor se producirá un cortocircuito que dejará al transformador aislado del resto del circuito, quedando, así, el condensador cargado a la tensión que produce el arco.

## 4.3. Simulación y resultados

### 4.3.1. Simulación de los elementos constitutivos del circuito

Utilizando el software de elementos finitos FEMM, se han simulado los diferentes componentes del circuito con el fin de verificar los valores obtenidos en el laboratorio con la bobina de Tesla disponible. En este caso, solo se han simulado los componentes de la bobina de Tesla de estado sólido, ya que la simulación de los componentes del modelo clásico se realizaría de la misma forma, únicamente cambiando las geometrías de los componentes.

#### 4.3.1.1. Inductancias

Se dibujan las dos bobinas respecto al eje de simetría, z, con las alturas y el grosor del conductor de las bobinas originales tal y como aparece en la figura 4.2.

Es necesario establecer una frontera y asignar un material al espacio que se encuentra alrededor de las bobinas, para ello se dibuja un semicírculo y se le asigna un material. En este caso, es aire lo que rodea a las bobinas, por lo que a este espacio se le asigna un material con las propiedades del aire.

También es necesario asignar un material a las bobinas. Como las dos están hechas con conductor de cobre, se les asignan las propiedades del cobre.

Una vez definido el material de cada bobina, se asigna a cada una un circuito diferente y un número de vueltas.

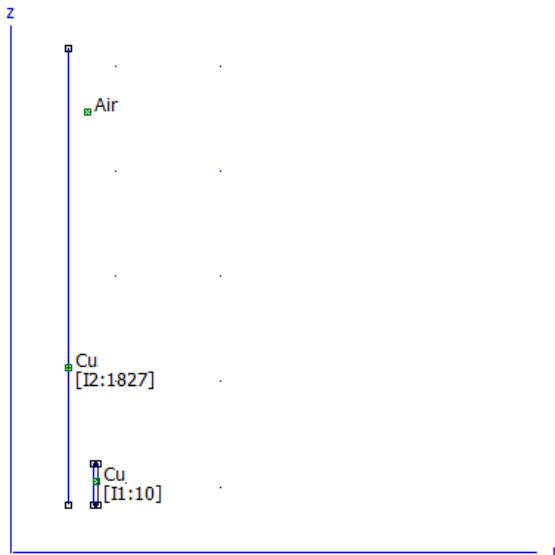


Figura 4.2. Bobinas dibujadas en FEMM.

En la figura 4.2 no se muestran la frontera debido a que no se apreciarían las bobinas. El dibujo completo se puede ver en la figura 4.3.

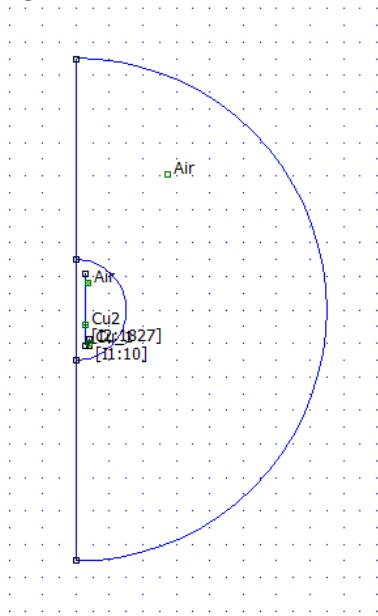


Figura 4.3. Dibujo completo en FEMM.

El primer semicírculo es una región de aire definida únicamente para poder realizar un mallado más fino en la zona cercana a las bobinas y así conseguir mayor precisión sin incrementar mucho el número de elementos a utilizar en el cálculo.

Para hallar la inductancia de cada bobina se somete a una bobina a una intensidad de 1 Amperio, mientras que por la otra bobina no circula corriente. Esta corriente creará un flujo de

campo magnético sobre la misma bobina. El programa calcula la inductancia a partir de la energía magnética total en la región.

Los datos obtenidos para cada bobina son:

$$L_1 = 24,015 \mu\text{H}.$$

$$L_2 = 83,4 \text{ mH}.$$

#### 4.3.1.2. Coeficiente de acoplamiento

Utilizando el dibujo de la figura 4.3, se calcula el coeficiente de acoplamiento. Para ello, primero se somete a una intensidad de 1 Amperio a cada bobina y se calcula la energía del campo magnético. A partir de la energía del campo magnético, se obtiene la inductancia resultante como:

$$L_A = \frac{2 \cdot W_A}{I^2} = \frac{2 \cdot 0,04205 \text{ J}}{1 \text{ A}^2} = 0,0841 \text{ H} \quad (4.2)$$

Siendo:

$W_A$ : energía del campo magnético [J].

$I$ : corriente que circula por las bobinas [A].

$L_A$ : inductancia resultante de conectar las dos bobinas en serie a una corriente de 1 Amperio [H].

Después, se somete a una intensidad de 1 Amperio a una bobina y a la otra a una intensidad de -1 Amperio, de modo que se obtendrá una inductancia resultante de conectar las dos bobinas en anti-serie:

$$L_B = \frac{2 \cdot W_B}{I^2} = \frac{2 \cdot 0,04141 \text{ J}}{1 \text{ A}^2} = 0,08282 \text{ H} \quad (4.3)$$

Siendo:

$W_B$ : energía del campo magnético [J].

$I$ : corriente que circula por las bobinas [A].

$L_B$ : inductancia resultante de conectar las dos bobinas en anti-serie a una corriente de 1 Amperio [H].

A partir de estos resultados, se puede calcular el valor de la inductancia mutua como:

$$M = \frac{L_A - L_B}{4} = 0,32 \text{ mH}. \quad (4.4)$$

Para obtener más información acerca de cómo se obtiene la ecuación 4.4, véase el apartado 5.2.3.

Y, por lo tanto, el coeficiente de acoplamiento, utilizando la ecuación 4.1 y los datos de las inductancias,  $L_1$  y  $L_2$ , obtenidas con FEMM, será:

$$k = 0,226.$$

#### 4.3.1.3. Capacidad del terminal superior

El terminal superior, por el que se producen las descargas eléctricas al aire, de la bobina de Tesla disponible en el laboratorio de la Universidad de Zaragoza no es un toroide, por lo que su simulación en FEMM ha sido clave para obtener su capacidad a tierra. Se trata de la unión de dos platos de aluminio (véase figura Anexo.4.3.)

En este caso se dibuja el perfil del elemento a simular respecto al eje de revolución a una distancia del que será el plano de tierra igual a la altura de la bobina secundaria.

Al contorno del elemento se le asigna la condición de conductor a la tensión de 1 voltio y al espacio circundante se le asigna la propiedad de aire, como en el caso de las bobinas.

Se dibuja un cuarto de circunferencia como frontera para el problema tal y como se muestra en la figura 4.3, y al segmento inferior se le asigna la condición de conductor de tierra con una tensión nula ya que este será el plano de tierra.

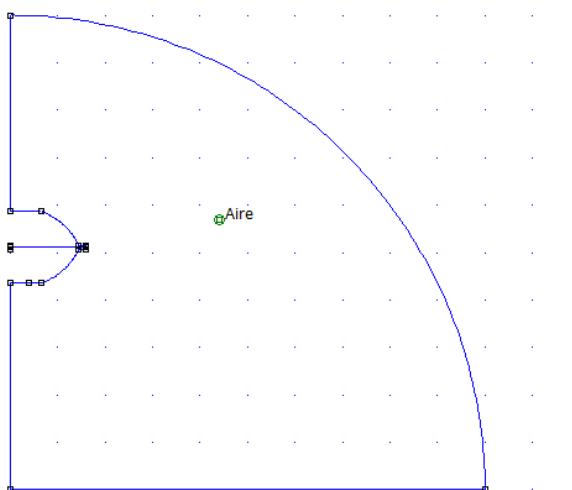


Figura 4.5. Simulación del terminal superior en FEMM.

Con el programa se obtiene el valor de la carga eléctrica. Dividiendo este valor por el valor de la tensión (1 V.) se obtiene el valor de la capacidad respecto a tierra, que en este caso resulta ser:

$$C_{top} = 13,7 \text{ pF}.$$

#### 4.3.1.4. Frecuencia de resonancia

A partir de los resultados obtenidos con la simulación de los elementos en el programa FEMM, se puede calcular la frecuencia de resonancia de cada circuito:

$$f_{\text{primario}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{24,015 \mu H \cdot 75 nF}} = 118,6 \text{ kHz}$$

Para calcular la frecuencia de resonancia del circuito secundario, es necesario conocer la capacidad total de este circuito. Utilizando la ecuación 3.17 y sabiendo que la capacidad parásita de la bobina secundaria es 7,32 pF (véase anexo 4), se obtiene la capacidad total del circuito secundario:

$$C_2 = 13,7 \text{ pF} + 7,32 \text{ pF} = 21 \text{ pF}$$

$$f_{\text{secundario}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{83,4 \text{ mH} \cdot 21 \text{ pF}}} = 120,7 \text{ kHz}$$

### 4.3.2. Simulación de la operación del sistema

A partir del circuito equivalente del sistema, se ha simulado la operación del circuito completo de la bobina de Tesla utilizando el software de análisis numérico Scilab con el fin de obtener la tensión máxima que se produce a la salida del circuito secundario y la potencia que se produce en el circuito primario, la cual determinará la fuente de alimentación que se debe seleccionar.

#### 4.3.2.1. Modelo de estado sólido

- Tensión máxima

Para simular el funcionamiento del circuito de la bobina de Tesla de estado sólido es necesario utilizar el circuito equivalente representado en la figura 4.1. El programa Scilab permite simular la operación de este circuito mediante el procesamiento de señales utilizando bloques definidos en el mismo programa que servirán para representar los diferentes componentes.

El circuito equivalente construido en Scilab se muestra en la figura 4.6. Para poder ver las señales de tensión e intensidad se han incorporado los bloques de osciloscopio.

El valor de los parámetros del circuito equivalente que se han utilizado para realizar la simulación está reflejado en la tabla 4.1. Estos datos corresponden a los datos obtenidos con las simulaciones en FEMM.

<b>V<sub>inv</sub></b>	<b>R<sub>1</sub></b>	<b>L<sub>1</sub></b>	<b>C<sub>1</sub></b>	<b>R<sub>2</sub></b>	<b>L<sub>2</sub></b>	<b>C<sub>top</sub></b>	<b>C<sub>2</sub></b>	<b>M</b>	<b>f<sub>resonancia</sub></b>
300 V	284,74 mΩ	22,015 μH	75 nF	352 Ω	83,4 mH	13,7 pF	21 pF	0,32 mH	122,5 kHz

Tabla 4.1 Parámetros utilizados en la simulación de la bobina de Tesla

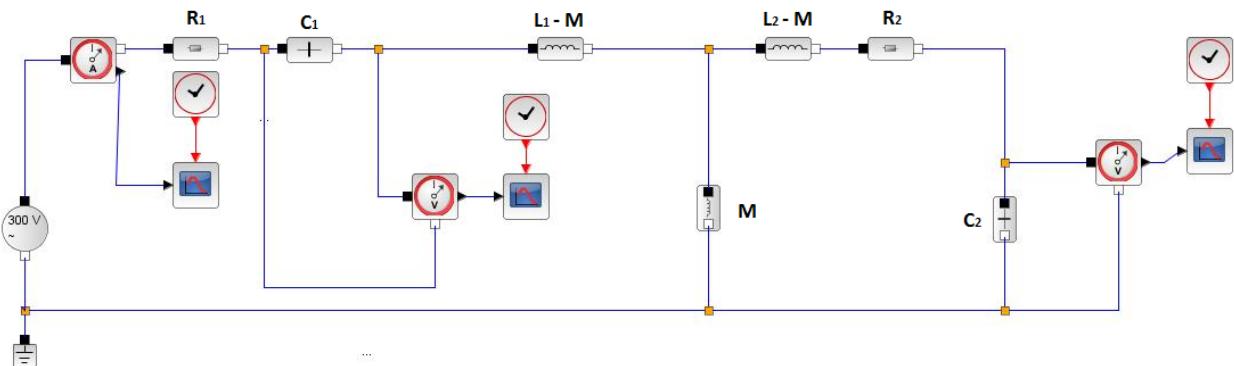


Figura 4.6. Circuito equivalente del modelo de estado sólido en Scilab.

