Universidad Zaragoza
1542

# Trabajo Fin de Máster

## Una propuesta didáctica para la enseñanza de las funciones en segundo de ESO

## A didactical proposal for teaching functions in second year of ESO


Autor:

Jonatan Rapún Nacenta

Director:

Miguel Ángel Marco Buzunariz

Facultad de Educación


2017

# Indice

# 1. Introducción

El motivo por el que he elegido este objeto matemático es por la gran importancia que tiene y las dificultades que supone a los alumnos su aprendizaje. Considero que es muy importante que los alumnos adquieran una buena concepción de este objeto y de sus utilidades.

En el currículum oficial de un alumno, este objeto adquiere una gran importancia, desde la asignatura de matemáticas, sobre todo a la hora de enfrentarse a derivadas e integrales, pero también desde otras asignaturas como física en la que se emplean funciones y gráficas para describir muchos procesos que explican el funcionamiento de nuestro entorno. También desde otras del ámbito social o de letras, como en la asignatura de economía a la hora de describir la evolución económica de un país. Este es un motivo por el que es necesario que los alumnos dominen este objeto matemático.

Por otro lado en los medios de comunicación encontramos a diario cantidad de información que viene expresada como una función o gráfica. Desde el estado de la economía de un país, datos estadísticos de la población o incluso resultados deportivos. Por ello el estudio y comprensión de este objeto matemático ayudará a los alumnos a desarrollar un sentido crítico, consiguiendo interpretar y describir de manera correcta todas estas situaciones que se encuentran a menudo en nuestro alrededor.

Por estos motivos considero que es necesario que los alumnos se familiaricen, con un cierto grado de profundidad, en este tema desde cursos bajos, como puede ser segundo de educación secundaria obligatoria. Con ello conseguiremos primero que su vida académica se desarrolle correctamente y segundo que sepan desenvolverse a la hora de realizar o comprender funciones y sus gráficas y entiendan las implicaciones que estas tienen para ellos mismos o su entorno.

En el aspecto legal esta unidad didáctica está ubicada dentro del Bloque 4: Funciones de la Orden ECD/489/2016 de fecha 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la educación secundaria obligatoria en Aragón. Pero también dentro del Bloque 2: Números y Álgebra del mismo documento, en su apartado de resolución gráfica de sistemas lineales.

El campo de problemas que se abarcarán se compone de tres bloques. En primer lugar se tratará un estudio general de las funciones y sus propiedades, para posteriormente centrarnos en casos particulares y profundizar más en casos concretos como el de la función lineal, inversa o cuadrática. El último de los bloques será el de la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones.

La estructura que seguiré en este trabajo consistirá en ver en primer lugar el estado actual de la enseñanza de este objeto, viendo cómo se justifica su introducción, los problemas y técnicas que se utilizan y los efectos que estos tienen en su enseñanza. A continuación destacaré los conocimientos previos que los alumnos necesitan conocer para la introducción de este objeto matemático, así como actividades para reforzarlos. Posteriormente se destacará la razón de ser tanto a nivel escolar como histórica y algunos problemas que la ilustren. Por último se describirán y desarrollarán los problemas y ejercicios, así como las técnicas y tecnologías necesarias para su resolución así como una secuencia didáctica o cronograma y se mostrará un ejemplo de prueba de evaluación y sus criterios de calificación que sirva para decidir si los alumnos han conseguido alcanzar los conocimientos requeridos sobre el objeto matemático.

# 2. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

## 2.1 Justificación en los libros.

Las funciones se introducen debido a la necesidad de representar gráficamente la relación existente entre dos variables numéricas que modelan una situación real. Los ejemplos más comunes son la temperatura a lo largo de un día, la distancia recorrida por un móvil según su velocidad, la altura del nivel del agua de un río a lo largo de un año… En definitiva a los alumnos se les pide realizar un gráfico sobre un eje cartesiano en el que se representan dos magnitudes de una situación real. La mayoría de problemas tienen una relación de proporcionalidad directa, en gran parte debido a que es un conocimiento que tienen reciente y se puede trasponer a multitud de situaciones reales. Otra ventaja es que los alumnos puedan manejar la gráfica y la fórmula con soltura, proceso necesario a la hora de rellenar una tabla de valores o representar la función gráficamente.

## 2.2 Campo de problemas, técnicas y tecnologías.

Para presentar el campo de problemas que se enseña habitualmente en 2º de ESO, primero transcribiré los contenidos mínimos dictados por la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo.

Bloque IV: Funciones

Contenidos:

-Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.

-El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.

-Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.

-Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

También describiré el campo de problemas utilizando, basándome en algunos libros.

Libro 1 (Santillana, 2008)

0. Introducción.

Cuenta una historia relacionada con René Descartes y las funciones.

1. Coordenadas cartesianas.

Técnica: La primera coordenada x se representa sobre el eje de las abcisas (horizontal), la segunda coordenada y se representa sobre el eje de las ordenadas (vertical). Se parte desde el punto de corte de los ejes (0,0).

2. concepto de función.

Técnica: Para que una relación represente una función, a cada valor de x, le tiene que corresponder un único valor para y, siendo x la variable independiente e y la independiente.

Justificación: Lo justifica con dos ejemplos, a partir de la temperatura que hace a lo largo de varios días que es función del tiempo, ya que en cada momento hace una temperatura única. En el segundo ejemplo vemos dos gráficas descontextualizadas, viendo que una es función y la otra no (usa la técnica de trazar una línea vertical y que a lo sumo sea cortada por un punto en todo el dominio, aunque no la explica)

3. Representación gráfica de una función.

3.1 A partir de una tabla de valores.

Técnica: Representar los valores de la variable independiente sobre el eje horizontal y la dependiente sobre la vertical.

Justificación: Realiza un ejemplo contextualizado cuya gráfica es lineal.

3.2 A partir de una expresión algebraica.

Técnica: A partir de la ecuación de la función y=f(x), se obtiene una tabla de valores y se aplica el caso anterior.

Justificación: Realiza un ejemplo contextualizado cuya gráfica es lineal.

4. Estudio de una función.

4.1 Función continua y discontinua.

Técnica: Una función es continua si su gráfica se puede dibujar de un solo trazo.

Justificación: Realiza dos ejemplos uno de una variable continua lineal y otro con una variable discreta.

4.2 Puntos de corte con los ejes.

Técnica: Los puntos de corte con el eje x, se calculan sustituyendo la variable y por cero. Para el corte con el eje y, se sustituye x por cero.

Justificación: Los puntos de corte con el eje x son de la forma (x,0) y con el eje y son de la forma (0,y).

4.3 Crecimiento y decrecimiento.

Técnica: Una función es creciente en un tramo si al aumentar el valor de x también aumenta el valor de y. Y será decreciente si al aumentar el de x disminuye el de y.

4.4 Máximos y mínimos.

Técnica: En los puntos donde la gráfica pasa de ser creciente  ser decreciente, presenta un máximo la función. Y en los que pasa de ser decreciente a creciente presenta un mínimo.

Justificación: Plantea un problema de una etapa ciclista en la que intenta ver todo lo estudiado.

5. Función de proporcionalidad directa.

Técnica: Una función de proporcionalidad directa, o función lineal, es una función que relaciona dos magnitudes directamente proporcionales. Su expresión algebraica es del tipo y = mx, donde m es la constante de proporcionalidad directa y también se le llama pendiente de la recta. Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Si m es positivo, la función es creciente y si es negativo decreciente.

Justificación: Realiza un ejemplo.

6. Función de proporcionalidad inversa.

Una función de proporcionalidad inversa es una función que relaciona dos magnitudes inversamente proporcionales. Su expresión es del estilo $y = \frac{k}{x}$, con k la constante de proporcionalidad inversa. Su gráfica es una hipérbola, y no corta a los ejes.

Justificación: Realiza un ejemplo.

Libro 2 (Anaya, 2000)

0. Introducción.

Se plantean algunos problemas previos muy intuitivos.

1. Las funciones y sus elementos.

Técnica: La función asigna a cada valor de x un único valor de y. Para apreciar con claridad el comportamiento de una función, esta se representa gráficamente sobre unos ejes cartesianos.

Realiza un ejemplo en el que aplica la técnica para comprobar si es función de trazar una recta vertical y viendo que sólo se corta una vez a lo sumo, pero no la explica.

2. Crecimiento y decrecimiento.

Técnica: Una función es creciente en un tramo cuando al aumentar x, aumenta y. Y decreciente si al aumentar x, disminuye y. Si mantiene el mismo valor en un tramo, se dice constante en ese tramo.

Justificación: Se muestra un ejemplo que relaciona el precio de las naranjas a lo largo de cierto año, traduciendo lo que significa cada uno de los apartados anteriores.

3. Funciones dadas por tablas de valores.

Técnicas: No presenta ninguna técnica. Además comenta que a veces se puede obtener la ecuación a partir de los valores, pero lo demuestra con dos ejemplos en los que se “saca de la manga” la ecuación sin ninguna justificación.

4. Funciones de proporcionalidad: y = mx.

Técnica: No presenta ninguna técnica, sólo algunos ejemplos.

5. Pendiente de una recta.

Técnica: m es la pendiente, si es positiva, la recta es creciente, mientras que si es negativa, la función es decreciente.

Si $m = \frac{a}{b}$ realiza ejemplos de representación tomando a como el lado opuesto al ángulo formado por línea y eje x.

Justificación: Ninguna, pero antes de explicar la técnica, realiza algunos ejemplos.

6. Las funciones lineales: y = mx + n.

Técnica: Pendiente m y corta al eje y en el (0, n)

7. Función constante: y = k.

Técnica: Se representa por una recta paralela al eje x, a una distancia k de éste.

Libro 3 (Vicens Vives, 2008)

1. Representación de puntos en el plano.

1.1 Representación cartesiana de puntos en el plano.

Técnica: El primer número indica, en valor absoluto, la distancia al eje vertical. Y el segundo, la distancia en valor absoluto al eje horizontal.

Justificación: Lo aplica a un ejemplo y ve los signos de los cuadrantes.

1.2 Coordenadas polares de un punto del plano.

2. Relación entre variables.

3. Funciones.

3.1 Gráfica de una función.

4. Estudio gráfico de funciones.

4.1 Discontinuidades.

Técnica: Una función presenta una discontinuidad en un punto si no es posible dibujar la gráfica de la función pasando por ese punto sin levantar el lápiz del papel.

4.2 Cortes con los ejes.

Técnica: Para calcularlos, se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$.

4.3 Crecimiento y decrecimiento.

Técnica: Una función es creciente si al aumentar el valor de la variable independiente x lo hace también el de la variable dependiente y

4.4 Máximos y mínimos relativos.

Técnica: La función tiene un máximo relativo en un punto si el valor de la ordenada en ese punto es mayor que en los puntos próximos.

5. Algunas funciones interesantes.

5.1 La función lineal.

5.2 La función afín.

5.3 Función cuadrática y = $ax^2 + bx + c$

Técnica: Si a es positivo, la gráfica estará abierta hacia la parte superior. Vértice en (0, 0)

5.4 La función de proporcionalidad inversa.

## 2.3 Consecuencias en el aprendizaje de los alumnos

La forma en que se suele presentar este objeto matemático, aunque a veces puede ser acertada, puede provocar algunos problemas.

En primer lugar el introducir las funciones como una gráfica de dos variables una dependiente de la otra que es independiente no es mala idea, pero habría que comentar que hay otras definiciones, ya que introducir únicamente el concepto de esta forma podría provocar que los alumnos asocien la idea de que la función exista al hecho de que se pueda o no representar dicha función de manera gráfica. Podemos encontrarnos funciones cuya gráfica es realmente difícil de comprender, como la función de Dirichlet y en este caso los alumnos no sabrían responder si es o no función.

Por lo tanto habrá que introducir correctamente el concepto y ver la definición de función no limitándonos a la definición gráfica y viendo las diversas representaciones de la misma.

Pero tampoco se puede hacer un estudio centrándose únicamente en el aspecto algebraico, dejando de lado las demás representaciones de una función, ya que los estudiantes podrían limitarse a repetir rutinas o algoritmos sin entender muy bien el por qué se realizan.

Considero que el aprendizaje de las funciones pasa, en primer lugar por un conocimiento de cada uno de estos lenguajes de representación, es decir, por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro. Las diferentes representaciones que podemos ver de una función son las siguientes:

-Modelo físico o simulación: es el lenguaje más cercano, menos simbólico y que aparece inmediato al realizar un experimento o una simulación en ordenador.

-Descripción verbal: utiliza el lenguaje común para hacer una descripción generalmente cualitativa.

-Tabla de valores: presenta una visión cuantitativa, interpretable desde la correspondencia, se identifican los pares ordenados y es parcial debido a la imposibilidad de mostrar la totalidad de datos.

-Gráfica: da una visión global y completa de la función a nivel cualitativo como cuantitativo, permite la generación de modelos, posibilita "ver" características de variación, crecimiento, continuidad, concavidad, máximos, mínimos, periodicidad, cambio, etc.

-Fórmula o ecuación: brinda una visión cuantitativa y cualitativa, general de la función, también permite observar las características de variación, crecimiento, continuidad, concavidad, máximos, mínimos, periodicidad, cambio empleando métodos algebraicos.

Si bien es cierto el modelo físico o simulación no lo trataremos demasiado en esta propuesta didáctica, pero se menciona debido a la gran importancia en la historia de este concepto.

En la siguiente tabla podemos ver un planteamiento en el que se indica el proceso a seguir para cambiar entre las diversas formas de expresar una función:

| Hacia / Desde | Descripción verbal | Tabla | Gráfica | Fórmula |
|---|---|---|---|---|
| Descripción verbal | - | Medida | Boceto | Modelo |
| Tabla | Lectura | - | Trazado | Ajuste |
| Gráfica | Interpretación | Lectura | - | Ajuste |
| Fórmula | Interpretación | Cómputo | Gráfica | - |

Además es común ver ejercicios, tanto en textos, como elaborados por profesores, del estilo: obtén la gráfica de la ecuación y=2x+3. Con la intención de que el alumno rellene a partir de una fórmula una tabla y posteriormente convierta esa información en una gráfica, dando una mayor prioridad a este proceso se consigue que los alumnos adquieran un significado erróneo del significado de una gráfica viéndola como un elemento de ayuda y no como una representación de la función en sí misma.

Otro grave problema que experimentan los alumnos es el de decidir si un gráfico ha de representarse de manera continua o no. Acostumbrados a ver gráficas continuas como ejemplo (en gran parte a causa de trabajar con la expresión algebraica de las mismas) los alumnos tienden a representar los puntos que se obtienen de una tabla de valores por ejemplo y posteriormente unirlos y no se detienen a pensar si esa unión tiene sentido o no, o lo que es lo mismo si estamos ante una variable discreta o continua. Por lo que trataremos ejemplos de ambos tipos de variable con la intención de que los alumnos aprendan a razonar sobre qué tipo de variable se trata y por consiguiente si hay que unir o no los puntos.

Durante este curso nos centraremos sobre todo en la función lineal, aunque eventualmente veremos otros tipos como la cuadrática. Un aspecto importante es el de usar una escala adecuada para su representación gráfica. Ya que una elección errónea puede provocar una interpretación errónea a la que representa realmente, y obtenga conclusiones equivocadas. Nuestro objetivo será que los alumnos entiendan la importancia de la escala con las funciones que vamos a trabajar y puedan extrapolarlo a funciones más complejas que se verán en cursos posteriores.

Un error habitualmente cometido por los alumnos es a la hora de obtener máximos y mínimos de una función, tal y como pude apreciar durante mi practicum. Normalmente la definición de máximo o mínimo viene dada por los puntos en los que el crecimiento de la función varía, pero esto lleva a cometer errores del tipo que siempre uno de estos puntos debe ser absoluto, sin tener en cuenta los casos en los que la función alcanza el valor máximo en sus extremos, como ocurre en las funciones lineales a las que se dedicará bastante tiempo.

Enfatizaremos al respecto para que los alumnos sepan localizar estos puntos y no obtengan la conclusión errónea que siempre van a ser puntos aislados o que siempre están presentes, sino que pueden ser un conjunto finito de extremos absolutos o incluso infinito si la función presenta un intervalo constante superior al del resto de la función.

Otro aspecto importante es la continuidad de la función. Habitualmente se enseña con frases del estilo “Una función es continua si puede dibujarse sin levantar el boli del papel”, que podemos apreciar en algunos textos o a menudo en boca de los profesores en activo. Podemos citar por ejemplo los libros de texto de 2º de la ESO de la editorial Edebé (1997), Vicens Vives (2003) o Santillana (2012).

Esta apreciación no es mala y para este nivel a menudo es suficiente, pero en un futuro podría acarrear problemas a los alumnos, ya que no es correcta del todo. Es necesario entender el concepto de dominio de una función (dónde está definida la misma) para poder ver el comportamiento de la función en el mismo. Una función puede representarse levantando el boli del papel y ser continua si por ejemplo su dominio no es conexo. Este concepto es bastante difícil y por supuesto no se va a tratar en este nivel, pero hace surgir la duda de qué es mejor para los alumnos, enseñar un concepto en parte erróneo o enseñar el concepto correcto en cursos posteriores como podemos apreciar en algunos libros de texto (por ejemplo los de este nivel educativo de las editoriales Edelvives (2007) y Anaya (2012), que no mencionan este concepto y lo dejan para cursos posteriores).

# 3. Conocimientos previos necesarios.

Evidentemente, el estudio de nuestro objeto matemático requiere que nuestros alumnos conozcan algunos conceptos que han estudiado con anterioridad en este u otros cursos. Sin estos contenidos, será muy difícil entender la razón de ser del objeto o que el objeto asiente de manera adecuada. Serán necesarios pues los siguientes conocimientos y objetos matemáticos:

-Números enteros: es importante que los alumnos entiendan el concepto de número entero y número negativo sobre todo y sepan situarlo en la recta entera correctamente. Ya que a la hora de representar valores en el plano cartesiano hay que hacer este proceso dos veces, una en la recta vertical y otra en la horizontal. Este procedimiento es muy importante a la hora de representar gráficamente una función o para obtener información de una gráfica.

-Números reales: ya que las funciones continuas carecerían de significado sin los números reales. Puesto que el dominio de estas funciones no se limita simplemente a los números enteros, sino que abarca los números reales.

-Proporcionalidad: en una gran parte del tema se trabajará con funciones lineales que presentan una proporcionalidad directa, es necesario que los alumnos manejen el concepto de proporcionalidad directa entre dos variables. Así podrán obtener con facilidad por ejemplo la gráfica de algunas funciones o completar tablas de valores de funciones de este estilo.

