Trabajo Fin de Máster

Propuesta didáctica para la enseñanza escolar de la semejanza de figuras geométricas

Didactical proposal for the teaching of similarity of geometrical figures

Autora

Silvia Ortiz Santamaria

Director

Miguel Angel Marco Buzunariz

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2017

ÍNDICE

Introducción

El trabajo que se expone en el presente documento muestra un planteamiento de la enseñanza y el aprendizaje de la semejanza de figuras geométricas, basado en los conocimientos adquiridos, cursando el Máster Universitario en Profesorado de E.S.O., Bachillerato, F.P. y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas, especialidad de Matemáticas.

El marco teórico de la didáctica de las matemáticas que constituye esta propuesta, se basa en los contenidos de la asignatura **Fundamentos de diseño instruccional y metodologías de aprendizaje en Matemáticas.**

La secuencia de actividades y la evaluación que componen la propuesta, también se ha desarrollado aplicando los conocimientos adquiridos a lo largo de la titulación. Más concretamente, en las asignaturas **Diseño, organización y desarrollo de actividades para el aprendizaje de Matemáticas** y **Evaluación e innovación docente e investigación educativa en Matemáticas,** respectivamente.

Algunas de las particularidades metodológicas, son fruto del aprendizaje realizado durante las prácticas del máster (**practicum II** y **practicum III**).

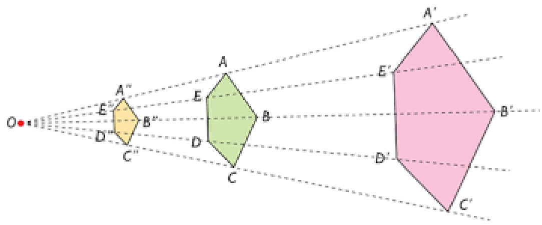
Así pues, este trabajo, constituye una síntesis de los aprendizajes del máster, y tal y como se indica en la guía docente, *integra el conjunto de competencias docentes que el estudiante ha desarrollado a lo largo de su proceso formativo durante todo el curso.*

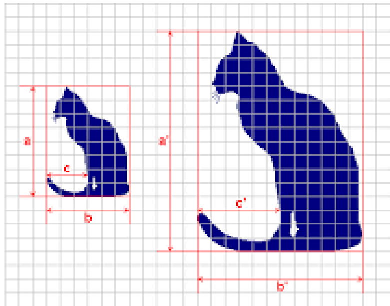
Por último, desde un punto de vista normativo, la propuesta atiende a la legislación de la comunidad autónoma de Aragón (Orden ECD/489/2016**,** de 26 de mayo), y pretende desarrollar tanto los contenidos como las competencias del currículo de 2º de ESO, referentes a la semejanza de figuras geométricas.

A. La definición del objeto matemático

1. El objeto matemático a enseñar

El objeto matemático a enseñar es *semejanza de figuras geométricas.* La enseñanza de este objeto matemático implica la enseñanza de otros objetos matemáticos como la escala, las homotecias o el teorema de Thales.





2. Curso y Asignatura

Nos situamos en 2º curso de ESO. Dentro del Currículo Aragonés para educación secundaria obligatoria podemos encontrar la semejanza de figuras geométricas como parte de los contenidos del *Bloque 3. Geometría* de la asignatura Matemáticas de 2º de ESO.

GOBIERNO DE ARAGON
Departamento de Educación, Cultura y Deporte

MATEMÁTICAS	Curso: 2.º
BLOQUE 3: Geometría	
Contenidos: Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. Ángulos y sus relaciones. Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz. Propiedades. Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes. Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes. Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico. Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.	

3. Problemas, técnicas y tecnologías

Los campos de problemas que se proponen son los siguientes:

Razón de ser de la semejanza: Estos problemas tienen como objetivo realizar una construcción escolar del saber matemático a enseñar, en este caso, la *semejanza de figuras geométricas.* Son problemas de contextos cotidianos que introducen la semejanza de figuras geométricas a partir de la necesidad de crear un modelo, para estudiar una figura, cuyo estudio resulta difícil por su tamaño (demasiado grande o demasiado pequeño), o por la distancia a la que se encuentra. Por ejemplo, los planos y los mapas, que nos permiten estudiar grandes superficies, independientemente del lugar donde se encuentren. En ocasiones, la semejanza también se utiliza para hacer estimaciones: con las sombras o el reflejo del agua, podemos estimar distancias y calcular la altura de grandes edificios. Otros problemas cotidianos son la reducción y ampliación de fotografías y las fotocopias.

Problemas de investigación: Son problemas que ponen de manifiesto nuevos aspectos del objeto matemático a enseñar, como los criterios de semejanza de los triángulos. Estos problemas permiten introducir nuevas técnicas y reflexionar sobre las tecnologías y teorías que las justifican. Los alumnos y alumnas deberán tomar decisiones, llevándolas a cabo, analizando los resultados obtenidos y reflexionando sobre la pertinencia de dichas decisiones y la necesidad de modificarlas.

Problemas de evaluación: Serán problemas que permitan evaluar la utilidad de diferentes técnicas en contextos reales. Presentan dificultades que llevan a definir criterios para elegir la técnica más adecuada en cada contexto.

Las técnicas a enseñar serán las siguientes:

- Identificación de figuras semejantes, aplicando la definición de figuras semejantes, los criterios de semejanza de triángulos o el teorema de Thales.

- Cálculo de la razón de semejanza entre figuras semejantes: Dividir las longitudes de dos lados homólogos de las figuras semejantes.

- Aplicación de la razón de semejanza para calcular longitudes de figuras semejantes.

- Cálculo de la escala de un plano o mapa: Dividir una longitud del plano o mapa por la longitud real correspondiente.

- Interpretar la escala de un mapa o plano y obtener otras representaciones equivalentes.

- Calcular la longitud una longitud real aplicando la escala de un mapa, y viceversa, dada una longitud y una escala, calcular la longitud correspondiente sobre un mapa.

- Diseño de planos y mapas: Identificar ángulos y distancias reales, definir la escala apropiada y dibujar el plano o el mapa.

- Aplicación de los criterios de semejanza de triángulos para obtener la amplitud de los ángulos, o la longitud de los lados de un triángulo, que es semejante a otro.

- Aplicar homotecias para la construcción de figuras semejantes con pantógrafo.

- Construcción de figuras y cuerpos semejantes con aplicaciones informáticas como Geogebra.

- Cálculo de áreas, perímetros y volúmenes de figuras y cuerpos semejantes.

- Calcular la razón de semejanza entre dos cuerpos o figuras, conocidos sus perímetros, áreas o volúemnes.

Las tecnologías que se utilizaran para justificar las diferentes técnicas son las siguientes:

- Propiedades y elementos geométricos elementales: propiedades de los triángulos y relaciones entre sus ángulos, paralelismo y perpendicularidad, etc.

- El teorema de Thales se utilizará principalmente para justificar las homotecias, que se implementarán mediante el diseño de figuras semejantes con pantógrafo.

También se utilizarán como tecnologías, los resultados que se observen mediante experimentación, y la definición de polígonos semejantes.

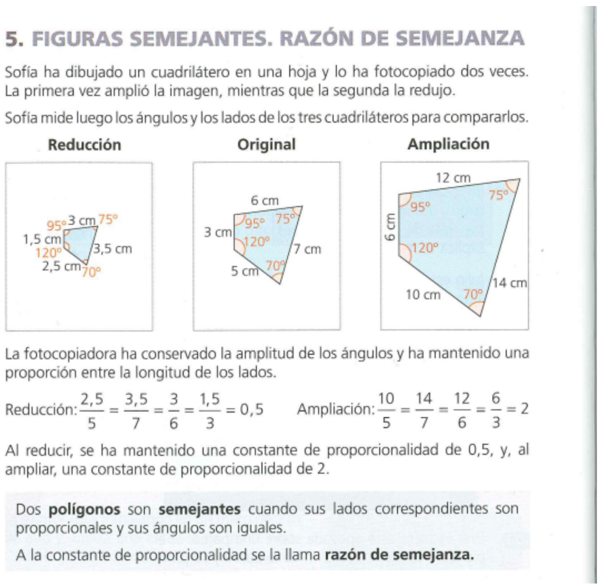
B. El estado de la enseñanza-aprendizaje

1. Justificación escolar

A continuación se presenta una descripción de la introducción escolar de tres libros de texto de 2º de ESO de diferentes editoriales y una programación de aula de 2º de ESO.

El primer libro es **inicia Dual de Oxford Education** para matemáticas de 2º de la ESO. El libro sitúa la unidad didáctica *Figuras planas. Semejanza* después de la Estadística y la probabilidad. La unidad comienza con un estudio de los polígonos regulares y de las figuras circulares y sus propiedades.

Es en el quinto apartado *Figuras semejantes. Razón de semejanza,* donde comienzan los contenidos de semejanza de figuras. En primer lugar plantea un ejemplo en el que se hace una fotocopia ampliada y otra reducida de la imagen de un polígono: se miden los ángulos y los lados de la tres imágenes comprobando que los ángulos son iguales y los lados proporcionales. Después se define: *Dos polígonos son semejantes cuando sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos son iguales. A la constante de proporcionalidad se la llama razón de semejanza.*


5. FIGURAS SEMEJANTES. RAZÓN DE SEMEJANZA

Sofía ha dibujado un cuadrilátero en una hoja y lo ha fotocopiado dos veces. La primera vez amplió la imagen, mientras que la segunda la redujo.

Sofía mide luego los ángulos y los lados de los tres cuadriláteros para compararlos.

La fotocopiadora ha conservado la amplitud de los ángulos y ha mantenido una proporción entre la longitud de los lados.

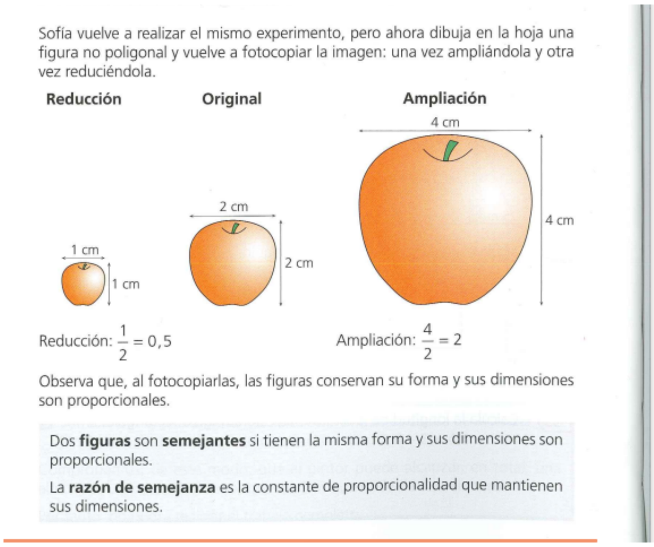
Reducción: $\frac{2,5}{5} = \frac{3,5}{7} = \frac{3}{6} = \frac{1,5}{3} = 0,5$ Ampliación: $\frac{10}{5} = \frac{14}{7} = \frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2$

Al reducir, se ha mantenido una constante de proporcionalidad de 0,5, y, al ampliar, una constante de proporcionalidad de 2.

Dos **polígonos** son **semejantes** cuando sus lados correspondientes son proporcionales y sus ángulos son iguales.

A la constante de proporcionalidad se la llama **razón de semejanza.**

A continuación, presenta otro ejemplo del mismo tipo, pero en este caso para una figura no poligonal, y generaliza la definición anterior para figuras semejantes.



Sofía vuelve a realizar el mismo experimento, pero ahora dibuja en la hoja una figura no poligonal y vuelve a fotocopiar la imagen: una vez ampliándola y otra vez reduciéndola.

Reducción: $\frac{1}{2} = 0,5$ Ampliación: $\frac{4}{2} = 2$

Observa que, al fotocopiarlas, las figuras conservan su forma y sus dimensiones son proporcionales.

Dos **figuras** son **semejantes** si tienen la misma forma y sus dimensiones son proporcionales.

La **razón de semejanza** es la constante de proporcionalidad que mantienen sus dimensiones.

Finaliza el apartado con actividades en las que se pide comprobar si dos figuras son semejantes o calcular la rezón de semejanza de figuras semejantes.

El siguiente apartado presenta un contexto cotidiano en el que surge la necesidad de utilizar una escala y explica cómo calcularla. Define la escala como la relación de semejanza que existe entre la representación de una figura y la figura real. También ofrece diferentes opciones para representar una escala; sigue con ejemplos de planos de viviendas y mapas geográficos y finaliza con actividades.

Planos y mapas

Habitualmente, se utilizan las escalas para interpretar planos o mapas.

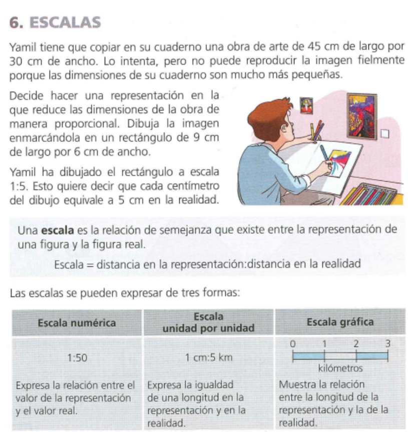
En el plano, las dimensiones del salón son 6 cm de largo y 2 cm de ancho.

Luego, en realidad el salón mide:

- Largo = 6 · 200 = 1 200 cm = 12 m
- Ancho = 2 · 200 = 400 cm = 4 m

En el mapa, la distancia entre Sevilla y Córdoba es de 2,4 cm.

Al colocar este segmento sobre la escala gráfica, se tiene que la distancia real entre Sevilla y Córdoba es de 120 km.



6. ESCALAS

Yamil tiene que copiar en su cuaderno una obra de arte de 45 cm de largo por 30 cm de ancho. Lo intenta, pero no puede reproducir la imagen fielmente porque las dimensiones de su cuaderno son mucho más pequeñas.

Decide hacer una representación en la que reduce las dimensiones de la obra de manera proporcional. Dibuja la imagen enmarcándola en un rectángulo de 9 cm de largo por 6 cm de ancho.

Yamil ha dibujado el rectángulo a escala 1:5. Esto quiere decir que cada centímetro del dibujo equivale a 5 cm en la realidad.

Una **escala** es la relación de semejanza que existe entre la representación de una figura y la figura real.

Escala = distancia en la representación:distancia en la realidad

Las escalas se pueden expresar de tres formas:

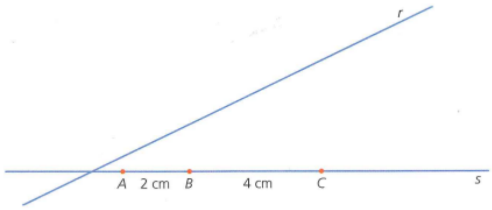
Escala numérica	Escala unidad por unidad	Escala gráfica
1:50	1 cm:5 km	0 1 2 3 kilómetros
Expresa la relación entre el valor de la representación y el valor real.	Expresa la igualdad de una longitud en la representación y en la realidad.	Muestra la relación entre la longitud de la representación y la de la realidad.

Estas aclaraciones sobre la representación de la escala pueden resultar muy útiles para que los alumnos puedan interpretar correctamente los planos y entiendan la equivalencia entre la razón de semejanza y la escala.

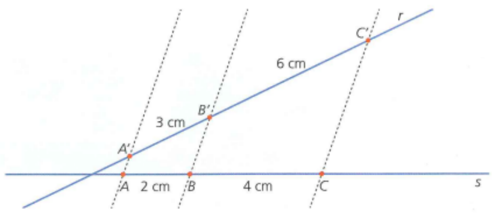
El séptimo apartado introduce el teorema de Tales a través de un ejemplo un tanto *forzado*. Después, enuncia el teorema y propone un ejercicio resuelto, sin relacionar el teorema con la semejanza de figuras, en un contexto muy geométrico y poco cotidiano.

7. TEOREMA DE TALES

Sandra ha dibujado dos rectas secantes, *r* y *s*. En la recta *s* señala tres puntos, *A*, *B* y *C*, de forma que la distancia de *B* a *C* es el doble que la distancia de *A* a *B*.



Después, Sandra dibuja tres rectas paralelas que pasan por *A*, *B* y *C*, que cortan a la recta *r* en los puntos *A'*, *B'* y *C'*.

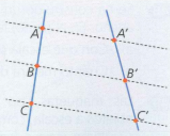


Al medir la longitud entre los puntos señalados en la recta *r*, Sandra comprueba que se mantienen las proporciones respecto a los puntos de la recta *s*.

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = 1{,}5$$

Teorema de Tales. Si dos rectas secantes son cortadas por varias rectas paralelas, los segmentos correspondientes determinados sobre las rectas secantes son proporcionales.

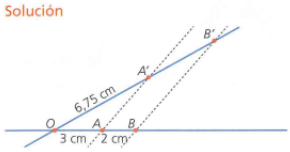
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$



EJERCICIO RESUELTO

Calcula la longitud del segmento *A'B'*.

Solución



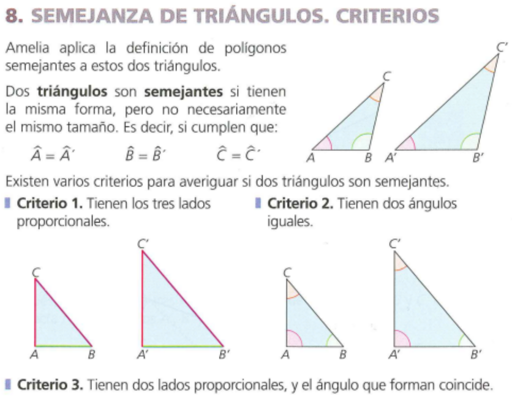
Por el teorema de Tales tenemos que:

$$\frac{6{,}75}{3} = \frac{A'B'}{2}$$

Despejamos y obtenemos la longitud del segmento *A'B'*.

$$A'B' = \frac{6{,}75 \cdot 2}{3} = 4{,}5 \text{ cm}$$

En el apartado 8 se trata la semejanza de triángulos. A pesar de que introducen los criterios de semejanza con una oración del tipo *“Amelia aplica la definición de polígonos..”* y *“La profesora de Andrés...”* el contexto es muy académico. Además, no se justifica que los triángulos tengan unos criterios de semejanza especiales. Después presenta los triángulos en posición de Thales, utiliza el teorema de Thales para justificar que sus lados son proporcionales y los criterios de semejanza de triángulos, para justificar que son triángulos semejantes.



8. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS. CRITERIOS

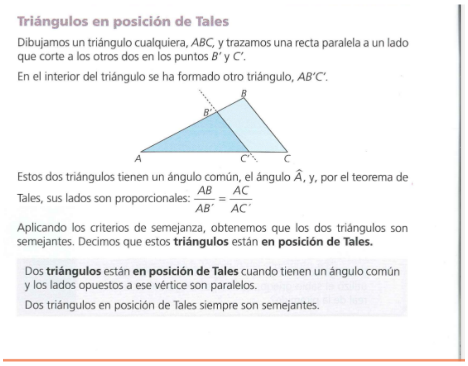
Amelia aplica la definición de polígonos semejantes a estos dos triángulos.

Dos **triángulos** son **semejantes** si tienen la misma forma, pero no necesariamente el mismo tamaño. Es decir, si cumplen que:

$\hat{A} = \hat{A}'$ $\hat{B} = \hat{B}'$ $\hat{C} = \hat{C}'$

Existen varios criterios para averiguar si dos triángulos son semejantes.

- **Criterio 1.** Tienen los tres lados proporcionales.
- **Criterio 2.** Tienen dos ángulos iguales.
- **Criterio 3.** Tienen dos lados proporcionales, y el ángulo que forman coincide.



Triángulos en posición de Tales

Dibujamos un triángulo cualquiera, *ABC*, y trazamos una recta paralela a un lado que corte a los otros dos en los puntos *B′* y *C′*.

En el interior del triángulo se ha formado otro triángulo, *AB′C′*.

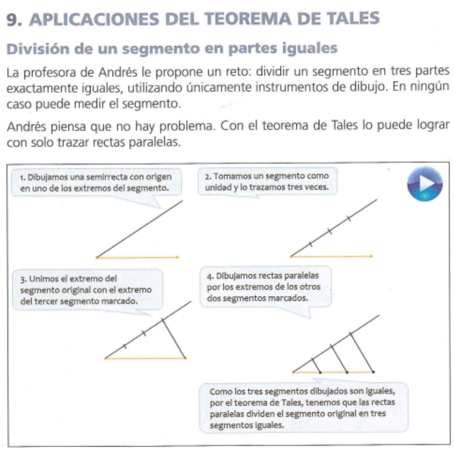
Estos dos triángulos tienen un ángulo común, el ángulo $\hat{A}$, y, por el teorema de Tales, sus lados son proporcionales: $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$

Aplicando los criterios de semejanza, obtenemos que los dos triángulos son semejantes. Decimos que estos **triángulos** están **en posición de Tales.**

Dos **triángulos** están **en posición de Tales** cuando tienen un ángulo común y los lados opuestos a ese vértice son paralelos.