Puesto que para el primer armónico una señal cuadrada de amplitud  $U_{amp}$  es equivalente a una señal sinusoidal de amplitud  $\frac{4 \cdot U_{amp}}{\pi}$ , según el cálculo por series de Fourier, se ha realizado la simulación con una excitación sinusoidal de amplitud 300 V para simplificar el problema. No obstante, en la realidad se utiliza una excitación de señal cuadrada porque es más cómodo en cuanto a electrónica se refiere.

Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

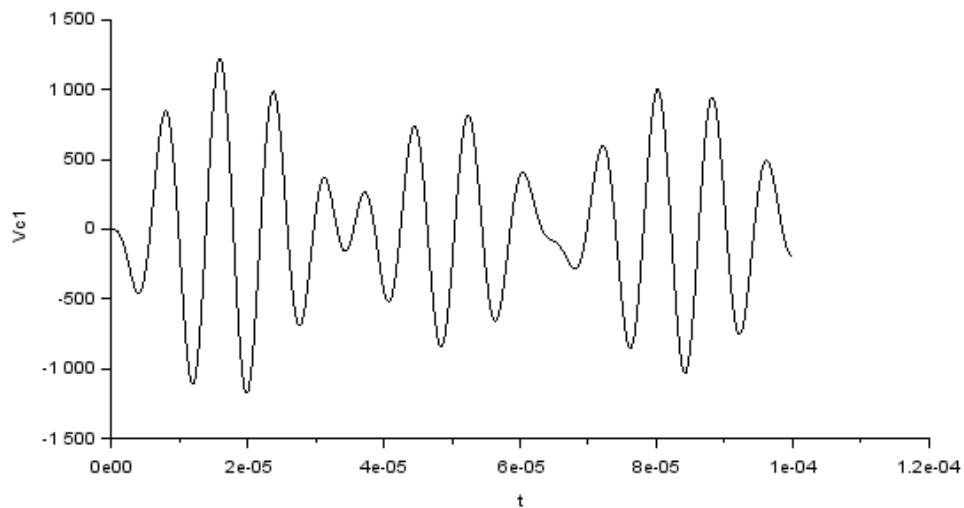


Figura 4.7. Tensión en el condensador primario.

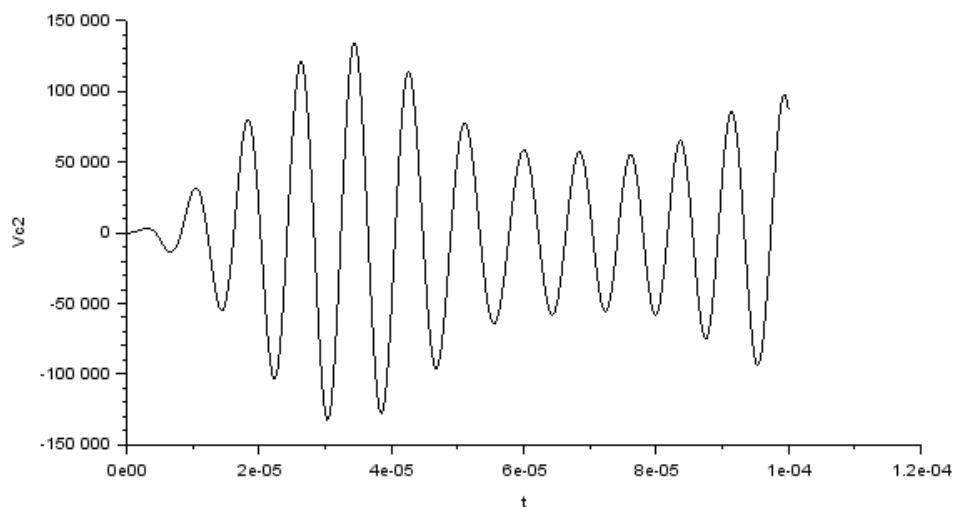


Figura 4.8. Tensión de salida del circuito secundario.

En la figura 4.8 se puede observar como la tensión es máxima cuando el condensador primario se ha descargado (figura 4.7) y va decayendo conforme el condensador se vuelve a cargar. La energía almacenada en el condensador primario es acumulada en la bobina primaria cuando este se va descargando, la cual se transfiere a la bobina secundaria produciendo que la energía eléctrica se disipe en el aire en forma de descarga eléctrica.

En la figura 4.9 se muestra la tensión de salida del secundario aumentando la escala de tiempo:

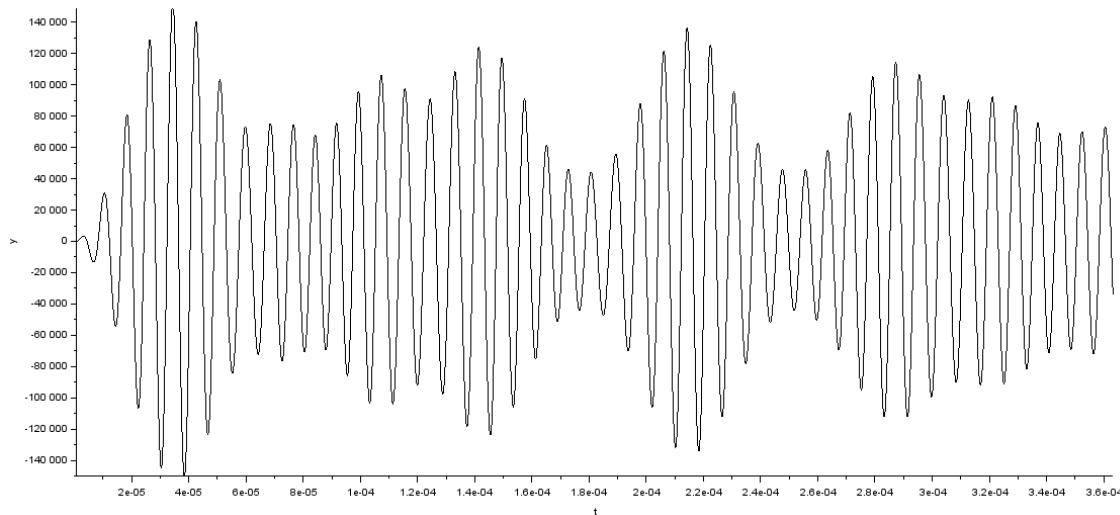


Figura 4.9. Tensión de salida del secundario con escala de tiempo aumentada.

Con esta simulación se puede obtener el valor de la tensión máxima que se producirá a la salida del circuito secundario, que, en este caso, resulta ser de unos 150 kV, aproximadamente.

Utilizando la ecuación para la tensión del condensador de la referencia [9], se obtiene una tensión de 208 kV, que resulta mayor que la obtenida en la simulación ya que en la fórmula analítica se suponen despreciables los valores de las resistencias.

- Potencia de la fuente de alimentación

La fuente de potencia conmutada que alimenta al circuito primario se debe elegir en función de la potencia disipada en la resistencia del circuito primario.

Con Scilab también se puede calcular este parámetro. Para ello, se comunica la herramienta Xcos con el editor de texto Scinotes, donde se escriben las líneas de código necesarias para calcular la potencia en función de la corriente que pasa por la resistencia del circuito primario. En la consola Xcos se crea un bloque que almacena en un vector, llamado I1, un número de elementos de la variable deseada, en este caso, la corriente que circula por la resistencia del circuito primario en distintos instantes de tiempo. Este vector es llamado desde Scinotes, donde se podrá operar con todos sus elementos.

En la figura 4.10 se muestran las líneas de código de Scinotes para el cálculo de la potencia:

```
//-Calculo-de-la-potencia-necesaria-para-la-fuente-de-alimentacion.

Ir1=I1.values //.-Genera-un-vector-con-los-valores-de-la-corriente-que-pasa-por-la-R1-a-lo-largo-del-tiempo.
media=mean(I1.values)
Vsalida=Vc2.values //.-Tensión-en-el-condensador-2.
Vmedia=mean(Vc2.values)
Imax=max(I1.values) //.-Valor-máximo-de-corriente-que-pasa-por-la-R1.
Vmax=max(Vc2.values) //.-Valor-máximo-de-tensión-de-salida.

//Valor.medio.de.la.I^2
Icuad=Ir1.^2 //.-I^2
mediaIcuad=mean(Icuad)

R1=0.2847 //.-Ohmios
P=mediaIcuad*R1 //.-Potencia-disipada-en-la-R1|
```

Figura 4.10. Líneas de código empleadas para el cálculo de la potencia.

La potencia obtenida para este caso son 260,3 W.

### 4.3.2.2. Modelo clásico

- Tensión máxima

Para simular el funcionamiento del circuito de la bobina de Tesla clásica es necesario utilizar el circuito equivalente representado en la figura 4.1, pero, en este caso, sin el generador, como se ha mencionado anteriormente.

El circuito equivalente construido en Scilab se muestra en la figura 4.11.

El valor de los parámetros del circuito equivalente que se han utilizado para realizar la simulación está reflejado en la tabla 4.1.

<b>C<sub>condensador</sub></b>	<b>R<sub>1</sub></b>	<b>L<sub>1</sub></b>	<b>C<sub>1</sub></b>	<b>R<sub>2</sub></b>	<b>L<sub>2</sub></b>	<b>C<sub>2</sub></b>	<b>M</b>
6000 V	4,133 mΩ	9,34 μH	10 nF	13,486 Ω	7,75 mH	12,05 pF	52,4 μH

Tabla 4.1 Parámetros utilizados en la simulación de la bobina de Tesla

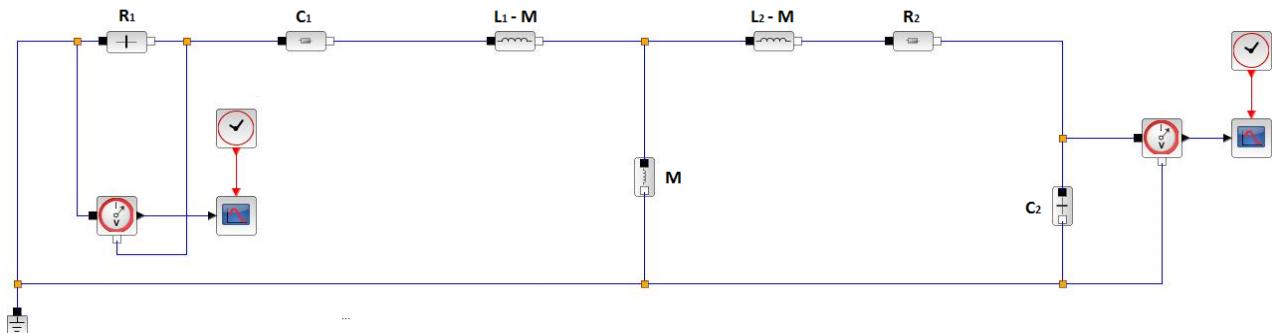


Figura 4.11. Circuito equivalente del modelo clásico en Scilab.

Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

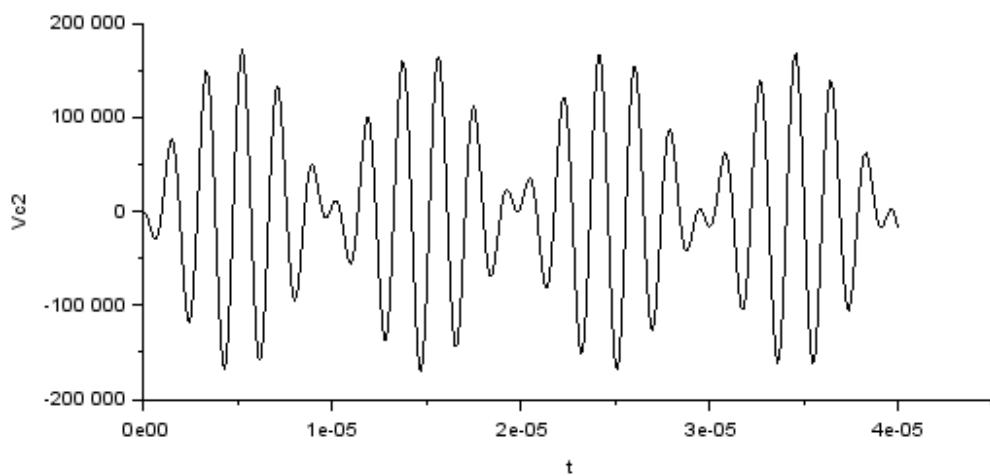


Figura 4.12. Tensión de salida del circuito secundario.