-Ecuaciones y cálculos algebraicos: una función se puede expresar con una ecuación o fórmula y así obtener resultados mucho más precisos, por este motivo es necesario que los alumnos sepan manejar dichas expresiones.

-Sistemas de ecuaciones lineales: una utilidad de las funciones que veremos será la de resolver sistemas de ecuaciones de manera gráfica. Por lo que será necesario que los alumnos comprendan qué es un sistema de ecuaciones y conozcan otros métodos de resolución para poder comparar resultados.

Todos estos conceptos necesarios se trabajan en 2º de la ESO, aunque algunos ya se vieron en cursos previos. Por este motivo es conveniente trabajar estas unidades didácticas con anterioridad a la expuesta en este trabajo. El que estos conocimientos formen parte del temario de 2º de la ESO facilita que los alumnos los mantengan en la mente y puedan recordarlos con mayor facilidad que otros contenidos vistos en cursos anteriores. Un inconveniente que nos podemos encontrar es el hecho de que algunos de estos conceptos se han introducido a los alumnos por primera vez durante este curso y quizás no hayan interiorizado por completo. Por este motivo voy a presentar una serie de ejercicios que pueden usarse a modo de prueba inicial o de nivel antes de empezar con nuestra unidad didáctica y si fuese necesario se realizarían algunos ejemplos más a modo de refuerzo.

-Números enteros:

1- Indica cuáles de los siguientes son números enteros:

$$\boxed{2, \sqrt{(2)}, \frac{3}{2}, 4, -216, 2^2, -3}$$

-En este caso buscamos que los alumnos sepan distinguir que es un número entero y que no.

2- Ordena estos números en una recta de números enteros horizontal y en una vertical:

-4, 12, 0, 5, -3, -5, 1, -6, 8

-Con este ejercicio buscamos dos cosas en primer lugar recordar cómo se ordenan los números enteros y su colocación sobre la recta entera, pero también ver que la recta se puede poner en vertical o en horizontal, cosa que será necesario cuando empecemos a trabajar con un eje cartesiano.

-Números reales:

3- ¿Cuál de los siguientes números crees que es mayor? Compruébalo situándolos sobre una recta de números reales:(Puedes usar una calculadora para saber un valor aproximado de los números)

$$\boxed{3, \frac{16}{5}, \sqrt{2}+1, \sqrt{3}, 4.25, \pi, -3, -\sqrt{5}, \frac{400}{1200}}$$

-Con este ejercicio queremos ver si los alumnos se hacen una idea aproximada del valor decimal que tienen los números reales y posteriormente que lo comprueben y sitúen sobre la recta real. Este proceso adquirirá gran importancia al trabajar con funciones continuas.

4- Escribe 2 números enteros que quieras. Obtén el número que se encuentra entre esos números (Recuerda que el número intermedio se calcula sumando ambas cifras y dividiendo por 2). Quédate con el número intermedio y el que se sitúa a su derecha de los dos iniciales. Repite este proceso 3 veces.

a) ¿Cuántas veces se podría realizar este proceso?

b) ¿Cuál es el valor intermedio de 2 y -2?

c) Sabemos que el valor intermedio de 2 números es 4.25. ¿Pueden ser los dos números iniciales enteros? ¿Puede ser alguno de los 2 un número entero? Razona tu respuesta.

-Este ejercicio tiene bastantes objetivos. El primero es reforzar el cálculo numérico. El segundo sería el ver con el apartado a) que siempre podemos encontrar un número entre 2 números dados y de allí deducir la idea de que la recta real es continua. Con el apartado b) queremos conseguir deducir la idea de inverso de un número en la recta real. Y con el c) buscamos que razonen con números que no son enteros y las operaciones con reales.

5- Ordena los siguientes números reduciendo la fracción (sin usar la calculadora)

a) $\boxed{\frac{49}{7}, \frac{6}{2}, \frac{200}{50}, -\frac{60}{10}, \frac{25}{5}, \frac{-33}{11}, \frac{8}{-2}}$

b) $\boxed{\frac{1}{4}, \frac{3}{15}, \frac{2}{2}, \frac{2}{12}, \frac{15}{3000}, \frac{8}{64}}$

c) $\boxed{\frac{4}{3}, \frac{15}{45}, \frac{425}{255}, \frac{147}{63}, \frac{200}{300}, \frac{378}{189}}$

-En este ejercicio se pretende recordar la reducción de fracciones. Además en el apartado a) se pretende recordar las diferentes formas de expresar una fracción negativa, en el b) el proceso de ordenación de fracciones cuando estas tienen el mismo numerador y en el c) cuando tienen el mismo denominador.

-Proporcionalidad:

6- Un granjero necesita diariamente 96.93 kg de pienso y 85.32 kg de forraje para alimentar a sus 27 vacas. ¿Qué cantidad de pienso y de forraje diarios necesitará a partir de ahora si ha vendido 11 vacas? Dos meses después nacen 2 terneros que consumen la misma cantidad que una vaca, ¿cuánto pienso y forraje necesitará a partir de ese momento?

-En este problema vamos a empezar a repasar la proporcionalidad, además se trata de una relación inversa que hará a los alumnos pensar un poco y no la simple relación de “a más, más” que parece que ocurre siempre a la hora de hablar de proporcionalidad. Es cierto que no vamos a usar mucho la función inversa, pero es necesario ya que sí se tratarán algunos aspectos relacionados con ella. Además se refuerza el cálculo con decimales, ya que parece también que en los problemas de proporcionalidad el resultado siempre es un número entero.

7- El dueño de una papelería ha abonado una factura de 670 € por un pedido de 25 cajas de folios. ¿A cuánto ascenderá la factura de un segundo pedido de 27 cajas? ¿Cuántas cajas recibirá en un tercer pedido que genera una factura de 938 €?

-Con este problema queremos recordar la proporcionalidad directa ya que representa una función lineal y será una parte importante de estudio en nuestra unidad didáctica.

8- Sabemos que un cuaderno cuesta 2 euros. Rellena una tabla en la que se vea el precio de 2, 3, 4, 5 y 6 cuadernos. Realiza una gráfica con estos valores.

-En este problema planteamos una situación más sencilla, pero queremos que los alumnos se empiecen a familiarizarse con las tablas y con las gráficas de situaciones fáciles como esta función lineal.

-Ecuaciones y cálculos algebraicos:

9- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $6x-3=5x+2$

b) $\frac{6}{5}x+\frac{3}{2}=16x-\frac{35}{14}$

c) $4(x+2)=3(x-1)-2(x+1)$

d) $4t-16=3(t+5)$

e) $4x^2=144$

f) $2y^2+3=(y-1)(y+3)$

Con este ejercicio queremos conseguir en primer lugar recordar la resolución de ecuaciones, en segundo lugar operaciones con monomios y por último la resolución de ecuaciones de segundo grado completas e incompletas. Además no en todos los ejercicios la variable es “x” para evitar que un simple cambio de nombre en los alumnos provoque que ya no sepan resolver esta ecuación. Considero necesario estas operaciones puesto que a veces las funciones vienen dadas por fórmulas y es necesario resolver cálculos similares al encontrar, por ejemplo. los cortes con los ejes.

-Sistemas de ecuaciones:

10- Resuelve los siguientes sistemas por el método indicado en cada caso:

a) $\begin{cases} y+2x=-9 \\ 2y+3x=-7 \end{cases}$ por sustitución

b) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases}$ por igualación

c) $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 5x+y=-7 \end{cases}$ por reducción

-El objetivo es que sepan resolver sistemas de ecuaciones por los 3 métodos trabajados en la parte de álgebra, ya que en esta unidad se enseñará el método de resolución gráfico y podrán comprobar las soluciones por alguno de los métodos estudiados.

# 4. Razones de ser del objeto matemático.

### 4.1 Razón de ser.

La razón de ser de este objeto matemático que quiero trasmitir es la de la necesidad de usar funciones para modelar situaciones de la vida real. Además veremos la necesidad de tener varias representaciones de una misma función ya que por ejemplo se podrán obtener valores más precisos cuando tengamos una tabla, mientras que para describir un fenómeno podríamos hacerlo a través de una gráfica. También veremos que será mucho más preciso el disponer de una expresión de la función y así conseguir con exactitud todas las características.

Por otro lado también será necesario obtener información de las gráficas, ya que en multitud de ocasiones recibimos información codificada de esta forma.

En definitiva, la necesidad de usar las funciones vendrá dada por las ventajas que estas poseen a la hora de representar cualquier situación que pueda darse en nuestro entorno. Por este motivo también será necesario interpretar las funciones para obtener las características de los fenómenos que modelan.

### 4.2 Razón de ser histórica.

A lo largo de la historia ha habido multitud de situaciones en las que se han usado las funciones aunque con una definición diferente en muchos casos a la actual o incluso sin una definición clara.

Evidentemente es muy difícil exponer todas las ocasiones en las que se han usado funciones a lo largo de la historia, ya que en multitud de ocasiones no hay registro por escrito de las mismas.

Pero sí que apreciamos que se ha dado tres enfoques a las funciones a lo largo de la historia.

-Función como tabla de valores.

Según varias investigaciones, se puede intuir que las primeras ideas matemáticas que pueden ser relacionadas con el concepto de función surgen en la antigua Babilonia.

Hay que comentar que el sistema de numeración de esta civilización consistía en dos símbolos, uno que representaba la unidad y otro que representaba nuestra actual decena. Además usaban un sistema sexagesimal, puesto que sólo disponía de cifras hasta el 59 empezando por el 0.

Usando esta numeración era habitual encontrar tablillas de arcilla con algunos cálculos matemáticos que podían surgir en su vida cotidiana relacionados con el comercio, agricultura, astronomía o los calendarios entre otras.

La escritura de esta civilización se conoce ya desde 1835 con los hallazgos de Henry Rawilson y las traducciones que realizó junto con Edward Hincks. Pero las primeras tablillas con contenido matemático se dieron a conocer en 1929 con los descubrimientos del arqueólogo Edgar James Banks.

Era habitual encontrar tablillas con relaciones entre un número n y su cuadrado o su cubo por ejemplo.

Estas tablillas podrían considerarse como la primera aparición de una relación entre un número y una cantidad de la otra columna que se ha calculado mediante una expresión. Sería algo parecido a una tabla de valores actual que describe una función.

Por otro lado Grecia siempre ha sido considerada la cuna de la civilización occidental y siempre han demostrado grandes conocimientos en las ciencias y por supuesto también en matemáticas. Claro está que los conocimientos matemáticos de los griegos son herencia de las matemáticas Egipcias y babilónicas entre otras.

Una de las más importantes aportaciones a las matemáticas hecha por los griegos es la idea de dependencia entre cantidades, ya que ellos la mencionaron por primera vez, por ejemplo de la mano de Arquímedes y sus leyes de la mecánica:

“Cualquier cuerpo sólido que se encuentre sumergido total o parcialmente en un fluido será empujado en dirección ascendente por una fuerza igual al peso del volumen del líquido desplazado por el cuerpo sólido”

Claramente en las leyes de Arquímedes o en muchos otros postulados griegos podemos ver que están hablando de una función lineal, aunque evidentemente ellos no la llamen así.

Otra aproximación al concepto de función podemos verlo en los estudios trigonométricos. Los primeros tratamientos que se hace a la trigonometría consisten en ver la relación existente entre los arcos o cuerdas de un círculo con su correspondencia en tablas de datos organizados ya conocidos desde la época de Hipócrates.

Por lo tanto podemos relacionar la trigonometría con el concepto de función ya que se intentaba ver la dependencia existente entre elementos de la circunferencia. Pero también en la organización sistemática y estudios en la dependencia para determinar las regularidades que posteriormente darían lugar a la elaboración de una teoría basada en las mediciones de arcos y cuerdas de una circunferencia.

Estudios en trigonometría también podemos verlos en las matemáticas árabes, los cuales disponían de tablas para el cálculo de senos, cosenos, secantes, cosecantes, tangentes y cotangentes. Nuevamente vemos una función que viene dada por una tabla de datos. Además es curioso que ya no se trata de funciones polinómicas como las vistas por babilonios o griegos.

-Función como representación de un fenómeno real y primeras representaciones gráficas.

Por ejemplo Nicolás Oresme hizo grandes aportaciones a la representación gráfica de funciones. Su representación consistía en segmentos verticales que apoyaba sobre una superficie llana formando una figura geométrica. Estos segmentos representaban las variaciones que se daban al observar algún fenómeno. Por ejemplo para describir un movimiento uniformemente acelerado se pondría sobre un segmento horizontal representando la posición en cada instante con un segmento en vertical y consiguiendo así una especie de gráfica que describía el fenómeno.

Es una de las primeras representaciones gráficas de una función que encontramos a lo largo de la historia.

En la edad moderna ocupa un lugar protagonista el estudio del movimiento como motor de las ideas científicas. Por ejemplo Galileo consideraba que el movimiento puede ser representado por curvas que simularían el trazo dibujado por una partícula al moverse. Como vemos Galileo basa sus trabajos en la observación y medición. Por ejemplo de caída libre de cuerpos siendo la primera vez que se representa un fenómeno mediante la experimentación a diferencia de los análisis cualitativos del movimiento hechos por sus predecesores.

Galileo basa sus estudios de la caída libre en una situación en la que un objeto parte de una superficie horizontal y éste se mueve hasta su extremo y aprecia que siempre sigue una trayectoria parabólica si se desprecia la resistencia del aire. Esta representación mejora la de Oresme.

Galileo por lo tanto aporta al concepto de función una nueva perspectiva al tratamiento de la representación del movimiento como trayectoria y la descripción de sus mediciones con relaciones matemáticas que vienen dadas por una fórmula o expresión.

Esto da pie a que los matemáticos se centren en buscar métodos más adecuados para describir los movimientos. Un primer elemento a destacar es el de abordar el problema del lenguaje adecuado que exprese las ideas matemáticas. Vemos a François Viète que diferencia entre variable y parámetro de una ecuación lo cual propicia la idea de que una función puede venir representada por una ecuación.

-Función cómo fórmula y representación sobre un eje cartesiano.

Es René Descartes en su libro "El discurso del método" el que establece por primera vez el hecho de que una ecuación en x e y es una forma de expresar una dependencia entre dos cantidades variables de forma que dando valores a una variable, podemos conocer el valor de la otra.

Posteriormente Fermat introduce el concepto de ecuación lineal usando vocales (generalmente A y E) para representar las cantidades desconocidas tal y como había hecho Vieté. Fermat enuncia que todas las ecuaciones de primer grado representan líneas rectas.

Así se asentaron las bases de la hoy conocida como geometría analítica. Si bien es cierto aún no se ha formado el concepto de función, todos estos avances unidos a los de otras ramas de la matemáticas, como el hecho de usar letras o signos para representar de manera más cómoda las cantidades desconocidas o las operaciones, propiciaría la aparición del concepto formal de función.

Definición actual del concepto.

La definición actual de función se formuló en la edad contemporánea, a lo largo de la misma vemos diferentes aproximaciones desde diversos puntos de vista hasta la obtención de la definición actual. Como digo hay múltiples aproximaciones y desde puntos de vista diferentes, análisis, teoría de conjuntos,… Vamos a citar unas aproximaciones, pero no vamos a darle demasiada importancia a estas definiciones, ya que se emplean matemáticas mucho más avanzadas de las que se abarcan en este nivel, y nos centraremos en las representaciones de funciones vistas anteriormente, que son mucho más próximas a lo que queremos conseguir con nuestros alumnos.

En esta época encontramos en primer lugar a Newton que basa su estudio en el teorema del binomio y el estudio de series infinitas. Aunque el mayor aporte de Newton hacia el concepto de función viene dado por el tratamiento geométrico-cinemático del que parte su estudio.

Para Newton el movimiento de un móvil venía descrito por una curva que era composición de dos movimientos uno en vertical y otro en horizontal. Por lo que la posición estaba determinada por dos coordenadas y éstas variaban en función del tiempo.

El estudio de Newton se basa en dos problemas, el primero consiste en encontrar la velocidad del movimiento para un momento determinado y el segundo que era el inverso del anterior, encontrar en qué tiempo el objeto se mueve con una determinada velocidad.

Estas apreciaciones están muy relacionadas con la idea de función que existe actualmente.

También Leibniz hizo aportes. Su estudio se dedicó sobre todo a las series infinitas, pero advirtió la reciprocidad que hay entre el problema de obtener el área bajo una curva y la tangente de la misma. También la generalización de términos como constante, variable, coordenadas y parámetro de manera muy similar a la conocida actualmente.

Con todos estos antecedentes se empezaron a encontrar las primeras definiciones de las funciones.

Encontramos a Bernoulli que define: “una función arbitraria de x es una cantidad formada de manera cualquiera a partir de x y constantes”, de donde se puede interpretar que con “cualquier manera” se refiere a una ecuación algebraica.

También Euler definió función de la siguiente manera: “una función de una cantidad variable es una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de esta cantidad variable y números o cantidades constantes”, el mismo Euler explica que por “expresión analítica” se refiere a operaciones algebraicas.

Posteriormente Euler precisó otra definición, semejante a la anterior pero cambiando la idea de expresión analítica por la de correspondencia entre variables como elementos pertenecientes a conjuntos. Su definición fue: “si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquella x se llama función de aquella variable”. Con esta definición se plantea la idea de que una función se origina cuando es posible asignarle una curva cualquiera en un sistema de coordenadas. También puede atribuirse a Euler la notación de f(x) para referirse a la función f aplicada sobre el argumento x.

Vemos que Euler deja entrever la idea de correspondencia entre ecuaciones y curvas dejando clara la idea que dada una función siempre puede trazarse la curva correspondiente y viceversa.

Una nueva definición podemos agradecérsela a Lagrange quien definió función como: “llamamos función a toda expresión matemática de una o varias cantidades en la cual estas aparecen de cualquier manera, relacionando o no con algunas otras cantidades que son consideradas como constantes, mientras las cantidades de las función puede tomar todos los valores posibles”

Las nuevas soluciones que iban surgiendo a problemas físicos originaban nuevas definiciones cada vez más precisas. En concreto se unió un nuevo elemento en el desarrollo del concepto de función, la clasificación entre continuas y discontinuas.

Así surgen definiciones como la de Lobachevsky: “El concepto general exige llamar función de x a un número, el cual se da para cada x y paulatinamente varía junto con x. El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida.