Dos triángulos en posición de Tales siempre son semejantes.

En el apartado 9 se exponen las aplicaciones del teorema de Thales: la primera, dividir un segmento en tres partes iguales; el segundo, calcular la altura de un edificio utilizando la sombra. Los ejemplos están bien explicados pero no muestran una utilidad real del teorema, los ejemplos son bastante artificiales.

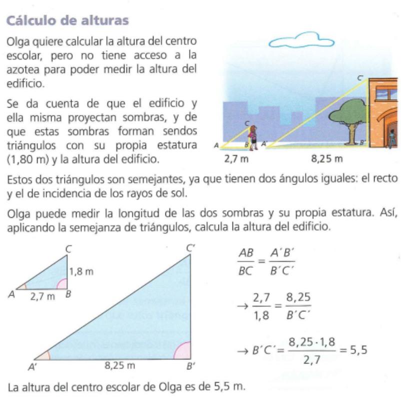


9. APLICACIONES DEL TEOREMA DE TALES

División de un segmento en partes iguales

La profesora de Andrés le propone un reto: dividir un segmento en tres partes exactamente iguales, utilizando únicamente instrumentos de dibujo. En ningún caso puede medir el segmento.

Andrés piensa que no hay problema. Con el teorema de Tales lo puede lograr con solo trazar rectas paralelas.



Cálculo de alturas

Olga quiere calcular la altura del centro escolar, pero no tiene acceso a la azotea para poder medir la altura del edificio.

Se da cuenta de que el edificio y ella misma proyectan sombras, y de que estas sombras forman sendos triángulos con su propia estatura (1,80 m) y la altura del edificio.

Estos dos triángulos son semejantes, ya que tienen dos ángulos iguales: el recto y el de incidencia de los rayos de sol.

Olga puede medir la longitud de las dos sombras y su propia estatura. Así, aplicando la semejanza de triángulos, calcula la altura del edificio.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

$$\rightarrow \frac{2,7}{1,8} = \frac{8,25}{B'C'}$$

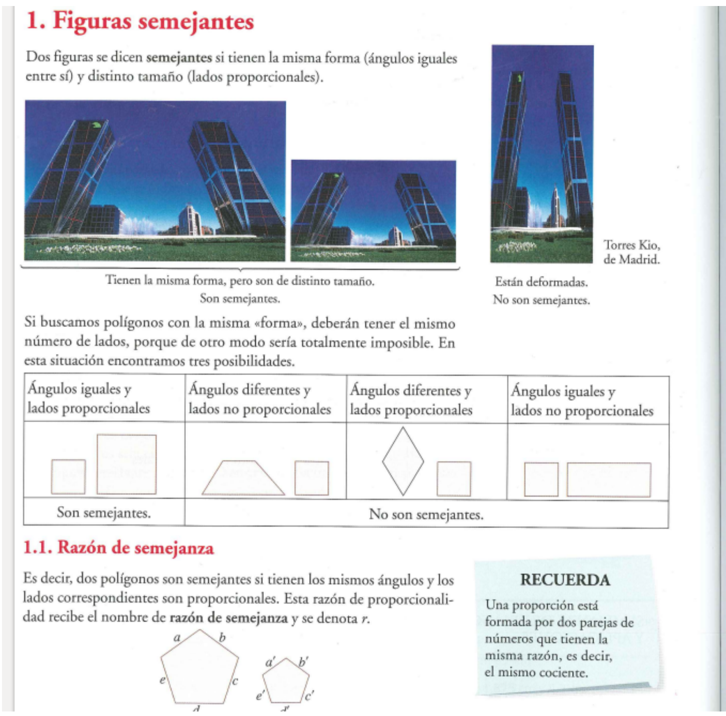
$$\rightarrow B'C' = \frac{8,25 \cdot 1,8}{2,7} = 5,5$$

La altura del centro escolar de Olga es de 5,5 m.

El siguiente libro, **II Matemáticas de Teide** para 2º de la ESO, trata la semejanza en la unidad *7. Semejanza en el plano. C*omienza hablando del *Portugal dos Pequeinitos* en Coimbra (Portugal), para introducir las maquetas y los mapas como figuras proporcionales a la figura original pero con un tamaño diferente. Concluye que una maqueta y el edificio real son semejantes y propone un problema para calcular la escala de una maqueta.

Después hace un repaso por la proporcionalidad de segmentos, las rectas paralelas y perpendiculares y los ángulos.

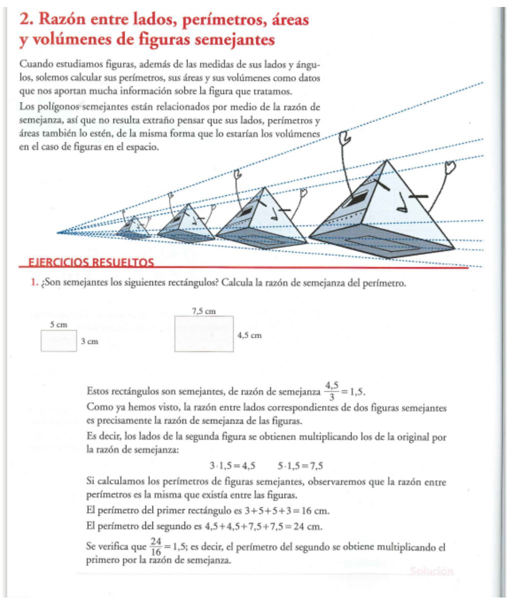
El apartado *1. Figuras Semejantes* comienza definiendo dos figuras semejantes: *Dos figuras se dicen semejantes si tienen la misma forma (ángulos iguales entre sí) y distinto tamaño (lados proporcionales).* A continuación presenta algunos ejemplos de figuras semejantes y no semejantes y después define la razón de semejanza. Cabe destacar que el texto presenta una observación para identificar los lados que deben ser proporcionales en dos figuras semejantes.



Después continua con la *Construcción de polígonos semejantes* a través de ejercicios con el método de proyección.

El título del apartado *2. Razón entre lados, perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes,* hace pensar, que el texto nos introducirá a un contexto más amplio de la semejanza. En un principio, plantea la proporcionalidad entre perímetros, y áreas de figuras semejantes. Después, un ejemplo para mostrar la relación entre los volúmenes de dos cubos.

A continuación presenta una batería de ejercicios resueltos con los que da respuesta a la cuestión planteada.



2. Razón entre lados, perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes

Cuando estudiamos figuras, además de las medidas de sus lados y ángulos, solemos calcular sus perímetros, sus áreas y sus volúmenes como datos que nos aportan mucha información sobre la figura que tratamos.

Los polígonos semejantes están relacionados por medio de la razón de semejanza, así que no resulta extraño pensar que sus lados, perímetros y áreas también lo estén, de la misma forma que lo estarían los volúmenes en el caso de figuras en el espacio.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. ¿Son semejantes los siguientes rectángulos? Calcula la razón de semejanza del perímetro.

5 cm

3 cm

7,5 cm

4,5 cm

Estos rectángulos son semejantes, de razón de semejanza $\frac{4,5}{3} = 1,5$.

Como ya hemos visto, la razón entre lados correspondientes de dos figuras semejantes es precisamente la razón de semejanza de las figuras.

Es decir, los lados de la segunda figura se obtienen multiplicando los de la original por la razón de semejanza:

$$3 \cdot 1,5 = 4,5 \qquad 5 \cdot 1,5 = 7,5$$

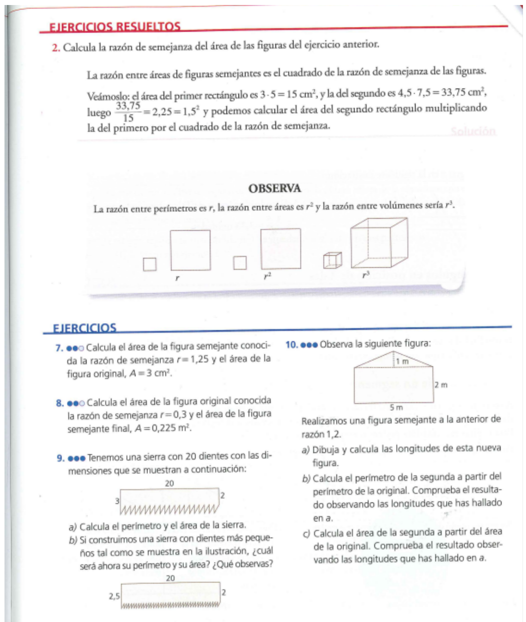
Si calculamos los perímetros de figuras semejantes, observaremos que la razón entre perímetros es la misma que existía entre las figuras.

El perímetro del primer rectángulo es $3+5+5+3=16$ cm.

El perímetro del segundo es $4,5+4,5+7,5+7,5=24$ cm.

Se verifica que $\frac{24}{16} = 1,5$; es decir, el perímetro del segundo se obtiene multiplicando el primero por la razón de semejanza.

Solución



EJERCICIOS RESUELTOS

2. Calcula la razón de semejanza del área de las figuras del ejercicio anterior.

La razón entre áreas de figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza de las figuras.

Veámoslo: el área del primer rectángulo es $3 \cdot 5 = 15$ cm², y la del segundo es $4,5 \cdot 7,5 = 33,75$ cm², luego $\frac{33,75}{15} = 2,25 = 1,5^2$ y podemos calcular el área del segundo rectángulo multiplicando la del primero por el cuadrado de la razón de semejanza.

Solución

OBSERVA

La razón entre perímetros es r, la razón entre áreas es r^2 y la razón entre volúmenes sería r^3.

r r^2 r^3

EJERCICIOS

7. ●●○ Calcula el área de la figura semejante conocida la razón de semejanza $r = 1,25$ y el área de la figura original, $A = 3$ cm².

8. ●●○ Calcula el área de la figura original conocida la razón de semejanza $r = 0,3$ y el área de la figura semejante final, $A = 0,225$ m².

9. ●●● Tenemos una sierra con 20 dientes con las dimensiones que se muestran a continuación:

20

3 2

a) Calcula el perímetro y el área de la sierra.

b) Si construimos una sierra con dientes más pequeños tal como se muestra en la ilustración, ¿cuál será ahora su perímetro y su área? ¿Qué observas?

20

2,5 2

10. ●●● Observa la siguiente figura:

1 m

2 m

5 m

Realizamos una figura semejante a la anterior de razón 1,2.

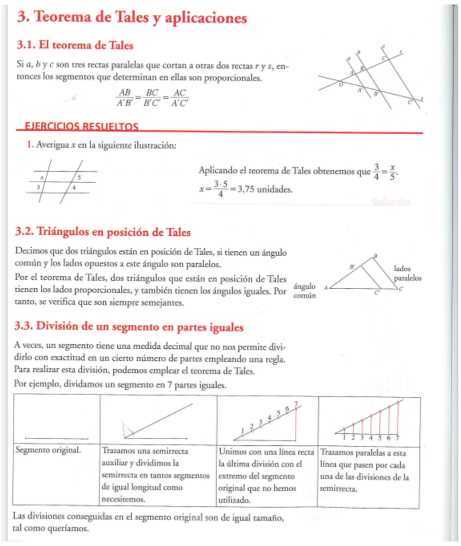
a) Dibuja y calcula las longitudes de esta nueva figura.

b) Calcula el perímetro de la segunda a partir del perímetro de la original. Comprueba el resultado observando las longitudes que has hallado en *a*.

c) Calcula el área de la segunda a partir del área de la original. Comprueba el resultado observando las longitudes que has hallado en *a*.

En el tercer apartado se introduce el Teorema de Tales y sus aplicaciones, y el cuarto apartado se centra en la semejanza de triángulos (criterios de semejanza y sus aplicaciones).

La representación gráfica del teorema de Thales muestra que las rectas cuales quiera, *r* y *s,* se intersecan. Esta representación podría inducir a una interpretación errónea del teorema. Por otro lado, no justifica ni aclara por qué los triángulos, tienen unos criterios de semejanza particulares.



3. Teorema de Tales y aplicaciones

3.1. El teorema de Tales

Si *a*, *b* y *c* son tres rectas paralelas que cortan a otras dos rectas *r* y *s*, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Averigua x en la siguiente ilustración:

Aplicando el teorema de Tales obtenemos que $\frac{3}{4} = \frac{x}{5}$.

$x = \frac{3 \cdot 5}{4} = 3{,}75$ unidades.

Solución

3.2. Triángulos en posición de Tales

Decimos que dos triángulos están en posición de Tales, si tienen un ángulo común y los lados opuestos a este ángulo son paralelos.

Por el teorema de Tales, dos triángulos que están en posición de Tales tienen los lados proporcionales, y también tienen los ángulos iguales. Por tanto, se verifica que son siempre semejantes.

ángulo común

lados paralelos

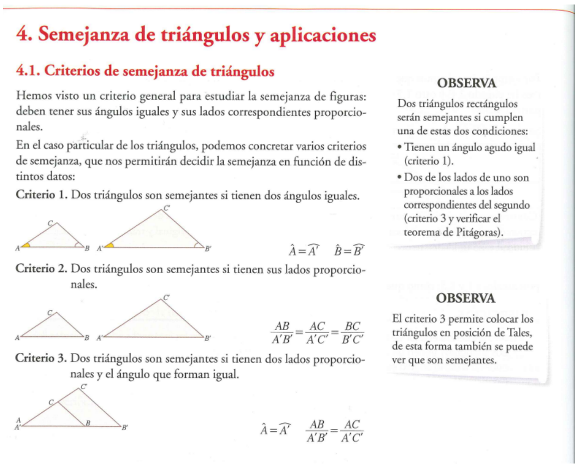
3.3. División de un segmento en partes iguales

A veces, un segmento tiene una medida decimal que no nos permite dividirlo con exactitud en un cierto número de partes empleando una regla. Para realizar esta división, podemos emplear el teorema de Tales.

Por ejemplo, dividamos un segmento en 7 partes iguales.

Segmento original.	Trazamos una semirrecta auxiliar y dividimos la semirrecta en tantos segmentos de igual longitud como necesitemos.	Unimos con una línea recta la última división con el extremo del segmento original que no hemos utilizado.	Trazamos paralelas a esta línea que pasen por cada una de las divisiones de la semirrecta.

Las divisiones conseguidas en el segmento original son de igual tamaño, tal como queríamos.



4. Semejanza de triángulos y aplicaciones

4.1. Criterios de semejanza de triángulos

Hemos visto un criterio general para estudiar la semejanza de figuras: deben tener sus ángulos iguales y sus lados correspondientes proporcionales.

En el caso particular de los triángulos, podemos concretar varios criterios de semejanza, que nos permitirán decidir la semejanza en función de distintos datos:

Criterio 1. Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.

$\hat{A} = \widehat{A'} \quad \hat{B} = \widehat{B'}$

Criterio 2. Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados proporcionales.

$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

Criterio 3. Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman igual.

$\hat{A} = \widehat{A'} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$

OBSERVA

Dos triángulos rectángulos serán semejantes si cumplen una de estas dos condiciones:

- Tienen un ángulo agudo igual (criterio 1).
- Dos de los lados de uno son proporcionales a los lados correspondientes del segundo (criterio 3 y verificar el teorema de Pitágoras).

OBSERVA

El criterio 3 permite colocar los triángulos en posición de Tales, de esta forma también se puede ver que son semejantes.

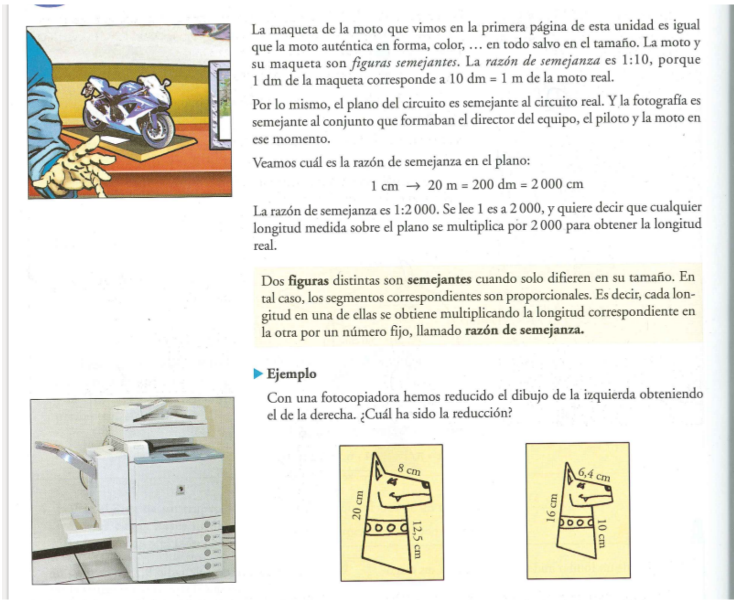
El último apartado, *Escalas: planos y mapas,* explica la utilidad de la semejanza para representar realidades muy pequeñas o muy grandes a través de planos, mapas y maquetas y define la escala como un caso particular de razón de semejanza. Finaliza la unidad con una gran cantidad de actividades para aplicar las escalas en planos y mapas.

Analizamos ahora con más detalle el libro de texto **M2 de Anaya (J. Colera, I. Gaztelu, edición 2008)**, que se utiliza en el IES Pedro de Luna de Zaragoza, que es el centro en el que he realizado las prácticas del Máster.

El libro introduce la semejanza de figuras geométricas en la unidad didáctica *UD8. Teorema de Pitágoras. Semejanza*, después de los sistemas de ecuaciones y justo antes de los cuerpos geométricos.

Los dos primeros apartados de la unidad tratan del teorema de Pitágoras. El apartado *3. Figuras semejantes* comienza con un ejemplo en el que se analiza la maqueta de una moto, siendo la maqueta igual a la moto original salvo en el tamaño y dice que *la moto y su maqueta son figuras semejantes.* Pero no menciona ni los ángulos ni las proporciones de la moto.

Después dice que la razón de semejanza es 1:10 porque 1dm de la maqueta corresponde con 10dm de la moto real, pero ni cómo ni qué qué dimensiones de la moto deben tener dicha correspondencia y tampoco menciona el volumen de la moto. Después dice que el plano del circuito es semejante al circuito real y que la fotografía es semejante al conjunto que formaban el director, el piloto y la moto en ese momento.



La maqueta de la moto que vimos en la primera página de esta unidad es igual que la moto auténtica en forma, color, … en todo salvo en el tamaño. La moto y su maqueta son *figuras semejantes*. La *razón de semejanza* es 1:10, porque 1 dm de la maqueta corresponde a 10 dm = 1 m de la moto real.

Por lo mismo, el plano del circuito es semejante al circuito real. Y la fotografía es semejante al conjunto que formaban el director del equipo, el piloto y la moto en ese momento.

Veamos cuál es la razón de semejanza en el plano:

$$1\text{ cm} \rightarrow 20\text{ m} = 200\text{ dm} = 2\,000\text{ cm}$$

La razón de semejanza es 1:2 000. Se lee 1 es a 2 000, y quiere decir que cualquier longitud medida sobre el plano se multiplica por 2 000 para obtener la longitud real.

Dos **figuras** distintas son **semejantes** cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo, llamado **razón de semejanza.**

Ejemplo

Con una fotocopiadora hemos reducido el dibujo de la izquierda obteniendo el de la derecha. ¿Cuál ha sido la reducción?

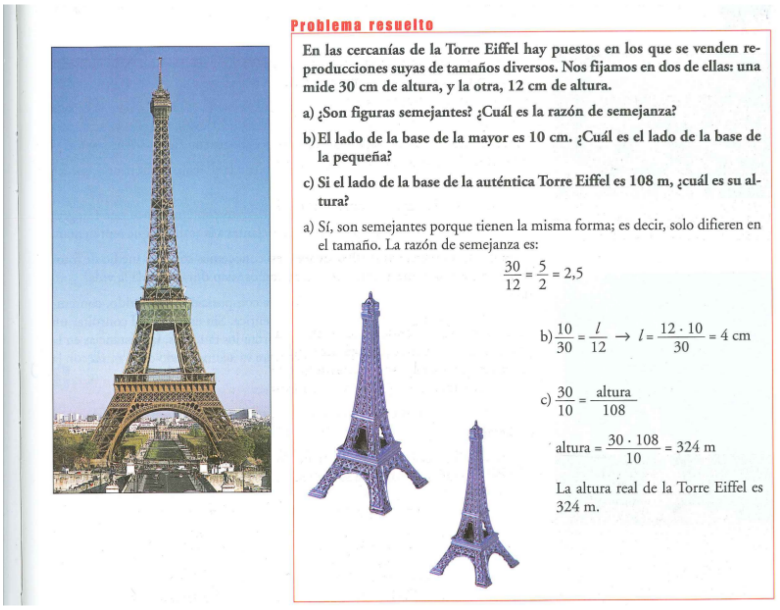
La expresión *conjunto que formaban* no es muy clara y puede que los alumnos no entiendan bien el ejemplo. Además se mezclan figuras planas y tridimensionales y no queda muy claro qué pares de figuras son semejantes.