En este caso, la tensión máxima resulta ser, aproximadamente, 170 kV (figura 4.12) y la frecuencia de resonancia es 555,55 kHz.

Utilizando la ecuación 3.21, con los mismos datos que se han utilizado para la simulación, y suponiendo una transferencia de energía del 85%, se obtiene una tensión de 159,35 kV, que resulta un 6,26% menor respecto al valor obtenido en la simulación. Esta diferencia puede deberse a que se ha estimado un valor de pérdidas menor que el real.

## 5. COMPROBACIONES EXPERIMENTALES

En el laboratorio se han realizado distintas pruebas con la bobina de Tesla de estado sólido que hay disponible para contrastar y verificar los datos obtenidos a partir de las simulaciones realizadas con los programas Scilab y FEMM, explicadas en el capítulo anterior, y los datos obtenidos mediante la aplicación de fórmulas matemáticas (véase tabla 4.1 y anexo 4).

### 5.1. Frecuencia de resonancia

Para medir la frecuencia de resonancia se ha utilizado un generador de funciones para excitar al circuito con una señal sinusoidal de frecuencia variable hasta alcanzar la frecuencia de resonancia del circuito, un osciloscopio para poder visualizar la onda y poder medir la frecuencia a la cual la tensión se hace máxima, es decir, la frecuencia de resonancia.

Se han realizado estas medidas tanto para el circuito primario como para el secundario, ambos por separado.

#### 5.1.1. Circuito primario

Separando el circuito primario de la fuente de alimentación, se conectan en serie la bobina primaria y el condensador primario a una resistencia de  $5,1 \Omega$ . El generador de señales se conecta entre la resistencia y la bobina y la sonda del osciloscopio se conecta a la resistencia.

Visualizando la onda de tensión en el osciloscopio, se varía la frecuencia en el generador de señales hasta obtener la máxima tensión en la resistencia. Esta será la frecuencia de resonancia del circuito.

En la figura 5.1. se muestra el montaje del circuito primario para obtener su frecuencia de resonancia.

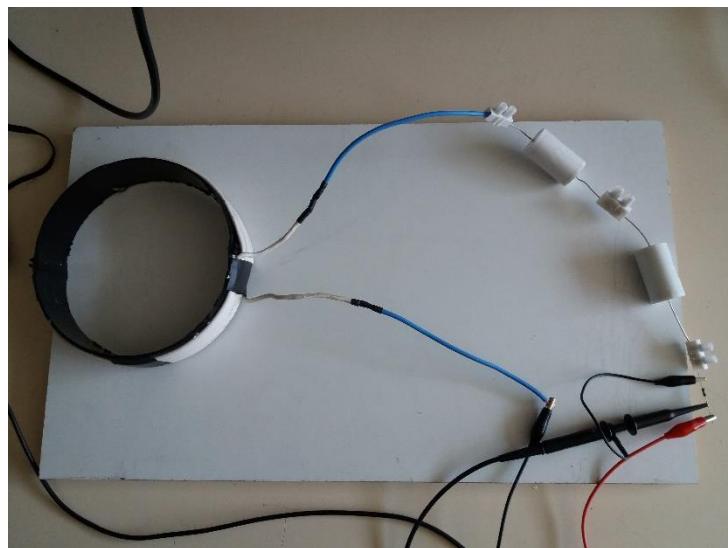


Figura 5.1. Montaje del circuito primario para medir la frecuencia de resonancia.

En la figura 5.2 se puede comprobar que el período de la señal sinusoidal para la que se obtiene la máxima tensión en la resistencia es 8,2  $\mu$ s. Por lo tanto, la frecuencia de resonancia, calculada como el inverso de este período, es **122 kHz**.

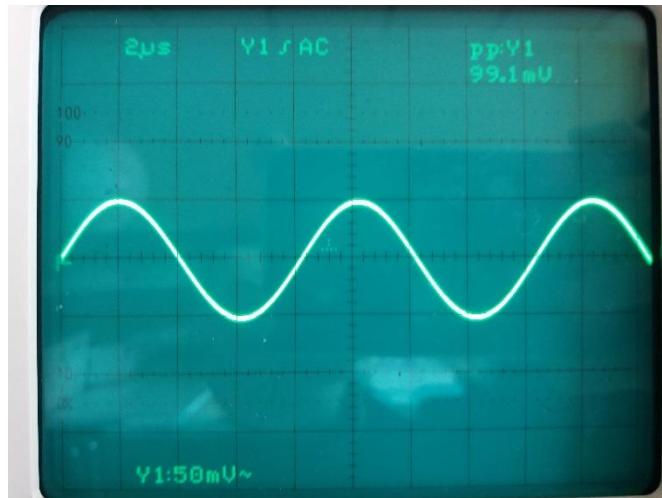


Figura 5.2. Frecuencia de resonancia del circuito primario.

La frecuencia de resonancia obtenida a partir de las simulaciones con el programa FEMM era 118,6 kHz, muy próxima a la obtenida experimentalmente y a la obtenida según las fórmulas presentadas en el capítulo 3 y utilizadas en el anexo 4 para calcular los parámetros del circuito. En conclusión, ambos métodos se pueden considerar válidos para la obtención de los parámetros del circuito primario de la bobina de Tesla.

### 5.1.2. Circuito secundario

Para obtener la frecuencia de resonancia del circuito secundario se conectan en serie la bobina secundaria, el terminal superior y una resistencia de  $1\text{k}\Omega$  para poder visualizar la onda de tensión en el osciloscopio y hallar la frecuencia de resonancia. Se conecta el generador de señales al circuito y el osciloscopio a la resistencia.

A diferencia del circuito primario, para este es necesario colocar un plano de tierra al que poder conectar el generador de señales. Para ello se utiliza una chapa metálica como la que se muestra en la figura 5.3.

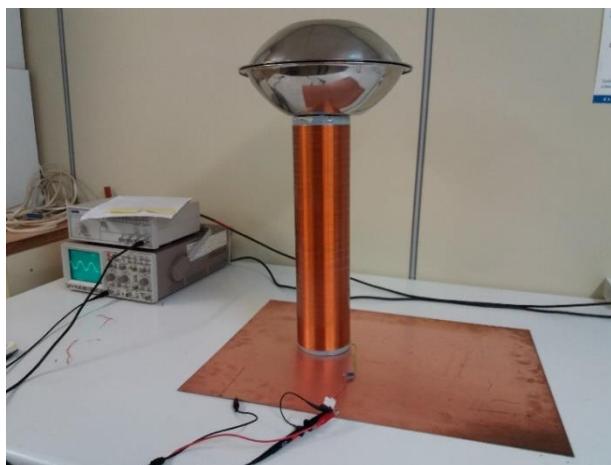


Figura 5.3. Montaje del circuito secundario para medir la frecuencia de resonancia.

En la figura 5.4 se muestra en detalle la conexión en serie de la resistencia y la bobina secundaria.

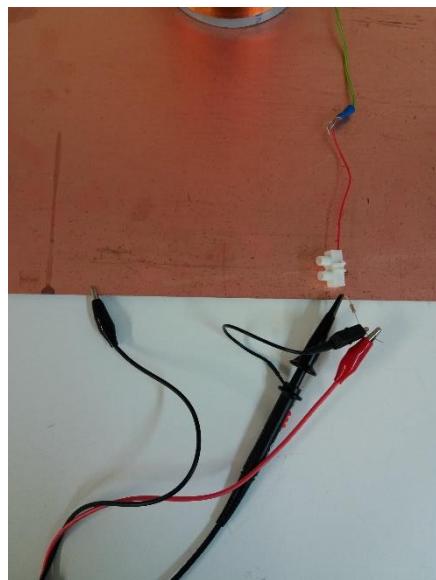


Figura 5.4. Conexión de la resistencia en serie con la bobina secundaria.

De nuevo, cuando la tensión sea máxima en la resistencia, se obtendrá la frecuencia de resonancia ya que las impedancias capacitiva e inductiva se anularán, obteniendo la mínima impedancia en el circuito.

En la figura 5.5 se muestra la frecuencia de resonancia obtenida para el circuito secundario. Con un período de  $7,2 \mu\text{s}$ , la frecuencia resulta **138 kHz**.

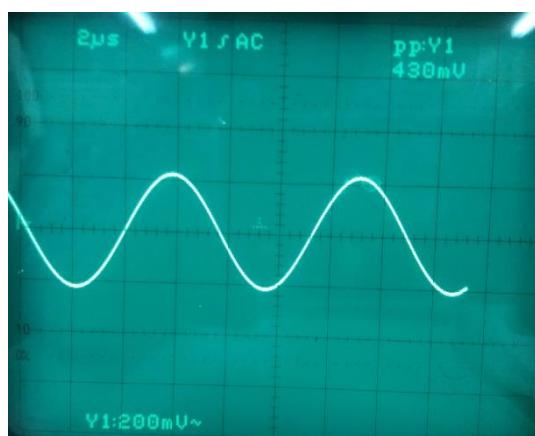


Figura 5.5. Frecuencia de resonancia del circuito secundario.

En este caso, la frecuencia se aleja ligeramente del valor calculado, 122,5 kHz, y del valor obtenido a partir de la simulación, 120,7 Hz. Esto puede deberse a que en el momento de la medida en el laboratorio había objetos próximos al circuito, lo que podría variar el valor de la capacidad del terminal superior.

## 5.2. Parámetros de los elementos constitutivos de la bobina de Tesla

### 5.2.1. Circuito primario

#### 5.2.1.1. Bobina primaria:

Utilizando un analizador de impedancias se ha obtenido, para una frecuencia de 120 kHz, el valor de la inductancia:

$$L_1 = 24,5 \mu\text{H}.$$

Para medir la resistencia parásita de la bobina primaria en corriente continua, se ha utilizado el método de 4 hilos con una fuente de corriente continua en lugar de utilizar un polímetro, puesto que, al ser un valor tan bajo, se obtiene mayor exactitud con este método:

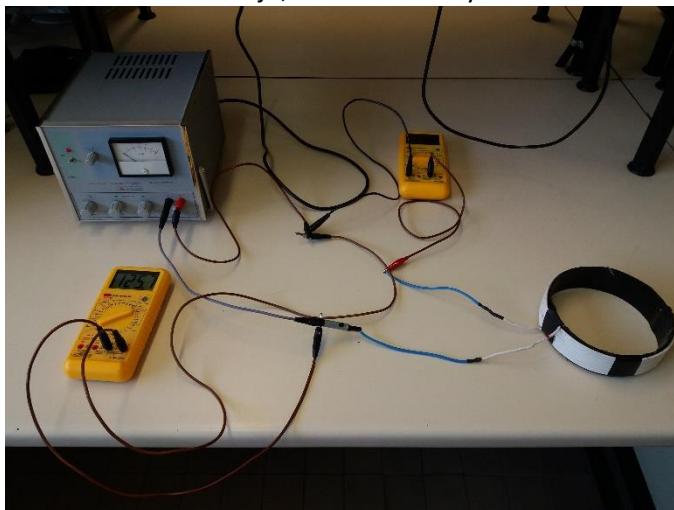


Figura 5.6. Medida de la resistencia de la bobina primaria en continua con el método de 4 hilos.