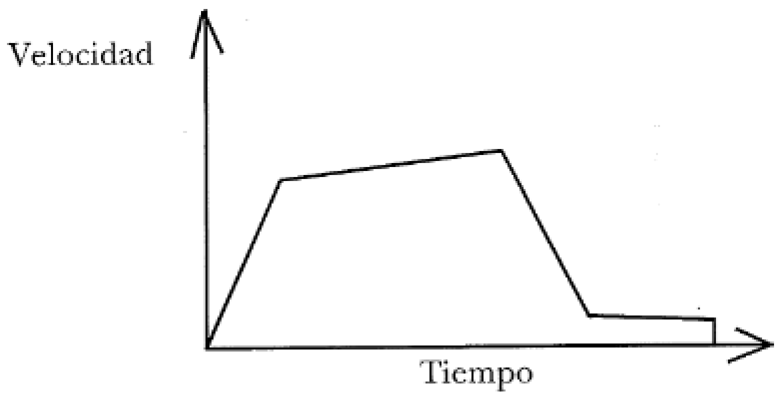
O la de Dirichlet, que es bastante satisfactoria: “Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x”

Por último fue Hausdorf quién cito la definición que se conoce hoy en día, en términos de relaciones de conjuntos: “El concepto de función es casi tan fundamental y primitivo como el concepto de conjunto. Una relación funcional está formada por pares de elementos, al igual que un conjunto está formado por elementos individuales”.

**4.3 Problemas que constituyen la razón de ser.**

Vamos a ver tres problemas que podemos usar a modo de razón de ser del objeto matemático a enseñar.

1. Marta está montada en una noria, y nos gustaría representar la altura en la que se encuentra en cada momento. ¿Sabrías representarlo? ¿Influye la velocidad a la que se mueve la noria? Representa que ocurriría si la noria se moviera más deprisa y más despacio. Si la noria se averiase, representa gráficamente la altura a la que se encuentra Marta en cada instante.
2. ¿Qué deporte podría producir una gráfica así? Razona cuáles de las siguientes opciones podrían ser y cuáles no.




Pesca

Salto de pértiga

100 metros lisos

Paracaidismo

Golf

Tiro con arco

Lanzamiento de Jabalina

Salto de altura

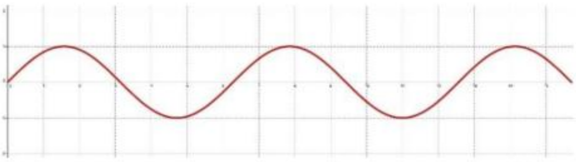
Salto de trampolín

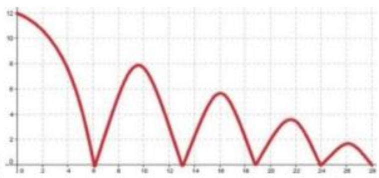
Billar

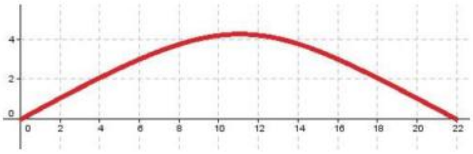
Carrera de obstáculos.

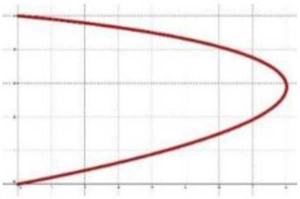
Esquí acuático.

3. Vamos a ver algunas gráficas que muestran la evolución de cierto fenómeno a lo largo del tiempo (eje horizontal). Encuentra una situación de la vida real que quede representada por cada una de ellas. ¿Has podido encontrar una situación para cada gráfica? ¿Qué ocurre con la gráfica d)?

a) 

b) 

c) 


d) 

Implementación: Estos problemas se presentarán a los alumnos al comienzo de la unidad didáctica.

La idea de lo que se quiere conseguir es en el caso del primero, que intenten describir una situación que es familiar para los alumnos. Muchos empezarán a describirlo con palabras pero en seguida surgirán problemas a la hora de expresarse y se darán cuenta que se necesita otra forma de transmitir la información. Verán que es necesario recurrir a las funciones y en este caso a una representación gráfica que muestre la altura de la noria a lo largo del tiempo.

Con el segundo problema veremos que aunque es muy útil una representación gráfica, como se dieron cuenta con el primer ejercicio, si no sabes interpretarla, sigues sin saber la solución a tu problema. Al ver esa gráfica, pronto empezarán a decir que es salto de altura, lanzamiento de jabalina o alguna respuesta similar. Esto se debe a que la gráfica parece que describe el recorrido de la jabalina o de alguien realizando un salto. Esperamos que algún alumno aprecie que se representa la velocidad con respecto al tiempo y en ese momento surja el debate. Sino iniciaremos el debate proponiendo que la representación puede simular un tiro en una mesa de billar. Con este ejercicio conseguiremos que los alumnos vean que las gráficas serán muy útiles siempre y cuando sepamos interpretarlas.

Con la información que hayamos podido trasmitir a los alumnos o estos hayan encontrado por sí mismos en los dos primeros ejercicios, intentamos que encuentren ellos una situación para cada una de las gráficas. Los apartados a), b) y c) aunque supondrán problemas, más o menos todos los alumnos encontrarán una situación. Aunque estoy convencido que una gran parte de la clase dirá que la b) representa una pelota botando, por el hecho de que imita su movimiento. Explicaremos que puede ser así si lo que mides es la altura a la que está la pelota pero que no tiene nada que ver con el hecho de que se parezca al movimiento que sigue. La idea es que se den cuenta de que la d), que no es una función, no puede representar ninguna situación real si el eje de las x es el tiempo, ya que eso supondría estar en dos estados a la vez. Por estado entendemos en dos puntos si describe la posición, con dos velocidades distintas si representa velocidad, etc. Así introducimos el concepto de función y la idea de que no puede haber más de un valor en una misma línea vertical.

Los alumnos tendrán muchas dificultades al intentar resolver estas situaciones, ya que el tema de funciones es algo nuevo para ellos. A partir de este momento desarrollaremos un campo de problemas con el que intentaremos conseguir que situaciones como las anteriores ya no supongan ninguna dificultad a los alumnos. En primer lugar veremos problemas que ayuden a los alumnos a representar e interpretar gráficas y funciones. A modo de clarificar un poco más el tema, veremos algunos ejemplos de funciones (lineal, de proporcionalidad inversa y cuadrática), de las que podremos obtener su ecuación o fórmula y obtener información más precisa que con la gráfica. También trabajaremos las tablas de valores como otra representación de una función o cómo paso intermedio entre la fórmula y la gráfica. Y también la resolución gráfica de sistemas.

Vemos que problemas de este estilo se han dado a lo largo de la historia, a la hora de construir el concepto de función, por lo que podríamos decir que la razón de ser que mostraremos a los alumnos es similar a la razón de ser histórica para este objeto matemático.

# 5. Campo de problemas, técnicas y tecnologías

Bloque 1: Concepto de función y características de estas.

1. Ejercicios relacionados con el concepto de función y sus diferentes formas de representación.
2. Representación de puntos en el plano.
    2.1 Dibujo aproximado de una función.
3. Ejercicios sobre el estudio global de una función.
    3.1 Dominio e imagen.
    3.2 Monotonía.
    3.3 Extremos relativos y absolutos.
    3.4 Cortes con los ejes.
    3.5 Continuidad.
4. Construcción aproximada de una gráfica conociendo sus características.
5. Problemas sobre la recreación del comportamiento de un fenómeno real a través de su gráfica.
6. Problemas de asociación de gráficas con su correspondiente situación real y viceversa.

Bloque 2: Ejemplos de funciones.

7. Ejercicios relacionados con las funciones lineales.
    7.1 Ejercicios de representación gráfica de una ecuación a partir de su fórmula.
    7.2 Ejercicios de representación de una tabla de valores.
    7.3 Obtención de la ecuación a partir de una tabla de puntos.
    7.4 Obtención de la ecuación de la función y su gráfica conociendo algunos datos.
8. Función de proporcionalidad inversa.
    8.1 Representación gráfica y ecuación.
9. Función cuadrática.
    9.1 Representación gráfica y ecuación.
10. Problemas de relacionar funciones tipo con su gráfica.

11. Obtención de la gráfica de la función resultante de combinar varias funciones tipo.

Bloque 3 Sistemas de ecuaciones. Método gráfico.

12. Resolución de sistemas lineales.
13. Resolución de sistemas no lineales con ayuda de herramientas informáticas.

A continuación indicaré las técnicas y tecnologías asociadas a cada uno de los problemas del campo de problemas.

Bloque 1. Concepto de función y características de éstas.

1. Determinar qué es y qué no es función en las diversas representaciones de las mismas.

Si la función viene dada por una descripción del suceso, consiste en ver que tiene coherencia esa definición.

Si la función viene dada por una expresión, reconocer que las funciones más básicas como los polinomios no presentan ningún problema.

Si la función viene dada por una tabla de valores, identificar la variable independiente y ver que no existe ningún valor que presente dos imágenes diferentes.

Si la función viene dada por una gráfica, se trazará la línea perpendicular al eje de las x y la "desplazaremos" por todos los puntos del dominio de la función para ver que sólo presenta un corte con la función en todos los casos.

Tecnología asociada. La definición de función nos indica que para cada punto del dominio, sólo puede haber una imagen asociada. Veremos la idea de que las funciones polinómicas siempre cumplen esto. También que en las tablas de valores la variable independiente no puede presentar dos imágenes para un mismo punto. Mientras que en las gráficas al trazar una línea vertical que vamos desplazando por todo el dominio de la función (todos los valores de x), si sólo es cortado una vez indica que sólo presenta una imagen en ese punto la función.

2. Representación de puntos en el plano.

Dentro de este apartado veremos dos tipos de ejercicios:

-Representar puntos en el plano sobre dos ejes cartesianos.

Un punto se representa como (x, y) donde x e y son coordenadas, la primera corresponde al eje horizontal o eje de abcisas y la segunda al eje vertical o eje de ordenadas.

Hay dos técnicas para situar los puntos. La primera consiste en situarnos en el origen de los ejes cartesianos cuyas coordenadas son (0, 0) y nos desplazamos tantas unidades cómo indique la primera coordenada del punto a representar hacia la derecha, si es un número positivo o a la izquierda si es negativo. Y luego se repite el proceso con la otra coordenada hacia arriba o hacia debajo de donde se quedó el punto.

La segunda técnica consiste en trazar una línea vertical (aunque sea imaginariamente) que pase por el eje de abcisas en el mismo punto que indique la primera coordenada. Y luego hacer lo mismo con una línea horizontal que pase por el eje de ordenadas a una altura igual a la segunda coordenada del punto a representar.

El punto buscado es la intersección de las dos rectas.

Las tecnologías que justifican estas técnicas son:

Para la primera el hecho de que (a, 0) + (0, b) = (a, b) O lo que es lo mismo podemos primero desplazarnos en el eje X y a continuación hacer el desplazamiento en el eje Y.

Para la segunda se justifica como que la intersección entre la recta x=a y la recta y=b es el punto (a, b) por lo que podemos representar esas dos rectas y su intersección será el punto buscado.

-Obtener las coordenadas de un punto representado en una gráfica.

La técnica a desarrollar es contar las unidades que se separa el punto del origen horizontalmente y ponerlo como primera coordenada teniendo en cuenta que si está más a la derecha este número será positivo y a la izquierda negativo. Y lo mismo para la segunda coordenada pero mirando las unidades que lo separan del origen verticalmente.

La tecnología que justifica esta técnica es la propia definición de representación de un punto sabiendo sus coordenadas.

2.1 Dibujo aproximado de una función.

La idea intuitiva es representar los puntos que conozcamos como se ha explicado antes o posteriormente veremos cómo obtener los puntos a partir de una fórmula. Y a continuación unirlos trazando la recta o curva.

La única salvedad es saber si esta unión de los puntos tiene sentido o no. Por eso habrá que discutir ante qué tipo de variable nos encontramos, puesto que si nos encontramos con una variable discreta, la unión de los puntos no tendría sentido, mientras que con una variable continua sí se podría realizar esta unión.

La tecnología que justifica esta técnica es que en una variable discreta por ejemplo personas no podemos saber qué pasará con 3.2 personas puesto que no sabemos que significa ese 0.2 personas. Por lo que no se puede unir los puntos y su gráfica serán puntos aislados. Sin embargo si estamos con una variable continua como el tiempo, sí tiene sentido saber qué ocurre en el segundo 3.5 por ejemplo, por lo que su gráfica será una recta o curva.

3. Ejercicios sobre el estudio global de una función.

3.1 Dominio e imagen.

Unimos estos dos problemas en uno ya que la técnica es muy similar en ambos casos. Para el dominio la técnica será imaginar que pintamos la función y que deja un rastro de pintura. Desplazaremos la función verticalmente y la parte que quede “pintada” sobre el eje x será el dominio de la función. Para la imagen la idea será idéntica pero desplazando horizontalmente la función hasta el eje y, los puntos que queden “pintados” sobre el eje de ordenadas será la imagen de la función.

La tecnología que justifica esta técnica la encontramos en la propia definición de dominio de una función. Ya que el dominio es el conjunto de puntos para los que la variable independiente está definida o lo que es lo mismo los puntos x para los que existe la gráfica de la función. Con la técnica de ver qué parte del eje se queda “pintado” conseguimos exactamente esto, ver los puntos del eje x para los que existe la gráfica. En el caso de la imagen son los posibles valores que alcanza la función. Esto se consigue con la técnica que hemos descrito.

3.2 Monotonía.

Para ver la monotonía (crecimiento y decrecimiento de la función) recorreremos el eje de las x (abcisas) de izquierda a derecha, si cada vez los valores de f(x) (coordenada y) aumentan, estaremos en un tramo creciente y si disminuyen, será un intervalo decreciente. Si por el contrario los valores son iguales estaremos ante un tramo constante. Los resultados se darán como un intervalo mirado en la variable x, ya que si lo miramos en la y podría haber confusión, ya que se pueden alcanzar varias veces un mismo valor, cosa que en con las x no puede ocurrir.

La tecnología que justifica la técnica anterior es la traducción al lenguaje de la definición formal. Una función y=f(x) es creciente en un intervalo (a, b) del dominio si para cada par de valores $x_1 < x_2$ si se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$, traduciendo esto con palabras, consiste en la técnica hemos descrito. Si vemos la definición de función decreciente y de función constante veremos que se corresponde también con la técnica descrita antes.

3.3 Extremos relativos y absolutos.

Detectaremos los puntos en los que la función cambia de ser creciente a decreciente o viceversa y estos puntos serán máximos o mínimos relativos respectivamente. Para encontrar si alguno de estos puntos es máximo o mínimo absoluto miraremos si alguno de los relativos es también el punto máximo de la función. También miraremos el valor que tiene la función en los extremos de los intervalos que conformen el dominio (si el dominio es continuo pero la función no lo es habrá que mirar también el punto de discontinuidad), ya que el valor máximo de la función también puede encontrarse entre estos puntos.

La tecnología que justifica esta técnica volvemos a encontrarla en la definición de extremo relativo. Por definición un punto es máximo relativo si el valor de f(x) en ese punto es el mayor en un entorno de ese punto. Por lo tanto un punto en el que la función pase de ser creciente a decreciente cumplirá este requisito. Idénticamente vemos el caso de mínimo relativo. En cuanto a los extremos absolutos, son los valores máximos y mínimos de la función en la totalidad de su dominio. Por ello comprobamos los puntos que ya son máximos o mínimos locales pero nos damos cuenta que si una función es creciente, el valor máximo estaría en el extremo final del dominio, por este motivo comprobamos también estos puntos y lo mismo ocurre en el caso de dominio continua pero función discontinua.

3.4 Cortes con los ejes.

De manera gráfica estos puntos se localizarán mirando los puntos que recaen sobre los ejes coordenados y dar sus coordenadas. Los que recaigan sobre el eje x serán los cortes con el eje x y los que recaigan sobre el eje y serán los cortes con el eje y (por la propia definición de función, sólo se puede cortar a la sumo una vez el eje y).

La tecnología que justifica la técnica es nuevamente la definición de punto con los cortes, ya que los cortes con el eje x son aquellos que tienen segunda coordenada igual a 0, o lo que es lo mismo los puntos en los que la función pasa por el eje de abcisas. O la resolución de un sistema por el método gráfico, ya que el corte con el eje x sería la resolución del sistema determinado por la función con la recta y=0. Y análogo con los cortes con el eje y.

3.5 Continuidad.

Consistirá en mirar que puntos del dominio de la función no se unen por derecha o por izquierda con el resto de la función y estos serán los puntos de discontinuidad. Hay que matizar que si el dominio no es continuo estos puntos de discontinuidad no indicarán que la función no sea continua en estos puntos. La función será continúa en el resto de valores del dominio. Se darán todos los resultados en función de las coordenadas x de la función.

La tecnología que justifica esta técnica es nuevamente la definición formal de continuidad. Una función es continua en un punto si existe la función en ese punto (es parte del dominio) y además el límite de la función en ese punto coincide con su imagen. Esta explicación se escapa del nivel de los alumnos con los que tratamos, por eso daremos la idea intuitiva de que será continua si no presenta un salto la función bien sea en un punto o en un intervalo.

4. Construcción aproximada de una gráfica conociendo sus características.

A la vista de las características que nos den, los alumnos deben ser capaces de hacer una representación gráfica aproximada de la función. Para ello deberán aplicar las técnicas empleadas en el punto 3, pero a la inversa. Las tecnologías que las justifiquen serán las mismas que en ese apartado.

5. Problemas sobre la recreación del comportamiento de un fenómeno real a través de su gráfica.

Los alumnos deberán saber qué significa en una situación real cada una de las características que hemos visto en el punto 3. Así deberán saber qué significado tiene en su caso por ejemplo que una función sea creciente en un intervalo.

Realmente no hay ninguna técnica ni tecnología nueva asociada a este punto.

6. Problemas de asociación de gráficas con su correspondiente situación real y viceversa.

Los problemas consistirán en exponer a los alumnos unas situaciones reales y por otro lado sus gráficas y deberán asociar cada situación con su gráfica. Para ello nuevamente se basará en algunas de las características estudiadas en el punto 3 y con ellas deberán decidir cuál es la representación más apropiada en cada caso.

Nuevamente no se presentará ninguna técnica ni tecnología nueva en este apartado.

7. Ejercicios relacionados con la función lineal.

7.1 Ejercicios de representación gráfica de una ecuación a partir de su fórmula.

Vamos a presentar tres técnicas en este apartado:

Técnica 1. Los alumnos deben conocer que la función lineal tiene una expresión del tipo y=mx + n dónde m es la pendiente de dicha recta y n es su ordenada en el origen. Por ello y representarán el punto (0,n) en la gráfica y a continuación mirarán el valor de $m = \frac{a}{b}$ (a y b enteros y b distinto de 0). A partir del punto representado se desplazarán hacia arriba a posiciones, si m es positivo o hacia abajo si es negativo y luego se desplazará b unidades a la derecha del punto obtenido marcando el punto obtenido. La unión de estos puntos prolongada producirá la gráfica requerida.