Después de explicar la razón de semejanza del plano del circuito, define la semejanza entre dos figuras distintas y la razón de semejanza:

Dos figuras distintas son semejantes cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud de una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra, por un número fijo, llamado razón de semejanza.

Esta definición resulta algo imprecisa porque no aclara cuales son los *segmentos correspondientes*.

A continuación se presentan ejemplos cotidianos, en los que se calcula la razón de semejanza de figuras semejantes, y un problema resuelto sobre unas producciones de la torre Eiffel. La primera cuestión trata de averiguar si dos de las producciones son semejantes. La respuesta es afirmativa y la justificación se basa únicamente en la observación: *son semejantes porque tienen la misma forma y solo difieren en el tamaño.*



Problema resuelto

En las cercanías de la Torre Eiffel hay puestos en los que se venden reproducciones suyas de tamaños diversos. Nos fijamos en dos de ellas: una mide 30 cm de altura, y la otra, 12 cm de altura.

a) ¿Son figuras semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?

b) El lado de la base de la mayor es 10 cm. ¿Cuál es el lado de la base de la pequeña?

c) Si el lado de la base de la auténtica Torre Eiffel es 108 m, ¿cuál es su altura?

a) Sí, son semejantes porque tienen la misma forma; es decir, solo difieren en el tamaño. La razón de semejanza es:

$$\frac{30}{12} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

b) $\frac{10}{30} = \frac{l}{12} \rightarrow l = \frac{12 \cdot 10}{30} = 4$ cm

c) $\frac{30}{10} = \frac{\text{altura}}{108}$

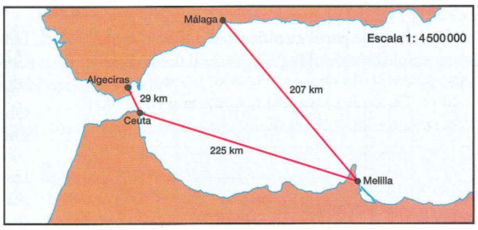
$$\text{altura} = \frac{30 \cdot 108}{10} = 324 \text{ m}$$

La altura real de la Torre Eiffel es 324 m.

En el apartado 4. *Planos, mapas y maquetas,* se presenta un ejemplo de un plano de una vivienda que se quiere comprar, y lo utiliza para definir la escala: *Escala es el cociente entre cada longitud en la reproducción y la correspondiente longitud en la realidad. Es decir, es la razón de semejanza entre la reproducción y la realidad.* En este caso se entiende mejor porque si especifica qué longitudes son proporcionales: *la longitud en la reproducción* y *la correspondiente longitud en la realidad.* A continuación, mediante un ejemplo de un mapa geográfico, se calculan las distancias entre dos ciudades aplicando la escala del plano.

Ejemplo

En este mapa del estrecho de Gibraltar, la escala 1:4 500 000 significa que cada distancia de la realidad se obtiene multiplicando por 4 500 000 la correspondiente en el mapa. Vamos a comprobar que las distancias que se indican en este mapa correspondientes a la realidad son 4 500 000 veces sus medidas en el mapa.



Distancia entre Málaga y Melilla — En el mapa: 46 mm; En la realidad: 207 km

$$\frac{207 \text{ km}}{46 \text{ mm}} = \frac{207\,000\,000 \text{ mm}}{46 \text{ mm}} = 4\,500\,000$$

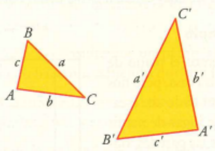
Comprueba tú el resto de las medidas.

El apartado *5. Semejanza de triángulos* comienza diciendo que los triángulos son figuras básicas para estudiar las demás, porque a veces, se recurre a su tiangulación. Utiliza este argumento para introducir los criterios de semejanza de triángulos, sin hacer referencia a otras propiedades de los triángulos que si dan lugar a estos criterios, como su no rigidez. Además, por algún motivo, este libro únicamente presenta dos criterios de semejanza de triángulos.

Tales de Mileto

Los triángulos, además de su sencillez, son figuras básicas para el estudio de las demás (para analizar una figura, a veces se recurre a su triangulación). Por eso, la semejanza de triángulos merece un estudio especial.

Lo mismo que los demás polígonos, dos triángulos semejantes tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados proporcionales:

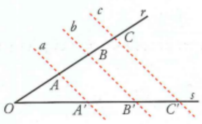


Los **triángulos** ABC y $A'B'C'$ son **semejantes** si:

- $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Teorema de Tales

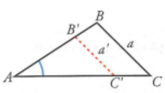
La semejanza de triángulos está muy relacionada con este teorema. En este curso, se ve más como curiosidad cultural que por su utilidad práctica.



Si las rectas a, b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas, r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Triángulos en posición de Tales



Los triángulos ABC y $AB'C'$ tienen un ángulo común, el $\hat{A}$. Es decir, el triángulo pequeño está "encajado" en el grande.

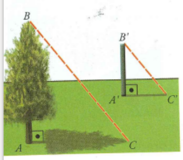
Además, los lados opuestos a A son paralelos.

Por eso, decimos que estos dos triángulos están en **posición de Tales.**

Después dice que la semejanza de triángulos está muy relacionada con el teorema de Thales, pero no explica porqué, y a continuación, se enuncia el teorema. Al margen de la página, se representa el teorema de Thales gráficamente, pero solo para el caso en el que las rectas del supuesto de partida son secantes. Esta representación puede llevar a que los alumnos interpreten que estas rectas deben cortarse siempre, y no reconocer, ni saber aplicar el teorema, cuando sean paralelas. Continúa describiendo dos triángulo en posición de Tales y dice que son semejantes, pero no lo justifica de ninguna manera.

Después particulariza la aplicación de los criterios de semejanza los para los triángulos rectángulos. Finaliza el apartado con varios ejemplos y actividades.

En el apartado *6. Aplicaciones de la semejanza de triángulos* se explica cómo calcular la altura de un objeto vertical a partir de su sombra, y cómo calcular la altura de un objeto vertical sin recurrir a la sombra. La explicación se basa en la semejanza de los triángulos rectángulos que se forman y es bastante completa.



Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra

Para calcular la altura de un árbol, $\overline{AB}$, procedemos del siguiente modo:

- Clavamos en el suelo, verticalmente, una estaca $A'B'$.
- Medimos la longitud de la estaca, $\overline{A'B'}$, y de las sombras, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, del árbol y de la estaca, respectivamente, proyectadas por el Sol en el mismo instante.

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes porque tienen dos ángulos respectivamente iguales:

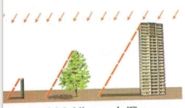
$\hat{A} = \hat{A}'$ porque los dos son rectos.

$\hat{C} = \hat{C}'$ porque *los rayos del Sol inciden sobre el árbol y la estaca con el mismo ángulo.*

Puesto que los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Como conocemos $\overline{AC}$, $\overline{A'B'}$ y $\overline{A'C'}$, podemos calcular la altura del árbol, $\overline{AB}$.



Los rayos del Sol llegan a la Tierra paralelos unos a otros.

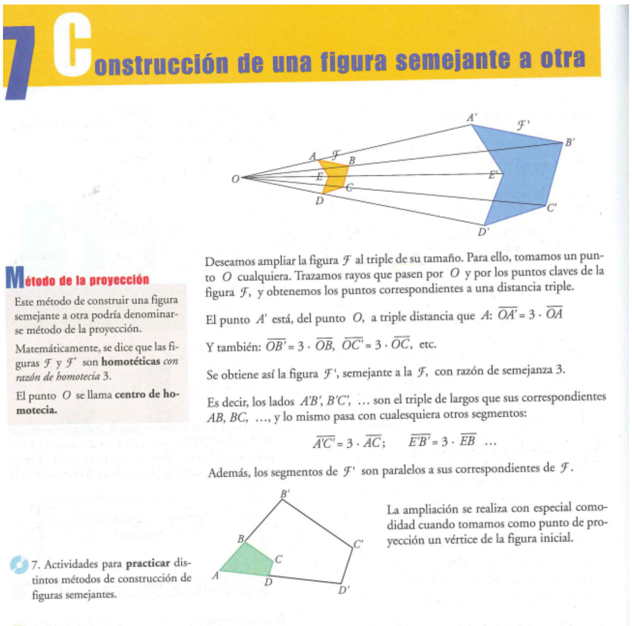
Problema resuelto

En la descripción anterior, calcular la altura del árbol sabiendo que: longitud de la estaca = 1,6 m; sombra del árbol = 3,5 m; sombra de la estaca = 0,7 m.

$$\frac{\overline{AB}}{1{,}6} = \frac{3{,}5}{0{,}7} \rightarrow \overline{AB} = \frac{1{,}6 \cdot 3{,}5}{0{,}7} = 8$$

Solución: El árbol mide 8 m.

En el apartado *7. Construcción de figuras semejantes* se plantea ampliar una figura al triple de su tamaño y se explica brevemente cómo hacer una homotecia. Este apartado de la unidad, normalmente, no suele explicarse en el IES Pedro de Luna.



7 Construcción de una figura semejante a otra

Método de la proyección

Este método de construir una figura semejante a otra podría denominarse método de la proyección.

Matemáticamente, se dice que las figuras $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ son **homotéticas** *con razón de homotecia* 3.

El punto O se llama **centro de homotecia.**

Deseamos ampliar la figura $\mathcal{F}$ al triple de su tamaño. Para ello, tomamos un punto O cualquiera. Trazamos rayos que pasen por O y por los puntos claves de la figura $\mathcal{F}$, y obtenemos los puntos correspondientes a una distancia triple.

El punto A' está, del punto O, a triple distancia que A: $\overline{OA'} = 3 \cdot \overline{OA}$

Y también: $\overline{OB'} = 3 \cdot \overline{OB}$, $\overline{OC'} = 3 \cdot \overline{OC}$, etc.

Se obtiene así la figura $\mathcal{F}'$, semejante a la $\mathcal{F}$, con razón de semejanza 3.

Es decir, los lados $A'B'$, $B'C'$, … son el triple de largos que sus correspondientes AB, BC, …, y lo mismo pasa con cualesquiera otros segmentos:

$$\overline{A'C'} = 3 \cdot \overline{AC}; \qquad \overline{E'B'} = 3 \cdot \overline{EB} \; \ldots$$

Además, los segmentos de $\mathcal{F}'$ son paralelos a sus correspondientes de $\mathcal{F}$.

La ampliación se realiza con especial comodidad cuando tomamos como punto de proyección un vértice de la figura inicial.

7. Actividades para **practicar** distintos métodos de construcción de figuras semejantes.

Finalmente el apartado *8. Ejercicios y problemas* presenta una secuencia de actividades para aplicar las diferentes técnicas.

Analicemos ahora una programación de aula de 2º ESO del IES Pedro de Luna. Esta programación, se apoya en el libro M2 de Anaya que acabamos de analizar, e incorpora algunas particularidades de la profesora.

En primer lugar recuerda el teorema de Pitágoras, y después define lo que son las figuras semejantes: *misma forma pero distinto tamaño, sus ángulos son iguales y sus lados son proporcionales*. La profesora añade a la definición la igualdad de los ángulos y la proporcionalidad de los lados, pero evita utilizar el término *homólogo*.

Siguiendo el guion del libro, siguen los planos, los mapas y el cálculo de escalas. Incluye nuevos ejercicios y problemas para aplicar escalas en este caso de forma inversa, dando la escala de un plano, calcular las dimensiones del piso original. La mayoría de las actividades que incorpora para la aplicación de escalas en planos, están enmarcados en un contexto de mercado inmobiliario. Para el resto de los contenidos sigue el guion del libro, y no hace referencia a ningún otro problema o ejercicio extra. Tampoco contempla ningún método para construir figuras semejantes ni menciona las homotecias.

Tras este pequeño estudio, se podría decir que no hay un criterio establecido, ni para la profundidad, ni para la rigurosidad con la que se deben presentar los contenidos. Tampoco hay un orden predefinido, ni una manera de conectar y justificar los contenidos. En algunos casos, la inexactitud o la falta de rigurosidad, podría llevar a una concepción errónea. Además, salvo en el caso de los mapas geográficos y los planos, los ejemplos y contextos que se utilizan resultan artificiales y poco reales.

Las actividades son escasas y no hay actividades experimentales que favorezcan el aprendizaje significativo. El objetivo principal de las actividades es aplicar las diferentes técnicas, sin ningún hilo conductor y de forma totalmente desconectada.

Estas carencias hacen que las preguntas que realicen los alumnos y las respuestas y los ejemplos del docente parecen determinantes para conseguir buenas concepciones, relacionar y justificar los contenidos.

Todas estas cuestiones ponen de manifiesto la importancia de la *epistemología espontánea del profesor* porque será él quién determine cómo y qué enseñar, el tipo de metodología y las actividades que se van a realizar.

2. Problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan

En los tres libros analizados, en general, se define lo que son dos figuras semejantes y la razón de semejanza, acompañando las definiciones con ejemplos u ejercicios resueltos, y proponiendo a continuación, una batería de actividades para su aplicación.

El primer tipo de actividad que se plantea, por lo general, consiste en comprobar si dos figuras (normalmente dos polígonos), son semejantes, y calcular la razón de semejanza.

Otra actividad que parece habitual en los tres libros, es calcular las medidas de una figura, multiplicando las medidas de otra figura semejante por la razón de semejanza.

En los tres libros se plantea un campo de actividades específico para los mapas, planos y el cálculo de escalas: dado un plano o mapa hecho a escala, la obtención de medidas reales, y a la inversa, construir planos y mapas con una escala dada o la que se considere apropiada.

Para el caso particular de semejanza de triángulos, lo más habitual son ejercicios para calcular la longitud del lado de un triángulo, multiplicando la longitud del lado homólogo de un triángulo semejante, por la razón de semejanza que hay entre ambos triángulos.

Otro tipo de actividad que se propone es demostrar que dos triángulos son semejantes, comprobando que sus lados son proporcionales.

También se presentan actividades de aplicación de la semejanza de triángulos para el cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra, y también sin recurrir a su sombra.

Para la construcción de figuras semejantes, en dos de los libros se plantean actividades para aplicar el *Método de la proyección:* construir la la figura semejante de otra a partir de una razón dada pintando la homotecia correspondiente. En la programación de aula, el profesor del IES Pedro de Luna, no se incluye esta técnica.

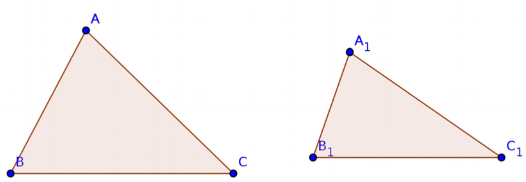
El tercer libro, dedica unos pocos ejercicios al cálculo de áreas y perímetros de figuras semejantes, y presenta un ejercicio resuelto en el que se observa la razón entre volúmenes de dos cubos.

Respecto a las técnicas, se utilizan principalmente las siguientes: medición con regla, observación y comparación, proporcionalidad de segmentos y cálculo de proporciones para la escala; proporcionalidad en triángulos en posición de Thales y también en el teorema de Pitágoras para los triángulos rectángulo y de homotecias para construir figuras semejantes.

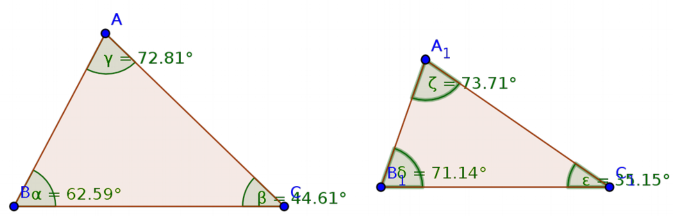
3. Efectos de enseñanza escolar sobre el aprendizaje del alumno

Seguramente, los alumnos sean capaces de calcular la razón de semejanza cuando dos figuras sean semejantes, así como la longitud de algún lado a partir de la razón de semejanza, y construir el plano de un piso u otras figuras semejantes. Sin embargo, es probable que en contextos reales, confundan dos figuras parecidas con dos figuras semejantes. Si nos fijamos en particular en el libro **M2 de Anaya,** define dos figuras semejantes como dos figuras iguales, pero de distinto tamaño. Se acompaña la definición con ejemplos de dos figuras, que a simple vista son iguales, pero de diferente tamaño, y se afirma que son semejantes sin comprobar los ángulos ni los lados, y se calcula la razón de semejanza dividiendo los tamaños.

Definir figuras semejantes como *figuras de igual forma y diferente tamaño* y los ejercicios resueltos que afirman que dos figuras son semejantes únicamente mediante la observación puede convertirse en obstáculo didáctico llevando al alumno a confundir figuras parecidas con semejantes. Por ejemplo, veamos estos dos triángulos:



Siguiendo la definición de “figuras de igual forma y diferente tamaño”, observando ambas figuras podríamos decir que estos triángulos son semejantes. Sin embargo, si comprobamos sus ángulos veremos que no son iguales, es decir, no son figuras semejantes.



Hay que decir que en los otros dos libros analizados, sí se especifica en la definición de figuras semejantes la igualdad de los ángulos homólogos y la proporcionalidad de los lados homólogos. También en la programación de aula analizada, el profesor o profesora, añade la igualdad de los ángulos y la proporcionalidad de los lados, aunque no especifica cuáles deben ser los ángulos iguales y los lados proporcionales.

Por otro lado, en general se utilizan las mismas figuras geométricas planas y mismos ejemplos, lo que puede llevar a no saber emplear la semejanza en un contexto físico real. Por ejemplo, si queremos diseñar un patrón de un traje que hemos visto en una revista de costura, para hacernos uno a medida en casa. Un traje no corresponde con ninguna de las figuras que se muestran en los libros, por lo que es posible que los alumnos no identifiquen la semejanza dentro de este contexto, en tal caso, la semejanza se habría constituido en un saber y no en un conocimiento matemático.

El libro de Teide parece querer salvar este obstáculo a través de su segundo apartado *Razón entre lados, perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes. S*in embargo, los ejemplos se limitan a polígonos y únicamente pone un ejemplo de semejanza en el espacio (el cubo). La escasa ampliación que hace el libro, tampoco evita que los alumnos tengan problemas en reconocer la semejanza, dentro de un contexto real.

Por otro lado, en los tres libros se presentan figuras semejantes con razones de semejanza enteras y esto puede repercutir en el aprendizaje de los alumnos no reconociendo la semejanza de figuras cuando la razón de semejanza no es entera.

Por otro lado, atendiendo al currículo, los alumnos deberían:

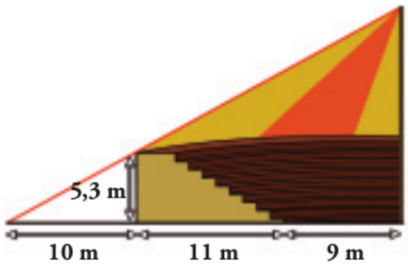
- Resolver problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real (Est.MA.3.2.1).

- Reconocer figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes (Est.MA.3.4.1).

- Utilizar la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza (Est.MA.3.4.2).

Sin embargo, las actividades que proponen los libros difícilmente contribuyen a lograr estos estándares de aprendizaje. Por un lado, son escasas y de tipo repetitivo, es decir, se limitan a proponer escenarios similares en los que aplicar las diferentes técnicas. Además los contextos no son muy reales, por ejemplo, la siguiente actividad del libro de texto de Anaya:

47 ¿Cuál es la altura del siguiente circo?:



Esta actividad no representa un problema de la vida real. Con este tipo de actividades, lo que están aprendiendo los alumnos, es la aplicación de las técnicas. Son actividades *camufladas* de contextos reales, pero realmente, siguen un patrón repetitivo.

Otras consecuencias que pueden darse de esta forma de enseñanza son las siguientes:

- Dibujar una figura semejante únicamente observando la forma y aumentando o disminuyendo el tamaño, sin guardar la razón entre sus lados.