La resistencia obtenida con este método es:

$$R_{C1} \text{ (4 hilos)} = 125,7 \text{ m}\Omega.$$

A partir del procedimiento seguido en el anexo 4 para el cálculo de la resistencia para una frecuencia de 122,5 kHz, para este caso esta resistencia resulta ser:

$$R_{L1} = 289,11 \text{ m}\Omega$$

### 5.2.2. Circuito secundario

#### 5.2.2.1. Bobina secundaria:

Utilizando un analizador de impedancias se ha obtenido, para una frecuencia de 120 kHz, el valor de la inductancia del circuito secundario:

$$L_2 = 78 \text{ mH.}$$

En este caso, la resistencia se ha medido con un polímetro, por lo que esta medida será la de la resistencia en continua:

$$R_{L2} = 352 \Omega.$$

#### 5.2.2.2. Condensador secundario:

Para la medida del valor de la capacidad del terminal superior del circuito secundario se ha usado un capacímetro:

$$C_{top} = 13,7 \text{ pF}.$$

Con esta medida, la capacidad total del circuito secundario se puede calcular como:

$$C_2 = C_{top} + C_{L2} = 13,7 \text{ pF} + 7,3 \text{ pF} = 21 \text{ pF}$$

Cabe destacar que la capacidad parásita de la bobina secundaria,  $C_{L2}$ , depende únicamente de las características geométricas de la misma.

#### **5.2.3. Coeficientes de inducción mutua y de acoplamiento**

Para hallar el coeficiente de inducción mutua,  $M$ , se puede realizar un ensayo en el laboratorio que consiste en colocar las bobinas en serie y en anti-serie sometiéndolas a una corriente.

Esto se puede conseguir con un analizador de impedancias que funcionará como fuente de alimentación.

1) Primero se conectan en serie de modo que la corriente entre a las bobinas por el mismo terminal (véase figura 5.7).

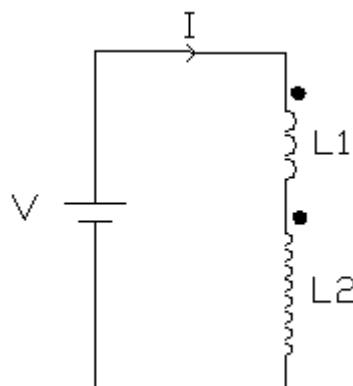


Figura 5.7. Bobinas conectadas en serie al analizador de impedancias.

En el analizador de impedancias se mide la inductancia total,  $L_A$ , a una frecuencia de 120 kHz:

$$L_A = 84,67 \text{ mH}.$$

Si se analiza el circuito por el método de mallas se puede obtener esta inductancia equivalente:

$$V = V_{L1} + V_{L2} \quad (5.1)$$

Siendo estas tensiones:

$$V_{L1} = L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + M \cdot \frac{dI_2}{dt} \quad (5.2)$$

$$V_{L2} = L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + M \cdot \frac{dI_1}{dt} \quad (5.3)$$

(Obtenidas a partir del circuito de la figura 2.3. donde  $I_1$  es la corriente que circula por el circuito primario e  $I_2$  la que circula por el circuito secundario).

Entonces:

$$V = L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} + M \cdot \frac{dI_2}{dt} + L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} + M \cdot \frac{dI_1}{dt} \quad (5.4)$$

como  $I_1 = I_2$ :

$$V = (L_1 + L_2 + 2 \cdot M) \cdot \frac{dI}{dt} \quad (5.5)$$

$$L_A = L_1 + L_2 + 2 \cdot M \quad (5.6)$$

2) Después, se conectan las dos bobinas en anti-serie para que la corriente entre en cada una por un terminal distinto (véase figura 5.8).

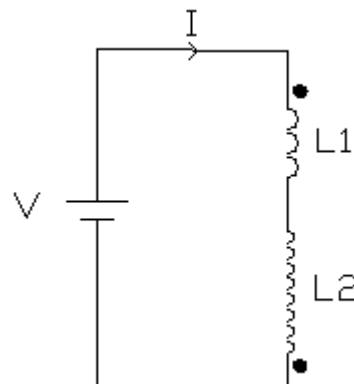


Figura 5.8. Bobinas conectadas en anti-serie al analizador de impedancias.

En el analizador de impedancias se mide la inductancia total,  $L_B$ , a una frecuencia de 120 kHz:

$$L_B = 83,5 \text{ mH.}$$

Analizando el circuito igual que en el caso anterior se obtiene:

$$V = L_1 \cdot \frac{dI_1}{dt} - M \cdot \frac{dI_2}{dt} + L_2 \cdot \frac{dI_2}{dt} - M \cdot \frac{dI_1}{dt} \quad (5.7)$$

como  $I_1 = I_2$ :

$$V = (L_1 + L_2 - 2 \cdot M) \cdot \frac{dI}{dt} \quad (5.8)$$

$$L_B = L_1 + L_2 - 2 \cdot M \quad (5.7)$$

Restando  $L_A$  y  $L_B$  se obtiene el valor de  $M$ :

$$L_A - L_B = (L_1 + L_2 + 2 \cdot M) - (L_1 + L_2 - 2 \cdot M) = 4 \cdot M$$

$$M = \frac{L_A - L_B}{4} \quad (5.8)$$

Para este caso se obtiene el siguiente coeficiente de inducción mutua:

$$M = \frac{84,67 \text{ mH} - 83,5 \text{ mH}}{4} = 0,29 \text{ mH}$$

A partir de este coeficiente se puede hallar el coeficiente de acoplamiento,  $k$ , utilizando la ecuación 4.1:

$$k = \frac{0,29 \text{ mH}}{\sqrt{24,5 \mu\text{H} \cdot 78 \text{ mH}}} = 0,209$$

### 5.3. Tensión de salida

La tensión de salida es la tensión de descarga al aire que se produce entre el terminal superior y tierra. Debido a que esta tensión es muy elevada, no se puede medir directamente con el osciloscopio. Sin embargo, podemos obtener la forma de onda colocando la sonda del osciloscopio en un soporte a unos metros de la bobina de Tesla. Aunque el osciloscopio no captará la verdadera amplitud de la tensión de salida, servirá para ver el comportamiento de la tensión de salida.

Por causas técnicas no se ha podido obtener la forma de onda de la tensión de salida de la bobina de Tesla de estado sólido. Pero, gracias a la disponibilidad de una bobina de Tesla clásica en el mismo laboratorio de la Universidad de Zaragoza, se ha podido realizar la medida con este último modelo. Además, la forma de onda de la tensión de salida real de la bobina de estado sólido se asemejará bastante a la obtenida en la simulación del circuito con Scilab, por lo que servirá para comparar la tensión de salida de los dos modelos.

La forma de onda de la tensión de salida en la bobina de Tesla clásica se muestra en la figura 5.9.

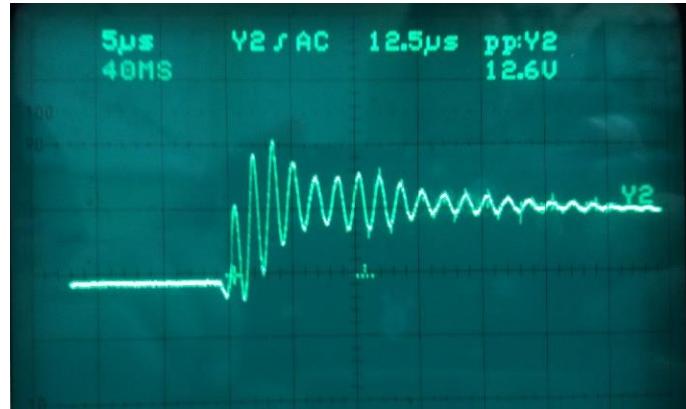


Figura 5.9. Tensión de salida obtenida con la bobina de Tesla clásica.

Comparando este resultado con el obtenido para el caso de la bobina de estado sólido (figura 4.9), se puede comprobar cómo, para este caso, la tensión tiende a cero debido a que el condensador se va descargando y la energía del circuito va decayendo debido al consumo de la misma en las resistencias, mientras que, en el modelo de estado sólido, el circuito está alimentado constantemente por la fuente de alimentación.

Aumentando la escala de la frecuencia en el osciloscopio (figura 5.10) se puede medir la frecuencia de resonancia de esta bobina:

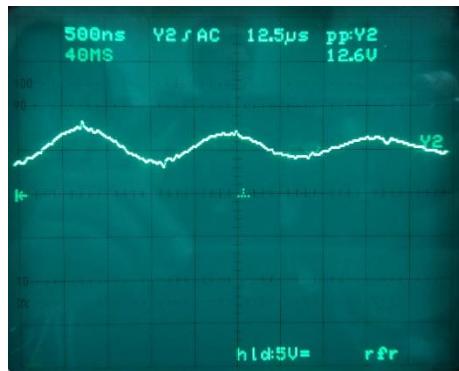


Figura 5.10. Onda de tensión de salida de la bobina de Tesla clásica.

Siendo el período de esta onda  $1,75 \mu\text{s}$ , la frecuencia de resonancia de esta bobina es, aproximadamente,  $571,4 \text{ kHz}$ .

En el anexo 4 se pueden encontrar los datos paramétricos de la bobina de Tesla clásica empleada en esta prueba.

## 6. DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

En la siguiente tabla se muestran todos los parámetros de la bobina de Tesla de estado sólido obtenidos mediante pruebas experimentales en el laboratorio, mediante la simulación realizada con el software FEMM en el capítulo 4, y mediante el cálculo analítico haciendo uso de las fórmulas presentadas en el capítulo 3.

	Datos experimentales	Simulación	Error (%)	Fórmulas Analíticas	Error (%)
<b>R<sub>1</sub></b>	289,11 mΩ	-	-	284,74 mΩ	-1,51
<b>L<sub>1</sub></b>	24,5 µH	24,015 µH	-1,98	22,5 µH	-8,16
<b>R<sub>2</sub></b>	352 Ω	-	-	352 Ω	0
<b>L<sub>2</sub></b>	78 mH	83,4 mH	6,92	82 mH	5,12
<b>C<sub>top</sub></b>	13,7 pF	13,7 pF	0	13,3 pF	-2,92
<b>C<sub>2</sub></b>	21 pF	21 pF	0	20,6 pF	-1,90
<b>k</b>	0,209	0,226	8,13	0,25	19,61
<b>M</b>	0,292 mH	0,32 mH	9,59	0,35 mH	19,86
<b>f<sub>primario</sub></b>	122 kHz	118,6 kHz	-2,79	122,5 kHz	0,41
<b>f<sub>secundario</sub></b>	138 kHz	120,7 kHz	-12,549	122,5 kHz	-11,23

Tabla 6.1. Tabla resumen de los datos obtenidos.

En la tabla 6.1, también se muestra el margen de error para cada parámetro calculado mediante la simulación y las fórmulas analíticas, respecto al valor obtenido de forma experimental en el laboratorio.

Como se puede comprobar, tanto los parámetros obtenidos a partir de las simulaciones con FEMM como los obtenidos mediante la aplicación de las fórmulas analíticas resultan muy próximos a los obtenidos experimentalmente.

En ambos casos, la frecuencia de resonancia del circuito secundario tiene un margen de error mayor al 10%, el cual comienza a ser un valor a tener en cuenta. Sin embargo, como se ha explicado en el apartado 5.1.1, el resultado experimental ha podido verse afectado por otros objetos metálicos que se encontraban alrededor del terminal superior en el momento de la medición, afectando a su capacidad total, y esta, a su vez, afectando a la frecuencia de resonancia del circuito.

En el caso del coeficiente de acoplamiento calculado mediante fórmulas analíticas, se ha obtenido el máximo margen de error respecto al resultado experimental, 19,86%. Este parámetro ha sido calculado mediante una aproximación en la que se supone que el campo magnético en el extremo de la bobina es la mitad del valor máximo, por lo que puede ser admisible un margen de error tan alto. De cara a la realización de un estudio previo de diseño, quizás sea conveniente tomar el valor obtenido en la simulación ya que se aproxima más al real.

En conclusión, un margen de error menor del 10% resulta admisible en este estudio, por lo que ambos métodos se pueden considerar válidos y resultarán de gran ayuda para tener una idea previa del resultado final del sistema.

## 7. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS

### 7.1. Conclusiones

En este proyecto se han desarrollado modelos de elementos finitos que permiten calcular la capacidad de los terminales del circuito secundario, la inductancia de las bobinas primaria y secundaria, su coeficiente de acoplamiento y las resistencias y capacidades parásitas de estas bobinas, válidos tanto para el modelo clásico como para el de estado sólido.