Técnica 2. Teniendo en cuenta la representación anterior de la ecuación general de la función lineal. Los alumnos representarán los puntos (0, n) el punto (b, n+a) si m es positivo o (b, n-a) si m es negativo. La unión de estos puntos prolongada será la gráfica requerida.

Técnica 3. Los alumnos deben saber que si una función es lineal pueden obtener su gráfica sabiendo dos puntos cualesquiera de la gráfica. Por lo tanto darán dos valores arbitrarios a x y hallarán sus respectivas imágenes. Representarán por lo tanto ($x_1$, f($x_1$)) y ($x_2$,f($x_2$)) y la unión prolongada de estos dos puntos dará la gráfica requerida.

Las tecnologías que justifican estas técnicas son:

Tecnología 1. La recta corta al eje y precisamente en n. Como hemos visto el corte con el eje y se obtiene con el punto en que x vale 0 y este es n. Así el punto (0,n) pertenecerá a la recta. Por definición de pendiente positiva, si construimos el triángulo rectángulo formado por dos puntos de la recta como vértices y como hipotenusa el segmento de la recta que los une, la pendiente será igual a dividir el cateto opuesto por el cateto contiguo del ángulo que se forma entre el segmento de recta y el cateto horizontal. Por lo que el hecho de que la pendiente m=a/b habrá que realizar este triángulo con a unidades de cateto opuesto y b unidades el contiguo. Justo lo que realizarán los alumnos. Un razonamiento similar se haría para pendientes negativas.

Tecnología 2. Es similar a la anterior, ya que al final hallan los mismos puntos que en la técnica anterior pero de manera menos intuitiva, sabiendo exactamente la expresión que estos tendrá.

Tecnología 3. En este caso se encuentran dos puntos y sus imágenes sustituyendo en la fórmula el valor de estos puntos (x). Sabiendo que sólo hay una recta que une dos puntos, nuestra recta debe ser la que una estos puntos.

Para realizar el proceso inverso, obtener la ecuación a partir de una gráfica presentaremos también dos técnicas.0

Técnica 1. La ecuación buscada será de la forma y = mx + n. Miraremos el punto de corte de la gráfica con el eje y, y la segunda coordenada de este punto será igual a n. Para obtener m tomaremos dos puntos de la gráfica A = ($x_1$, $y_1$) y B = ($x_2$, $y_2$), con $x_1 < x_2$ y m se obtendrá como $m = \frac{(y2 - y1)}{(x2 - x1)}$ . Se sustituyen m y n en la ecuación inicial.

Técnica 2. En esta técnica obtendremos también dos puntos y los sustituiremos en la fórmula general de la recta. Resolveremos el sistema formado por estas dos ecuaciones con incógnitas m y n. Se sustituirán los valores obtenidos de m y n en la ecuación general.

Las tecnologías que justifican estas técnicas son:

Tecnología 1: Por la definición proporcionada anteriormente de ordenada en el origen y pendiente queda perfectamente justificado, ya que $y_2 - y_1$ nos proporciona lo que se desplaza la y, y $x_2 - x_1$ nos proporciona lo que se desplaza la x entre ($x_1$, $y_1$) y ($x_2$, $y_2$).

Tecnología 2: Sustituyendo dos puntos de la recta obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que tiene una única solución para los parámetros m y n. Resolviendo este sistema obtenemos la ecuación de la recta.

7.2 Ejercicios de representación de una tabla de valores.

Si tenemos una tabla de puntos, la técnica a seguir es la misma que en 2. Representación de puntos en el plano. Con la única diferencia que ahora los puntos vienen recogidos en una tabla con dos entradas, una para la variable dependiente (y) y otra para la independiente (x).

El proceso inverso de rellenar una tabla de valores conociendo la gráfica de la función también se resuelve con la técnica explicada en 2. Representación de puntos en el plano. Pero la parte de obtención de puntos de una gráfica, con la salvedad de que se almacenarán en una tabla.

Las tecnologías que justifican las técnicas son idénticas a las mostradas en el apartado 2.

7.3 Obtención de la ecuación a partir de una tabla de puntos.

Podemos usar las técnicas descritas en el apartado 7.1 Ejercicios de representación gráfica de una ecuación a partir de su fórmula para pasar de la gráfica a la ecuación. Con la única diferencia que en vez de obtener puntos de la gráfica nos los dan en una tabla.

El proceso inverso, el de rellenar una tabla a partir de una fórmula, consiste en dar valores arbitrarios de x o y para sustituirlos en la fórmula y obtener la otra coordenada.

Estas técnicas están justificadas en el apartado correspondiente.

7.4 Obtención de la ecuación de la función y la gráfica conociendo algunos datos.

En este apartado se necesitarán técnicas explicadas en el punto 7 y algunos conceptos anteriores del punto 3 por ejemplo. Abarcará problemas como rellenar una tabla de valores parcialmente incompleta, concepto de paralelismo o ejercicios contextualizados para obtener una función o gráfica.

8. Función de proporcionalidad inversa.

8.1 Representación gráfica y ecuación.

Los ejercicios de este apartado consistirán en asociar la gráfica con la ecuación de este tipo de funciones. La representación se sabe que es una hipérbola y la ecuación es de la forma $y = \frac{k}{x}$, con k una constante distinta de 0. K nos indica si la hipérbola está situada en el primer y tercer cuadrante (k>0) o en el segundo y cuarto (k<0) y además conforme aumenta la k en módulo aumenta la separación las ramas de los ejes.

Otra alternativa será la de dar valores en la función para trazar la gráfica de manera aproximada. Lo único que en este caso habría que dar más de dos valores en cada rama.

Las tecnologías que justifican estas técnicas vemos que con una k positiva, el signo de x es el mismo que el de y por lo que debe representarse en el primer y tercer cuadrante y con k>0 el signo de x es opuesto al de y por lo que debe situarse en el segundo y cuarto cuadrante. Sustituyendo por ejemplo x=1 y dejando fijo ese valor para varias k, vemos que el valor de k aumenta la separación a los ejesde la parábola.

9. Función cuadrática.

9.1 Representación gráfica y ecuación.

Los ejercicios serán similares a los del apartado anterior. En este caso nos ayudaremos de los cortes con los ejes y del vértice de la parábola. El corte con el eje y será f(0) y si la ecuación es de la forma $y = ax^2 + bx + c$, se corresponderá con c. Para el corte con el eje x habrá que resolver f(x) = 0, y por consiguiente la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$. El vértice viene determinado por ( $\frac{-b}{2a}$, $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$). Por último el valor de a nos indicará que la función es cóncava (a < 0) o convexa (a > 0).

Como siempre otra técnica es la de la representación a partir de dar valores a la fórmula.

La tecnología que justifica la técnica se basa en la descrita en 3.4 para cortes con los ejes. Para obtener el vértice sabemos que es el punto que es máximo o mínimo de la parábola, en cualquier caso podemos obtenerlo como un punto crítico y al derivar la función e igualarla a 0 el punto que hemos puesto es el único que aparece. Como esto no es adecuado para el nivel de alumnos en el que nos encontramos, lo demostraremos gráficamente con técnicas descritas en 3.3 extremos relativos y absolutos. La curvatura podemos hallarla con el signo de la segunda derivada, en este caso quedaría 2a que siempre va a tener el mismo signo, por lo que si a > 0 será convexa o si a < 0 será cóncava. Nuevamente acudiremos a una demostración gráfica para los alumnos.

10. Problemas de relacionar funciones tipo con su gráfica.

Después de todas las técnicas vistas en los puntos 7, 8 y 9, estos ejercicios consistirán simplemente en identificar en qué caso nos encontramos y aplicar las técnicas de ese apartado para asociar la ecuación y la gráfica.

Por lo tanto no necesitan ninguna justificación nueva.

11. Obtención de la gráfica de la función resultante de combinar varias funciones tipo.

Los ejercicios consistirán en construir una gráfica a partir de las características y propiedades de las funciones tipo vistas. Por lo tanto nos remitimos a las técnicas de representación gráfica de estas funciones vistas en los puntos 7, 8 y 9.

La justificación está en esos apartados.

12. Resolución de sistemas lineales.

Recordemos que los alumnos ya habían visto la resolución de sistemas por los métodos de reducción, sustitución e igualación. Pero en este caso nos queremos centrar en el método gráfico como herramienta o técnica empleada a la hora de resolver un sistema.

La técnica consistirá en representar gráficamente las dos funciones lineales sobre un mismo eje coordenado, usando las técnicas descritas en 7.1. Posteriormente ver si estas dos rectas coinciden en algún punto y dar las coordenadas de ese punto (técnicas vistas en 2) como solución al sistema.

La tecnología que justifica esta técnica es el hecho de que si las dos rectas pasan por un mismo punto, este punto estará en las dos rectas y por consiguiente cumplirá las dos ecuaciones. La resolución de un sistema lineal se basa en encontrar el punto que cumple las dos ecuaciones.

13. Resolución de sistemas no lineales con ayuda de herramientas informáticas.

El proceso será muy similar al anterior y aunque algunas funciones (cuadrática e inversa) podrían resolverse manualmente, es preferible usar un software como por ejemplo Geogebra para representar estas funciones y ver sobre todo que un sistema no lineal puede tener más de una solución.

La justificación es la misma que en el apartado 12.

# 6. Diseño del campo de problemas

En este apartado vamos a ver unos problemas que sirvan de ejemplo para ilustrar los diferentes apartados de los campos de problemas expuestos anteriormente. También se describirán las técnicas o modificaciones de las mismas que se necesitan en cada caso. Por último se indicará el proceso a seguir para su resolución así como se realizaría su implementación en el aula.

Bloque 1.

1. Ejercicios relacionados con el concepto de función y sus diferentes formas de representación.

Indica cuáles de las siguientes expresiones y gráficas representan una función. Razona tu respuesta. Indica si hay alguna función más de una vez con dos representaciones distintas.

a) Hoy hemos tenido en Zaragoza una temperatura constante de 22 grados.

b) El jefe de un laboratorio nos indica que la cantidad de agua que se necesita para llevar un experimento a cabo es 100 mililitros cada segundo pero durante los primeros 10 segundos se necesita 200 mililitros.

c) En un viaje submarino el indicador de presión del submarino indica que en el minuto 4 de la inmersión hay una presión de 4 bares (unidad de presión) y también en el mismo minuto hay una presión de 6 bares. El resto del viaje la presión se duplica cada minuto.

d) Se mide la distancia recorrida durante un viaje, estos son los datos obtenidos.

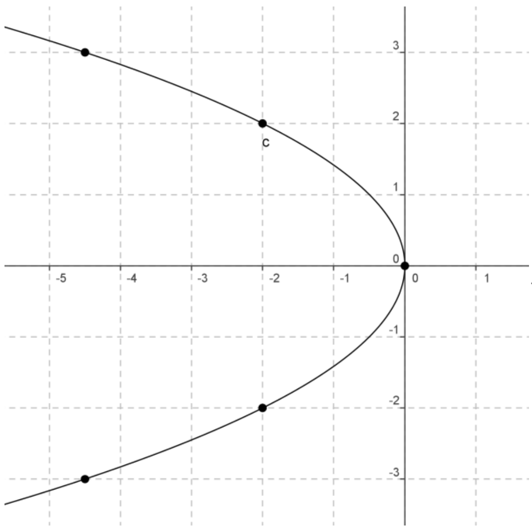
| Tiempo (h) | Distancia (km) |
|---|---|
| 1 | 120 |
| 2 | 120 |
| 3 | 200 |
| 4 | 250 |
| 5 | 375 |

e) El estudio de otro coche nos ha producido estos resultados:

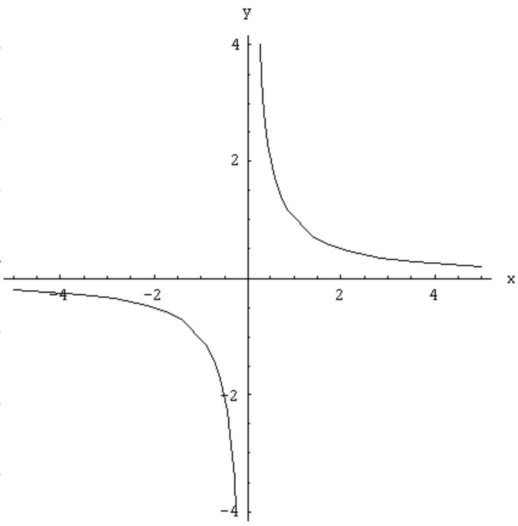
| Tiempo (h) | Distancia (km) |
|---|---|
| 1 | 100 |
| 1 | 200 |
| 3 | 150 |
| 4 | 120 |

f) f(x) = 4x + 2

g)



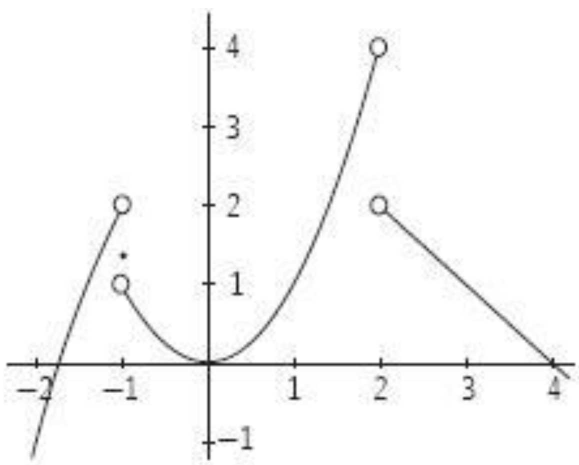

h)



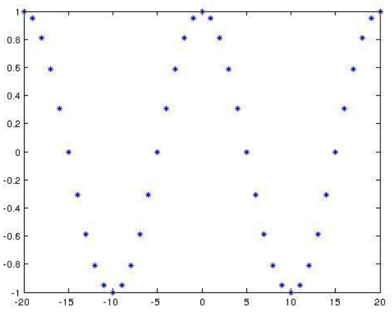

i)

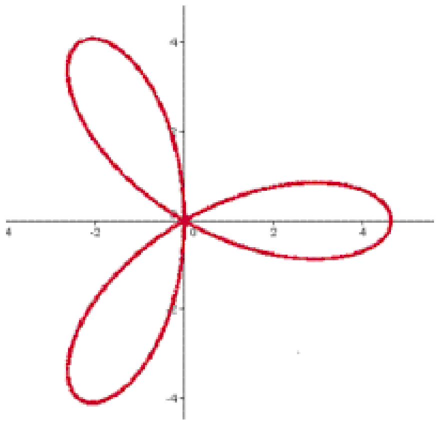
$$f(x)\begin{cases} -x^2+3 & x<-1 \\ 1.36 & x=-1 \\ x^2 & -1<x<2 \\ -x+4 & x>2 \end{cases}$$

j)



k) l)



Para realizar este ejercicio se utilizarán las técnicas descritas en el punto 1 del campo de problemas.

Este ejercicio se realizará tras una breve institucionalización del concepto de función, las diversas representaciones de las mismas y el concepto de variable dependiente e independiente, así como las técnicas para determinar qué es función y qué no.

En este ejercicio vemos funciones representadas en las cuatro formas que vamos a tratar (descripción, tabla de valores, ecuación y gráfica) y consiste en aplicar la técnica adecuada a cada caso.

Vemos que los casos a, b, d, f, h, i, j, k son funciones mientras que el resto no lo son. Además vemos que el apartado i es exactamente el mismo que el j. Por otro lado en las gráficas vemos funciones discretas y continuas, así como alguna que presenta asíntotas verticales y horizontales, con la intención de familiarizar a los alumnos funciones con características muy diferentes que verán este curso o en cursos posteriores.

2. Representación de puntos en el plano.

1) Representa los siguientes puntos e indica en qué cuadrante se localiza cada uno:

A = (2, 5), B = (-2, 5), C = (2, -5), D = (-2, -5), E = (4/3, -1), F = (5, 2)

2) Representa algunos puntos más sobre el mismo eje que el anterior e indica las coordenadas de los nuevos puntos (nombra cada punto con una letra mayúscula como en el ejercicio anterior). Representa algunos también sobre los ejes de coordenadas.

3) Responde las siguientes preguntas, ayudándote de los resultados obtenidos en los dos ejercicios anteriores:

a) ¿Qué tienen en común los puntos que se encuentran en un mismo cuadrante? ¿En cuál se situarían X = (-45, 13), Y = (12,-8/9)?

b) ¿Qué tienen en común los puntos que pueden unirse con una línea horizontal?

c) ¿Y con una vertical?

d) ¿Qué le ocurre a los puntos que recaen sobre alguno de los ejes?

Para realizar este ejercicio los alumnos necesitarán las técnicas descritas en el apartado 2 del campo de problemas.

Estos ejercicios se realizarán tras una breve institucionalización de los conceptos de eje coordenado, eje de abcisas, eje de ordenadas, coordenada de un punto, cuadrantes.

Se tratan de 3 ejercicios encadenados sencillos, en el primero se representan algunos puntos a partir de las coordenadas que se dan a los alumnos, en el segundo tienen la libertad de poner los que consideren y hagan el proceso de expresar sus coordenadas. Sería bueno representar algunos en la pizarra con la colaboración de varios alumnos, para tener una mayor variedad, por ejemplo un punto cada alumno. Con toda esta variedad de puntos, podremos formular las preguntas del apartado 3 y así obtener algunas conclusiones como que en un mismo cuadrante se conservan los signos de las coordenadas, o que el hecho de poder unir dos puntos con una misma recta horizontal o vertical significa que tienen la misma coordenada y o x respectivamente. Por último queremos que los alumnos descubran que si un punto recae sobre un eje, al menos una de sus coordenadas debe ser 0. En definitiva intentamos que los alumnos sepan en qué cuadrante se sitúa cada punto sólo viendo las coordenadas del mismo.

2.1 Dibujo aproximado de una función.

1) En la siguiente tabla se recoge la distancia recorrida por un coche desde que inicia su marcha:

| Distancia(km) | 20 | 100 | 100 | 150 | 210 | 240 | 400 | 450 | 500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo(h) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

a) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente? Representa estos puntos en unos ejes coordenados y dibuja la gráfica aproximada que describa el fenómeno.

b) ¿Puede el coche haber recorrido una distancia de 80 km al cabo de 10 horas? Razona tu respuesta.

c) Supongamos que el coche ha llegado a su destino tras 9 horas de viaje, ¿cuál será la distancia recorrida en la hora 10? ¿Y en la 11? Añade estos datos en la gráfica anterior

d) ¿Cuánta distancia habrá recorrido aproximadamente tras 4 horas y media de viaje?