- Realizar un aprendizaje memorístico que lleve a olvidar o confundir los criterios de semejanza.

- Dificultades con el cálculo y la notación de escala y vincular la escala a una única unidad de medida.

- Establecer de manera errónea la proporción que determina el teorema de Thales, o la semejanza de figuras, o aplicar el teorema de Thales cuando no se cumplen las condiciones del teorema.

Resumiendo, la forma de aprendizaje propuesta por los textos analizados puede llevar a una concepción errónea del objeto matemático.

C. Los conocimientos previos del alumno

1. Los conocimientos previos necesarios para el aprendizaje del objeto matemático

Es necesario que los alumnos tengan ciertos conocimientos geométricos previos, principalmente los siguientes: elementos del plano (punto, recta, segmentos y ángulos), paralelismo y perpendicularidad, medida y operación con segmentos y ángulos, clasificación y propiedades de polígonos, construcción de figuras geométricas, cálculo de áreas, perímetros y volúmenes, cálculos de operaciones elementales y proporcionalidad.

Además los alumnos deben tener cierto nivel de competencia matemática en los siguientes aspectos (definidos por Mogens Niss): pensar matemáticamente, planificación y resolución de problemas, modelizar, representar entidades matemáticas, utilizar simbología matemática (geométrica y algebraica) y utilizar ayudas o herramientas (regla, calculadora, etc.).

También hay que tener en cuenta que la metodología propuesta requiere que los estudiantes tengan cierto nivel de autonomía y desarrollo personal para ser capaces de desarrollar estrategias y técnicas para abordar los problemas y realizar la concepción del individuo sobre el objeto matemático que se quiere enseñar.

2. La enseñanza anterior

Realizando un repaso de los diferentes bloques de contenidos del currículo en las diferentes etapas de escolarización obligatoria podemos observar lo siguiente:

Según la legislación de Aragón, para los tres primeros cursos de primaria, en el *BLOQUE 1 de contenidos comunes de Ciencias sociales*, se incluyen los siguientes contenidos que favorecen la adquisición de los conocimientos previos descritos: Iniciación al conocimiento científico; utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación; iniciación al desarrollo de habilidades para el estudio y la investigación.

El *BLOQUE 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas,* de contenidos comunes de matemáticas, incluye, a lo largo de diferentes cursos, los siguientes conocimientos previos necesarios: planificación del proceso de resolución de problemas del entorno escolar (comprensión del enunciado, experimentación, exploración, y procesos de razonamiento); desarrollo de actitudes básicas para el trabajo matemático e iniciación en el uso de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje.

En el *BLOQUE 2. Números* podemos encontrar los siguientes conocimientos previos: números naturales; cálculo y operaciones básicas; estrategias personales de cálculo; correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y proporcionalidad.

En el *BLOQUE 3. Medida* los conocimientos previos necesarios que encontramos son los siguientes: unidades de medida, medida y comparación de longitudes; utilización de instrumentos escolares de medida de longitudes; estrategias para medir longitudes; cálculos y operaciones básicas con longitudes; medida de ángulos con el transportador; el sistema sexagesimal y la amplitud del ángulo como unidad de medida de un ángulo.

En el *BLOQUE 4. Geometría* los contenidos que se dan a lo largo de los diferentes cursos de primaria son los siguientes: posiciones relativas de rectas y curvas; formas rectangulares, triangulares, cuadrados y formas circulares; ángulos rectos, agudos y obtusos; clasificación y características de cuadrados, rectángulos y triángulos; posiciones de los ángulos; trazado de figuras planas; perímetro de figuras planas y áreas de cuadrados, triángulos y círculos; identificación y clasificación de polígonos y otras formas planas; la representación elemental del espacio, escalas y representaciones gráficas sencillas de formas planas y espaciales.

En primer curso de ESO, los contenidos previos necesarios que se dan, según el currículo Aragonés, son los siguientes:

Contenidos del *BLOQUE 1: Procesos, métodos y actitudes en matemáticas*: planificación del proceso de resolución de problemas; estrategias y procedimientos para resolver problemas; reflexión de resultados; matematización y modelización; confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas para el trabajo científico y utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje.

Los contenidos del *BLOQUE 2: Números y Álgebra* son los siguientes: operaciones con números enteros y decimales; jerarquía de operaciones; fracciones en entornos cotidianos y comparación de fracciones; cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora); aumentos y disminuciones porcentuales; proporcionalidad directa o inversa; razón y proporción; constante de proporcionalidad; iniciación al lenguaje algebraico; valor numérico de una expresión; generalizar propiedades y simbolizar relaciones y operaciones.

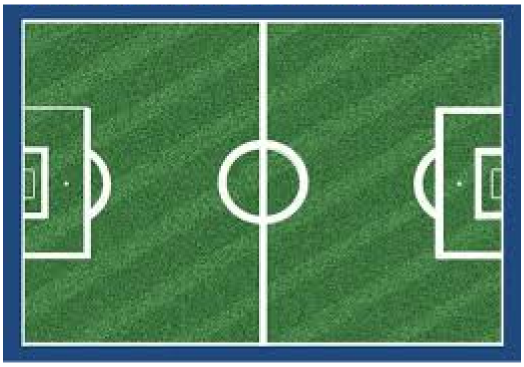
Contenidos del *BLOQUE 3. Geometría*: Elementos básicos de la geometría del plano; paralelismo y perpendicularidad; ángulos y sus relaciones; construcciones geométricas sencillas; figuras planas elementales: triángulo, cuadrado y figuras poligonales; clasificación de triángulos y cuadriláteros, sus propiedades y relaciones; medida y cálculo de ángulos de figuras planas; cálculo de áreas y perímetros de figuras planas y descomposición en figuras simples para el cálculo de áreas.

Resumiendo, según el currículo de la enseñanza anterior los alumnos debieran tener todos los conocimientos previos necesarios para la enseñanza de la semejanza de figuras que propongo. Sin embargo debemos considerar varios factores que durante la enseñanza anterior han podido contribuir a que esto no sea así. Por un lado, las diferentes situaciones que hayan impedido que los docentes hayan realizado la enseñanza de dichos contenidos. Por otro lado, los diferentes obstáculos, didácticos o epistemológicos, que hayan interferido en la concepción del individuo de algunos de los contenidos.

3. Actividades para asegurar que los alumnos posean los conocimientos previos

Antes de comenzar la enseñanza sería apropiado hacer una evaluación inicial de los cocimientos previos de geometría que tienen los alumnos. Esta evaluación no tiene por qué ser una prueba formal, propongo realizar una actividad del siguiente tipo:

Actividad. *Observa las siguientes imágenes y describe los elementos geométricos que encuentres en cada una de ellas. Después escribe un problema de matemáticas sobre una de las fotografías y resuelve el problema. ¿Qué fórmulas y elementos matemáticos has empleado para resolver el problema?*



Esta actividad, además de poner de manifiesto los conocimientos geométricos previos que tengan los alumnos, permite evaluar también en nivel de competencia matemática y el sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor que son factores importantes para llevar a cabo la metodología que propongo.

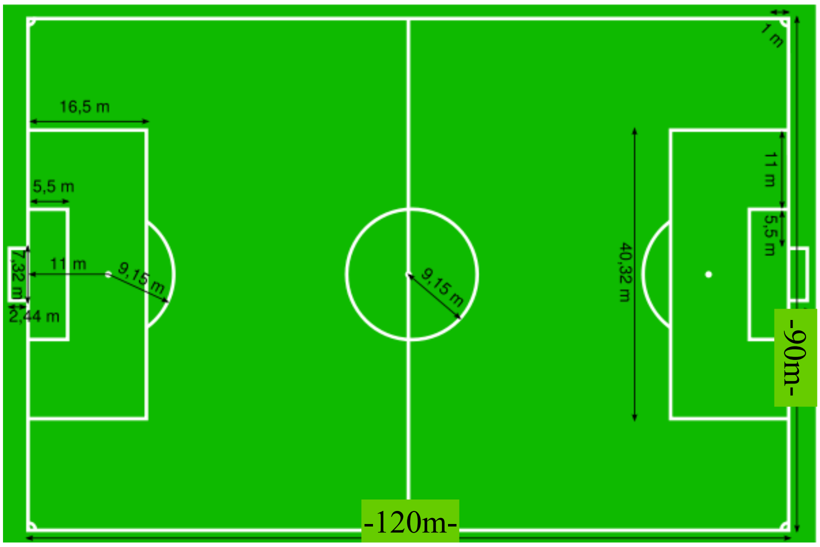
Después de hacer la actividad, el docente seleccionará las estrategias, para asegurar que los alumnos adquieran los conocimientos que no han demostrado. Propongo dos tipos de estrategias:

- Por un lado, una breve selección de actividades para repasar, y asegurar que los alumnos tienen los cocimientos previos necesarios, antes de comenzar la enseñanza de la semejanza.

➢ Por otro lado, varias actividades al finalizar las enseñanza de la unidad didáctica, para reforzar, tanto los diferentes aspectos de la semejanza, como los conocimientos iniciales.

Algunas de las actividades de repaso para realizar antes de la enseñanza de la unidad didáctica podrían ser las siguientes:

***Actividad**. Calcula el área de las figuras geométricas que aparecen en el siguiente campo de fútbol de 120x90 metros. Si quisiéramos hacer un campo de futbito en la mitad de espacio que ocupa el campo de fútbol ¿qué área tendría que tener la superficie?*

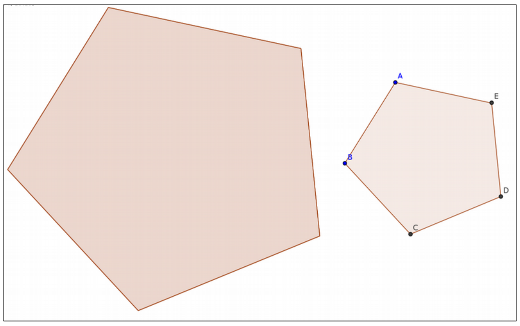


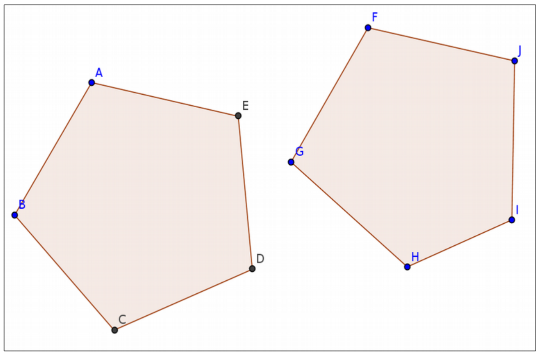
Esta actividad trata de reconocer diferentes figuras geométricas, calcular sus áreas y aplicar la proporcionalidad geométrica entre las áreas del campo de fútbol y el campo de futbito.

El objetivo de la siguiente actividad es repasar las propiedades de los polígonos regulares y dar una idea intuitiva de la semejanza entre este tipo de figuras. Además, conlleva aplicar los siguientes conocimientos previos: cálculo y operaciones básicas; correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y proporcionalidad; utilización de instrumentos escolares de medida de longitudes y ángulos; comparación de números enteros, decimales y fracciones e identificación y características de los polígonos.

La actividad muestra dos pares de polígonos: el primero está formado por dos polígonos regulares; el segundo, por un polígono regular y otro irregular, de tamaños muy similares.

***Actividad**. Utiliza el transportador de ángulos y la regla para medir los lados y los ángulos de los siguientes pares de figuras.*





a) ¿Cuáles son polígonos regulares?

b) ¿Qué relaciones de proporcionalidad observas entre los lados de cada par de polígonos?

c)¿Que pareja de polígonos dirías que se parecen más?

La siguiente actividad que propongo tiene como objetivo saber si los alumnos están familiarizados con el proceso de ampliación y reducción de fotografías. Este contexto es un ejemplo cotidiano de semejanza de rectángulos. Además, con esta actividad se pueden repasar varios conocimientos previos: la proporcionalidad, el cálculo de áreas y las relaciones entre magnitudes y numéricas.

***Actividad**. Uno de los lados de una fotografía que ha sido ampliada mide 30 cm. Si la fotografía original mide 15x7,5 centímetros, ¿cuánto medirá el otro lado de la fotografía ampliada? ¿Es posible enmarcar la fotografía ampliada con cualquier marco que tenga un área mayor que 4,5m²? Razona tu respuesta.*

La actividad que se presenta a continuación tiene como objetivo repasar el cálculo de volúmenes y la proporcionalidad directa.

Actividad. *Una piscina tiene 8m de largo, 6m de ancho y 1.5m de profundidad. En invierno se ha vaciado para limpiarla y pintarla. Pintar un metro cuadrado de la piscina cuesta 6€.*

a) ¿Cuánto costará pintar la piscina?

b) ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenar de nuevo la piscina?

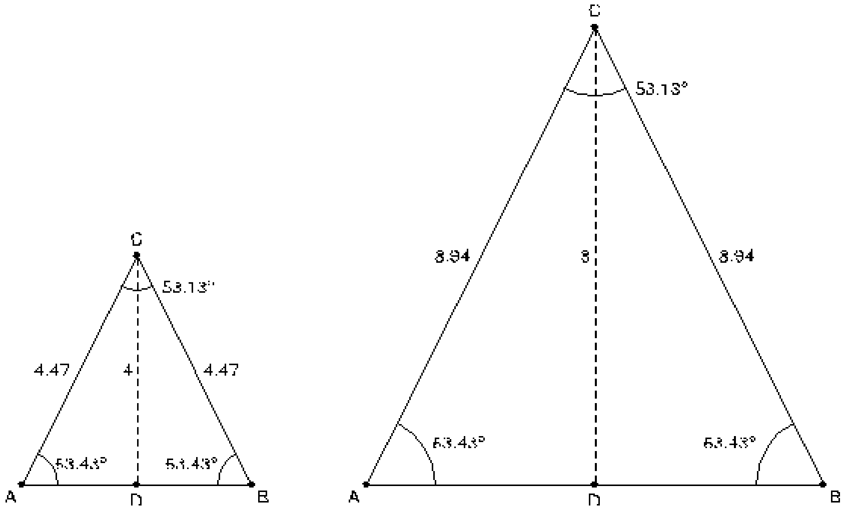
Después de finalizar la unidad didáctica, y antes de realizar la prueba de evaluación, se plantearán varias actividades repasar de nuevo estos conocimientos, así como los aprendizajes realizados durante la enseñanza. Por ejemplo, la siguiente actividad ,pone de manifiesto la proporcionalidad entre los perímetros y las áreas de dos triángulos isósceles y además, los alumnos deben aplicar los siguientes conocimientos previos: identificación y propiedades de los triángulos y cálculo de áreas y perímetros de figuras planas; cálculos y relación entre números enteros y fracciones y constante de proporcionalidad.

También es necesario utilizar el lenguaje geométrico y algebraico para formular las relaciones entre las dos figuras.

Actividad. *Describe las siguientes figuras y explica las relaciones que observas entre sus lados y sus alturas.*

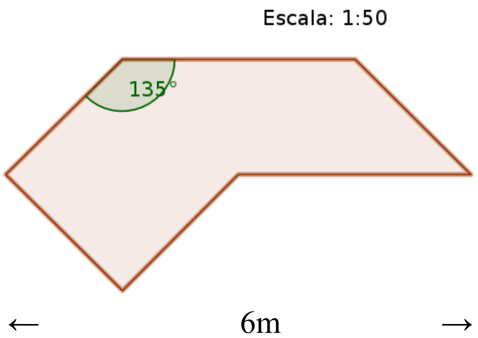
a) *Calcula el área y el perímetro de los dos triángulos.*

b) *Representa con lenguaje matemático las relaciones de proporcionalidad que identifiques entre los ángulos, los lados, los perímetros y las áreas de ambos triángulos.*



Otro ejemplo de actividad de refuerzo es la siguiente:

Actividad. *Luis está buscando un local para montar su negocio y en internet ha visto el anuncio de una oficina de que se vende cerca de su casa. En el anuncio tiene la foto de un plano y pone que la largura máxima de la oficina es de 6m, y que el precio es de 800 euros el metro cuadrado. ¿Cuál es el precio de la oficina?*



En esta actividad los estudiantes deben aplicar la escala del plano y las propiedades de los triángulos y sus ángulos para calcular el área. También la proporcionalidad para calcular el precio.

Este tipo de actividades formarían parte del campo de *problemas de ampliación y refuerzo* de la unidad didáctica. Otros ejemplos se describen en la tercera cuestión del apartado ***E. Sobre las actividades y las técnicas.*** Más concretamente, en la secuencia de actividades del *Bloque 7. Actividades de ampliación y refuerzo.*

D. Las razones de ser del objeto matemático

1. La razón de ser que se va a utilizar

La razón de ser que tendré en cuenta es el estudio de una figura física en un contexto cotidiano y cuyo estudio resulta complicado por el tamaño de dicha figura (bien por demasiado grande o demasiado pequeña) o por encontrarse a gran distancia, o ambas circunstancias, y por lo que resulta necesario crear, identificar o definir, una figura semejante de un tamaño adecuado que permita realizar el estudio de la figura original.

Algunos ejemplos pueden ser: diseñar los arreglos que necesita un vestido creando un patrón de costura; analizar las posibilidades de reforma de un piso mediante la construcción de su plano o determinar las alturas de las pirámides de Egipto. El caso de las pirámides permite también contextualizar históricamente a Thales y su teorema.

2. Las razones de ser históricas que dieron origen al objeto

La geometría se ha desarrollado a lo largo de la historia, impulsada de algún modo, por las necesidades prácticas de la construcción, de la agrimensura y tal vez por un sentimiento estético de arte y orden. En el museo de Bagdad se conserva una tabilla en la que está dibujado un triángulo rectángulo con los valores de sus lados subdivido en cuatro triángulos rectángulos menores, cuyas áreas también se mencionan. A partir de estos valores, el escriba calcula la longitud del lado mayor del triángulo principal utilizando, aparentemente una *fórmula de semejanza,* que que dice que, las áreas de figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de lados correspondientes.

Esta aplicación de la semejanza parece estar relacionada con la razón de ser que propongo en el presente trabajo, puesto que se estudian propiedades de una figura (longitud del lado mayor del triángulo principal), a partir de figuras semejantes más pequeñas.

Pitágoras descubrió (siglo VI a.C.) mediante un experimento estableció una relación entre la música y la proporcionalidad geométrica y numérica. Este descubrimiento parece estar bastante alejado de la razón de ser que propongo en este trabajo.

Alrededor del año 585 a.C., nació Thales que al parecer demostró algunas cuestiones relevantes, entre otras, el conocido teorema de Thales. Midió las alturas de las pirámides de Egipto observando las longitudes de sus sombras en el momento en que la sombra proyectada por un palo vertical era exactamente igual a su altura. También calculó la distancia de un barco a la playa por medio de la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes. Estas aplicaciones sí están estrechamente relacionadas con la razón de ser propuesta e incluyen las mismas variables que intervienen en la construcción del objeto semejanza que planteo: el tamaño y la distancia.

Los griegos y Euclides evitaban utilizar la proporcionalidad mediante una relación entre longitudes de la forma x/a=b/c por x c=ab. A pesar de ello las proporciones aparecen en la definición de razón de semejanza. Euclides también las utilizaba para demostrar teoremas relativos al estudio de triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes. Estos aspectos de estudio teórico y analítico no coinciden con la razón de ser que pretendo utilizar en esta propuesta.

La estéticas y las cuestiones de la arquitectura de la antigua Grecia está históricamente influenciada a la semejanza. Euclides comenzó a hablar en los términos que siguen: *la línea AB está dividida en razón de medios y extremos por C si AB: AC = AC: CB. A esta relación la llamamos proporción o razón áurea.* La razón de ser que planteo tampoco se enmarca en estas cuestiones estéticas.

Una vez realizada la comparación se pude decir que, la razón de ser que propongo coinciden con las razones de ser que llevaron a Thales de Mileto a estudiar la semejanza.

3. Problemas que constituyen la razón de ser

Los problemas que propongo presentan la necesidad de construir modelos y figuras con las propiedades geométricas que constituyen la semejanza. Uno de los problemas que propongo es el siguiente:

***Problema**: Marta y Pedro acaban de comprar un piso y les gustaría decorarlo utilizando los muebles que ya tienen en su casa antigua. El piso mide 95m2 y los muebles también son muy grandes y resultaría complicado llevar los muebles una casa a la otra para ver si entran. ¿Cómo podrían estudiar y decidir si utilizar sus muebles o comprar unos nuevos para decorar el nuevo piso de la familia?*

Este primer problema plantea la necesidad de construir un plano para estudiar la decoración del un piso. El siguiente problema, en cambio, plantea la necesidad de construir una figura semejante más grande.