También se han desarrollado modelos circuitales, basados en el programa Scilab, que permiten la resolución transitoria del problema de la bobina de Tesla para ambos modelos, permitiendo calcular los parámetros operativos básicos: potencia consumida en la fuente de tensión, y la tensión de salida, así como las formas de onda en los distintos elementos de la máquina para los dos modelos.

Una vez desarrolladas estas herramientas, se han comparado sus resultados con los obtenidos a partir de las fórmulas analíticas disponibles en la bibliografía y con medidas realizadas en el laboratorio, concluyendo que es posible calcular con buena precisión los parámetros característicos de la máquina, tanto con las fórmulas analíticas como con las simulaciones propuestas.

Por ello, considero que las herramientas desarrolladas en este proyecto pueden servir de gran ayuda en un estudio previo de construcción de una bobina de Tesla. Además, los dos programas pueden ser descargados libremente desde las páginas oficiales de los desarrolladores, por lo que cualquier persona puede utilizarlos para su modelo. Este proyecto también pretende servir de ejemplo para futuros interesados en diseñar sus propias bobinas de Tesla.

Cabe destacar, que para la realización del presente proyecto se han utilizado como referencia una bobina de estado sólido y una clásica, ambas propiedad del departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Zaragoza, las cuales han resultado de gran ayuda para poder validar los datos obtenidos en las simulaciones y en los cálculos analíticos.

### 7.2. Líneas futuras

Uno de los objetivos futuros de este proyecto es la divulgación científica. Se pretende difundir la idea de Tesla y dejar disponible el documento para los posibles interesados.

Por otra parte, se pretende construir una nueva bobina de Tesla de estado sólido haciendo uso de las herramientas utilizadas en este proyecto para su diseño previo, así como estudiar la posibilidad de diseñar la propia fuente de alimentación o utilizar una ya existente adaptando después el modelo a construir a las características de dicha fuente.

## **II. ANEXOS**

## ANEXO 1. Bibliografía

- [1] B. Carlson, *W. Tesla, inventor de la era eléctrica*. Traducido por L. Sánchez Fernández, Barcelona, Editorial Planeta S.A., 2014.
- [2] E. Pérez de Obanos Francés, *Diseño y construcción de una bobina Tesla*, Proyecto Final de Carrera, Universidad Pública de Navarra, Febrero, 2010, accesible por internet en la dirección: <http://academica-e.unavarra.es/handle/2454/1797>
- [3] F. Fernández de Villegas, *Las bobinas de Tesla*, 2012, accesible por internet en la dirección: [http://www.ea1uro.com/eb3emd/Bobina\\_de\\_Tesla/Bobina\\_de\\_Tesla.htm](http://www.ea1uro.com/eb3emd/Bobina_de_Tesla/Bobina_de_Tesla.htm)
- [4] Young, Freedman, *Sears – Zemansky, Física universitaria con física moderna*, volumen dos. Decimosegunda edición, 2009. Editorial Addison-Wesley.
- [5] Colaboradores de Wikipedia, *Frecuencia de resonancia*. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2016, accesible por internet en la dirección: [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Frecuencia\\_de\\_resonancia&oldid=89215936](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Frecuencia_de_resonancia&oldid=89215936)
- [6] R. Burnett, *Solid State Tesla Coil: Driver Circuit Theory*, accesible por internet en la dirección: <http://www.richieburnett.co.uk/sstate2.html>
- [7] *Bobina Tesla con materiales caseros*, accesible por internet en la dirección: <http://www.cienciafacil.com/BobinaTesla.html>
- [8] M. Denicolai, *Tesla Transformer for Experimentation and Research*, Tesis de licenciatura, Universidad de Tecnología de Helsinki, Mayo, 2001, accesible por internet en la dirección: <http://serenitystreetnews.com/HERSTORY%20CRAMNOTES/5dterra%20NOTES%20AUDIO%20VIDEO/ebooks/ebooks/Tesla%20Coil%20-%20Thesis.pdf>
- [9] A. Abbasi, M. Hosein Khanzade, *Analysis of dual resonant solid state Tesla Transformer*, International Journal of Modern Engineering Research (IJMER), Vol. 3, Issue. 6, 2013, pp. 3456-3460, accesible por internet en la dirección: [http://www.ijmer.com/papers/Vol3\\_Issue6/AU3634563460.pdf](http://www.ijmer.com/papers/Vol3_Issue6/AU3634563460.pdf)
- [10] *Experiencias con la bobina de Tesla*, accesible por internet en la dirección: <https://sites.google.com/site/anilandro/02600-bobina>
- [11] L. Grandío Castiñeira, *Bobina primaria*, 2012, accesible por internet en la dirección: <http://teslalugo.blogspot.com.es/2012/09/bobina-primaria.html>
- [12] M. Behrend, *How a Tesla Coil Works*, accesible por internet en la dirección: <http://tayloredge.com/reference/Machines/TeslaCoil.pdf>
- [13] N. Reyes, *Principios de Electrónica para Altas Frecuencias*, Universidad de Chile, Enero, 2005, accesible por internet en la dirección: <http://www.astronomos.cl/conocimientos/avanzado/Informe.pdf>
- [14] R. G. Medhurst, *H.F. Resistance and self-capacitance of single-layer solenoids*, Wireless Engineer, Marzo, 1947, Pp. 80-92, accesible por internet en la dirección: <http://g3ynh.info/zdocs/refs/Medhurst/Med80-92.pdf>

- [15] H. Cadavid, G. Aponte, O. Roman Tudela, F. J. García, *Diseño y construcción de una bobina Tesla*, Revista Energía y Computación. Vol. X, Nº 2, 2001, pp. 21-26, accesible por internet en la dirección:<http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/1392/1/Diseno%20y%20construccion%20de%20una%20bobina%20tesla.pdf>
- [16] Colaboradores de Wikipedia, *Capacidad eléctrica*. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2016, accesible por internet en la dirección:[https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Capacidad\\_el%C3%A9ctrica&oldid=92431174](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Capacidad_el%C3%A9ctrica&oldid=92431174)
- [17] H. Mehlhose, *Tesla Coil Design*, 1999, accesible por internet en la dirección:[http://home.wtal.de/herbs\\_teslapage/design.html](http://home.wtal.de/herbs_teslapage/design.html)
- [18] *Bobina de Tesla, teoría básica*, accesible por internet en la dirección: [http://fede-tesla.blogspot.com.es/p/teoria\\_15.html](http://fede-tesla.blogspot.com.es/p/teoria_15.html)
- [19] Varios autores, *Tesla Coils Safety Information*, 1996, accesible por internet en la dirección:<http://www.classictesla.com/safety.html>
- [20] J. Alcaíno, El campo magnético de un solenoide, 2009, accesible por internet en la dirección:<http://cmagneticoblogspot.com.es/2009/06/el-campo-magnetico-de-un-solenoid.html>
- [21] D. Meeker, *Finite Element Method Magentics, User's Manual*, 2015, accesible por internet en la dirección: <http://www.femm.info/Archives/doc/manual42.pdf>
- [22] Colaboradores de Wikipedia, *Scilab*. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2015, accesible por internet en la dirección: <https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Scilab&oldid=84462515>
- [23] Scilab Enterprises, *Xcos for very beginners*, accesible por internet en la dirección:<http://www.scilab.org/resources/documentation/tutorials>
- [24] B. B. Anderson, *The Classic Tesla Coil, A dual-tuned resonant circuit*, Noviembre, 2000, accesible por internet en la dirección: <http://www.tb3.com/tesla/tcoperation.pdf>
- [25] A. Ducluzaux, *Reproducción del Cuaderno Técnico nº 083 de Schneider Electric*, traducido por J. Mª Giró, 1997, accesible por internet en la dirección: <https://www.schneider-electric.es/es/download/document/CT-083-Z002/>

## ANEXO 2. Configuraciones geométricas de bobinas

### Bobina en espiral plana:

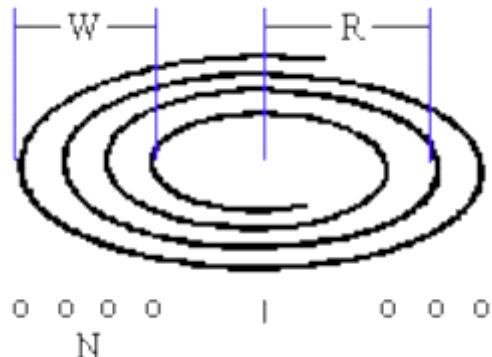


Figura A2.1. Bobina en espiral plana [12].

Donde la inductancia es [17]:

$$L = \frac{N^2 \cdot R^2}{(8 \cdot R + 11 \cdot W) \cdot 2540} \text{ [mH]} \quad (\text{A2.1.})$$

Siendo:

N: número de vueltas.

R: radio hasta la mitad del conjunto de espiras [cm].

W: anchura del conjunto de espiras [cm].

### Bobina cónica:

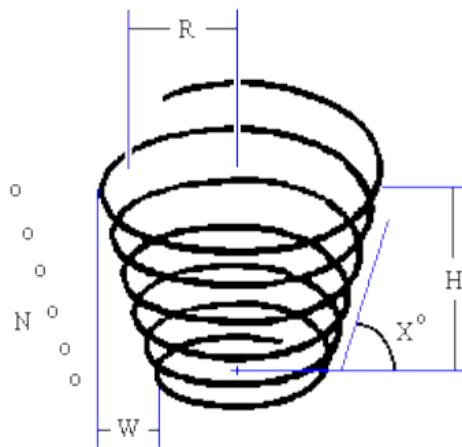


Figura A2.2. Bobina cónica [12].

Donde la inductancia es [17]:

$$L = \sqrt{\frac{(L_1 \cdot \sin(x))^2 \cdot (L_2 \cdot \cos(x))^2}{\sin(x) \cdot \cos(x)}} \text{ [mH]} \quad (\text{A2.2.})$$

Siendo:

$$L_1 = \frac{N^2 \cdot R^2}{(9 \cdot R + 10 \cdot H) \cdot 2540}, \text{ factor helicoidal [mH].}$$

$$L_2 = \frac{N^2 \cdot R^2}{(8 \cdot R + 11 \cdot W) \cdot 2540}, \text{ factor espiral [mH].}$$

N: número de vueltas.

R: radio hasta la mitad del conjunto de espiras [cm].

H: altura de la bobina [cm].

W: anchura del conjunto de espiras [cm].

x: ángulo de elevación de la bobina [grados].

## ANEXO 3. Precaución y seguridad

Las bobinas de Tesla producen tanto tensiones como corrientes elevadas de alta frecuencia. Si una persona se sitúa en el camino de una descarga de alta tensión a tierra, el shock eléctrico puede causar espasmos involuntarios y puede inducir fibrilación ventricular y otros problemas que pueden resultar letales. Las corrientes de alta frecuencia también pueden producir daños temporales en tejidos internos, nervios o articulaciones por efecto Joule. [18]

El arco eléctrico puede causar quemaduras de hasta cuarto grado alcanzando el hueso, las cuales pueden desembocar en necrosis. Se tiende a pensar que debido al efecto skin, las corrientes de las descargas de la bobina de Tesla no dañan los tejidos internos del ser humano ya que estas circularían solo por la piel, pero esto solo ocurre en materiales que son buenos conductores. El cuerpo humano no es buen conductor, por lo que estas corrientes sí que atravesarían la piel intentando circular por los órganos que presenten mejor conductividad [3].