2) En la siguiente tabla se recoge el número de personas que hay trabajando en una empresa cada mes:

| Personas | 100 | 98 | 99 | 98 | 97 | 97 | 96 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Mes | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

a)¿Cuál es la variable dependiente? ¿Y la independiente? Representa estos sobre unos ejes coordenados y dibuja la gráfica aproximada que describa el fenómeno.

b) En la gráfica que acabas de dibujar, ¿Cuántas personas hay en la empresa en el instante correspondiente a 1.5 meses?

c) ¿Cambiarías la gráfica que realizaste con antelación? Justifica tu respuesta. Traza la nueva gráfica.

d) A partir del mes 7, se contrata una persona nueva cada mes, representa en la gráfica anterior las personas contratadas en el mes 8 y en el 9.

Para realizar estos problemas utilizaremos las técnicas descritas en el apartado 2.1 del campo de problemas.

En este caso los alumnos realizarán los ejercicios sin ninguna explicación, ya que así conseguiremos que los alumnos sean dueños de su propio aprendizaje. El objetivo es que sean capaces de distinguir cuándo una variable es continua y cuando es discreta. Tras la realización de esta actividad sí que se realizará una institucionalización del concepto de variable continua y discreta.

El primer caso se trata de una variable continua, por lo que los alumnos podrán unir los puntos y dar una gráfica aproximada de la función y para ello primero se pide que los alumnos identifiquen qué variable se sitúa sobre el eje de las x (independiente) y cuál sobre el eje de las y (dependiente). Además se hacen algunas preguntas para que piensen los alumnos y adelantemos algunos conceptos que veremos posteriormente, de una manera muy intuitiva, como el hecho de que la distancia recorrida debe ser una función creciente o un tramo constante cuando el coche llegue a su destino. También se pregunta por un valor intermedio a los dados para que los alumnos descubran que sí tiene sentido unir los puntos.

Sin embargo en el segundo apreciamos una función discreta, aparentemente los alumnos pasarán por alto este hecho, ya que además la primera cuestión es similar al del ejercicio anterior. La intención es que los propios alumnos aprecien que algo falla con la siguiente pregunta, ya que saldría un número no entero de personas, cosa que es imposible. Y con esto se den cuenta que la representación gráfica más correcta es la de una variable discreta.

3. Ejercicios sobre el estudio global de una función.

3.1 Dominio e imagen.

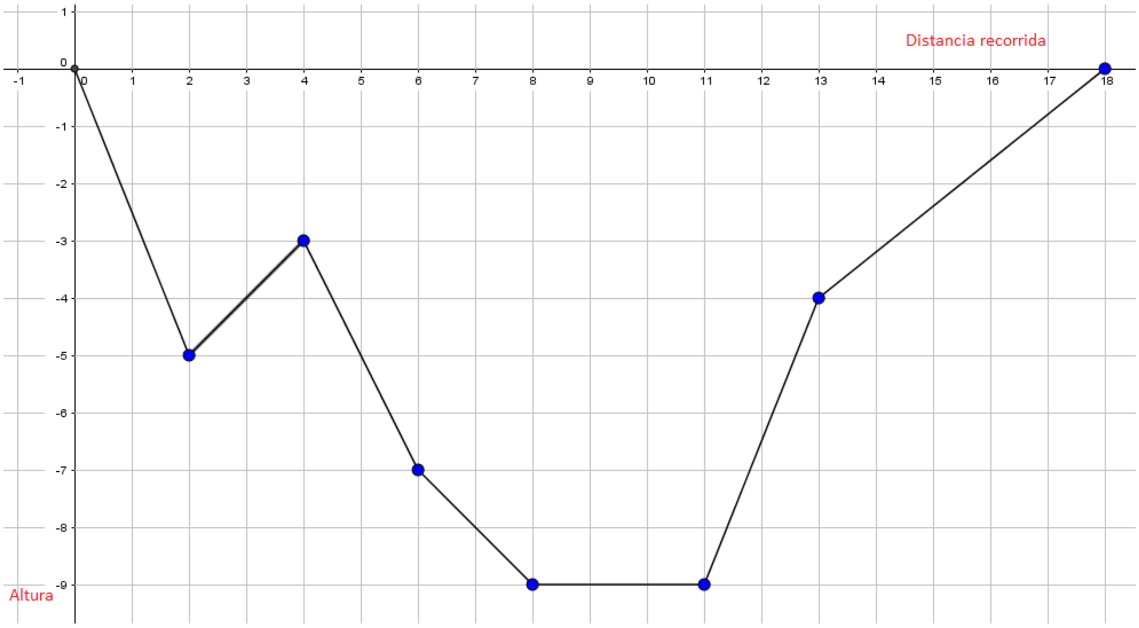
3.2 Monotonía.

3.3 Extremos relativos y absolutos.

3.4 Cortes con los ejes.

3.5 Continuidad.

1) En la siguiente gráfica representa la profundidad a la que se sumerge un submarino durante un viaje:




a) ¿Qué distancia se recorre durante el viaje?

b) ¿A qué alturas podemos encontrar el submarino durante el viaje?

c) ¿Cuál es la altura mínima que alcanzó el submarino?

d) Cuando el submarino llegó a su máxima profundidad, ¿qué crees que hizo? Elige la respuesta más acertada y razona el porqué de tu elección.

Recogió un objeto de un barco hundido.

Persiguió a una criatura marítima para hacerle una foto.

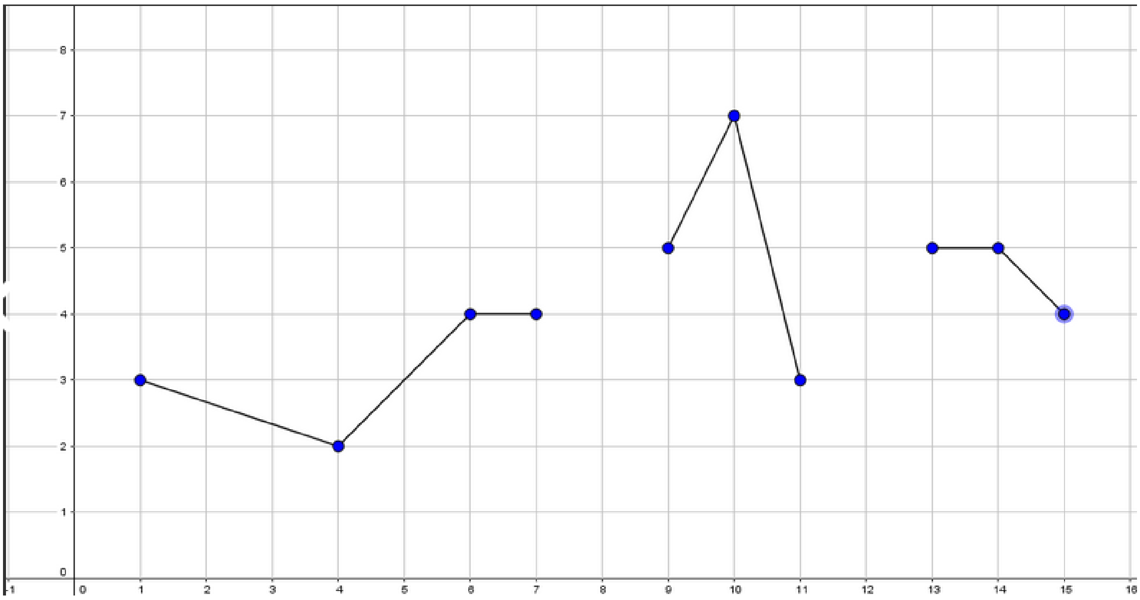
e) ¿En qué tramos desciende el submarino? ¿En cuáles asciende?

f) ¿En qué puntos se producen los cambios de ascenso y descenso?

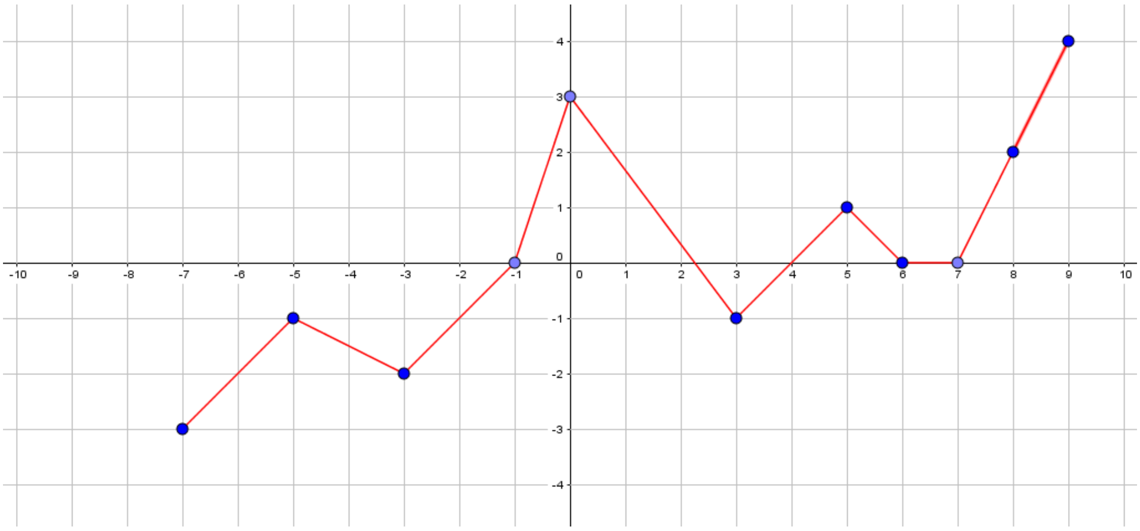
g) Si la altura se mide con respecto al nivel del mar, ¿cuántas veces está al mismo nivel que el mar? ¿En qué puntos?

2) Realiza un estudio global de la gráfica. Calcula su dominio, imagen, intervalos de crecimiento, de decrecimiento, intervalos constantes, extremos relativos y absolutos, puntos de corte con los ejes y continuidad.

a)



b)



Estos problemas se resuelven con las técnicas descritas en el punto 3 y subapartados del mismo en el campo de problemas.

Tras ver qué era una función, a continuación pasamos a ver algunas características de las mismas.

Podemos ver que el primer ejercicio se preguntan algunas características de las funciones de una manera contextualizada, mientras que en el segundo ejercicio se pregunta de manera directa. Por lo tanto considero que la forma de realizar estas actividades en clase es realizar la primera sin ninguna explicación y podría hacerse fomentando el aprendizaje cooperativo o de manera individual. Tras ella se haría una institucionalización de los conceptos dominio, imagen, monotonía, extremos, cortes con los ejes y continuidad, pero siempre relacionándolos con el problema contextualizado que hemos trabajado. Posteriormente se realizaría el ejercicio 2, para asentar los conceptos.

4. Construcción aproximada de una gráfica conociendo sus características.

Traza la gráfica aproximada de la siguiente función continua sabiendo que:

-Su dominio es [4, 17]

-Su imagen es [-2, 3] U [4, 7]

-La función pasa por el punto (5, 6)

-Tiene un máximo absoluto en (6, 7) y un mínimo relativo en (17, -2)

-Corta dos veces al eje X, una en x=14 y otro en x=16.

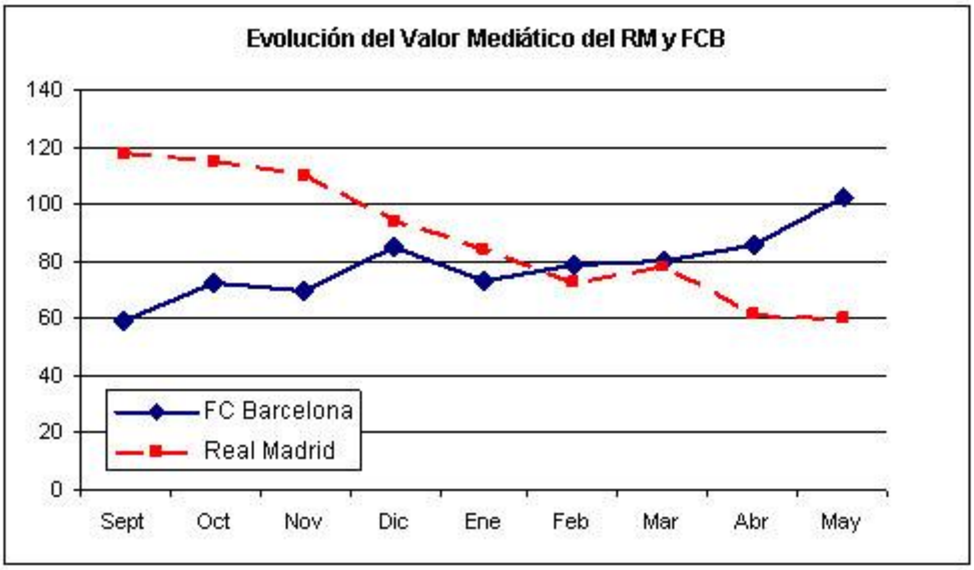
¿Puede ser continua esta función?

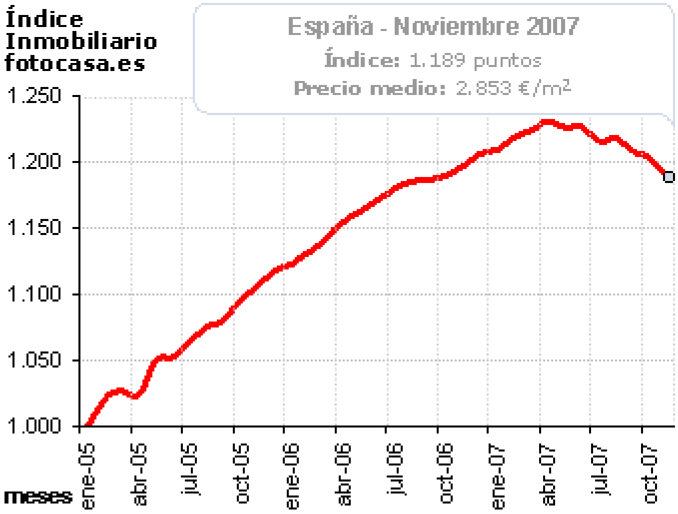
Como vemos es un problema abierto, con múltiples soluciones. Queremos que los alumnos vayan dibujando la información que se les proporciona para obtener un gráfica que cumpla todo esto. Por último se les pide que razonen si puede ser continua esta función y los alumnos deben darse cuenta de que esto no es posible ya que su imagen no es continua.

Este problema considero que es de una dificultad más elevada, por lo que se realizará de manera cooperativa.

5. Problemas sobre la recreación del comportamiento de un fenómeno real a través de su gráfica.

1) A continuación vemos unas cuantas gráficas extraídas de noticias. Explícalas con tus palabras a alguien que no haya estudiado funciones teniendo en cuenta todo lo estudiado hasta ahora.




Este problema se puede resolver con las técnicas expuestas en el punto 5 del campo de problemas.

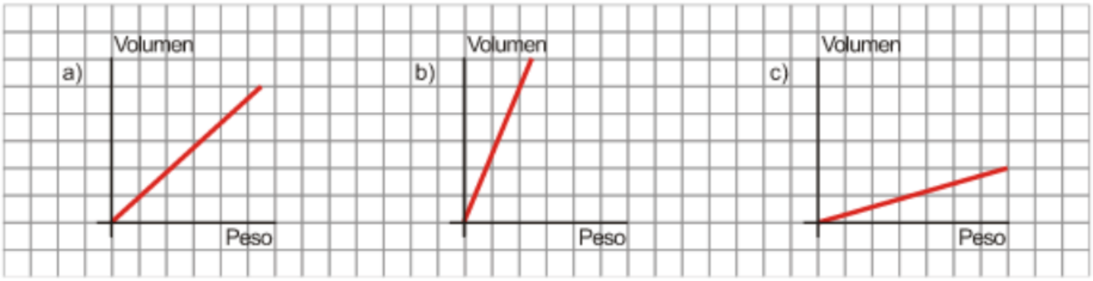
En este caso queremos que los alumnos vean la importancia del tema, y que mostramos gráficas extraídas de noticias y la importancia de lo estudiado a la hora de comprender una notica.

Tiene que aplicar todo lo estudiado hasta el momento para comprender toda la información que muestra la gráfica.

Aquí sólo se muestran dos ejemplos, pero es recomendable encontrar algunos más. Otro buen ejercicio podría ser un trabajo individual en el que los alumnos deberán encontrar una o dos gráficas en prensa (digital o impresa) y comentarlas de manera idéntica a lo que se ha hecho en este ejercicio.

6. Problemas de asociación de gráficas con su correspondiente situación real a través de su gráfica.

1) En las siguientes gráficas vemos la relación entre peso y volumen de tres materias: garbanzos, algodón y plomo. Relaciona cada gráfica con su materia e indica por qué:




2) Dependiendo del día de la semana, Rosa va al instituto de una forma distinta:

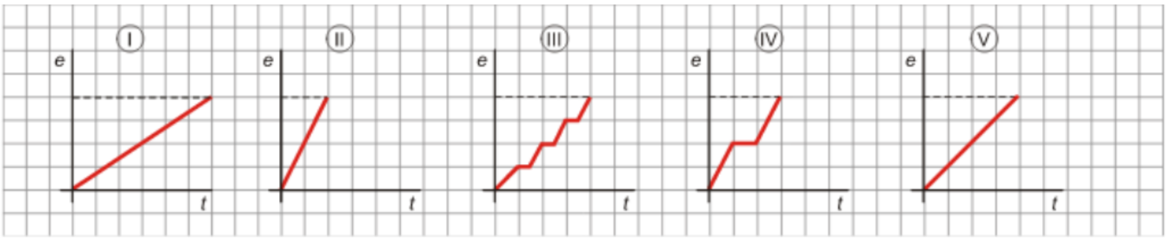
-El lunes va en bicicleta.

-El martes, va con su madre en coche, aunque tienen que recoger a su tío Luis.