***Problema**: En una fotografía familiar de 10x7 centímetros que hay en la casa de Sergio, sale un antiguo jarrón que se rompió hace años. A la madre de Sergio le gustaba mucho ese jarrón y Sergio quiere regalarle uno parecido por su cumpleaños. Pero el jarrón sale muy pequeño en la fotografía,mide tan solo 2 cm de alto, y Sergio no consigue ver bien cómo era el jarrón. Sergio piensa en ampliar 1,5 cm la fotografía para ver mejor el jarrón. ¿De qué tamaño será la ampliación de la fotografía? ¿Qué altura tendrá el jarrón en la fotografía ampliada?*

El siguiente problema muestra la utilidad de una maqueta para el estudio de las características de un edificio.

***Problema.** Para estudiar la arquitectura barroca la profesora de historia del cole de Sergio les ha llevado a clase una maqueta de la Basílica de San Pedro de Roma. La profesora les ha dicho que la Basílica es mil veces más alta que la maqueta que mide 13 cm. ¿Qué altura tendrá la Basílica de San Pedro de Roma? ¿Qué otras cosas sobre la Basílica podrá aprender Sergio utilizando la maqueta?*

4. Principios metodológicos para implementar la razón de ser

Los principios metodológicos generales tienen que llevar a cabo un proceso de enseñanza-aprendizaje lo más ajustado posible a las necesidades y maneras de aprender de cada alumno, con lo cual se estará dando respuesta a la mayor de las dificultades de la ESO: la atención a la diversidad.

Otros factores que se deben tener en cuenta son:

- El nivel de desarrollo del alumno, ya que determina sus posibilidades de razonamiento y de aprendizaje.
- Los conocimientos previos del alumno, que sirven como base para el aprendizaje.
- La construcción de aprendizaje significativo.
- Aprendizaje autónomo y aprender a aprender.
- La interacción social, la solidaridad y la cooperatividad.

Estos factores limitan la metodología a unas directrices flexibles, porque la metodología tiene que adaptarse al grupo-aula. Así pues, el siguiente planteamiento metodológico se llevarán a cabo siempre y cuando sea factible aplicarlo en el aula.

1. Fase de estudio: En esta fase se lleva a cabo un modelo de aprendizaje basado en la resolución de problemas. Se propondrán diferentes problemas que constituye la razón de ser la semejanza, para propiciar que los alumnos construyan el saber matemático a enseñar. También se propondrán otros problemas que pongan de manifiesto nuevos aspectos de este objeto matemático, así como las técnicas que resuelven los problemas, la reflexión sobre las tecnologías que las justifican y la soluciones encontradas.

En esta fase se identifican diferentes momentos de estudio:

- **Primer encuentro.** Se proponen los problemas que conducen al alumno hacia la construcción de los objetos matemáticos que se quieren enseñar y los alumnos se encuentran ante un nuevo escenario de aprendizaje con un nuevo enfoque de contenidos.

- **Momento exploratorio**: Los estudiantes abordarán los problemas intentando identificar pautas y estrategias para su resolución.

- **Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico**. En este momento se reflexiona sobre el procedimiento realizado para resolver el problema y su solución.

- **Momento de trabajo de la técnica**. Es el momento que se practica y mejora la técnica aprendida.

2. Fase de Formalización. El objetivo de esta fase es dar una explicación teórica que formalice y justifique el objeto matemático que se ha estudiado. También reflexionar sobre su utilidad y evaluar los diferentes aspectos de su aplicación y sus limitaciones si fuera necesario. Esta fase tiene dos momentos:

- **Momento de institucionalización**. Es el momento en que una técnica que ha demostrado ser útil y la tecnología que la justifica se formaliza para que puedan ser citadas explícitamente cuando sea necesario.

- **Momento de evaluación**. Se produce cuando hay que determinar el alcance y las limitaciones de una cierta técnica. Se reflexiona sobre la utilidad de lo aprendido y sobre la importancia de conservar este conocimiento para aplicaciones futuras.

La resolución de los problemas se llevará a cabo mediante técnicas cooperativas y técnicas que favorezcan el aprendizaje autónomo. La forma en la que se desarrollará la secuencia didáctica en cada momento se describe en el apartado ***G. La metodología. y las tecnologías.***

E. Los tipos de actividades, los contenidos y la planificación didáctica

1. Descripción de los distintos tipos de actividades

En la secuencia didáctica que propongo se pueden distinguir ejercicios y problemas. En primer lugar, se distinguen los siguientes tipos de problemas

***Problemas introductorios o Razón de ser de la semejanza*.** Son problemas que inducen a desarrollar el conocimiento de la semejanza de figuras. Los problemas de este bloque presentan contextos cotidianos que introducen la necesidad buscar figuras semejantes para estudiar una figura cuyo estudio resulta difícil por su tamaño y/o por la distancia en la que se encuentra. También ponen de manifiesto las propiedades geométricas que constituyen la semejanza: conservación de ángulos homólogos y proporcionalidad de lados homólogos. Estos problemas, no requieren necesariamente una solución numérica ni el desarrollo de ningún proceso matemático, sino que los alumnos se inicien en el proceso de construcción del objeto semejanza en el contexto del problema.

El siguiente tipo de problemas los denomino ***problemas de investigación*** porque pretenden desplegar los conocimientos y la aplicación de las técnicas para desarrollar al máximo posible el alcance de la semejanza. Estos problemas, en muchos casos, se resuelven mediante técnicas previamente conocidas o que se han debido enseñar en cursos anteriores, como áreas y perímetros de figuras poligonales. Es decir, algunos de estos problemas permiten también desarrollar o afianzar dichos conocimientos previos.

Los nuevos objetos que se introducirán a través de este campo de problemas dan lugar a 5 subtipos de problemas de investigación: aplicación y representación de la razón de semejanza en planos y mapas; semejanza de triángulos; teorema de Thales; construcción de figuras semejantes la relación entre sus áreas y perímetros; volúmenes de cuerpos semejantes.

Propongo también realizar algunos ***problemas de evaluación*** para reflexionar sobre la utilidad de las diferentes técnicas y su aplicación.

Por ultimo, considero apropiado plantear una serie de ***problemas de refuerzo y ampliación.*** Estos problemas relacionan, indistintamente, los diferentes objetos matemáticos relacionados con la semejanza. El objetivo de estos problemas es repasar, afianzar y ampliar los conocimientos adquiridos para dar cobertura a la diversidad del aula.

Respecto a los ejercicios, considero apropiado que haya, al menos, tantos tipos de ejercicios como objetos matemáticos que pueden considerarse técnicas, o pueden aplicarse en algún contexto para obtener un resultado deseado. Siguiendo este argumento, los tipos de ejercicios que propongo, son los siguientes:

- Tipo 1. Identificación de figuras semejantes y cálculo de la razón de semejanza.
- Tipo 2. Aplicaciones y representaciones de la escala.
- Tipo 3. Aplicación de los criterios de semejanza de los triángulos.
- Tipo 4. Aplicación del teorema de Thales.
- Tipo 5. Construcción de figuras semejantes.
- Tipo 6. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas semejantes.
- Tipo 7. Volúmenes de cuerpos semejantes.

Como se puede observar, es posible agrupar los distintos tipos y subtipos de problemas con los tipos de ejercicios, de acuerdo a los objetos matemáticos con los que están relacionados.

Esta agrupación da lugar a siete tipos, o bloques de actividades, que se presentaran en el aula en el siguiente orden:

- Bloque 1. Problemas de Razón de ser y ejercicios de identificación de figuras semejantes y cálculo de la razón de semejanza.

- Bloque 2. Problemas de investigación y ejercicios para trabajar los planos, mapas y representaciones de las escalas.

- Bloque 3. Problemas de investigación y ejercicios para la semejanza de triángulos.

- Bloque 4. Problemas de investigación y ejercicios para trabajar el teorema de Thales.

- Bloque 5. Problemas de investigación y ejercicios para la construcción de figuras semejantes y para trabajar las relaciones entre sus áreas y sus perímetros.

- Bloque 6. Problemas de investigación y ejercicios para trabajar los volúmenes de figuras semejantes.

- Bloque 7. Actividades de ampliación y refuerzo.

Además, en los bloques que se considere necesario, se propondrán los problemas de evaluación de las técnicas que correspondan.

2. Relación entre los contenidos y las actividades

Antes de exponer la secuencia didáctica, considero apropiado definir la forma en la que se van a introducir y relacionar los diferentes objetos matemáticos que emergen de las actividades, y los contenidos teóricos que forman la unidad didáctica.

Tras realizar las actividades de los conocimientos previos necesarios, la secuencia comienza con los problemas de razón de ser de la semejanza que servirán para introducir la definición de figuras semejantes.

A continuación se proponen las actividades para trabajar los objetos que emergen de esta definición: identificación de los ángulos y lados homólogos, proporcionalidad de lados homólogos, identificación de figuras semejantes y cálculo de la razón de semejanza. Después se presentan una serie de actividades para trabajar los planos, los mapas y las representaciones de las escalas.

Propongo hacer una sutil diferencia entre razón de semejanza y escala, puesto que las escalas se utilizan habitualmente en disciplinas, como cartografía, y también forman parte de los contenidos de otras asignaturas, como plástica y tecnología.

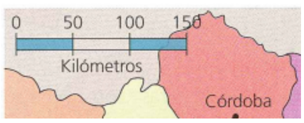
Así pues, en actividades de contexto puramente geométrico, diremos que la razón de semejanza entre dos figuras semejantes será *r* o *1/r*, indistintamente, siendo r un número real.

TECNOLOGÍA	Curso: 2º
BLOQUE 2: Expresión y comunicación técnica.	
CONTENIDOS: Expresión gráfica: Representación de objetos mediante bocetos y croquis, normalización, escala y acotación. Vistas de un objeto: Planta, alzado y perfil. Memoria técnica de un proyecto.	
CRITERIOS DE EVALUACIÓN	**COMPETENCIAS CLAVE**
Crit.TC.2.1. Representar objetos mediante vistas aplicando criterios de normalización y escalas	CMCT
Crit.TC.2.2. Interpretar y elaborar croquis y bocetos como elementos de información de productos tecnológicos.	CMCT-CAA
Crit.TC.2.3. Explicar mediante documentación técnica las distintas fases de un producto desde su diseño hasta su comercialización.	CCL-CMCT-CD

En el caso de contextos reales, como planos y mapas, usaremos el término escala y, siendo coherentes con el currículo de tecnología, utilizaremos su representación normalizada.

En estos contextos, se diferencian las escalas de ampliación y reducción y las escalas de reducción se podrán representar de tres maneras:

- Escala numérica: 1:n, siendo *n* un número natural.
- Escala unidad por unidad, por ejemplo 1cm:5km.
- Escala gráfica: muestra gráficamente la relación entre la longitud de la representación y la real. Por ejemplo:



Se propondrán actividades para manejar escalas de ampliación y reducción y las diferentes notaciones de la escala. También para evaluar la aplicación de las escalas sobre planos, utilizando la medición manual, en contextos reales.

A través de una actividad, en la que emerge un triangulo sobre un mapa, se conduce la enseñanza hacia la semejanza de triángulos, y se vuelve a un contexto más geométrico.

Se plantean algunas actividades, de contexto geométrico pero experimentales, para observar las propiedades que ponen de manifiesto los criterios de semejanza de los triángulos y después, se enuncian los criterios.

Para continuar, se propone aplicar los criterios de semejanza de triángulos, a una serie de *triángulos encajados,* y se pide observar las condiciones necesarias para que sean semejantes. De esta actividad emergen los elementos y condiciones que se utilizarán para introducir el enunciado del teorema de Thales.

Después, se introduce la aplicación de las homotecias, mediante la construcción de figuras semejantes con pantógrafo, y se estudian las relaciones entre los perímetros y las áreas, de dichas figuras semejantes. También se introduce la relación entre volúmenes de cuerpos semejantes.

3. La planificación didáctica

A continuación se muestra una planificación de los bloques de actividades, y los contenidos que se pretenden desarrollar, durante la sesiones de cada bloque en el aula.

BLOQUE	CONTENIDOS	SESIONES
I	• Ángulos y lados homólogos • Definición de figuras semejantes • Definición y cálculo de razón de semejanza	**2**
II	• Aplicaciones de mapas y planos • Cálculo y representación de las escalas • Diseño de escalas y planos	**2**
III	• Criterios de semejanza de triángulos • Aplicaciones de la semejanza de triángulos	**2**
IV	• Triángulos en posición de Thales • Teorema de Thales • Aplicaciones del teorema de Thales	**2**
V	• Homotecias con pantógrafo • Perímetros de figuras semejantes • Áreas de figuras semejantes	**2**
VI	• Identificación de cuerpos semejantes • Volúmenes de cuerpos semejantes	**2**
VII	• Aplicaciones de la semejanza • Cálculo de perímetros áreas y volúmenes, etc.	**1**

A estas sesiones se deben añadir, al menos otras tres: una para realizar la prueba inicial de conocimientos; otra para las actividades de repaso de los conocimientos previos; una última para realizar la prueba de evaluación. Es decir, estimo **un total de 16 sesiones**, para desarrollar la presente propuesta didáctica.

F. La secuencia didáctica y las técnicas

A continuación se exponen, para cada una de las sesiones de la planificación, las actividades que se realizarán de cada bloque, sus técnicas y las posibles modificaciones de las técnicas que deben aplicarse.

Los problemas se identificarán con *P* y los ejercicios con *E*. En el caso del último bloque, *Actividades de ampliación y refuerzo*, no se considera relevante hacer esta diferenciación y denotaremos a todas las actividades por *A*.

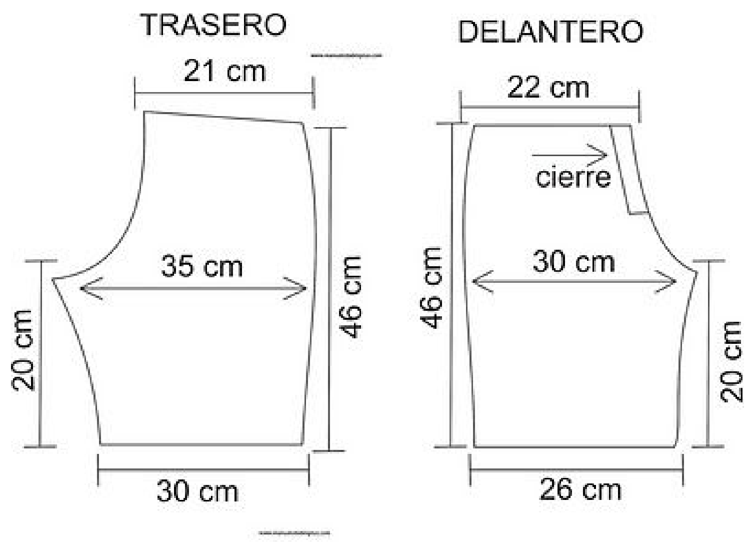
- **Sesión I**

Las actividades del *Bloque 0. Razón de ser*, son las siguientes:

P*:A Luis siempre se le ha dado bien la costura, el diseño y la moda y jugando con su hijo pequeño se dio cuenta de que todos sus muñecos tenían siempre la misma ropa. Para darle una sorpresa a su pequeño pensó que sería buena idea hacer trajes nuevos para sus muñecos e ídolos infantiles de miniatura. Cuando se puso manos a la obra se dio cuenta que no era tarea fácil hacer los diseños porque los muñecos eran muy pequeños y las tizas, lapiceros y todo el material que tenía era demasiado grande para dibujar unos diseños tan pequeños. ¿Cómo puede Luis resolver el problema?*

En este primer problema no se aplica una técnica matemática concreta puesto que trata de reflexionar sobre la necesidad de crear una figura semejante más grande que la original. El siguiente problema es una continuación del primero:

P*. Luis ha hecho el siguiente patrón para hacer un vestido a una de las muñecas de su hijo. Para poder diseñar bien los detalles, las medidas del patrón que ha dibujado, son justo el doble que las las medidas de la muñeca. ¿Cuales serán las medidas que tendrá el vestido? Escribe sobre el patrón las medidas reales que tendrá el vestido.*



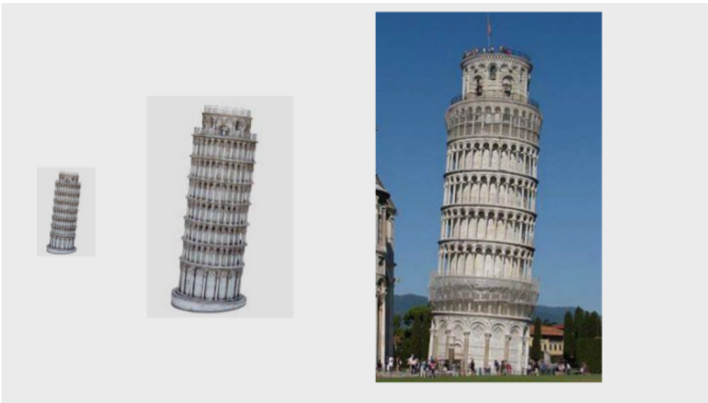
El objetivo de este segundo problema es cubrir la necesidad de crear la figura semejante que emerge del primer problema. Realmente, lo que estarían haciendo los alumnos, es diseñar una figura semejante al patrón de diseño a partir de una razón de semejanza dada. Sin embargo, no deben aplicar la técnica en su totalidad: únicamente tienen calcular las longitudes y marcarlas sobre las longitudes correspondientes del dibujo, porque el objetivo del problema no es que practiquen la técnica.

P. *En una fotografía familiar de 10x7 centímetros que hay en la casa de Sergio, sale un antiguo jarrón que se rompió hace años. A la madre de Sergio le gustaba mucho ese jarrón y Sergio quiere regalarle uno parecido por su cumpleaños. Pero el jarrón sale muy pequeño en la fotografía,mide tan solo 2 cm de alto, y Sergio no consigue ver bien cómo era el jarrón. Sergio piensa en ampliar 1,5 cm la fotografía para ver mejor el jarrón. ¿De qué tamaño será la ampliación de la fotografía? ¿Qué altura tendrá el jarrón en la fotografía ampliada?*

En este problema, la solución es una figura semejante de razón 1,5, que corresponde con la ampliación de una fotografía. La técnica que emergen del problema es el cálculo del perímetro de figuras semejantes, pero los a los estudiantes se les presenta la técnica de otra manera. Para ellos, lo que deben hacer, es calcular las dimensiones de la ampliación y la altura que tendrá el jarrón en la fotografía ampliada, aplicando la estrategia o regla de proporcionalidad que consideren apropiada.

A continuación se exponen los ejercicios del primer bloque de actividades. Si no diera tiempo a realizar, los dos primeros ejercicios en la primera sesión, se realizarán como tarea para casa.

E: *Si viajamos a Pisa podemos visitar su famosa torre inclinada, encontraremos también muchas tiendas de suvenires donde se venden reproducciones de la torre en diferentes dimensiones. Analizamos dos de ellas, una cuya altura es de 20 cm y otra más pequeña cuya altura es de 8 cm.*



a) ¿Dirías que las dos figuras son semejantes? ¿Podrías calcular la razón de semejanza entre ellas?

b) Si el diámetro de la torre pequeña es de 2,2 cm, ¿cuál es el diámetro de la torre mayor?

La primera técnica que se aplica en este ejercicio es la identificación de figuras semejantes. La segunda técnica es el cálculo del perímetro de figuras semejantes, sin embargo la técnica se presenta transformada. Los estudiantes no aplicarán en sí la razón entre los perímetros, aplicarán la proporcionalidad que resulta de la definición de figuras semejantes.

En el siguiente ejercicio, la técnica que se debe aplicar, es la identificación de figuras semejantes.