Para prevenir estos riesgos, además de tener conocimiento de alta tensión, se deben seguir las siguientes pautas [19]:

- No se debe tocar el circuito mientras la máquina esté en funcionamiento ya que la alta tensión con la que trabaja es peligrosa y puede causar daños permanentes e incluso la muerte.  
Incluso con la máquina desconectada, tocar los condensadores puede resultar peligroso, ya que pueden quedar cargados. Si se necesita manipular el circuito después de haber sido utilizado, es necesario descargar los condensadores para evitar este problema.
- Mantener una distancia de seguridad con la máquina ya que el arco eléctrico puede alcanzar a una persona perjudicándola gravemente.
- Una manera de evitar que la corriente penetre en el cuerpo es utilizando una jaula de Faraday o trajes de cota de malla.
- La bobina de Tesla también puede dañar aparatos electrónicos que se encuentren cercanos, por lo que es conveniente no dejar nada cerca de la máquina. Además, objetos cercanos o incluso una persona, pueden causar un cambio en la capacidad del circuito secundario afectando a su frecuencia de resonancia.
- No mantener conectada la bobina de Tesla durante un largo período de tiempo, ya que la ionización del aire produce gases que pueden ser tóxicos para la salud humana y para el medio ambiente. Para evitar este problema, es conveniente que la habitación donde se use la bobina de Tesla cuente con un buen sistema de ventilación.
- Otra consecuencia negativa que se puede producir si se mantiene conectada la máquina durante un largo período de tiempo es que el ruido que produce puede dañar la audición. Para ello se puede hacer uso de unos cascos insonorizados.

## ANEXO 4. Cálculos justificativos

### 1. Cálculo de los parámetros de la bobina de Tesla de estado sólido del laboratorio de la Universidad de Zaragoza

En este punto se demuestra cómo se han obtenido los valores de los distintos elementos que forman el circuito de la bobina de Tesla de estado sólido que se encuentra disponible en el laboratorio del departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Zaragoza. Los parámetros calculados en este anexo han sido los utilizados en las simulaciones del capítulo 4.

#### Círculo primario:

##### - Bobina primaria:

La bobina primaria tiene una geometría helicoidal, por lo que para calcular su inductancia y su resistencia parásita ha sido necesario tener en cuenta sus dimensiones y características.

Esta bobina está hecha con 10 vueltas de conductor de sección  $1,5 \text{ mm}^2$ . Sus dimensiones se muestran en la figura Anexo.4.1.

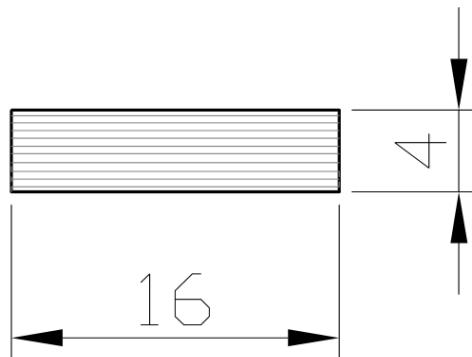


Figura Anexo.4.1. Alzado de la bobina primaria con medidas expresadas en cm.

Por lo tanto:

Altura,  $H_1 = 4 \text{ cm}$ .

Radio,  $R_1 = 8 \text{ cm}$ .

Número de vueltas,  $N_1 = 10$  vueltas.

Sección del conductor,  $S_1 = 1,5 \text{ mm}^2$ .

La inductancia resultante, según la ecuación 3.2, es:

$$L_1 = \frac{N_1^2 \cdot R_1^2}{(9 \cdot R_1 + 10 \cdot H_1) \cdot 2540} = \frac{10^2 \cdot 8^2}{(9 \cdot 8 + 10 \cdot 4) \cdot 2540} = 22,5 \mu\text{H}.$$

Para calcular la resistencia parásita de la bobina a la frecuencia de resonancia del circuito, 122,5 kHz (obtenida en este mismo apartado), primero habrá que calcular

su resistencia en continua, que se puede calcular en función de la sección del conductor de cobre, su longitud y el radio de la bobina primaria, tal y como figura en la ecuación 3.3:

$$R_{C1} = \rho \cdot \frac{l_1}{S_1} = 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m \cdot \frac{5 \text{ m}}{1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 123,8 \text{ m}\Omega$$

La longitud,  $l_1$ , se calcula a partir del número de vueltas y el radio de la bobina primaria:

$$l_1 = N_1 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_1 = 10 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 8 \text{ cm} = 500 \text{ cm} = 5 \text{ m.}$$

La resistencia parásita de esta bobina debida al efecto pelicular será, según la ecuación 3.4:

$$R_{L1} = R_{c1} \cdot k_{R1} = 123,8 \text{ m}\Omega \cdot 2,3 = 284,74 \text{ m}\Omega$$

Utilizando las ecuaciones 3.5 y 3.6:

$$k_{R1} = \sqrt[6]{\frac{3^6}{4} + \frac{S_1^6}{p \cdot \delta}} = \sqrt[6]{\frac{3^6}{4} + \frac{1,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{4,34 \cdot 10^{-3} \cdot m \cdot 1,69 \cdot 10^{-4} \text{ m}}} + 0,25 = 2,3$$

Donde:

El perímetro del conductor es:  $p = 2 \cdot \pi \cdot r_{cond1} = 2 \cdot \pi \cdot 6,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} = 4,34 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$

y el espesor de la envolvente:

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot \rho}{\mu \cdot f}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} \cdot 122500 \text{ Hz}}} = 1,69 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

### - Condensador primario:

El condensador primario está formado a partir de dos condensadores en serie de  $0,15 \mu\text{F}$  y con una tensión de trabajo de  $2000 \text{ V}$  cada uno.

$$C_1 = \frac{0,15 \mu\text{F} \cdot 0,15 \mu\text{F}}{0,15 \mu\text{F} + 0,15 \mu\text{F}} = 75 \text{ nF}$$

Por lo tanto, la capacidad total del condensador primario,  $C_1$ , es de **75 nF** con una tensión total soportada de **4000 V**.

Su simulación y comprobación experimental no serán necesarias ya que es un valor fijo.

- **Frecuencia de resonancia:**

Cuando los circuitos están desacoplados, los dos circuitos trabajan a la misma frecuencia de resonancia. Con los parámetros obtenidos indicados en este anexo, la frecuencia de resonancia de los circuitos desacoplados resulta:

$$f_{\text{resonancia}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_2 \cdot C_2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{22,5 \mu\text{H} \cdot 75 n\text{F}}} = 122517 \text{ Hz} \approx 122,5 \text{ kHz.}$$

Para las simulaciones en el programa Scilab de la bobina de estado sólido se ha considerado esta frecuencia ya que será la frecuencia a la que trabaje la fuente de alimentación.

**Círcuito secundario:**

- **Bobina secundaria:**

La bobina secundaria también tiene una geometría helicoidal, así que será necesario tomar las mismas medidas que para la bobina primaria.

A diferencia de la bobina primaria, la bobina secundaria cuenta con un número elevado de espiras, en concreto 1827 con un conductor de radio 0,1 mm. Sus dimensiones se muestran en la figura Anexo.4.2.



Figura Anexo.4.2. Alzado de la bobina secundaria con medidas expresadas en cm.

Por lo tanto:

Altura,  $H_2 = 43,5 \text{ cm}$ .

Radio,  $R_2 = 6,5 \text{ cm}$ .

Número de vueltas,  $N_2 = 1827$  vueltas.

Radio del conductor,  $r_{\text{cond}2} = 0,1 \text{ mm}$ .

Sección del conductor,  $S_2 = \pi \cdot r_{\text{cond}2}^2 = 0,0314 \text{ mm}^2$ .

La inductancia resultante, según la ecuación 3.9, es:

$$L_2 = \frac{N_2^2 \cdot R_2^2}{(9 \cdot R_2 + 10 \cdot H_2) \cdot 2540} = \frac{1827^2 \cdot 6,5^2}{(9 \cdot 6,5 + 10 \cdot 43,5) \cdot 2540} = 82 \text{ mH.}$$

Para calcular la resistencia parásita de la bobina a la frecuencia de resonancia del circuito, 122.5 kHz, primero habrá que calcular su resistencia en continua, que se puede calcular en función de la sección del conductor de cobre, su longitud y el radio de la bobina primaria, tal y como figura en la ecuación 3.10:

$$R_{L2} = \rho \cdot \frac{l_2}{S_2} = 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m \cdot \frac{631,4 \text{ m}}{0,0314 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = 351,86 \Omega \approx 352 \Omega.$$

La longitud,  $l_2$ , se calcula a partir del número de vueltas y el radio de la bobina primaria:

$$l_2 = N_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_2 = 1827 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6,5 \text{ cm} = 63136 \text{ cm} \approx 631,4 \text{ m.}$$

La resistencia parásita de esta bobina debida al efecto pelicular será, según la ecuación 3.10:

$$R_{L2} = R_{C2} \cdot k_{R2} = 352 \Omega \cdot 1 = 352 \Omega$$

Utilizando las ecuaciones 3.12 y 3.6:

$$k_{R2} = \sqrt[6]{\frac{3^6}{4} + \frac{S_2^6}{p \cdot \delta}} = \sqrt[6]{\frac{3^6}{4} + \frac{0,0314 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{6,28 \cdot 10^{-4} \cdot m \cdot 1,69 \cdot 10^{-4} \text{ m}}} + 0,25 = 1$$

Donde el perímetro del conductor es:

$$p = 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{cond}2} = 2 \cdot \pi \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

y el espesor de la envolvente:

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot \rho}{\mu \cdot f}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} \cdot 122500 \text{ Hz}}} = 1,69 \cdot 10^{-4} \text{ m.}$$

- **Condensador secundario:**

Conociendo la frecuencia de resonancia del circuito (122,5 kHz) y la inductancia de la bobina secundaria, se puede calcular la capacidad total del circuito secundario como:

$$C_2 = \frac{1}{2^2 \cdot \pi^2 \cdot f_{res}^2 \cdot L_2} = \frac{1}{2^2 \cdot \pi^2 \cdot 122500^2 \cdot 82 \text{ mH}} = 20,6 \text{ pF}$$

Es interesante calcular la capacidad del terminal superior para poder contrastar el resultado con la simulación realizada con el programa FEMM. Esta capacidad se puede calcular como:

$$C_{top} = C_2 - C_{L2}$$

Donde  $C_{L2}$  es la capacidad parásita de la bobina secundaria que puede calcularse utilizando la fórmula empírica de Medhurst [14]:

$$C_{L2} = K \cdot D = 7,32 \text{ pF}$$

Donde:

$$K = 0,1126 \cdot \frac{H}{D} + 0,08 + \frac{0,27}{\sqrt{\frac{H}{D}}} = 0,6654$$

Siendo:

H: altura de la bobina secundaria [cm].

D: diámetro de la bobina secundaria [cm].

Por lo tanto,

$$C_{top} = 20,6 \text{ pF} - 7,32 \text{ pF} = 13,28 \text{ pF} \approx 13,3 \text{ pF}$$

En este caso el terminal superior no es un toroide ni una esfera, sino que es el resultado de la unión de dos platos de aluminio (figura Anexo.4.3).



Figura Anexo.4.3. Terminal superior de la bobina de Tesla del laboratorio.

Sus dimensiones, que han sido necesarias para poder realizar la simulación en el programa FEMM para el cálculo de su capacidad, han sido recogidas en el laboratorio y se muestran expresadas en centímetros en la figura Anexo.4.4.

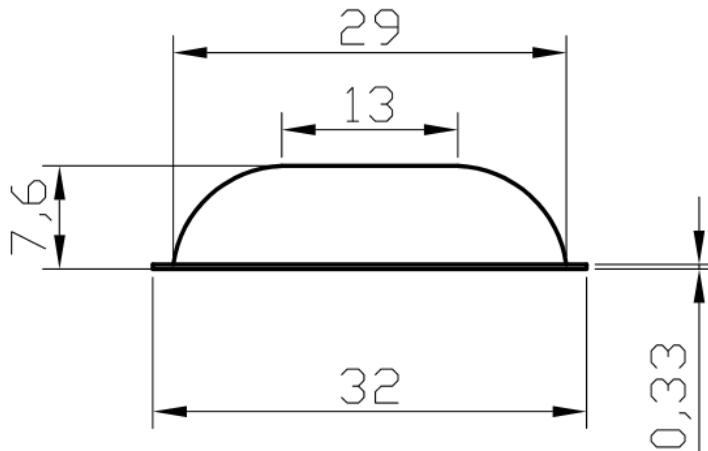


Figura Anexo.4.4. Alzado del terminal superior con las medidas expresadas en cm.