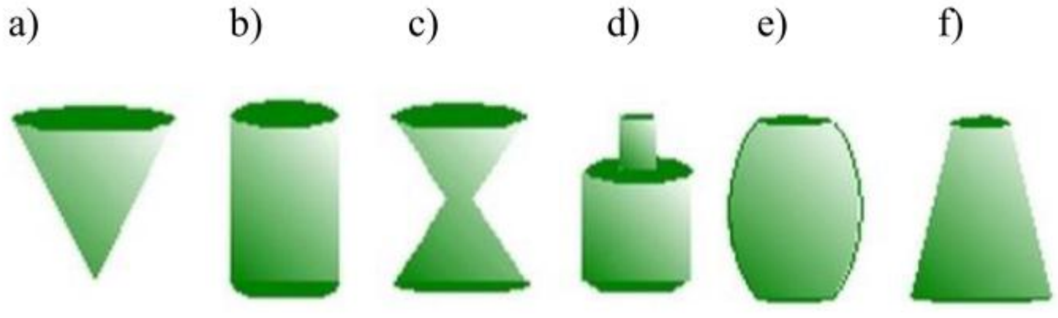
-El miércoles, va en autobús urbano.

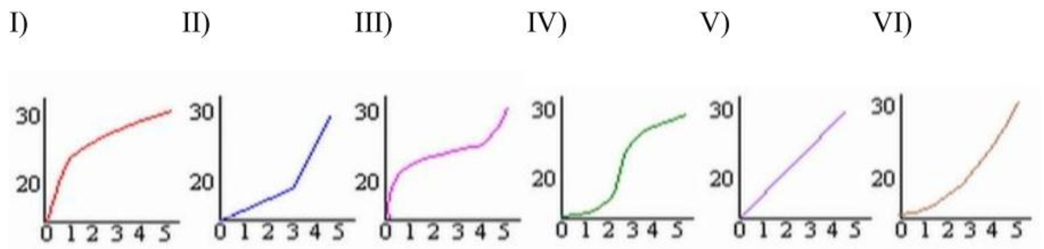
-El jueves va andando.

-El viernes va en motocicleta.




3) Consideremos que los siguientes recipientes tienen la misma altura y capacidad. Se comienzan a llenar con agua de manera constante. Relaciona cada bote con la gráfica que muestra el nivel del agua en relación al tiempo de cada recipiente.




Invéntate otro recipiente diferente y construye su gráfica.

Estos problemas se resuelven con las técnicas explicadas en el punto 6 del campo de problemas.

En los 3 problemas vemos diferentes situaciones y las gráficas que las modelan y simplemente los alumnos deben unir de manera justificada cada gráfica con su situación.

Estos ejercicios considero mejor realizarlos de manera individual ya que no son muy difíciles pero así nos aseguramos que todos los alumnos aprenden a relacionar fenómenos con su gráfica.

Quizás el problema 3 pueda crear algún problema más pero los dos primeros debería ser capaz de resolverlos toda la clase. Sobre todo en la última pregunta la de inventarse un recipiente y construir su gráfica.

7. Ejercicios relacionados con las funciones lineales.

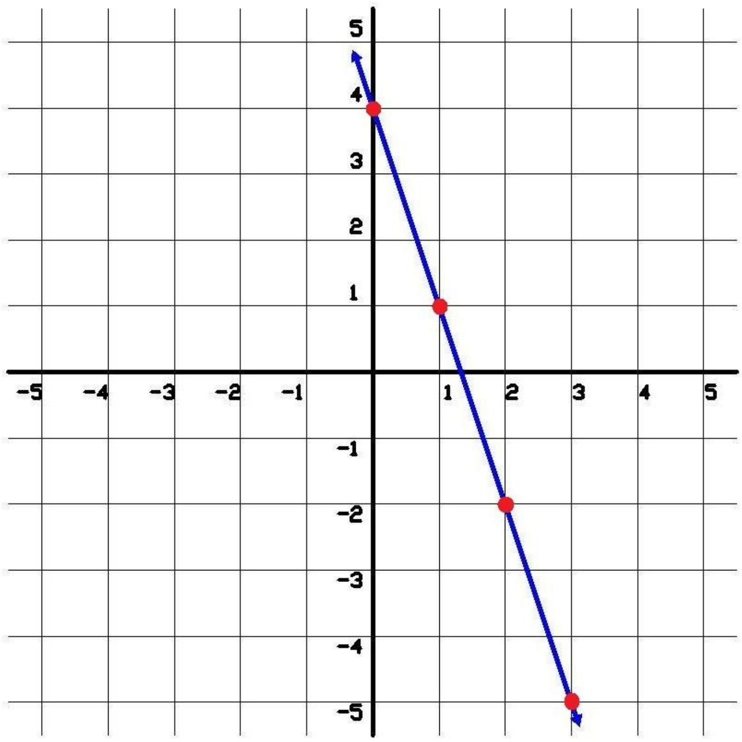
7.1 Ejercicios de representación gráfica de una ecuación a partir de su fórmula.

1) En mi USB tengo 200 megas de información, pero necesito transferirme unos archivos para poder realizar un trabajo y veo que cada segundo se transfieren 100 megas.

a) Expresa esta situación con una fórmula y represéntala gráficamente.

b) Si el USB tiene una capacidad de 4000 megas, ¿Cuánto tarda en llenarse por completo? ¿Cómo modifica esto la fórmula anterior? ¿Y la gráfica anterior?

2) Halla la ecuación de la función que describe esta gráfica.




Estos ejercicios se realizan con las técnicas descritas en el punto 7.1 del campo de problemas.

En el primer ejercicio se empieza por una situación cuya solución puede obtenerse con lógica, pero queremos que los alumnos se den cuenta que dentro de esa lógica están usando la ecuación de la función y sepan obtener dicha fórmula. El siguiente paso es representarla.

Por último paso se añade una pequeña modificación al problema poniendo una capacidad máxima. Esta nueva situación sólo reduce el dominio, pero estoy casi seguro que los alumnos intentarán buscar una nueva fórmula sin obtener una solución, por eso será importante que el profesor guie poco a poco a los alumnos hacia la solución correcta.

En el segundo problema se pide la situación contraria, a partir de una gráfica obtener la ecuación, como vimos en las técnicas, este proceso se limita a calcular la pendiente y la ordenada en el origen. Cómo única dificultad encontramos que se trata de una pendiente negativa, ya que por lo visto en los libros casi en su totalidad son funciones cuya pendiente es positiva. Con esto conseguimos que los alumnos se habitúen a estas situaciones también.

Antes de la realización de estos problemas habrá que hacer una breve institucionalización del concepto de función lineal, pendiente, ordenada en el origen,... Tras esta institucionalización ya es decisión del profesor explicar las técnicas y que lo resuelvan los alumnos o sin ninguna explicación más, dejar trabajar a los alumnos y hacer una labor de conductor hacia la solución correcta, fomentando que los alumnos sean dueños de su proceso de enseñanza-aprendizaje.

7.2 Ejercicios de representación de una tabla de valores.

7.3 Obtención de la ecuación a partir de una tabla de puntos.

1) Un lago cerca del Círculo Ártico se cubre con una capa de hielo de 2 metros de grosor durante los meses de invierno. Cuando llega la primera, el aire caliente derrite el hielo de una manera constante. Si sabemos que transcurridas 3 semanas de primavera el grosor del hielo es 1 metro y 25 centímetros.

a) Representa la gráfica que expresa la función grosor del hielo en función de las semanas transcurridas.

b) Calcula la fórmula de la función grosor de hielo de otro lago, si sabemos que su grosor al inicio de la primavera es 3 metros y trascurridas 5 semanas el grosor es 1 metro.

c) ¿Estos dos lagos se encuentran próximo el uno del otro o algo alejados? (Podemos ver que dos lagos que se encuentren próximos, se derretirán con una misma velocidad)

d) ¿En qué lago nos podremos bañar antes?

Este problema se resuelve con las técnicas descritas en los apartados 7.2 y 7.3 del campo de problemas.

En este mismo problema encontramos una mezcla de dos subapartados del campo de problemas. En el apartado a) se busca obtener una representación a partir de una tabla mientras que en el b) se busca obtener una ecuación.

El apartado c) busca que los alumnos adquieran un primer contacto con la idea de que la pendiente muestra la velocidad de un fenómeno. Posiblemente en este apartado necesitarán mucha ayuda por parte del profesor, cuya labor en este ejercicio será la de ayuda, ya que los alumnos intentarán resolver el problema de manera individual o por grupos cooperativos.

El apartado d) busca nuevamente la interpretación de la información que muestra una gráfica o fórmula, que aunque no se trabaja específicamente en este punto considero necesaria trabajar a lo largo de toda la unidad, ya que es la idea fundamental que buscamos.

7.4 Obtención de la ecuación de la función y su gráfica conociendo algunos datos.

1) Obtén la fórmula y representa las siguientes funciones lineales:

a) La función, que pasa por (1,3) y por (2,4)

b) La función que pasa por (2, 0), (3, -4) y (4, -6)

c) La función que pasa por (-2, -3). Y encuentra el valor de x=4 y x=-3. Comprueba la solución con tu compañero y explica qué ha ocurrido.

d) La función cuya gráfica es paralela a la recta y=4x + 1 y pasa por (6, 15)

Este ejercicio se resuelve con las técnicas descritas en 7.4 y anteriores del campo de problemas.

En el primer caso tenemos dos puntos, con los que podemos hallar la pendiente y la ordenada en el origen, realizando una ecuación. Sin embargo vemos que lo más fácil es representar esos dos puntos y unirlos y a partir de la gráfica obtenemos la ecuación.

El segundo caso no se puede resolver con una función lineal, pero queremos comprobar que los alumnos aprecian este hecho.

El tercer lugar vemos que no va a haber una única solución, queremos ver cómo actúan los alumnos ante este caso.

Con estos tres ejercicios queremos que los alumnos se den cuenta que una función lineal puede quedar perfectamente descrita con 2 puntos y que con menos de 2 no podemos obtener una única solución.

Por último en el apartado d) los alumnos deben manejar la situación de paralelismo y por lo tanto la conservación de la pendiente.

Estos ejercicios se realizarán de manera individual y los corregirán los propios alumnos por parejas.

8. Función de proporcionalidad inversa.

8.1 Representación gráfica y ecuación.

1) Traza la gráfica aproximada de las siguientes funciones de proporcionalidad inversa:

a) f(x) = $\frac{1}{x}$ b) f(x) = $\frac{2}{x}$ c) f(x) = $\frac{1}{2x}$ d) f(x) = $\frac{-1}{2x}$

Para resolver este ejercicio se usará las técnicas explicadas en el punto 8.1 del campo de problemas.

Las funciones de proporcionalidad inversa queremos tratarlas pero de manera muy superficial, por ello simplemente se quiere que los alumnos sean capaces de dibujar una gráfica de manera aproximada. Quizás se podría poner algún problema contextualizado para identificar en qué ocasiones nos podemos encontrar una función de este estilo como por ejemplo la cantidad de anestesia en sangre desde el momento de pincharla, hasta unas horas después, aunque exactamente no sea una función inversa. Pero como digo no quiero profundizar mucho más en este punto ya que sólo queremos transmitir unas pinceladas del concepto a los alumnos.

9. Función cuadrática.

9.1 Representación gráfica y ecuación.

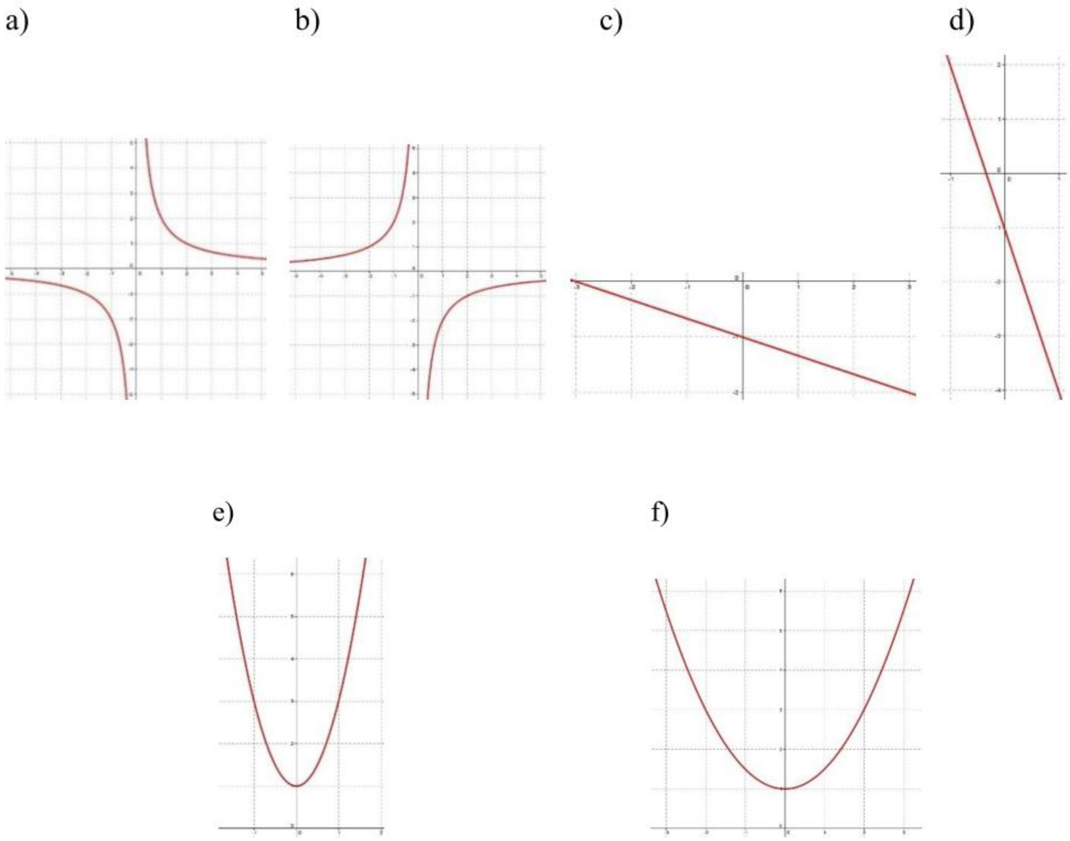
1) Traza la gráfica aproximada de las siguientes parábolas:

a) f(x) = $9x^2$ b) f(x) = $9x^2+3$ c) f(x) = $3x^2-3$ d) f(x) $-9x^2-3$
e) f(x) = $9x^2+x+3$ f) f(x) = $-9x^2-x-3$

Este ejercicio se resuelve con las técnicas explicadas en el apartado 9.1 del campo de problemas.

Ocurre algo parecido al caso anterior, en el que queremos que los alumnos adquieran el concepto y sepan reconocer qué es una función cuadrática y cómo es su gráfica, pero poco más. Se podría plantear algún problema contextualizado que venga descrito por una función cuadrática, pero ya se habrán realizado problemas de este estilo en la unidad de ecuaciones de segundo, por lo que tampoco vamos a insistir en exceso.

10. Problemas de relacionar funciones tipo con su gráfica.




$I)\ f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + 1 \quad II)\ f(x) = -3x - 1 \quad III)\ f(x) = \frac{2}{x} \quad IV)\ f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$

$V)\ f(x) = 2x^2 + 1 \quad VI)\ f(x) = \ -\frac{2}{x}$

Para la resolución de este problema se necesitan las técnicas descritas en el punto 10 y anteriores delcampo de problemas.

Nuestro objetivo es simplemente que reconozcan las funciones que han estudiado antes cuando no aparecen de manera aislada sino mezclada junto a las demás.

Tanto en este apartado como en los anteriores será necesario usar el aula de informática con los alumnos, para que usando Geogebra, visualicen y modifiquen las funciones estudiadas.

11. Obtención de la gráfica de la función resultante de combinar varias funciones.

1) Juan sube por una rampa a una velocidad constante con una pelota en la mano, llega hasta una ventana y lanza la pelota hacia arriba, siguiendo una trayectoria parabólica acabando su movimiento en el suelo. Representa la gráfica que relaciona la altura de la pelota en función del tiempo de manera aproximada, sin dar valores ni usar una función en concreto.

Para resolver este problema se usan las técnicas descritas en el punto 11 del campo de problemas.

Como en apartados anteriores, no queremos profundizar mucho en este aspecto. El problema posiblemente resulte muy abstracto para algunos alumnos, por ello y para atender la diversidad, se puede cambiar el enunciado para algunos alumnos, proporcionándoles una ecuación y tras ello generalizar o se puede complicar también diciendo por ejemplo que antes de caer al suelo, coge la pelota otra persona y automáticamente la vuelve a lanzar con otra trayectoria parabólica o incluso hacer razonar a los alumnos y dibujar la gráfica que relaciona la velocidad de la pelota a lo largo del tiempo.

12. Resolución de sistemas lineales.

1) En una granja hay patos y vacas. En total hay 15 animales y entre todos tienen 36 patas. Resuelve por el método gráfico y comprueba la solución con otro método a tu elección.

Este ejercicio se resolverá con las técnicas explicadas en el apartado 12.

Podemos encontrar cantidad de ejemplos, en el tema de sistemas lineales, ya que podemos resolver esos ejemplos por el método gráfico. Sólo queremos enseñar la técnica a los alumnos, por lo que será necesaria una breve institucionalización de la misma, pero no se le dará una gran importancia.

13. Resolución de sistemas no lineales con ayuda de herramientas informáticas.

En este caso no proporcionaré ningún ejemplo, ya que sería necesario un soporte informático para entenderlo. Por ejemplo empezaremos con funciones lineales cuyos parámetros lo conformen deslizadores y pediremos a los alumnos que encuentren una situación en la que hay 1 solución, ninguna, dos, tres o infinitas. El objetivo será que vean que en los sistemas lineales sólo podemos encontrar 1, ninguna o infinitas soluciones.

Posteriormente mostraremos una parábola y una recta y veremos que es posible 0, 1 o 2 soluciones y así iremos viendo diferentes casos, hasta donde se quiera profundizar, pero tampoco es una parte importante del tema, simplemente la idea es que los alumnos vean que si estamos ante sistemas más complicados el simple hecho de saber cuántas soluciones se pueden encontrar se complica bastante.