E. *Las dimensiones de un rectángulo son 2 cm y 3 cm. ¿Cuáles de los siguientes rectángulos son semejantes a él?:*

a) 36 cm y 54 cm

b) 12 cm y 20 cm

c) 10 cm y 15 cm

d)45 cm y 70 cm

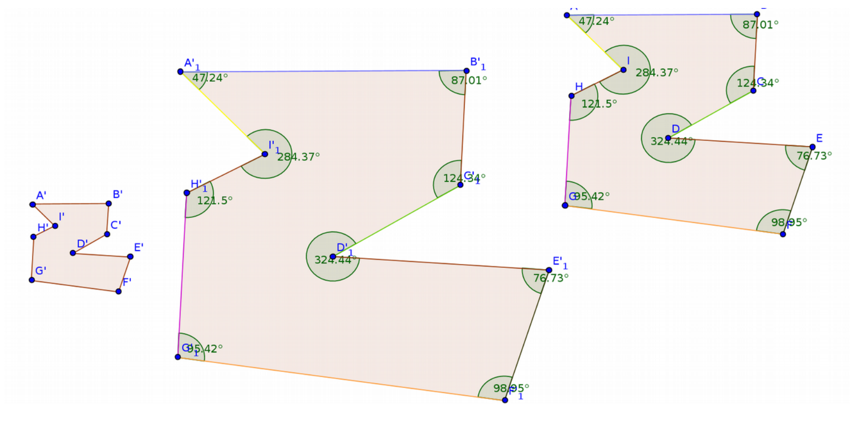
- **Sesión II**

La siguiente sesión de clase continúa con los ejercicios del primer bloque de actividades.

E. *Los lados de un triángulo miden 7,5 cm, 18 cm y 19,5 cm. Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 5 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza?*

En este ejercicio los estudiantes deben aplicar directamente el cálculo de la razón de semejanza. En el siguiente, en cambio, deberán identificar previamente los ángulos y lados homólogos de las figuras y después calcular las razones de semejanza.

E. Utiliza el transportador de ángulos y la regla para medir los lados y los ángulos de las siguientes figuras y comprueba que son semejantes.¿Cual es la razón de semejanza entre las figuras?



E. *En la orilla del río Sena (París) hay una réplica de la Estatua de la Libertad cuatro veces menor. Si la réplica mide 11,5m? cuánto mide la estatua de Nueva York?*

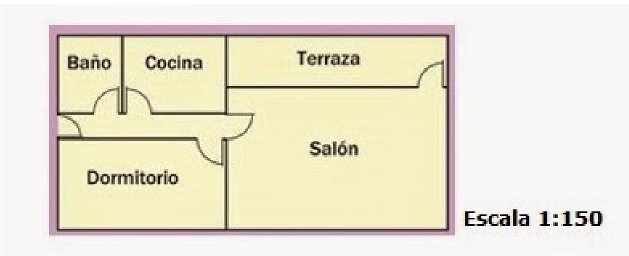
En este último ejercicio de la segunda sesión se debe aplicar la razón de semejanza para calcular la altura de la estatua.

- **Sesion III**

En la tercera sesión se realizarán los siguientes problemas del *Bloque 2. Problemas de investigación y ejercicios para trabajar los planos, mapas y representaciones de las escalas.*

El primer problema es el siguiente:

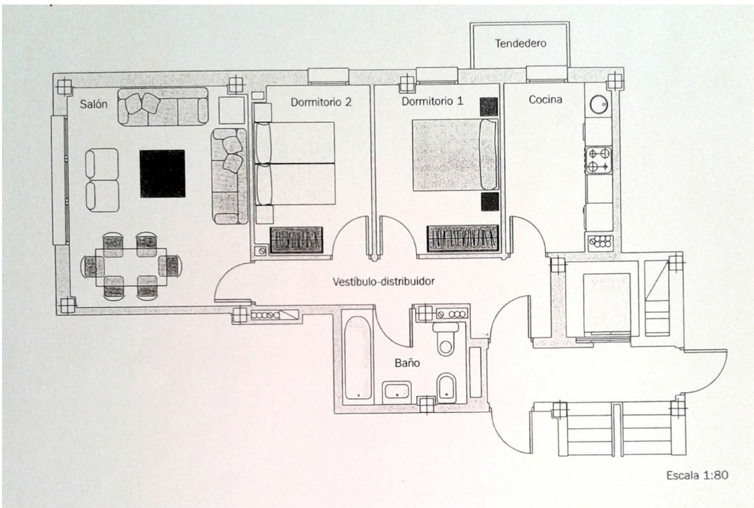
P. *Este es un plano hecho a escala de un apartamento. ¿Cuales son las medidas reales del piso?*



Este primer problema pone de manifiesto la aplicación de la semejanza en contextos reales y la representación *numérica* de la escala de un plano. Se debe aplicar la escala que muestra el plano para calcular las dimensiones reales de la vivienda.

El siguiente problema es un *problema de evaluación*. Durante el periodo de prácticas (Practicum II y III), pude comprobar que este problema tiene ciertas particularidades que sirven para hacer reflexionar a los alumnos. Por ejemplo, las diferentes mediciones que obtuvieron, hicieron que reflexionasen sobre la imprecisión de la medición manual.

***P**. El siguiente plano (escala 1:80) es del piso que quieren comprar Marta y Tomás.*



a) ¿Cual es la superficie útil de la vivienda? Haz los cálculos necesarios para completar la siguiente tabla:

Habitación	**Superficie**
salón	
cocina	
dormitorio1	
doritorio2	
Baño	
Tendedero (50%)	

b) El precio de mercado en la zona es de 2.345 euros el m² de superficie útil. ¿Qué precio tiene la superficie útil del piso que quieren comprar Marta y Tomas?

Los diferentes resultados del problema permiten evaluar varios aspectos: elección de las herramientas de medición; las características arquitectónicas y geométricas de la vivienda; la concreción de la superficie útil de un piso sobre un plano, las estimaciones y suposiciones que se pueden realizar, etc.

También se puede observar cómo estas cuestiones afectan en aspectos de la vida real, como es el valor del mercado de la vivienda.

- **Sesión IV**

En el siguiente problema se muestra la representación *unidad por unidad* de la escala.

***P**. Dibuja un plano de la clase de manera que, por cada metro real de la clase, dibujes 1,5 cm de la longitud correspondiente del plano. ¿Cual es la representación numérica de la escala de plano que has dibujado?*

Para realizar este problema los estudiantes deben interpretar y transformar la representación de la escala y diseñar el plano de la clase.

El siguiente problema muestra la representación gráfica de la escala de un mapa. Para resolverlo los estudiantes deben interpretar la representación de la escala y transformarla para obtener la equivalente representación numérica.

***P.** Calcula las distancias que hay entre Madrid y el resto de las ciudades que salen en el mapa y expresa de forma numérica la escala.*

A continuación de este problema se proponen los siguientes ejercicios del segundo bloque de actividades. Si no diera tiempo realizar alguno de ellos en la cuarta sesión, los estudiantes los realizarán como tareas de casa.

***E**. En un plano, la distancia real entre dos puntos A y B es 120 m. Si el segmento que une ambos puntos sobre el plano mide 5 cm ¿Cuál es la representación numérica de escala del plano?*

En este ejercicio la técnica que se trabaja es el cálculo de la escala y su representación numérica.

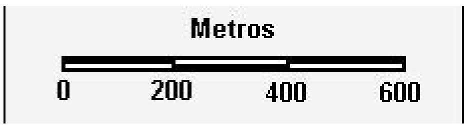
En el siguiente ejercicio se trabaja la equivalencia entre las diferentes representaciones de la escala.

***E**. Representa las siguientes escalas de dos maneras diferentes:*

a)1 cm= 1km

b)1:150

c)



- **Sesión V**

En esta sesión se presentan las actividades del *Bloque 3. Problemas de investigación y ejercicios para la semejanza de triángulos.*

El primer problema es el siguiente:

P. *En un mapa cuya escala es 1:1000 se dibuja el siguiente triángulo imaginario que une Faro (Algarve), Posada de Llanera(Asturias) y Vic (Cataluña). Si la escala del mapa fuera 1:1500 ¿Qué longitudes tendrán los lados del triángulo?¿Qué medirán los ángulos que se forman en las ciudades? Dibuja, mide y compara los ángulos y los lados de los dos triángulos.*

En este problema emerge la semejanza de dos triángulos a través de la aplicación de diferentes escalas de un mapa. A continuación, se presentan dos actividades experimentales. Para hacer estas actividades propongo utilizar el material de Geotiras, aunque es posible utilizar material escolar, como pinturas y lapiceros.

P. *Escoge cuatro Geotiras de los tamaños que quieras y forma con ellas y conéctelas con corchetes formando un cuadrilátero. Después varía sus ángulos moviendo las tiras.*

a) ¿Cuántos cuadriláteros distintos se forman cuando mueves las tiras?

b) Ahora elige tres tiras y forma un triángulo conectándolas con los corchetes. Mueve las tiras intentando variar los ángulos del triángulo. ¿Qué observas?

La siguiente actividad pone de manifiesto uno de los criterios de semejanza de triángulos.

***P**. Construye un triángulo con Geotiras y mide sus ángulos. Después intenta formar con otras tres Geotiras otro triángulo que tenga los ángulos iguales pero las lados de diferente tamaño. Mide y compara las longitudes de los lados de los dos triángulos.*

a) ¿Cómo son los triángulos que se obtienen?

b) Expresa matemáticamente tus conclusiones.

Las siguientes actividades muestran los otros dos criterios de semejanza de los triángulos.

***P**. Construye un triángulo con Geotiras y mide sus lados. Después intenta formar otro triángulo con lados homólogos proporcionales. Mide y compara los ángulos de los dos triángulos.*

a) ¿Cómo son los triángulos que se obtienen?

b) Expresa matemáticamente tus conclusiones.

***P**. Construye un triángulo con Geotiras y mide uno de los ángulos y las longitudes de los lados que forman dicho ángulo. Después, intenta formar otro triángulo, con un ángulo igual al que has medido del primero, y los lados que forman el ángulo, proporcionales a los que has medido del primer triángulo. Mide y compara los otros dos ángulos y el otro lado de los triángulos.*

a) ¿Cómo son los triángulos que se obtienen?

b) Expresa matemáticamente tus conclusiones.

Después de realizar estas actividades se enunciarían los criterios de semejanza de los triángulos. Si no diera tiempo, se darían en la siguiente sesión.

- **Sesión VI**

En la sexta sesión se plantean los ejercicios del tercer bloque. La técnica principal que se quiere ejercitar es la aplicación directa de los criterios de semejanza de triángulos, y en algunos casos, el cálculo y aplicación de la razón de semejanza.

Los ejercicios que no diera tiempo realizar en clase se propondrán como tareas para casa.

E. *En el triángulo ABC, un ángulo mide 33° y otro 90°. En el triángulo A'B'C', un ángulo mide 57° y otro 90°. Explica por qué son semejantes.*

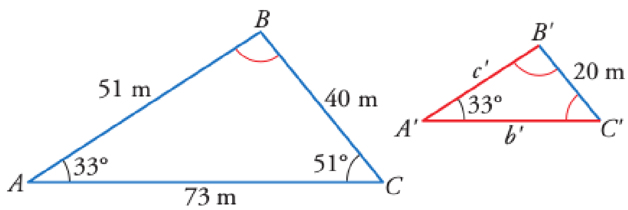
E*: Indica cuáles de las siguientes parejas de triángulos son semejantes y cuáles no lo son. En caso afirmativo, determina la razón de semejanza.*

a) 3, 4, 5 y 6, 8, 10

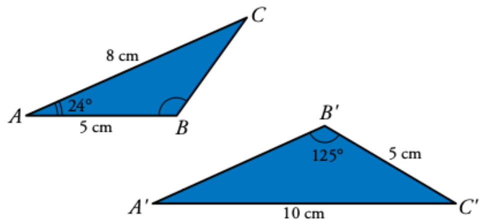
b) 6, 7, 8 y 7, 8, 9

E*. Los lados de un triángulo miden 7,5 cm, 18 cm y 19,5 cm. Se construye otro semejante a él cuyo lado menor mide 5 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza? Calcula el resto de los lados.*

E. *Sabemos que los siguientes triángulos son semejantes. Halla los lados y los ángulos que faltan.*



E4. *Los siguientes triángulos son semejantes. Halla los lados y los ángulos que les faltan a cada uno de ellos.*

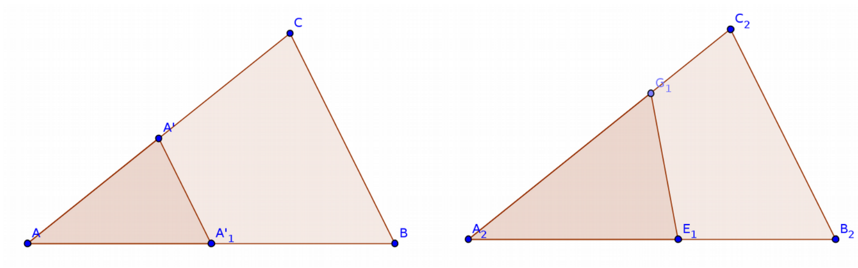


➢ **Sesión VII**

En la séptima sesión se proponen las actividades del *Bloque 4. Problemas de investigación y ejercicios para trabajar el teorema de Thales.*

La primera actividad pone de manifiesto los elementos y supuestos del teorema de Thales.

P. *Utiliza la regla y el transportador de ángulos para mediar los lados y los ángulos de los siguientes pares de triángulos encajados. Aplica los distintos criterios de semejanza de triángulos y compara los resultados. ¿Cuándo serán semejantes dos triángulos encajados?*



En esta actividad, la aplicación del teorema de Thales se transforma, de manera que los estudiantes aplican los criterios de semejanza y establecen la condición de que los triángulo deben ser semejantes dando lugar a las condiciones y resultado del teorema. Después de esta actividad se enunciaría el teorema.

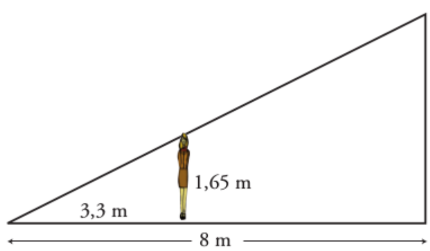
***P**. Se cuenta que, estando Thales de Mileto en Egipto, y conocida su fama de hombre sabio, se le retó a que calculase la altura de una de las pirámides. Según se ha transmitido desde la cultura griega, Thales clavó su bastón en la arena y midió la sombra que proyectaba, estableciendo una proporción entre la longitud del bastón y la sombra de éste con la altura de la pirámide y la sombra que proyectaba en ese momento. Representa mediante un dibujo esquemático como resolvió Thales el problema y explícalo.*

Con esta actividad se quiere mostrar la aplicación del teorema de Thales en contextos reales. En este caso, la técnica también se transforma, porque los estudiantes no tienen que aplicar directamente el teorema, tienen que representar gráficamente el teorema para el cálculo de la altura de la pirámide. Si no diera tiempo a finalizar la actividad en clase se realizará como tarea de casa.

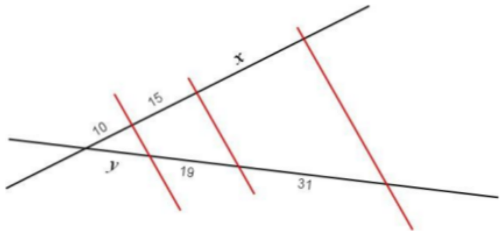
- **Sesión VIII**

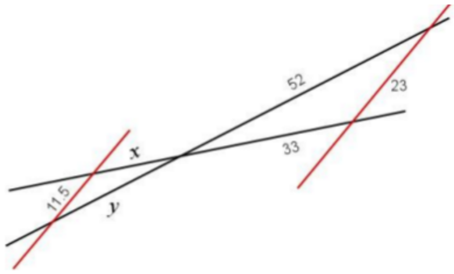
En la siguiente sesión se realizarán los ejercicios del cuarto bloque de actividades. En general, estos ejercicios se resuelven mediante la aplicación directa del teorema de Thales. Si no se pudieran realizar todos clase, se realizarán como tareas de casa.

***E.** El salón de la casa de Marta es abuhardillado y para medir la altura de la pared, se coloca como se ve en el dibujo.¿Cuál es la altura máxima del salón?*



E2: *Sabiendo que las rectas de color rojo son paralelas, calcula el valor de x en y en las siguientes figuras:*





E3. *Las sombras de estos árboles medían, a las cinco de la tarde, 12m, 8m, 6m y 4m, respectivamente. El árbol pequeño mide 2,5m. ¿Cuánto miden los demás?*

- **Sesión IX**

En esta sesión será necesario disponer de compás, un pantógrafo y folios de tamaño DIN A 3, o cartulinas, hojas cuadriculadas y el puzzle que se indica en el cuarto problema.

Se realizarán las siguientes actividades del *Bloque 5. Problemas de investigación y ejercicios para la construcción de figuras semejantes y trabajar las relaciones entre sus perímetros y sus áreas.* La primera, pone de manifiesto las homotecias, a través del dibujo con pantógrafo, y la relación entre perímetros de dos triángulos semejantes.

P. *Dibuja un triángulo equilátero cuyos lados midan 5cm. Después fija el pivote del pantógrafo como quieras y desplaza el punto de referencia sobre el triángulo para dibujar otro triángulo. Mide y compara los lados y los ángulos de los dos triángulos.*

a) ¿Son semejantes los dos triángulos? Explica a qué se debe.

b)¿Qué relación hay entre los perímetros de los dos triángulos?

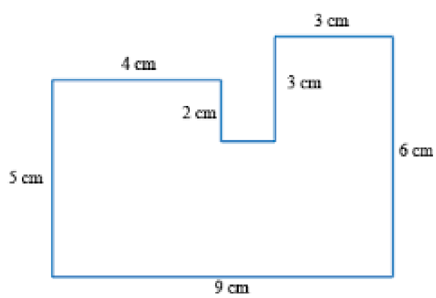
P. *Dibuja un círculo de radio 3cm y después utiliza el pantógrafo para construir dos círculos de radios 1,5cm y 4cm respectivamente. ¿Cuál es la relación entre los perímetros de los círculos? Expresa la relación que observas matemáticamente.*

En estas dos actividades se presentan, principalmente, dos técnicas: La primera técnica es la homotecia, transformada mediante el dibujo con pantógrafo de figuras semejantes.

La segunda técnica, que también se presenta transformada, es el cálculo de perímetros de figuras semejantes. En este caso, los estudiantes aplicarán la fórmula para calcular ambos perímetros, después dividirán las longitudes de ambos perímetros y representarán la relación matemática que representa da lugar a la técnica.

El siguiente problema pone de manifiesto la proporcionalidad entre las áreas de dos figuras semejantes.

P. *Utiliza pantógrafo para dibujar una figura semejante a la siguiente con razón de semejanza 1,5. Después calcula y compara el perímetro y el área de las dos figuras. ¿Qué relaciones observas?*



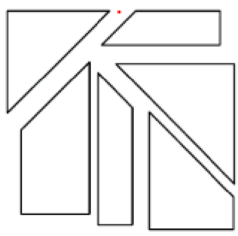
En esta actividad, además de la homotecia del pantógrafo, se aplicaría el cálculo de perímetros y áreas de figuras semejantes. Estas técnicas se presentan transformadas: los estudiantes calcularán los perímetros y las áreas de la forma que consideren oportuna. Después escribirán las relaciones que identifiquen, dando lugar a la formulación de las técnicas.

Si no diera tiempo a finalizar el problema, podrá finalizarse en la siguiente sesión de clase.

- **Sesión X**

En esta sesión se presentan el último problema del quinto bloque y algunos de los ejercicios. También será necesario disponer de al menos un pantógrafo por grupo y cartulinas.

***P**. Une las piezas del siguiente puzzle y después utiliza el pantógrafo para hacer un puzzle semejante cuyo perímetro sea el doble del perímetro del puzzle. ¿Qué relación observas entre las áreas de los dos puzzles?*



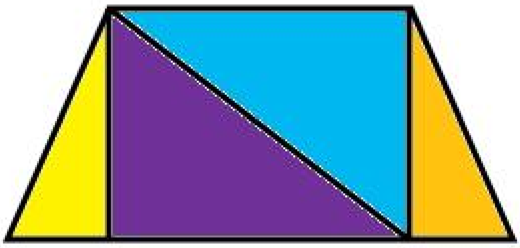
En este problema se aplica una homotecia mediante el pantógrafo, y después, el cálculo de áreas de figuras semejantes transformada: los alumnos deberán establecer la relación entre las áreas de los dos cuadrados a través de la observación de las piezas del puzzle y la experimentación.

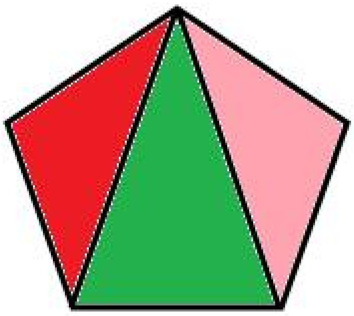
En los siguientes ejercicios se aplica la homotocia, mediante le pantógrafo, y el cálculo del perímetro y del área de dos figuras semejantes.