### Coeficiente de acoplamiento:

Utilizando la ecuación 4.1, se puede hallar el coeficiente de inducción mutua:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

Donde el coeficiente de acoplamiento, M, es [4]:

$$M = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{I_2} = \frac{N_2}{I_2} \cdot \frac{B_2 \cdot A_2}{2} = \frac{N_2}{I_2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot N_1 \cdot I_2}{2 \cdot H_2} \cdot A_2 = \frac{\mu_0 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot A_2}{2 \cdot H_2}$$

$$M = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} T \cdot \frac{m}{A} \cdot 10 \cdot 1827 \cdot 0,01327 m^2}{2 \cdot 0,435 m} = 0,35 \text{ mH}$$

Cabe destacar que el campo  $B_2$  se divide por 2 porque la bobina primaria se encuentra alrededor del extremo inferior de la bobina secundaria, donde el valor del campo es la mitad del campo máximo. Empleando la ley de Biot-Savart, se puede deducir que, para un solenoide, el campo magnético creado en puntos de su eje resulta [20]:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot H} \cdot \left[ \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} - \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + R^2}} \right]$$

Donde:

R: radio del solenoide [m].

H: altura o longitud del solenoide [m].

N: número de vueltas.

$x_1, x_2$ : distancias del punto donde se produce el campo magnético a sus respectivos extremos.

Entonces:

$$k = \frac{0,35 \text{ mH}}{\sqrt{22,5 \mu\text{H} \cdot 82 \text{ mH}}} = 0,25$$

Siendo:

$N_2$ : número de vueltas de la bobina secundaria.

$N_1$ : número de vueltas de la bobina primaria.

$\Phi_{12}$ : flujo magnético a través de la bobina primaria, causado por la corriente  $I_2$  en la bobina secundaria [Wb].

$I_2$ : corriente que circula por la bobina secundaria [A].

$B_2$ : campo magnético que produce la corriente  $I_2$  [T].

$A_2$ : área de sección transversal de la bobina secundaria [ $\text{m}^2$ ].

$\mu_0$ : permeabilidad en el vacío,  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  [ $\text{T} \cdot \text{m}/\text{A}$ ].

$H_2$ : altura de la bobina secundaria [m].

## 2. Cálculo de los parámetros del modelo clásico de la bobina de Tesla del laboratorio de la Universidad de Zaragoza

En este punto se indican los valores de los distintos elementos que forman el circuito de la bobina de Tesla clásica que se encuentra disponible en el laboratorio del departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Zaragoza.

Utilizando el mismo procedimiento que en el apartado 1 de este anexo, los parámetros de este modelo son:

### Círculo primario:

#### - Bobina primaria:



Figura Anexo.4.5. Bobina primaria del modelo clásico.

Utilizando la ecuación A2.1, se calcula la inductancia primaria para una bobina de tipo espiral plana:

$$L_1 = \frac{N^2 \cdot R^2}{(8 \cdot R + 11 \cdot W) \cdot 2540} = \frac{6,25^2 \cdot (8,7\text{cm})^2}{(8 \cdot 8,7\text{cm} + 11 \cdot 5\text{cm}) \cdot 2540} = 9,34 \mu\text{H}$$

Siendo:

N: número de vueltas.

R: radio hasta la mitad del conjunto de espiras [cm].

W: anchura del conjunto de espiras [cm].

Para calcular la resistencia parásita de esta bobina se sigue el mismo procedimiento que para el modelo de estado sólido:

$$R_{C1} = \rho \cdot \frac{l_1}{S_1} = 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m \cdot \frac{2,95 \text{ m}}{1,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2} = 4,13 \text{ m}\Omega$$

$$S_1 = \pi \cdot (r_{ext}^2 - r_{int}^2) = \pi \cdot (0,0025^2 - 0,0015^2) = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

Siendo:

$l_1$ : longitud total del conductor de la bobina primaria [m].

$r_{ext}$ : radio exterior del conductor de la bobina primaria [m].

$r_{int}$ : radio interior del conductor de la bobina primaria [m].

La resistencia parásita de esta bobina debida al efecto pelicular será, según la ecuación 3.4:

$$R_{L1} = R_{C1} \cdot k_{R1} = 4,13 \text{ m}\Omega \cdot 1,0007 = 4,133 \text{ m}\Omega$$

Utilizando las ecuaciones 3.5 y 3.6:

$$k_{R1} = \sqrt[6]{\frac{3^6}{4} + \frac{S_1}{p \cdot \delta}^6} = \sqrt[6]{\frac{3^6}{4} + \frac{1,25 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2}{0,015 \cdot m \cdot 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}}}^6 + 0,25 = 1,0007$$

Donde:

El perímetro del conductor es:  $p = 2 \cdot \pi \cdot r_{ext} = 2 \cdot \pi \cdot 0,0025 \text{ m} = 0,015 \text{ m}$ .

y el espesor de la envolvente:

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot p}{\mu \cdot f}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \frac{\text{m}}{\text{A}} \cdot 520,77 \text{ kHz}}} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

#### - Condensador primario:

El condensador primario tiene un valor de **0,01  $\mu\text{F}$** .

- **Frecuencia de resonancia:**

Cuando los circuitos están desacoplados, los dos circuitos trabajan a la misma frecuencia de resonancia. Con los parámetros obtenidos indicados en este anexo, la frecuencia de resonancia de los circuitos desacoplados resulta:

$$f_{\text{resonancia}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_2 \cdot C_2}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{9,34 \mu\text{H} \cdot 0,01 \mu\text{F}}} = 520,77 \text{ kHz}$$

**Círculo secundario:**

- **Bobina secundaria:**

La bobina secundaria es de tipo helicoidal, por lo que su inductancia resultante, según la ecuación 3.9, es:

$$L_2 = \frac{N_2^2 \cdot R_2^2}{(9 \cdot R_2 + 10 \cdot H_2) \cdot 2540} = \frac{535^2 \cdot 4,5^2}{(9 \cdot 4,5 + 10 \cdot 25,5) \cdot 2540} = 7,75 \text{ mH.}$$

Siendo:

N: número de vueltas.

R<sub>2</sub>: radio de la bobina [cm].

H<sub>2</sub>: altura de la bobina [cm].

Para calcular la resistencia parásita de la bobina a la frecuencia de resonancia del circuito, 520,77 kHz, primero habrá que calcular su resistencia en continua, que se puede calcular en función de la sección del conductor de cobre, su longitud y el radio de la bobina primaria, tal y como figura en la ecuación 3.10:

$$R_{L2} = \rho \cdot \frac{l_2}{S_2} = 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m \cdot \frac{151,26 \text{ m}}{196,35 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2} = 13,48 \Omega$$

La sección para un cable de diámetro 0,5 mm es:

$$S_2 = \pi \cdot r_{\text{cond}}^2 = 196,35 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$$

La longitud, l<sub>2</sub>, se calcula a partir del número de vueltas y el radio de la bobina primaria:

$$l_2 = N_2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_2 = 535 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 4,5 \text{ cm} = 151,26 \text{ m.}$$

La resistencia parásita de esta bobina debida al efecto pelicular será, según la ecuación 3.10:

$$R_{L2} = R_{C2} \cdot k_{R2} = 13,48 \Omega \cdot 1,0004 = 13,486 \Omega$$

Utilizando las ecuaciones 3.12 y 3.6:

$$k_{R2} = \sqrt[6]{\frac{3^6}{4} + \frac{S_2}{p \cdot \delta}^6} = \sqrt[6]{\frac{3^6}{4} + \frac{196,35 \cdot 10^{-9} m^2}{2,5 \cdot 10^{-4} \cdot 2,6 \cdot 10^{-3} m}^6} + 0,25 = 1,0004$$

Donde el perímetro del conductor es:

$$p = 2 \cdot \pi \cdot r_{cond2} = 2 \cdot \pi \cdot 2,5 \cdot 10^{-4} m = 1,57 \cdot 10^{-4} m$$

y el espesor de la envolvente:

$$\delta = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot p}{\mu \cdot f}} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 1,75 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} T \cdot \frac{m}{A} \cdot 520,77 \text{ kHz}}} = 2,6 \cdot 10^{-3} m.$$

### - Condensador secundario:

Conociendo la frecuencia de resonancia del circuito (520,77 kHz) y la inductancia de la bobina secundaria, se puede calcular la capacidad total del circuito secundario como:

$$C_2 = \frac{1}{2^2 \cdot \pi^2 \cdot f_{res}^2 \cdot L_2} = \frac{1}{2^2 \cdot \pi^2 \cdot 520,77 \text{ kHz}^2 \cdot 7,75 \text{ mH}} = 12,05 \text{ pF}$$

### Coeficiente de acoplamiento:

Igual que para el caso anterior, utilizando la ecuación 4.1, se puede hallar el coeficiente de inducción mutua:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

Donde el coeficiente de acoplamiento, M, es [4]:

$$M = \frac{N_2 \cdot \Phi_{12}}{I_2} = \frac{N_2}{I_2} \cdot \frac{B_2 \cdot A_2}{2} = \frac{N_2}{I_2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot N_1 \cdot I_2}{2 \cdot H_2} \cdot A_2 = \frac{\mu_0 \cdot N_1 \cdot N_2 \cdot A_2}{2 \cdot H_2}$$

$$M = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} T \cdot \frac{m}{A} \cdot 6,25 \cdot 535 \cdot 0,00636 \text{ m}^2}{2 \cdot 0,255 \text{ m}} = 52,4 \mu\text{H}$$

Entonces:

$$k = \frac{52,4 \mu\text{H}}{\sqrt{9,34 \mu\text{H} \cdot 7,75 \text{ mH}}} = 0,19$$

Siendo:

N<sub>2</sub>: número de vueltas de la bobina secundaria.

N<sub>1</sub>: número de vueltas de la bobina primaria.

$\Phi_{12}$ : flujo magnético a través de la bobina primaria, causado por la corriente  $I_2$  en la bobina secundaria [Wb].

$I_2$ : corriente que circula por la bobina secundaria [A].

$B_2$ : campo magnético que produce la corriente  $I_2$  [T].

$A_2$ : área de sección transversal de la bobina secundaria [ $m^2$ ].

$\mu_0$ : permeabilidad en el vacío,  $4\pi \cdot 10^{-7}$  [T·m/A].

$H_2$ : altura de la bobina secundaria [m].

### 3. Cálculo de las frecuencias de resonancia del circuito acoplado

Analizando el circuito de la figura 4.1 en el dominio de Laplace, se pueden obtener las dos frecuencias de resonancia para el circuito acoplado. En este caso, se desprecian las resistencias para simplificar el cálculo.

Para este circuito, las ecuaciones son:

$$(L_1 \cdot s + \frac{1}{C_1 \cdot s}) \cdot I_1 + M \cdot s \cdot I_2 = \frac{b_1 \cdot \omega_0}{s^2 \cdot \omega_0^2} \quad (\text{Excitación senoidal de frecuencia } \omega_0)$$

$$M \cdot s \cdot I_1 + (L_2 \cdot s + \frac{1}{C_2 \cdot s}) \cdot I_2 = 0$$

Despejando  $I_1$ :

$$I_1 = -\frac{1}{M \cdot s} \cdot (L_2 \cdot s + \frac{1}{C_2 \cdot s}) \cdot I_2$$

$$-\frac{1}{M \cdot s} \cdot (L_2 \cdot s + \frac{1}{C_2 \cdot s}) \cdot I_2 \cdot (L_1 \cdot s + \frac{1}{C_1 \cdot s}) + M \cdot s \cdot I_2 = \frac{b_1 \cdot \omega_0}{s^2 \cdot \omega_0^2}$$

$$(-(1 + L_1 \cdot C_1 \cdot s^2) \cdot (1 + L_2 \cdot C_2 \cdot s^2) + (M^2 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot s^4)) \cdot I_2 = \frac{b_1 \cdot M \cdot \omega_0 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot s^3}{s^2 + \omega_0^2}$$

Las raíces del polinomio del lado izquierdo de esta ecuación permiten obtener las frecuencias de resonancia del circuito y obtener su solución en el dominio del tiempo.