# 7. Secuenciación didáctica.

A continuación mostraré en una tabla cómo se distribuirá el campo de problemas que queremos desarrollar a lo largo de la unidad didáctica, así como una justificación del porqué de esta elección.

| SESIONES | CONTENIDOS |
|---|---|
| 1 | -Ejercicios de conocimientos previos.<br>-Presentación de la razón de ser. |
| 2 | -Concepto de función y diversas representaciones.<br>-Representación de puntos en el plano y obtención de coordenadas de puntos. |
| 3 | -Trazo aproximado de la gráfica de una función a partir de algunos de sus valores (puntos)<br>-Estudio global de una gráfica. |
| 4 | -Estudio global de una gráfica. |
| 5 | -Construcción aproximada de una gráfica conociendo sus características.<br>-Actividades de geogebra. |
| 6 | -Problemas sobre la recreación del comportamiento de un fenómeno real a través de su gráfica.<br>-Problemas de asociación de gráficas con su correspondiente situación real y viceversa. |
| 7 | -Función lineal. Institucionalización y ejercicios. |
| 8 | -Función lineal. Problemas. |
| 9 | -Función de proporcionalidad inversa.<br>-Función cuadrática. |

| | |
|---|---|
| 10 | -Relación de gráficas de funciones tipo con su respectiva ecuación.<br>-Construcción de una gráfica a partir de combinaciones de funciones tipo. |
| 11 | -Resolución de sistemas lineales y no lineales. |
| 12 | -Actividades de repaso |
| 13 | -Realización de la prueba escrita. |
| 14 | -Corrección de la prueba escrita. |

Esta secuenciación didáctica es orientativa y puede variar según cómo reaccionen los alumnos, pudiendo necesitar más tiempo para la asimilación de alguno de los conceptos y menos en otros. Cada sesión tendrá aproximadamente duración de 1 hora.

La primera sesión la dedicaremos al repaso de los contenidos previos necesarios para desarrollar la unidad didáctica y también presentaremos los 3 problemas elegidos como razón de ser. De este modo los alumnos podrán ver el objetivo a conseguir durante esta unidad didáctica y podrán repasar en casa los contenidos que necesitaremos y que más dificultades les hayan supuesto.

La sesión 2 será el momento en el que institucionalizaremos el concepto de función y sus representaciones, ya que considero necesario que los alumnos identifiquen una función con soltura desde el primer momento, para posteriormente poder desarrollar los demás aspectos. También comenzaremos a ver cómo se representan los puntos en el plano y el proceso inverso.

En la sesión 3 veremos la idea de continuidad de una función a través del trazo aproximado de la gráfica de una función. Al comienzo de la sesión surgirá la duda de poder o no unir los diferentes valores que alcanza una expresión. También plantearemos dudas por ejemplo en cuanto a diferentes fenómenos físicos y la ausencia de sentido de la representación de tiempos negativos entre otros y con esto conducir a los alumnos a la idea de dominio, imagen, continuidad, monotonía, extremos y cortes con los ejes.

En la sesión 4 institucionalizaremos los conceptos tratados el día anterior y practicaremos con algún ejercicio al respecto.

En la sesión 5 se tratará la construcción de una gráfica conociendo sus características y para ello algunos ejercicios se realizarán con lápiz y papel pero otros para mayor rapidez y motivación de la clase usaremos geogebra. También analizaremos todos los conceptos vistos hasta el momento con ayuda de geogebra, ya que considero que así los alumnos comprenderán mejor los conceptos.

En la sesión 6 queremos que los alumnos sepan relacionar un fenómeno real con su gráfica u obtener datos necesarios de una gráfica. En definitiva queremos que los alumnos sepan interpretar una gráfica. Consideramos que este punto es uno de los más importantes del tema y que este es el momento idóneo para tratarlo puesto que ya han analizado las características de las funciones.

Tras conocer las funciones en global, particularizaremos en algunos casos concretos con los que poder obtener más información de la función, por ejemplo a través de una fórmula, por eso en la sesión 7 empezaremos a tratar la función lineal. Se institucionalizará y se realizarán algunos ejercicios mecánicos para obtener la pendiente por ejemplo y poder usarlos después en la resolución de problemas que considero más importante en la formación de los alumnos.

En la sesión 8 usaremos los conceptos y técnicas adquiridos en la sesión anterior, para resolver problemas que supondrán un mayor grado de dificultad para los alumnos. También sería conveniente desarrollar esta sesión en el aula de informática para que los alumnos puedan usar geogebra como una ayuda a la hora de representar.

Durante la sesión 9 trataremos otros tipos de funciones como las de proporcionalidad inversa o las cuadráticas.

En la sesión 10 volveremos a trabajar con ejemplos reales en los que los alumnos deberán aplicar todo lo aprendido.

La sesión 11 la dedicaremos a la resolución de sistemas lineales o no lineales y sí que será necesario usar la sala de informática del centro, para hacer uso nuevamente de geogebra.

La sesión 12 será una sesión de repaso en la que se propondrán a los alumnos varias actividades de los diversos apartados del tema y por grupos deberán resolverlos. Esta sesión nuevamente se realizará en el aula de informática y los alumnos podrán usar geogebra cuando necesites. El objetivo es resolver las dudas que tengan los alumnos de cara a la prueba escrita que se realizará en la siguiente sesión.

Por último he añadido una sesión 14 en la que se corregirá la prueba escrita de la manera que se detalla en el punto siguiente. Desde luego no es nuestra intención dedicar una sesión completa para este propósito, pero hay que tener en cuenta que una parte de alguna sesión de la siguiente unidad didáctica estará reservado para este aspecto, ya que es fundamental para poder realizar una evaluación formativa.

# 8. Evaluación.

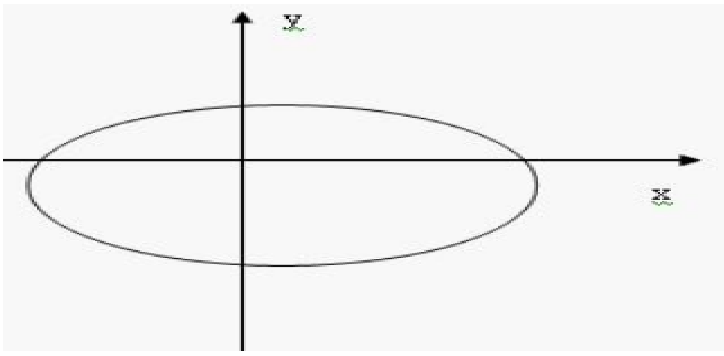
A continuación podemos ver un ejemplo de prueba que se puede usar para medir el nivel de adquisición y asimilación por parte de los alumnos del tema tratado.

La prueba está compuesta por 7 preguntas, que serán problemas o ejercicios muy similares a los resueltos en clase a lo largo de las sesiones que duró la unidad didáctica. Está pensada para realizarse en una hora.

En el exámen veremos que hay dos tipos de ejercicios, unos que tratan del análisis e interpretación de funciones, ya sea en su forma de fórmula, gráfica o tabla así cómo aspectos teóricos importantes. Y una segunda en la que se usan funciones en concreto para realizar los problemas, en su mayoría funciones lineales.

1 Justifica si las siguientes son funciones o no. (1 punto)

a) $y = 4x^2 - x$
b)



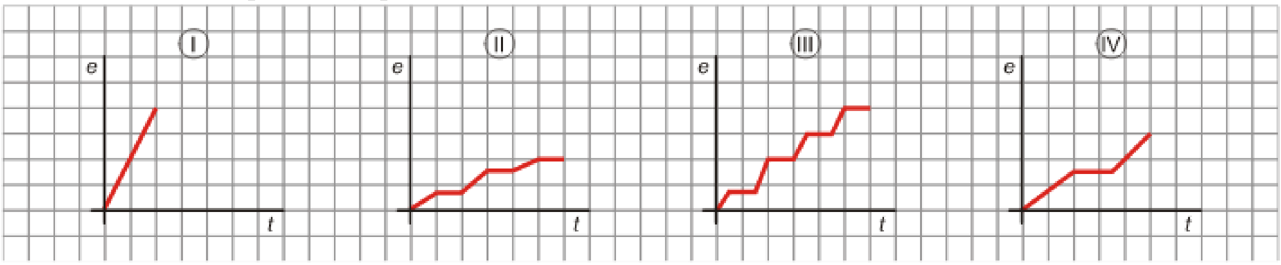

c) Una partícula se aleja de su posición inicial 3 metros cada segundo que transcurre.

d) Realizando un experimento de química queremos medir cómo evoluciona la temperatura de un compuesto conforme avanza el tiempo (medido en segundos). Estos son los resultados obtenidos

| Temperatura | Tiempo (seg) |
|---|---|
| 10º | 1 |
| 35º | 1 |
| 24º | 2 |
| 37º | 2 |
| 46º | 3 |
| 38º | 4 |

| | |
|---|---|
| 31º | 5 |
| 31º | 6 |
| 12º | 7 |

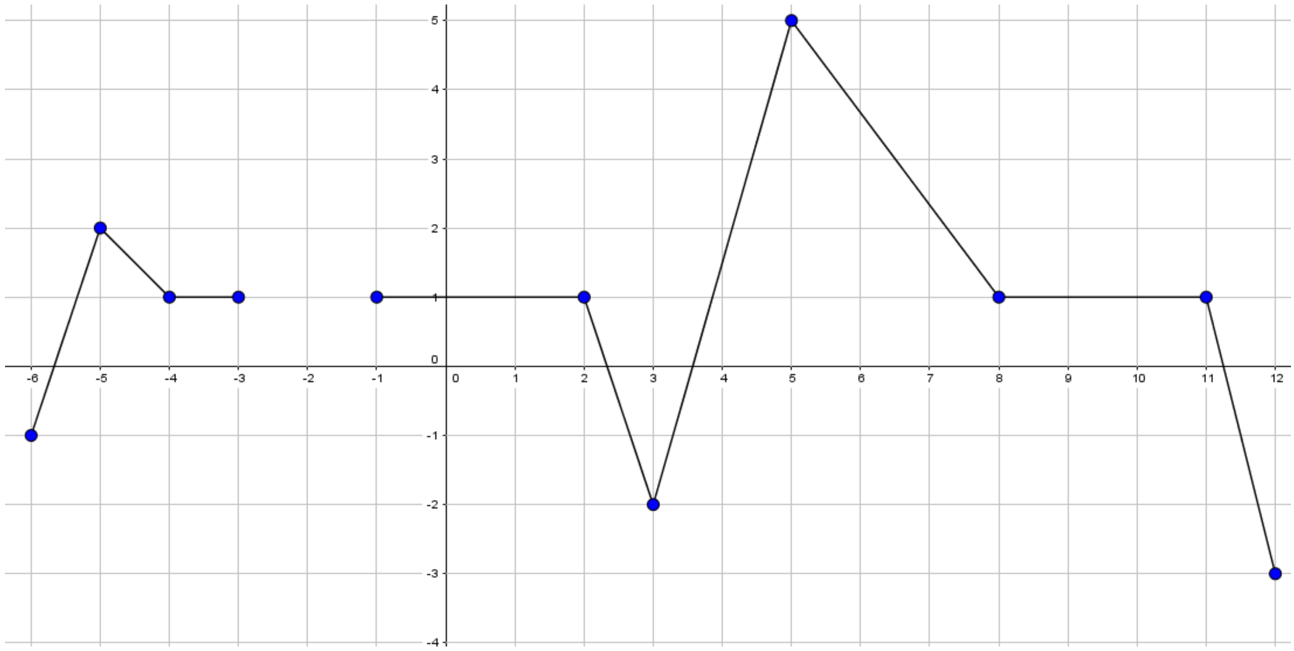
2 ¿Cuál es la gráfica que corresponde a cada una de las siguientes situaciones? Razona tu respuesta. (1 puntos)



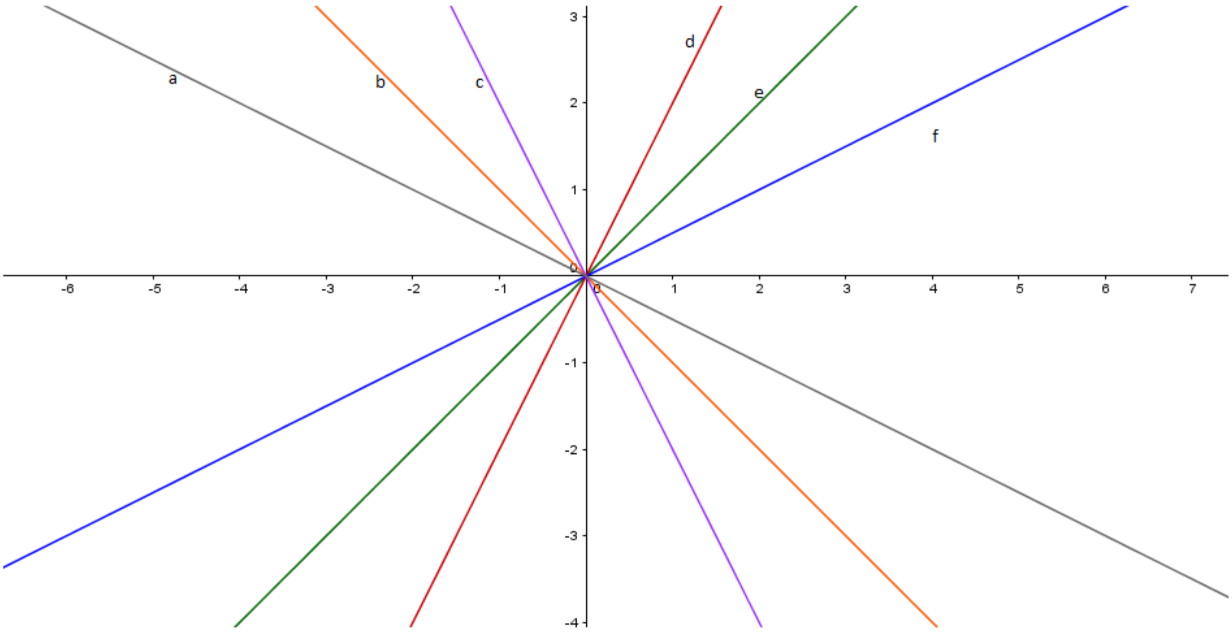

a)Recorrido realizado por un autobús urbano.
b)Paseo en bicicleta por el parque, parando una vez a beber agua.
c)Distancia recorrida por un coche de carreras en un tramo de un circuito.
d)Un cartero repartiendo el correo.

3 Una empresa que fabrica sudaderas obtiene beneficios dependiendo del número de sudaderas fabricadas según la función $y = 2x^2 - 3x - 2$
a) ¿Si fabrican 0 sudaderas que beneficio obtiene la empresa? Interpreta los resultados. (0.5 puntos)
b) ¿Cuántas sudaderas debe fabricar para no tener beneficios ni pérdidas? Interpreta los resultados. (0.5 puntos)
c) ¿Dónde se situarían estos puntos si trazáramos la gráfica de esta función sobre unos ejes coordenados? Representa aproximadamente la función en los puntos que tenga sentido (0.5 puntos)

4 Estudia la siguiente función, calculando su dominio, imagen, extremos relativos y absolutos, intervalos de crecimiento, decrecimiento y constantes, cortes con los ejes y continuidad. (1.5 puntos)



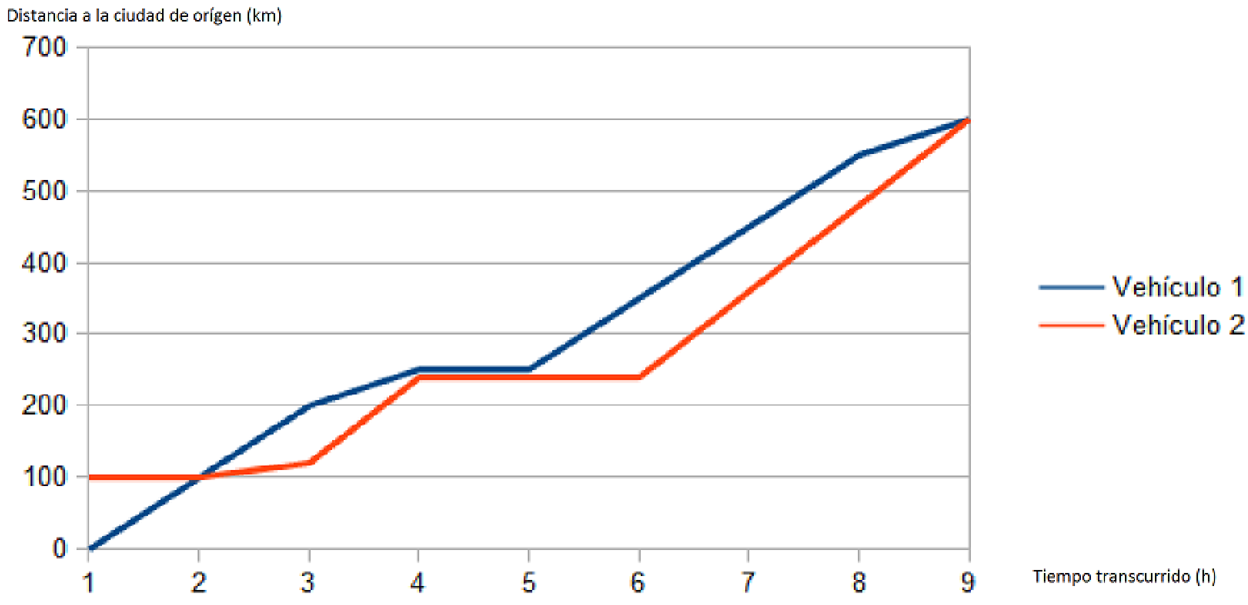
5 En la siguiente gráfica vemos representadas las funciones $x, 2\text{x}, \frac{x}{2}, -x, -2\text{x}, -\frac{x}{2}$Asocia de manera razonada cada función con la letra de su gráfica. (1.5 punto)




6 Tenemos la función $y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{4}$

Determina una recta paralela a la anterior que pase por el punto $(3, \frac{7}{2})$(0.75 puntos)

7 En la siguiente gráfica vemos representado el trayecto de dos coches en un viaje a Madrid:




Responde justificadamente:

-¿Qué vehículo llega antes al destino? (0.25 puntos)
-¿Ambos vehículos parten del mismo orígen? (0.25 puntos)
-¿Quién descansa más tiempo para comer? (0.25 puntos)
-¿Cuántas horas descansa cada vehículo? (0.25 puntos)
-¿Qué vehículo circula más rápido? (0.5 puntos)
-¿En qué momentos coinciden en el mismo punto los dos coches aproximadamente? (0.5 puntos)

**ASPECTOS SOBRE EL CONOCIMIENTO DE LOS ALUMNOS DEL OBJETO MATEMÁTICO**

En este apartado vamos a tratar problema por problema los campos de problemas que cubre, así como las tareas que queremos que realice un alumno en su resolución y las técnicas y tecnologías que se deberían usar. También veremos los estandares de aprendizaje que marca la LOMCE se evaluan en cada pregunta. También podemos ver una estimación del tiempo que los alumnos dedicarán a cada pregunta.

Pregunta 1.

Tiempo estimado para su realización 2-4 minutos.

Campo de problemas al que va dirigido:

-1. Ejercicios relacionados con el concepto de función y sus diferentes formas de representación.