E. *Mide y calcula el perímetro y el área de cada figura. Después utiliza el pantógrafo para construir una figura semejante a cada una de las siguientes figuras.*

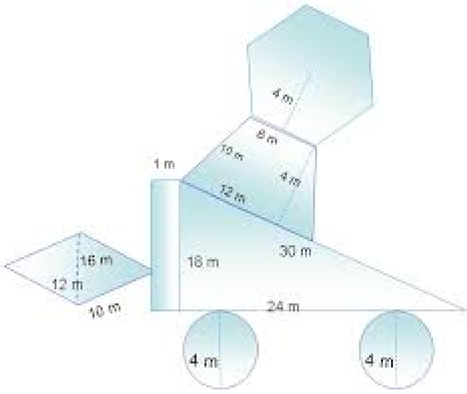
a)¿Cual es la razón de semejanza entre las figuras que has dibujado y las originales?

b) Utiliza la razón de semejanza para calcular el perímetro y el área de las figuras semejantes que has dibujado.





E. Dadas las dimensiones de la siguiente figura, calcula los perímetros y áreas de dos figuras semejantes a ella, con razones de semejanza 3/5 y 5/3 respectivamente.

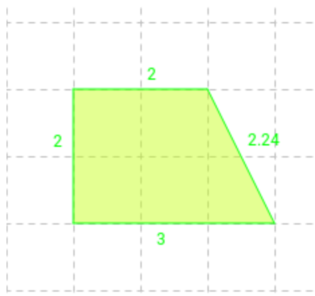


- **Sesión XI**

Para realizar las actividades de esta sesión será necesario disponer de un equipo informático por cada grupo de trabajo, que tenga conexión a internet, y un sistema operativo compatible con la aplicación Geogebra.

La primera actividad es el último ejercicio del quinto bloque de actividades.

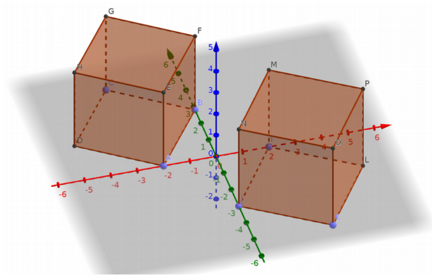
E. *Con la opción* ***Polígono*** *de Geogebra dibuja el siguiente trapecio. Después utiliza la opción* ***Homotecia*** *para crear un trapecio semejante con razón de semejanza ⅔. Construye un tercer trapecio semejante al primero que tenga área 10 u².*



En este ejercicio se aplica la homotecia y el cálculo de áreas de figuras semejantes mediante las opciones de menú de Geogebra.

A continuación se presentan los problemas del último bloque de actividades. La primera actividad pone de manifiesto la semejanza entre dos cubos que los estudiantes deben construir con Geogebra.

P*. Utiliza la* ***vista gráfica 3D*** *de Geogebra y la opción* ***cubo*** *para construir dos cubos. ¿Dirías que los dos cubos son semejantes? Razona tu respuesta.*



En la siguiente actividad los alumnos deben crear un cubo con cuatro cubos más pequeños, identificar la razón de semejanza entre los dos cubos y la relación entre sus caras y sus aristas.

***P**. Con el siguiente enlace accedes a un Geoplano interactivo:*

http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=4182

Utiliza la opción **create cube** *para construir un cubo. Después construye un cubo más grande con 4 cubos pequeños. Compara el cubo grande y los cubos pequeños y responde a las siguientes preguntas:*

a) ¿Cuál es la razón de semejanza entre los cubos pequeños y el cubo grande?

b) ¿Qué relación observas entre las aristas de los cubos pequeños y las aristas del cubo grande?

c)¿Qué relación observas entre las áreas de las caras del cubo pequeño y las del cubo grande?

***P**. Utiliza el geoplano interactivo para construir un cubo de Rubik con las aristas tres veces más largas que las de los cubos pequeños que lo forman.*

a)¿Por cuántos cubos pequeños está formado el cubo de Rubik?

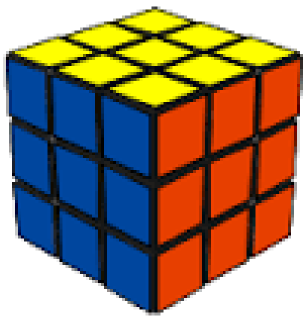
b) ¿Qué relación hay entre el número de cubos pequeños y la razón de semejanza?

En esta actividad el cálculo del volumen de figuras semejantes se presenta como la contabilización de los cubos pequeños, que hacen de unidad de volumen, y la identificación de la relación entre el número de cubos y la razón de semejanza.

- **Sesión XII**

En esta sesión el profesor dará las explicaciones teóricas que considere necesarias sobre las actividades anteriores. Después propondrá el siguiente ejercicio para practicar el cálculo de volúmenes de cuerpos semejantes.

E. *Un cubo de Rubik, cuyas aristas miden 6cm, está formado por cubos más pequeños cuyas aristas miden 2cm. Sabiendo que el área de un cubo pequeño es* $24cm^2$ *y el volumen de un cubo pequeño es* $8cm^3$*, calcula el volumen del cubo de rubik aplicando la relación entre áreas y volúmenes de figuras semejantes.*



En el siguiente ejercicio la técnica se transforma y los estudiantes tienen que obtener, a partir de dos volúmenes de cuerpos semejantes, la razón de semejanza.

E. *Los volúmenes de dos cuerpos semejantes son 5* cm^3 *y 625* cm^3 *respectivamente. Halla la razón de semejanza.*

En el siguiente ejercicio se aplica directamente el cálculo del volumen de una pirámide semejante a otra.

E*. El volumen de una pirámide es de 250* cm^3 *¿Cuál es el volumen de otra pirámide semejante a ella si la razón de semejanza entre ambas es 1/6?*

➢ Sesión XIII

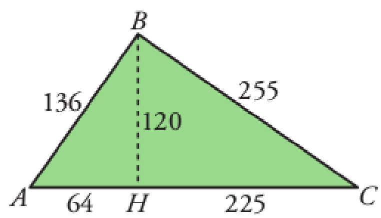
En esta sesión, se realizarán las actividades del *Bloque 7. Actividades de ampliación y refuerzo* que el profesor considere oportunas. El resto de las actividades de este bloque se propondrán como tareas de casa.

La primera actividad trata de aplicar los criterios de semejanza de triángulos a dos triángulos rectángulos.

***A**: Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo de la misma amplitud ¿son semejantes? ¿Por qué?*

En la siguiente actividad se deben identificar los lados homólogos de los triángulos y comprobar que son proporcionales. Con la misma técnica se deberá calcular la razón de semejanza y posteriormente calcular las longitudes de los lados que faltan.

***A.** Demuestra que los triángulos ABC, AHB y BHC son semejantes, comprobando que sus lados son proporcionales.*

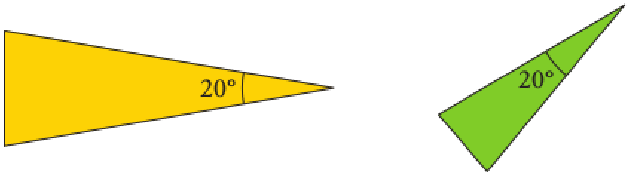


a) ¿Cuál es la razón de semejanza?

b) Halla los otros dos lados del segundo triángulo.

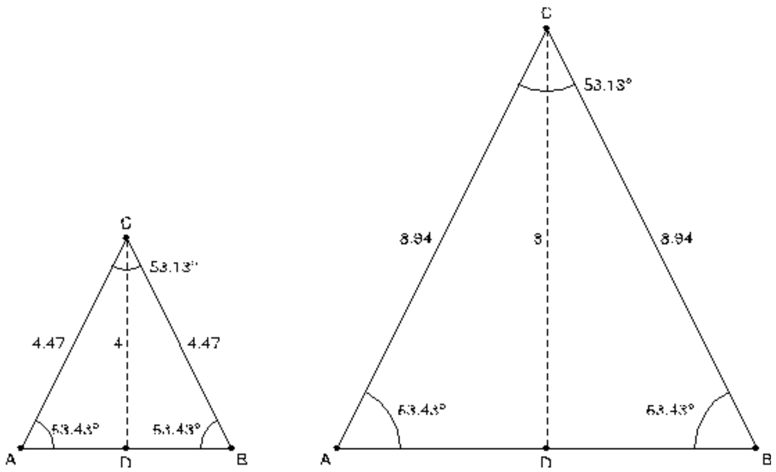
La siguiente actividad consiste en aplicar los criterios de semejanza a dos triángulos isósceles.

__A.__ Comprueba que los siguientes triángulos isósceles son semejantes.



En la siguiente actividad se debe aplicar el cálculo del perímetro y del área de dos triángulos semejantes.

***A**. escribe las siguientes figuras y explica las relaciones que observas entre sus lados y sus alturas.*

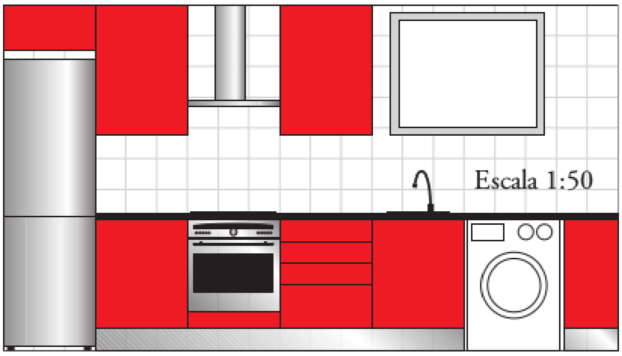


a) *Calcula el área y el perímetro de los dos triángulos.*

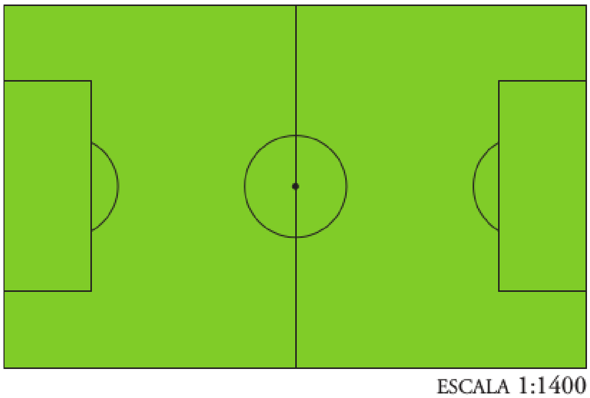
b) *Representa con lenguaje matemático las relaciones de proporcionalidad que identifiques entre los ángulos, los lados, los perímetros y las áreas de ambos triángulos.*

En las siguientes actividades se debe aplicar la escala para el cálculo de áreas de figuras semejantes.

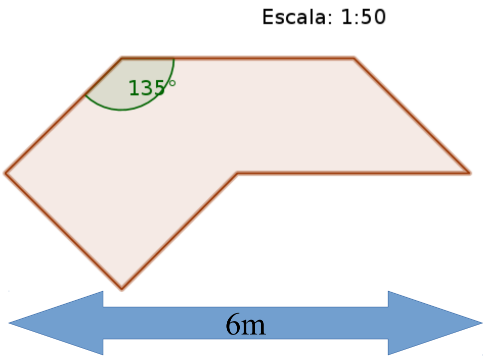
***A**. Este es el plano de la pared de una cocina. Mide con la regla y calcula la superficie de la pared y la superficie del cristal de la ventana.*



***A**. Mide con la regla y averigua cuáles son las dimensiones reales del siguiente campo de fútbol. Calcula la superficie de cada área de penalti (área grande) y del círculo central.*

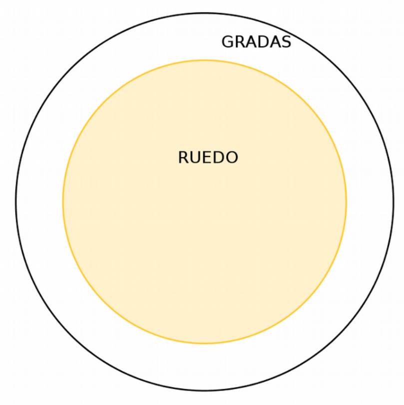


***A.** Luis está buscando un local para montar su negocio y en internet ha visto el anuncio de una oficina de que se vende cerca de su casa. En el anuncio pone que la largura máxima de la oficina es de 6m y que el precio es de 800 euros el metro cuadrado más el 10% de IVA. El anuncio tiene una foto del siguiente plano. ¿Cuál es el precio de la oficina?*



En la siguiente actividad se debe aplicar el cálculo de perímetros y áreas de figuras semejantes. En este caso las figuras son círculos y la razón de semejanza se presenta como un porcentaje del área de la corona circular que se forma entre ambos círculos.

A. *La plaza de toros de Vista Alegre tiene un diámetro total de 40m y el área del ruedo es de 2.826m². El ayuntamiento quiere ampliar ampliar en un 25% la superficie de la grada para aumentar la capacidad de aforo de la plaza.*



¿Cuáles serán el diámetro y el área total que ocupe la nueva plaza de toros? Escribe matemáticamente cuánto más grande serán el área total y el perímetro de la plaza nueva.

La siguiente actividad permite reflexionar sobre los conocimientos adquiridos:

A. *Teniendo en cuenta la definición de figuras semejantes y las propiedades y fórmulas que sabes de las figuras geométricas planas, reflexiona sobre las siguientes afirmaciones y di si son verdaderas o falsas razonando tu respuesta.*

a) Todos los pentágonos regulares son semejantes.

b) La razón de semejanza de dos figuras semejantes siempre es mayor que uno.

c) La constante de proporcionalidad entre las áreas y los perímetros de dos figuras semejantes es la razón de semejanza.

En la siguiente actividad se deben identificar dos figuras semejantes y calcular la razón de semejanza. Después, aplicar la razón de semejanza para calcular las dimensiones de una fotografía.

A. *A continuación se describe una situación en la que aparecen dos figuras semejantes. Lee el texto y contesta a las preguntas que hay a continuación.*

En clase de fotografía Luis ha ampliando una fotografía familiar de 10x15 centímetros para enmarcarla y regalársela a su padre por su cumpleaños. El tamaño de la ampliación es de 20 x30 centímetros y la superficie del marco que ha comprado es de 30x40 centímetros. Luis cree que el regalo le gustará mucho a su padre.

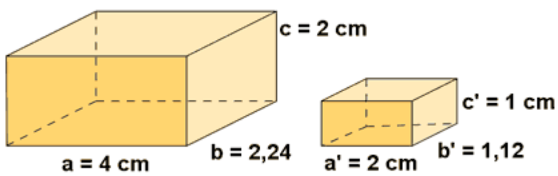
a) ¿Qué dos figuras son semejantes has identificado? Razona tu respuesta.

b) Utiliza los lados homólogos para calcular la razón de semejanza de las dos figuras semejantes.

c) Si Luis hiciera otra copia de la fotografía original con escala 2:3 ¿Cual sería el tamaño de la nueva fotografía?

En la última actividad se debe aplicar el cálculo de volúmenes de cuerpos semejantes para calcular la razón de semejanza.

A. Calcula la razón de semejanza que hay entre los siguientes cuerpos semejantes.



G. La metodología y las tecnologías

1. Fase de estudio

Durante la fase de estudio, la resolución de los problemas se llevará a cabo mediante técnicas cooperativas y técnicas que favorezcan el aprendizaje autónomo. Siempre que sea posible, propongo aplicar la siguiente técnica que llamaremos *técnica 1-3* y que es una adaptación de la *técnica 1-2-4*. Esta técnica consiste en formar grupos heterogéneos de tres. A continuación, se entregan las hojas con las actividades del bloque que corresponda. En primer lugar se harán los problemas y el profesor les pide que lean e l primero. Los momentos de estudio se desarrollarán de la siguiente manera:

- **Primer encuentro.** Durante los 5 primeros minutos, los miembros de cada grupo, deberán leer, explorar y analizar la actividad de forma individual. Por ejemplo, un problema en el que se pide calcular el área de dos cuadrados, pero aplicando la fórmula del área únicamente para uno de ellos. El alumno normalmente calcularía el área de los cuadrados por separado, y en este caso, se encuentra con que tiene que hacer algo diferente para tener el mismo resultado.

- **Momento exploratorio**: Los estudiantes, en grupo, analizarán las posibles estrategias y elegirán la más adecuada para resolver el problema. Siguiendo el ejemplo anterior, los estudiantes podrían analizar, cómo averiguar cuántos cuadrados del tamaño del más pequeño entran en el segundo.

- **Momento de constitución del entorno tecnológico-teórico**. Después de resolver el problema, el grupo reflexiona sobre la estrategia que han aplicado y el resultado. En el caso de los cuadrados, se podría calcular el área de la forma habitual para comprobar si el resultado obtenido es correcto. Si así fuera, los estudiantes podrían concluir, que la estrategia que han utilizado es buena, y tal vez, deducir la relación entre las áreas.

Después de realizar todos los problemas de un bloque de actividades, llega el **momento de trabajo de la técnica:** de forma individual, los estudiantes realizan los ejercicios del bloque.

2. Fase de Formalización

Los razonamientos, las justificaciones y explicaciones teóricas, se realizarán en la **fase de formalización,** que se articula mediante los momentos de institucionalización y evaluación. Estos momentos, se desarrollan de la siguiente manera:

- **Formalización parcial.** Después de realizar cada problema de un bloque, se realiza la institucionalización de la técnica y/o los objetos matemáticos que emergen del problema. También se hace una evaluación sobre la utilidad de lo aprendido y, en ocasiones, puede ser necesario determinar el alcance y las limitaciones de una cierta técnica.

- **Formalización general.** Cuando se finalizan todas actividades de un bloque (problemas y ejercicios), el profesor realizará la institucionalización general, de los objetos matemáticos que han emergido de todas las actividades del bloque. Si fuera necesario, se hace también una evaluación general el alcance y las limitaciones de lo aprendido.

Generalmente, la institucionalización y la evaluación las realiza el profesor. En este caso, propongo que los estudiantes participen en la formalización parcial, como se explica a continuación:

Los estudiantes realizarán los problemas en grupo, como se ha explicado anteriormente. Cada grupo de trabajo tendrá un portavoz que, después de finalizar cada problema, comentará en voz alta, las reflexiones que ha hecho el grupo sobre la resolución del problema. Deberá comentar las dificultades que han tenido para, las limitaciones que han observado y las conclusiones que han obtenido.

El profesor añadirá los comentarios y justificaciones teóricas necesarias para evaluar e institucionalizar los diferentes objetos matemáticos de se hayan puesto de manifiesto con el problema.

3. Las tecnologías

Para realizar la institucionalización de los diferentes aspectos de los objetos matemáticos, se utilizarán principalmente, las definiciones propias de la semejanza, el teorema de Thales, los resultados obtenidos de las actividades de experimentación, y elementos y propiedades geométricas elementales.

El teorema de Thales se utilizará principalmente para justificar las homotecias, que se implementarán mediante el diseño de figuras semejantes con pantógrafo.

Cabe aclarar que, aunque sí se apliquen las homotecias como método para construir polígono semejantes, no se utilizaran como tecnología para justificar la semejanza.

Se considera más adecuado utilizar como tecnologías los resultados que se observen mediante experimentación, y algunas definiciones propias de la semejanza. Por ejemplo, se establece que, cuando dos polígonos tienen sus ángulos iguales y los lados homólogos proporcionales, son semejantes. Si dos triángulos son semejantes, entonces, cumplen los criterios de semejanza de los triángulos.

Ahora bien, si se toman dos triángulos que cumplan alguno de los criterios de semejanza, midiendo sus lados y sus ángulos, se comprobará que cumplen la definición de polígonos semejantes.

I. La evaluación

1. Prueba de evaluación

Para poder evaluar todos los aprendizajes, es conveniente que, a lo largo de la secuencia didáctica, el profesor anote varias cuestiones: la actitud de los alumnos, los comentarios y las dudas, etc. Además, cada grupo de trabajo deberá entregar los resultados de los problemas de cada bloque de actividades.

Por otro lado, propongo realizar una prueba escrita, para evaluar tanto el saber como los conocimientos adquiridos, de forma individual. La prueba tiene una duración aproximada de una hora y es importante que los tengan regla y calculadora. La prueba es la siguiente:

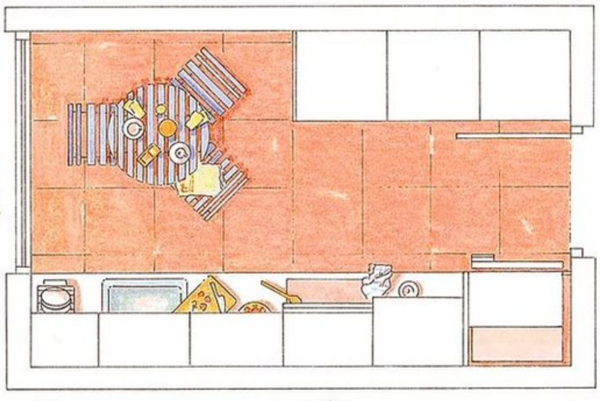
1. Luis ha ampliando una fotografía familiar de 10x15 centímetros para enmarcarla y regalársela a su padre por su cumpleaños. Para enmarcar la fotografía ha comprado un marco de 30x40 centímetros.

a) ¿Es la superficie del marco que ha comprado Luis semejante a la superficie de la fotografía original? Razona tu respuesta.