Desarrollándolo se tiene:

$$(L_1 \cdot C_1 \cdot L_2 \cdot C_2 - C_1 \cdot C_2 \cdot M^2) \cdot s^4 + (L_1 \cdot C_1 + L_2 \cdot C_2) \cdot s^2 + 1 = 0$$

Donde las raíces del polinomio son:

$$x_{1,2}^2 = \frac{-(L_1 \cdot C_1 + L_2 \cdot C_2) \pm \sqrt{(L_1 \cdot C_1 + L_2 \cdot C_2)^2 - 4 \cdot (L_1 \cdot C_1 \cdot L_2 \cdot C_2 - C_1 \cdot C_2 \cdot M^2)}}{2 \cdot (L_1 \cdot C_1 \cdot L_2 \cdot C_2 - C_1 \cdot C_2 \cdot M^2)}$$

Utilizando las fórmulas del cálculo del coeficiente de acoplamiento y las frecuencias de resonancia de cada circuito por separado:

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} ; \quad \omega_1^2 = \frac{1}{L_1 \cdot C_1} ; \quad \omega_2^2 = \frac{1}{L_2 \cdot C_2}$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$x_{1,2}^2 = \frac{-(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4 \cdot ((1 - k^2) \cdot \omega_1^2 \cdot \omega_2^2)}}{2 \cdot (1 - k^2)}$$

Utilizando una variable para simplificar el cálculo:

$$\sigma^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 \cdot L_2} = 1 - k^2$$

Entonces:

$$x_{1,2}^2 = \frac{-(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2 \cdot \sigma^2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2}{2 \cdot \sigma^2} - \frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2}{\sigma^2}}$$

Sabiendo que las frecuencias de resonancia de cada circuito por separados son iguales ( $\omega_1 = \omega_2$ ):

$$x_{1,2}^2 = \frac{-\omega_1^2}{\sigma^2} \pm \sqrt{\frac{\omega_1^4}{\sigma^4} - \frac{\omega_1^2 \cdot \omega_2^2}{\sigma^2}} = \frac{\omega_1^2}{\sigma^2} \pm \sqrt{\frac{\omega_1^4}{\sigma^4} \cdot (1 - \sigma^2)} = \frac{\omega_1^2}{\sigma^2} \pm \frac{\omega_1^2}{\sigma^2} \cdot \sqrt{(1 - \sigma^2)}$$

$$x_{1,2}^2 = \omega_1^2 \cdot \frac{1 \pm \sqrt{1 - \sigma^2}}{\sigma^2} = \omega_1^2 \cdot \frac{1 \pm k}{1 - k^2} = \omega_1^2 \cdot \frac{(1 \pm k)}{(1+k)(1-k)}$$

Las raíces que se obtienen son las siguientes:

$$x_1^2 = \frac{\omega_1^2}{1-k}$$

$$x_2^2 = \frac{\omega_1^2}{1+k}$$

Por lo tanto, las dos frecuencias de resonancia que hacen máxima la tensión obtenida a la salida del circuito secundario con el circuito acoplado son:

$$f_1 = \frac{x_1}{2 \cdot \pi} = \frac{\sqrt{\frac{\omega_1^2}{1-k}}}{2 \cdot \pi}$$

$$f_2 = \frac{x_2}{2 \cdot \pi} = \frac{\sqrt{\frac{\omega_1^2}{1+k}}}{2 \cdot \pi}$$

Para la bobina de Tesla de estado sólido, estas dos frecuencias serían:

$$f_1 = \frac{\sqrt{\frac{(122500 \cdot 2 \cdot \pi)^2}{1-0,25}}}{2 \cdot \pi} = 141,45 \text{ kHz}$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{\frac{(122500 \cdot 2 \cdot \pi)^2}{1+0,25}}}{2 \cdot \pi} = 109,56 \text{ kHz}$$

Para el modelo clásico de la bobina de Tesla, las frecuencias que se obtienen son las siguientes:

$$f_1 = \frac{\sqrt{\frac{(5207700 \cdot 2 \cdot \pi)^2}{1-0,25}}}{2 \cdot \pi} = 601,3 \text{ kHz}$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{\frac{(520770 \cdot 2 \cdot \pi)^2}{1+0,25}}}{2 \cdot \pi} = 465,8 \text{ kHz}$$

# ANEXO 5. Información adicional acerca del software empleado

## 1. FEMM (Finite Element Method Magnetics)

Desarrollado por David Meeker, se trata de un software libre que permite resolver problemas magnéticos, electrostáticos y de flujo de calor. Este programa de elementos finitos es capaz de resolver problemas en 2D tanto con simetría cartesiana como con simetría revolución respecto de un eje de revolución [21].

En la web oficial está disponible su descarga libre y gratuita:

<http://www.femm.info/wiki/Download>

En su página también se encuentran disponibles un manual de usuario y un tutorial para cada tipo de problema:

Manual de usuario:

<http://www.femm.info/Archives/doc/manual42.pdf>

Tutorial para problemas magnéticos:

<http://www.femm.info/wiki/MagneticsTutorial>

Tutorial para problemas electroestáticos:

<http://www.femm.info/wiki/ElectrostaticsTutorial>

Tutorial para problemas de flujo de calor:

<http://www.femm.info/wiki/HeatFlowTutorial>

El empleo de este software en futuros diseños de bobinas de Tesla puede resultar de gran ayuda ya que permite simular los elementos electromagnéticos del circuito y calcular sus parámetros. De esta manera, el usuario también se puede hacer una idea tanto de las dimensiones de los elementos como de la magnitud de los campos eléctricos y magnéticos que se puede producir. Además, gracias al cálculo de sus parámetros, se podrá calcular fácilmente la frecuencia que alcanzará el circuito con los elementos empleados en la simulación.

Para la realización del presente proyecto, este software se ha empleado para el cálculo de las inductancias de las bobinas de cada circuito y para el cálculo de la capacidad del terminal superior del circuito secundario obteniendo un resultado muy aproximado al valor real.

## 2. Scilab

Desarrollado por Scilab Enterprises, este software es distribuido con una licencia de código abierto en el que el usuario puede modificar y mejorar su diseño.

Algunas de las características de este software son el análisis numérico, la visualización 2D y 3D, la optimización, el análisis estadístico, el diseño y análisis de sistemas dinámicos, el procesamiento de señales e interfaces con los lenguajes de programación Fortran, Java, C y C++ [22].

Este programa se puede descargar gratuitamente desde la página oficial de Scilab:  
<http://www.scilab.org/download/latest>

En el siguiente enlace de su página web se pueden encontrar distintos tutoriales:  
<http://www.scilab.org/resources/documentation/tutorials>

Para la realización de este proyecto, se ha utilizado la herramienta Xcos de Scilab que permite modelar y simular sistemas dinámicos continuos y discretos. Además, incluye un editor gráfico con el que se puede representar los modelos mediante diagramas de bloques conectados entre sí. Estos bloques representan una función básica predefinida, como, por ejemplo, un elemento electrónico [23].

También se ha hecho uso del editor de texto de Scilab, SciNotes, que permite escribir comandos e instrucciones en una hoja de texto para luego poder ejecutarlas y mostrar el resultado en la consola principal de Scilab. Además, este editor de texto se puede comunicar con la herramienta Xcos para obtener datos de la simulación y procesarlos.

El empleo de este software ha sido de gran ayuda para modelar el sistema y visualizar la forma de onda de la tensión de salida del circuito secundario, así como para obtener valores como la tensión máxima alcanzada y la potencia necesaria para la fuente de alimentación.

## ANEXO 6. Fotografías de las bobinas de Tesla empleadas

En este anexo se muestran fotografías de los dos modelos de bobinas de Tesla que han sido utilizadas para la realización de este proyecto.

### 1. Modelo de estado sólido

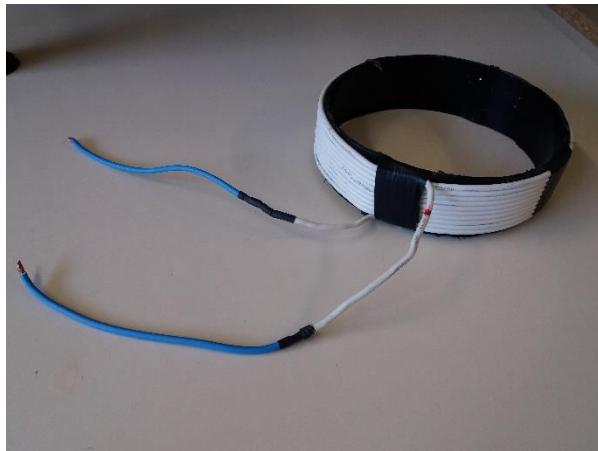


Figura Anexo 6.1. Bobina primaria.



Figura Anexo 6.2. Bobina secundaria.



Figura Anexo 6.3. Terminal superior.



Figura Anexo 6.4. Bobina de estado sólido en funcionamiento.

## 2. Modelo clásico

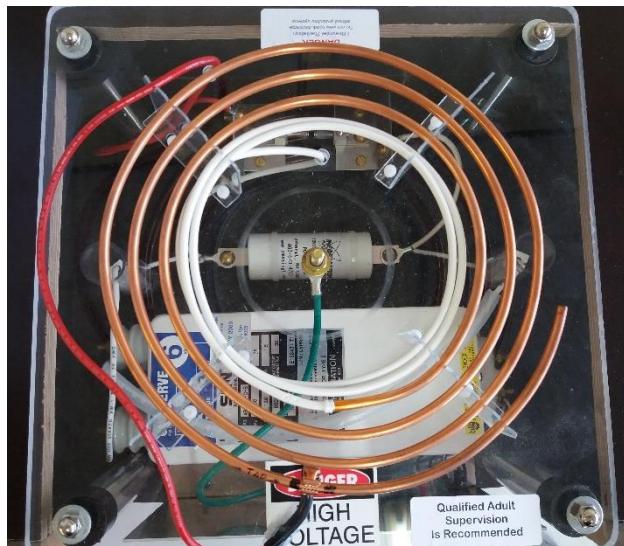


Figura Anexo 6.5. Bobina primaria.

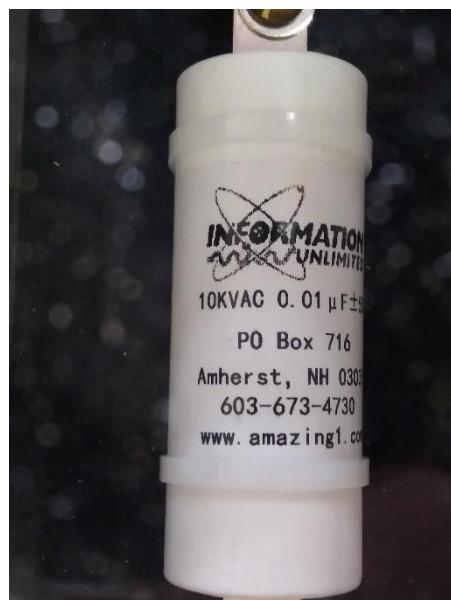


Figura Anexo 6.6. Condensador primario.



Figura Anexo 6.7. Toroide.



Figura Anexo 6.8. Bobina secundaria con toroide.

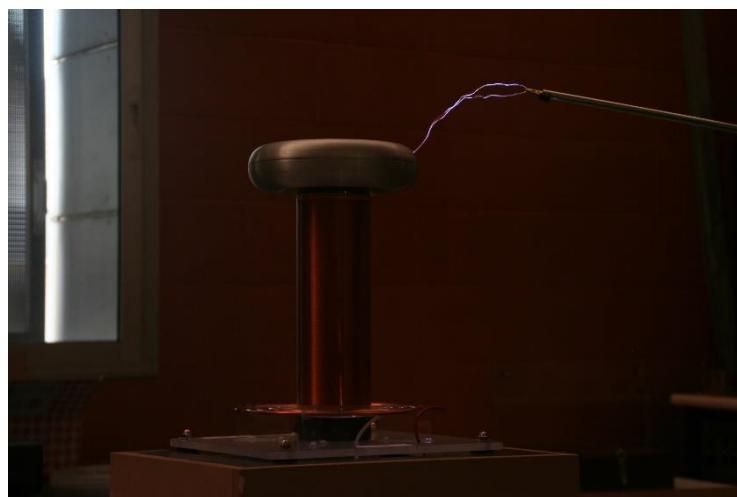


Figura Anexo 6.9. Bobina clásica en funcionamiento.