Técnicas:

- Determinar cuándo es función cada una de las múltiples representaciones de una función.

Tecnologías:

-Justificar que no puede ser función, en los casos que así sea, por el hecho de apreciar más de un valor de y, para un mismo valor de x.

Tareas principales:

-Reconocer las diferentes formas de representar una función.

-Saber cuando se está representando una función.

Tareas auxiliares:

-Ninguna.

Estándares de aprendizaje LOMCE:

-Est. MA. 4.2.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otra y elige la más adecuada en función al contexto.

-Est. MA. 4.3.1. Reconoce si una gráfica representa o no una función.

Respuesta correcta:

a) Sí que es función, ya que se trata de una función polinómica.

b) No es función, ya que podemos ver que para un valor de x encontramos varias imagenes, por ejemplo trazando una línea vertical y viendo que corta a la función dos veces.

c) Sí que es función, ya que la expresión no presenta ninguna incoherencia.

d) No es función, ya que podemos ver que para un valor de la variable independiente hay varios diferentes de la variable dependiente. Por ejemplo para 1 segundo, la temperatura es 10º y también 35º.

Respuesta incorrecta o parcial:

a) La respuesta será incorrecta o no pondrá justificación.

b) La respuesta será incorrecta o no pondrá justificación. Dará una justificación errónea, utilizando mal la técnica.

c) La respuesta será incorrecta o no pondrá justificación. En este apartado quizás alguno no lo identifique como función.

d) La respuesta será incorrecta o no pondrá justificación. En este apartado puede darse el caso de que algún alumno justifique variando la variable dependiente e independiente, por ejemplo razonando que no puede darse 2 veces la misma temperatura en diferentes segundos.

Criterios de calificación:

Se valorará con 0.25 cada apartado respondido correctamente.

Se valorará con 0.125 si no se pone justificaciónpero responde correctamente cada apartado.

Se valorará con 0 el no poner nada o poner una justificación errónea cada apartado.

Pregunta 2.

Tiempo estimado para su realización 4-5 minutos.

Campo de problemas al que va dirigido:

-6. Problemas de asociación de gráficas con su correspondiente situación real y viceversa

Técnicas:

- Correcta identificación de los aspectos que diferencian una gráfica de otra para poder asociarla con el caso real adecuado.

Tecnologías:

-Justificación de la asociación mediante los intervalos de crecimiento, decrecimiento o constante.

Tareas principales:

-Interpretar correctamente una gráfica y asociarla a la situación real que simula.

Tareas auxiliares:

-Ninguna.

Estándares de aprendizaje LOMCE:

-Est. MA. 4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

Respuesta correcta:

1 c) Ya que la distancia recorrida en un circuito siempre aumenta en función del tiempo y la única gráfica que es siempre creciente es la 1.

2 d) El cartero aumenta siempre la distancia recorrida excepto en los momentos que se detiene a echar una carta en algún buzón, que será constante. Hay dos situaciones que representan este hecho, pero considerando el espacio total recorrido, el cartero recorre menos que un autobús.

3 a) El autobús también realiza varias paradas como el cartero, ya que tiene que realizar las paradas correspondientes a su ruta. Pero entre las dos gráficas posibles hay que ver que el autobús recorre mas distancia total que el cartero.

4 b) Ya que en un paseo en bicicleta siempre aumenta el espacio recorrido, excepto una única vez que para a beber agua, en este momento el espacio permanece constante. Es la 4 que es la única que sólo presenta una parada.

Respuesta incorrecta o parcial:

Respuesta incorrecta.

Respuesta correcta sin justificar.

Equivocación entre el cartero y el autobús a causa de la similitud de sus gráficas.

Criterios de calificación:

Se valorará con 0.25 cada apartado respondido correctamente.

Se valorará con 0.125 cada apartado respondido correctamente pero sin justificar.

Se valorará con 0 el no poner nada o una respuesta errónea.

Pregunta 3.

Tiempo estimado para su realización 5 minutos.

Campo de problemas al que va dirigido:

-9.Funciones cuadráticas.

-2.a Dibujo aproximado de una función.

Técnicas:

- Representación de una ecuación cuadrática.

-Representación gráfica de una función.

Tecnologías:

-Identificar que el hecho de valer 0 la x o la y se asocia con un corte con los ejes.

-Forma de la parábola conociendo su ecuación. Representación de parábola dando valores.

Tareas principales:

- Interpretación de que una de las dos variables se corresponde con los cortes con los ejes.

- Correcta representación de una parábola.

- Correcta interpretación de los resultados de acuerdo a una situación real.

Tareas auxiliares:

Específicas: Resolución de una ecuación de segundo grado. Sustitución de valores en una ecuación.

Generales: Correcta realización de los cálculos una vez sustituidos los valores.

Estándares de aprendizaje LOMCE:

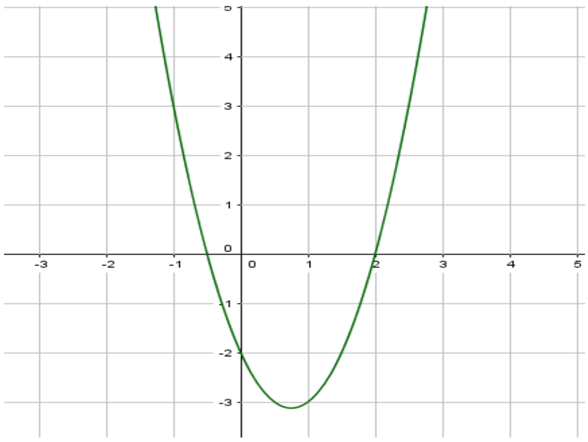
-Ninguno.

Respuesta correcta:

a) Beneficio = -2 Significa que pierde dinero si no fabrica ninguna camiseta, posiblemente por los gastos que cuesta mantener la fábrica.

b) Con 2 o con -0.5 sudaderas. Se descarta el -0.5 ya que no tiene sentido producir un número negativo de sudaderas y además no es un entero.

c) En un caso x=0 y en otro y=0, por lo que hemos calculado los cortes con los ejes.



Aunque en este caso sólo nos quedaríamos el trozo de función a la derecha de x=0, ya que no tiene sentido producir un número negativo de sudaderas.

Respuesta incorrecta o parcial:

a) Error de cuentas.
Error en la sustitución por no identificar que x=0.
No interpretar o hacerlo mal el hecho de que de un beneficio negativo.

b) Error de cuentas.
Error al resolver la ecuación de segundo grado.
Error al no ver que se pide f(x) = 0.
No interpretar o hacerlo mal el resultado permitiendo que se pueda fabricar un número negativo y no entero de sudaderas.

c) No saber que se corresponden con cortes con los ejes.
Dibujar mal la parábola.
Permitir que esté dibujada en todos los reales.

Criterios de calificación:

a) Respuesta correcta 0.5.
Fallo al interpretar que pide el valor de f(0) se calificará con 0.
Error o ausencia de la interpretación del resultado. Se penalizará con 0.25.
Fallo en las cuentas. Se sancionará con 0.1.

b) Respuesta correcta 0.5.
Fallo al interpretar que pide f(x)=0 se calificará con 0.
Error o ausencia de la interpretación del resultado. Se penalizará con 0.25.
Error al resolver la ecuación de segundo grado. Se penalizará con 0.2.
Error de cuentas. Se penalizará con 0.1.

c) Respuesta correcta 0.5.
No mencionar que son los cortes con los ejes. Se penalizará con 0.25.
Dibujar erróneamente la parábola. Se penalizará con 0.2
Permitir que se dibuje en todos los reales y no sólo en los positivos. Se penalizará con 0.15. Es cierto que debería ser una representación discreta, pero se aceptará tambien la representación continua puesto que considero que trabajar con funciones cuadráticas en este nivel ya es bastante complicado como para que los alumnos sepan que además es discreta. Sin embargo al que la dibuje correctamente discreta, se le premiará con un 0.25 extra en el exámen.

Pregunta 4.

Tiempo estimado para su realización 8-10 minutos.

Campo de problemas al que va dirigido:
-3. Ejercicios sobre el estudio global de una función.
-3.1 Dominio y recorrido.
-3.2 Monotonía.
-3.3 Extremos relativos y absolutos.
-3.4 Cortes con los ejes.
-3.5 Continuidad.

Técnicas:
- Ninguna.

Tecnologías:
- Ninguna aunque los alumnos deberán razonar al menos mentalmente para decidir que es extremo, que es absoluto...

Tareas principales:
- Reconocimiento de los valores pedidos, sabiendo qué se pide en cada momento y cómo puede reconocerse.

Tareas secundarias:
-General: Localización visual de los puntos
Estándares de aprendizaje LOMCE:
-Est. MA. 4.1.1. Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas.
-Est. MA. 4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

Respuesta correcta:

Dominio: [-6,-3] U [-1,12]
Imagen: [-3,5]
Crece: (-6,-4) U (3,5)
Decrece: (-5,-4) U (2,3) U (5,8) U (11,12)

Constante: (-4,-3) U (-1,2) U (8,11)
Mínimo relativo: (3,-2)
Máximo relativo: (-5,2)
Mínimo absoluto: (12,-3)
Máximo absoluto: (5,5)
Continua (-6,-3) U (-1,12)
Corte eje X: (-4.66,0), (12.33,0), (3.28,0), (11.25,0)
Corte eje Y: (0,1)

También se considerará correcto aunque en monotonía o continuidad se hayan considerado los intervales abiertos. Por otro lado puede ocurrir que al representar puntos (extremos) no se use la notación adecuada (x,y). Estos casos tambien se considerarán correctos. Se considerará mal en el caso de dominio e imagen.

Respuesta incorrecta o parcial:

Cualquier fallo que se pueda dar por desconocimiento de algún concepto o error al interpretar la gráfica y obtener valores.

En dominio e imagen poner intervalos abiertos.

En extremos catalogar malde absoluto o relativo.

Identificar extremos que en realidad no lo son.

Criterios de calificación:

Dominio 0.15 Fallar en intervalos abiertos 0. Algún valor erróneo 0.

Imagen 0.15 Fallar en intervalos abiertos 0. Algún valor erróneo 0.

Extremos 0.4. Cada uno 0.1 y cualquier fallo calificación 0.

Monotonía 0.3 Crecimiento 0.1, decrecimiento 0.1, constante 0.1. Cualquier fallo anula esa parte.

Cortes con los ejes 0.3. Cada uno erróneo o mal penaliza 0.1 a la nota de este apartado hasta un máximo de 0.3 que vale.

Continuidad 0.2. Cualquier fallo 0.

<u>Pregunta 5.</u>

Tiempo estimado para su realización 4-6 minutos.

Campo de problemas al que va dirigido:

-7. Ejercicios relacionados con las funciones lineales.

-7.1 Ejercicios de representación gráficade una ecuación a partir de su fórmula.

Técnicas:

- Ecuación punto pendiente.

Tecnologías:

- Cálculo de pendiente de una gráfica lineal.

Tareas principales:

-Asociar las pendientes con una mayor inclinación o menor de la gráfica.

Tareas auxiliares:

-Ninguna.

Estándares de aprendizaje LOMCE:

-Est. MA. 4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características..

-Est. MA. 4.4.1.Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.

Respuesta correcta:

2x es la d) ya que tiene pendiente positiva (2) y tiene que ser creciente. Además es la mayor de las pendientes, por lo que tiene que ser esta.

x es la e) ya que tiene pendiente 1, es la diagonal que parte al cuadrante en dos trozos iguales

x/2 es la f) pendiente 0.5, positiva pero la menor de todas

-x es la b) pendiente 1, por lo que es la diagonal decreciente que parte segundo y cuarto cuadrante por la mitad.

-2x es la c) pendiente -2, por lo que decrece y es la mayor en módulo así que la que decrece más subitamente.

-x/2 es la a) pendiente -0.5 por lo tanto decrece pero la menos pronunciada.

Respuesta incorrecta o parcial:

Confundir una recta con otra.

No poner o poner erróneamente la justificación.

Criterios de calificación:

Se valorará con 0.3 cada recta que se haga correctamente, 0.15 si no se justifica o esta está mal y 0 en cualquier otro caso.

Pregunta 6.

Tiempo estimado para su realización 2-3 minutos.

Campo de problemas al que va dirigido:

-7. Funciones lineales.

Técnicas:

- Ecuación punto pendiente.

Tecnologías:

- Misma pendiente para paralelas.

Tareas principales:

-Utilizar un proceso valido para calcular la recta paralela.

Tareas auxiliares:

-Generales: Operaciones o sustituciones erróneas.

Estándares de aprendizaje LOMCE:

-Est. MA. 4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características..

-Est. MA. 4.4.1.Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.

Respuesta correcta:

$y = \frac{5}{3}x - \frac{3}{2}$

Respuesta incorrecta o parcial:

Cualquier otra.

Criterios de calificación:

Se valorará con 1.5 el cálculo correcto y justificado.

Se valorará con 0.5 el saber que la pendiente se conserva.

Se valorará con 0.5 el saber el proceso para hallar la ordenada en el orígen de la recta paralela.

Se valorará con 0.5 el calcularlo correctamente. (como máximo 1.5 la pregunta en total)

<u>Pregunta 7.</u>

Tiempo estimado para su realización 10 minutos.

Campo de problemas al que va dirigido:

-5.Problemas sobre la recreación del comportamiento de un fenómeno real a través de su gráfica.

-7. Funciones lineales.

-12 Resolución gráfica de sistemas.

Técnicas:

- Ninguna.

Tecnologías:

- Interpretar correctamente la información que nos proporciona la gráfica.

Tareas principales:

-Extracción de la información de una gráfica e interpretación de la misma.

Tareas auxiliares:

-Ninguna

Estándares de aprendizaje LOMCE:

-Est. MA. 4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características..

Respuesta correcta:

a) Llegan a la vez, ya que ambas gráficas alcanzan los 600 km en 9 horas.

b) No parten del ismo orígen, el vehículo 2 parte unos 100 km más cerca del lugar de destino.

c)El vehículo 2 ya que en la gráfica se ve que está más tiempo parado porque no aumenta la distancia durante ese tiempo.

d)El vehículo 1 descansa una hora, mientras que el 2 descansa 2 horas.

e) El vehículo 2 ya que presenta una mayor pendiente en sus tramos de gráfica que los del vehículo 1.

f) En 2 horas a los 100 km. Y en 9 horas a los 600 km.

Respuesta incorrecta o parcial:

Cualquier otra.

Criterios de calificación:

a) Correcto 0.25, correcta sin justificar 0.15, otra 0.

b) Correcto 0.25, correcta sin justificar 0.15, otra 0.

c)Correcto 0.25, correcta sin justificar 0.15, otra 0.

d) Cada uno 0.125 y está bien o está mal.

e)Correcto 0.5, correcta sin justificar 0.25, otra 0.

f) Cada uno vale 0.25 otra respuesta se daría por mala.

**COMUNICACIÓN DE LOS RESULTADOS.**

Una vez realizada la prueba, la corregiría y pondría una nota por alumno.A continuación daría a los alumnos los exámenes sin ninguna corrección y les dejaría que se lo llevaran a casa para corregir los errores que tengan.

Al día siguiente el que me entregue su examen corregido volveré a revisarlo y premiaré a los que me lo entregases corregido con un 0.25 en el exámen. Y posteriormente lo corregiría en la pizarra intentando sacar a alguien que tenga dificultades en ver justo ese apartado.

# 9. Bibliografía.

Orden de 26 de mayo 2016, del departamento de educación, cultura y deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

BOYER, C. (1986). *Historia de las Matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial.

Sastre, P., Boubée, C. y Rey, G. (2008). El concepto de función a través de la Historia.
*Unión, 16*, pp. 141 – 155.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990): *Funciones y Gráficas.* Madrid: Síntesis.

Lacasta, E. y Pascual, J.R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Síntesis.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.125-154). Barcelona: ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona y Horsori.

Shell Centre for Mathematical Education. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.*Ministerio de Educación y Ciencia y Universidad del País Vasco.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones*. Revista de Investigación en Educación*, 12(2), pp. 209-221.

Fabra, M., Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: ''Continuidad y prototipos''. *Relime,* Vol. 3, Núm 2, pp. 207-230.

Giorgio T. Bagni (2004). Una experiencia didáctica sobre funciones, en la escuela secundaria. *Relime*, Vol. 7, Núm.1, pp. 5-23.

Alayo, F. (1989).Funciones y gráficas. *Suma*, 4, pp. 39-42.

González, F.G., Gracia, F y Palomero, I. (1998). La influencia de la escala en la interpretación gráfica de una función lineal. *Suma, 27*, pp. 111-116.

Deulofeu, J. (1995). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *UNO Revista de Didáctica de las matemáticas*, *4*, pp. 6-16.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1998).Funciones: traducción entre representaciones. *Aula*, 10, pp. 89-104.

Leinhardt, et al. (1990). Functions, Graphs and Graphing: Tasks*. Learning and Teaching Review of Educational Research,* 60(2), pp.1-64.

Harel, G. y Dubinsky, E. (Eds.). (1992). *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington, DC., EE. UU.: Mathematical Association of America.

El Bouazzoui, H. (1988): *Conceptions des eleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction.* Theses du grade de Ph. D. Université Laval.

Pancorbo, L. (2008). *Libro de texto de Matemáticas de 2º ESO*. Editorial: Vicens Vives.

Cólera, J. y Gaztelu, I. (2000). *Libro de texto de Matemáticas de 2º ESO*. Editorial: Anaya.

Escoredo, A. y Pérez, C. (2008). *Libro de texto de Matemáticas 2º ESO: Avanza.* Editorial: Santillana.

John J O'Connor y Edmund F Robertson (2015). *MacTutorHistory of Mathematics archive*. Extraído de: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html

Meza C., Gerardo, Mora F, Walter y Ramíres A., Greivin (2015). *Revista digital matemática.*Extraídode: http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/

Revistamatemática: *Suma*. Extraídode: http://revistasuma.es/

Revistamatemática: *Unión.* Extraídode:

http://www.fisem.org/www/union/

Revistamatemática: *Números.* Extraído de:

http://www.sinewton.org/numeros/

Revistamatemática: *Sigma*. Extraídode: http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/sigma_aldizkaria.html

Revistamatemática: *Epsilon*. Extraídode: http://thales.cica.es/epsilon/

Revista de investigaciónmatemática: *Relime*. Extraído de: http://dialnet.unirioja.es/servlet/revista?codigo=7978

*Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* Extraído de: http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

*Shell Centre forMathematicalEducationPublications Ltd.* Extraído de: http://www.mathshell.com/index.php

*Illuminations*. ResourcesforteachingMath. Extraído de: http://illuminations.nctm.org/