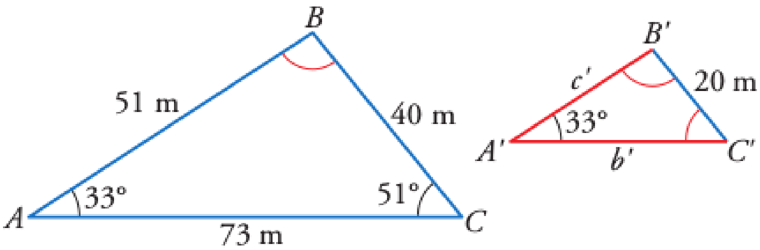
b) ¿Son la fotografía original y la ampliación que ha hecho Luis figuras semejantes? Razona tu respuesta.

c) Si Luis quisiera hacer una copia más pequeña de la fotografía original, de tamaño 5x7,5 centímetros, para que su padre pueda llevarla en la cartera. ¿Qué escala debe introducir Luis en la fotocopiadora?

2. La escala del siguiente plano de una cocina es 1:50. Mide con regla la largura y la anchura de la cocina sobre le plano. A aplica la relación entre las áreas de figuras semejantes, para calcular el área de la cocina.

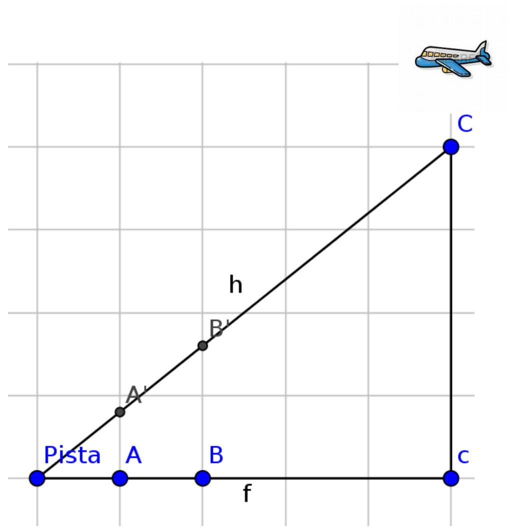


3. Sabemos que los siguientes triángulos son semejantes. Halla los lados y los ángulos que faltan.



4. Enuncia el teorema de Thales y haz un dibujo representando los resultados del teorema.

5. Un avión quiere aterrizar en una pista de aterrizaje que se encuentra a las afueras de una cuidad A. Empieza a descender a velocidad constante cuando se encuentra sobrevolando una ciudad C que se encuentra a 40km de A. Cuando ha descendido a velocidad constante una distancia h=20 km se encuentra en un punto B`, sobrevolando una ciudad B, que está a una distancia f=30 km de C y 10 km antes que A. El avión debe seguir descendiendo a velocidad constante hasta llegar al punto A' que se encuentra sobre la ciudad A y después debe empezar a frenar. ¿Cuántos kilómetros debe seguir descendiendo el avión a velocidad constante para llegar de B' a A'?



2. Conocimientos que se van a evaluar

Los conocimientos que pretendo evaluar con la primera actividad son los siguientes: Por un lado, la definición de polígonos semejantes, para indicar que la superficie del marco y la fotografía no son semejantes. Por otro lado, que la ampliación y/o la reducción de una fotografía, genera otra fotografía semejante a la original. También la identificación de los lados homólogos, y el cálculo de la escala, para hacer una copia reducida.

Las tareas deberán realizar los estudiantes en el primer apartado, y que se van a evaluar, son las siguientes:

- Tareas principales:

  - Relacionar la definición y construcción de figuras planas semejantes con la ampliación de fotografías.

- Tareas auxiliares específicas:

  - Identificar la ampliación de una fotografía como una figura semejante a la fotografía original.

Las tareas para realizar el segundo apartado son las siguientes:

- Tareas principales:

  - Conocer y aplicar la definición de figuras planas semejantes a los dos rectángulos.

  - Identificar los lados homólogos de los dos rectángulos.

- Tareas auxiliares generales:

  - Dividir la longitud entre lados homólogos.

  - Comparar los resultados de los cocientes.

Las tareas para el último apartado son las siguientes:

- Tareas principales:

  - Relacionar la definición y construcción de figuras planas semejantes con la reducción de fotografías.

  - Relacionar la razón de semejanza con la escala de la copia de la fotografía.

- Tareas auxiliares específicas:

  - Identificar dos lados homólogos de las fotografías.

  - Calcular la razón de semejanza o identificar la escala.

- Tareas auxiliares generales.

  - Realizar la división de las longitudes de los dos lados homólogos.

Los estándares de aprendizaje del *Bloque 3. Geometría* del currículo Aragonés (Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo), que se aplicarían son los siguientes:

Est.MA.3.2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.

Est.MA.3.4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.

También se podrían aplicar estándares de aprendizaje del *BLOQUE 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas* y del *BLOQUE 2. Números y álgebra.*

Est.MA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).

Est.MA.2.5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.

En la segunda actividad se quiere evaluar si los alumnos conocen la relación entre las áreas de figuras semejantes y, aplicar la escala del plano que se muestra, para calcular el área de la cocina. Los estándares de aprendizaje del currículo que más se ajustan a la actividad son los siguientes:

Est.MA.3.4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.

Est.MA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).

Las tareas que deben realizar los estudiantes y que se van a evaluar son las siguientes:

- Tareas principales:

  - Interpretar la escala como la razón de semejanza entre la superficie de la cocina y la del plano (equivalencia entre 1:n y 1/n).

  - Relacionar, mediante el cuadrado de la razón de semejanza, el área real de la cocina y el área de la cocina sobre el plano.

- Tareas auxiliares específicas

  - Medir las dimensiones de la cocina sobre el plano.

  - Calcular la razón entre las áreas.

  - Calcular el área de la cocina.

- Tareas auxiliares generales.

  - Aplicar la fórmula para calcular el área de la cocina sobre el plano.

  - Realizar los productos.

La siguiente actividad permite evaluar el conocimiento sobre la semejanza de triángulos: la identificación de lados homólogos de varios triángulos; cálculo de la razón de semejanza entre triángulos semejantes; aplicación de los criterios de semejanza para calcular ángulos y lados de triángulos semejantes. También deberán aplicar conocimientos y técnicas previamente conocidos, como el cálculo de un ángulo interior de un triángulo, conocidos los otros dos.

Los estándares de aprendizaje de la LOMCE que podrían aplicarse son los siguientes, aunque se refieren a contextos reales y éste es un ejercicio geométrico.

Est.MA.3.2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.

Est.MA.3.4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.

Est.MA.2.5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.

Por otro lado, las tareas que los estudiantes deben realizar en esta actividad son las siguientes:

- ➢ Tareas principales:
  - ➢ Relacionar los datos con la aplicación de los criterios de semejanza de los triángulos y aplicar la técnica:
    - Identificar los ángulos homólogos de los dos triángulos.
    - Asignar el mismo valor a los ángulos homólogos.
    - Identificar los lados homólogos de los dos triángulos.
    - Calcular los lados desconocidos del segundo triángulo aplicando la razón de semejanza.
- ➢ Tareas auxiliares generales:
  - ➢ Calcular el ángulo desconocido del primer triángulo restando a 180 la suma de los otros dos ángulos.
  - ➢ Realizar las divisiones y los productos.

La cuarta actividad trata de evaluar la adquisición del saber del teorema de Thales. Esta actividad es un ejercicio en el que los estudiantes deben enunciar y representar gráficamente dicho teorema.

Los estándares de aprendizaje de la LOMCE que más se ajustan para evaluar actividad son los siguientes, aunque no se ha encontrado ninguno que se ajuste en su totalidad:

Est.MA.1.5.1. Expone y defiende el proceso seguido además de las conclusiones obtenidas, utilizando distintos lenguajes: algebraico, gráfico, geométrico y estadístico-probabilístico.

Est.MA.3.5.1. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.

En este caso se defendería el enunciado del teorema de Thales y se analizarían e identificarían los elementos del teorema.

La descomposición en tareas de esta actividad es la siguiente:

- Tareas principales:
  - Identificar y relacionar de forma escrita los elementos del teorema de Thales.
  - Identificar y relacionar de forma gráfica los elementos del teorema de Thales.
- Tareas auxiliares generales:
  - Utilizar el lenguaje adecuado (notación de las rectas, representación gráfica, etc.) para el nivel de los alumnos.

La última actividad trata de aplicar el teorema de Thales en un contexto real. Los estudiantes deberán identificar los elementos del teorema en el contexto del problema y después aplicar su resultado.

En primer lugar, los estudiantes deben analizar y comprender el enunciado del problema, para relacionarlo con las rectas, puntos de corte y segmentos del teorema de Thales. Después, deben observar que se cumplen las condiciones necesarias, y calcular el dato que se pide aplicando el teorema.

Los estándares de aprendizaje de la LOMCE que se podrían aplicar son los siguientes (no se han encontrado estándares que se ajusten mejor a la actividad):

Est.MA.1.2.1. Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema).

Est.MA.3.2.1. Resuelve problemas relacionados con distancias, perímetros, superficies y ángulos de figuras planas, en contextos de la vida real, utilizando las herramientas tecnológicas y las técnicas geométricas más apropiadas.

Est.MA.2.5.1. Identifica y discrimina relaciones de proporcionalidad numérica (como el factor de conversión o cálculo de porcentajes) y las emplea para resolver problemas en situaciones cotidianas.

Por último, las tareas para realizar esta actividad son las siguientes:

- Tareas principales:
  - Identificar los datos del problema y relacionarlos con los elementos del teorema de Thales.
- Tareas auxiliares específicas:
  - Aplicar la proporcionalidad entre segmentos para calcular el dato que se pide (aplicar el teorema de Thales).

  - Contextualizar el cálculo en el problema.

- Tareas auxiliares generales:

  - Realizar la división y el producto para calcular la longitud del segmento.

3. Respuestas esperadas

En el apartado a) de la primera actividad, espero que la mayoría de los alumnos compruebe que, las divisiones entre entre las longitudes de los lados homólogos no son iguales. Seguramente, algunos, contestarán que la superficie del marco y la fotografía no son semejantes porque *los lados no son proporcionales* o porque no *son figuras proporcionales.* Este tipo de justificaciones, aunque no son del todo correctas, podrían darse como respuestas válidas.

Habrá alumnos que identifiquen mal los lados homólogos pero contesten, justificando correctamente, que no son semejantes porque las divisiones dan resultados diferentes y los lados homólogos no son proporcionales. En este caso, aunque la respuesta sea correcta, no sería del todo válida porque la técnica empleada no es correcta. Otros alumnos únicamente dividirán las longitudes de dos lados no homólogos y contestarán, sin criterio, que si son semejantes porque los lados son proporcionales o que no son semejantes porque no lo son. Alguno contestará de la misma manera sin tan siquiera hacer una división. Ninguno de estos casos se podrían considerar respuestas correctas.

En el apartado b) la mayoría contestará correctamente que la ampliación y la fotografía original son figuras semejantes sin embargo, y en la justificación, seguramente encontraremos frases como *las fotografías son todas semejantes.* Algunos justificarán mejor la respuesta explicando que ambas fotografías tiene los ángulos iguales porque son rectangulares y además, las ampliaciones fotográficas, conservan los ángulos y proporciones de las imágenes y por eso, sus lados homólogos también son proporcionales.

También es posible que algún alumno explique que *una ampliación es una copia a escala de tamaño superior de la fotografía original.* Algunos, por el contrario, darán alguna justificación sin sentido o no correcta y otros ni siquiera pondrán una explicación.

Para responder al último apartado de la primera actividad, los alumnos deberán identificar los lados homólogos de las fotografías y dividir, la longitud del lado menor entre la del mayor.

Es posible que en un primer momento algunos alumnos lo hagan al revés y que después, se den cuenta de que la escala debe ser ½, por tratarse de una reducción. Algunos observarán las dimensiones y deducirán la escala directamente, sin realizar la división, y dirán que, *la fotografía reducida es la mitad de la original,* o una expresión similar. Este tipo de respuestas podrían considerarse como correctas. Por el contrario, es posible que algunos no realicen esta reflexión y contesten, de forma incorrecta, que la escala debe ser 2.

En la segunda actividad, la mayoría de los alumnos medirán sobre el plano, calcularán el área del plano y después calcularán correctamente el área de la cocina, multiplicando por el cuadrado de la razón de semejanza. Es posible, que algunos de los alumnos que realicen bien la actividad, calculen las dimensiones reales de la cocina, aunque no se pida ni sea necesario.

Algunos calcularán mal el área de la cocina, multiplicando el área del plano por la razón de semejanza, en vez de multiplicar por el cuadrado de la razón de semejanza. Otros no aplicarán la relación entre las áreas y calcularán las dimensiones reales de la cocina y las utilizarán para calcular su área.

Respecto a la tercera actividad, espero que la mayoría la haga correctamente. Es posible que alguno no se acuerde de, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180, y explique que los ángulos de los dos triángulos son iguales, y calcule la razón de semejanza y la longitud de los lados que faltan.

También es posible, que calculen la razón de semejanza en el sentido de una ampliación. Si utilizasen esta razón de semejanza para calcular la longitud de los lados, obtendrían los lados de otro triangulo semejante, de mayor tamaño que el primero, y no sería correcto. Si observaran que el triángulo de lados desconocidos es menor, y que deben multiplicar por la inversa de la razón de semejanza, para calcular la longitud de sus lados, sería correcto.

También podría darse el caso de que algún alumno calcule mal la longitud de los lados que faltan porque han identificado mal su lado homólogo.

Es posible que haya alumnos que no respondan a la cuarta actividad y en cambio, habrá algún alumno que enuncie y represente gráficamente el teorema de Thales correctamente. La mayoría cometerá errores de notación propios de su nivel pero en general responderían correctamente. Unos pocos en cambio, mostrarán muchos errores en el lenguaje matemático en el enunciado del teorema aunque es posible que entre ellos, alguno, realicen bien la representación gráfica.

En esta actividad la mayoría identificará los elementos y relaciones del teorema de Thales en el contexto del problema y, salvo posibles errores en el cálculo final, aplicarán bien la proporcionalidad y calcularán el dato que falta. Algunos alumnos intentarán representar sobre el dibujo los datos pero no sabrán cómo aplicar el teorema y es posible que, alguno que otro, ni siquiera intente hacer el problema.

4. Criterios de calificación

Los criterios de calificación que propongo para la prueba escrita, se basan en la descomposición de las tareas que se deber realizar para hacer cada actividad. Estas tareas se han expuesto anteriormente en este apartado, en el punto ***2. Conocimientos que se van a evaluar.***

El total de puntuación que se puede obtener en la primera actividad es dos puntos, repartidos de la siguiente manera: 0,5 puntos en el apartado a); 0,5 puntos en el apartado b); un punto en el apartado c).

Los criterios de calificación para cada apartado de la primera actividad son los siguientes:

- Criterios de calificación apartado a).
  - Se podrá descontar hasta 0,25 puntos por errores en la tarea principal.
  - Se podrá descontar hasta un máximo de 0,25 puntos por errores en la tarea auxiliar específica.
- Criterios de calificación apartado b).
  - Se podrá descontar hasta 0,30 puntos por errores en tareas principales.
  - Se podrá descontar hasta 0,20 puntos por errores en tareas auxiliares generales.
- Criterios de calificación apartado c).
  - Hasta 0,4 puntos menos por errores en las tareas principales.
  - Hasta 0,4 puntos menos por errores en las tareas auxiliares específicas.
  - Hasta 0,2 puntos menos por errores en tareas auxiliares generales.

Para la segunda actividad los criterios de calificación son los siguientes:

- Hasta 1 punto menos por errores en tareas principales:
  - Hasta 0,5 puntos menos por interpretar de forma incorrecta la escala del plano.
  - Hasta 0,5 puntos menos por relacionar erróneamente el área de la cocina con el área del plano.

- Hasta 0,75 puntos menos por errores en tareas auxiliares específicas:
  - Hasta 0,25 puntos menos por medir mal las dimensiones de la cocina sobre el plano.
  - Hasta 0,25 menos por calcular mal la razón entre las áreas.
  - Hasta 0,25 menos por calcular mal el área de la cocina.
- Hasta 0, 25 puntos menos por errores en tareas auxiliares generales: calcular mal el área del plano y errores en los cálculos.

Los criterios de evaluación para la tercera actividad son los siguientes:

- Hasta 1,25 puntos menos por errores en las tareas principales:
  - Hasta 0,5 puntos menos por errores en identificar los ángulos homólogos de los dos triángulos y asignarles el mismo valor.
  - Hasta 0,25 puntos menos por errores en identificar los lados homólogos de los dos triángulos.
  - Hasta 0,5 puntos menos por errores en calcular las longitudes de los lados aplicando la razón de semejanza.
- Tareas auxiliares generales:
  - Hasta 0, 5 puntos menos por errores en calcular el ángulo desconocido del primer triángulo restando a 180 la suma de los otros dos ángulos.
  - Hasta 0,25 puntos menos por errores en divisiones y productos.

Los criterios de calificación para la cuarta actividad son los siguientes:

- Hasta 1,5 puntos menos en errores en las tareas principales:

  - Hasta 0,75 puntos menos en errores en el enunciado del teorema que no sean errores de notación propias de su nivel.

  - Hasta 0,75 puntos menos en errores de la representación gráfica del teorema que que no sean errores de notación propias de su nivel.

- Hasta 0,5 puntos por errores en tareas auxiliares generales: errores en notación y representación no adecuados para su nivel.

Los criterios de calificación de la última actividad son los siguientes:

  - Hasta 1 punto menos por errores en la tarea principal (errores en identificar los datos del problema y relacionarlos con los elementos del teorema de Thales).

  - Hasta 0,75 menos por errores en tareas auxiliares específicas:

    - Hasta 0,5 menos por errores en la aplicación de la proporcionalidad entre segmentos para calcular el dato que se pide (aplicar el teorema de Thales).

    - Hasta 0,25 puntos menso por errores en contextualizar el cálculo en el problema o no contextualizarlo.

- Hasta 0,25 puntos menos por errores tareas auxiliares generales (cálculos).

Se considera apropiado que los resultados de la prueba se utilicen para orientar a los alumnos sobre los conocimientos que deben reforzar y definir pautas de mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

J. Bibliografía y páginas web

Legislación de la comunidad autónoma de Aragón:

Orden ECD/489/2016**,** de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Apuntes de clase:

LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO (TAD) - Un marco teórico para la didáctica de las matemáticas - Eva Cid Castro y José María Muñoz Escolano.

ESTUDIO EPISTEMOLÓGICO DEL "MATERIAL PARA LA ENSEÑANZA DE LOS ENTEROS" - Eva Cid Castro y José María Muñoz Escolano.

Otros trabajos de fin de máster

Semejanza: una propuesta didáctica para 2º de ESO - José Manuel Marco Hernández (universidad de Zaragiza, 2014).

FIGURAS SEMEJANTES Y APLICACIONES DE LA SEMEJANZA. PROPUESTA DE UNIDAD DIDÁCTICA – Raquel García Blanco (Universidad de Granada, 2011).

Libros de texto:

Inicia Dual de Oxford Education para matemáticas de 2º de la ESO (Pedro Machín Polaina, María José Rey Fedriani).

II Matemáticas de Teide para 2º de la ESO (M.A. Ingelmo, Y.A. Zárate)

M2 de Anaya (J. Colera, I. Gaztelu, edición 2008)

Páginas web:

http://calculo.cc/temas/temas_trigonometria/trian_semejante/teoria/relacion_semejantes.html (último acceso, 25 de Junio de 2017).

https://es.wikipedia.org/wiki/Escala_(cartograf%C3%ADa) (último acceso, 25 de Junio de 2017).

http://www.dibujotecnico.com/escalas-normalizadas/ (último acceso, 25 de Junio de 2017).

http://www.vitutor.com/geo/esp/vActividades.html último acceso, 25 de Junio de 2017).