Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Introducción de las matrices en 2º de Bachillerato

Introduction to matrices in 2^{nd} year of Bachillerato

Autora:

Pilar Virgós Navarro

Director:

Julio Sancho

Facultad de Educación

2016/2017

ÍNDICE

1. Introducción

Las matrices son objetos matemáticos que permiten organizar información numérica (y también de otros tipos) de un modo natural y sencillo. La idea consiste en disponer números en forma de tabla, con una estructura de filas y columnas, de manera que cada elemento (cada número) de la tabla puede ser identificado mediante su posición: la fila y la columna en las que está situado el elemento.

Es posible que los alumnos no perciban las matrices como “un gran invento”, ya que la disposición en forma de tabla es algo natural. Sin embargo, precisamente es la sencillez de este concepto lo que hace que las matrices tengan una extensa aplicación tanto en el ámbito científico como técnico.

- **Ámbito científico**. Encontramos matrices en física, astronomía, ingeniería y otras disciplinas científicas. Dentro del campo de las matemáticas, se utilizan en todas sus disciplinas: cálculo, estadística, geometría, lógica, criptografía, álgebra, probabilidad...

		Riesgo = Probabilidad x Impacto				
Probabilidad	0,9	0,05	0,09	0,18	0,36	0,72
	0,7	0,04	0,07	0,14	0,28	0,56
	0,5	0,03	0,05	0,10	0,20	0,40
	0,3	0,02	0,03	0,06	0,12	0,24
	0,1	0,01	0,01	0,02	0,04	0,08
		0,05	0,10	0,20	0,40	0,80
		Impacto				

- **Ámbito técnico**. Aparecen matrices, además de otras, en las siguientes disciplinas:
  - Urbanismo: matrices de flujo de tráfico, matrices de conectividad que estudian las conexiones entre distintos núcleos urbanos...
  - Sociología: Estudios, de la influencia de unos individuos con otros en grupo, sociogramas...
  - Economía: análisis de la producción, distribución y organización de las empresas, Modelo Input-Output de Leontief...
  - Informática: estructura de datos presente en muchos lenguajes de programación.

También aparecen matrices en otras muchas situaciones cotidianas que pueden servir como base para la introducción de estos objetos en clase. Por ejemplo:

1. Los horarios de trenes que aparecen en las estaciones son matrices

TRENES DE MADRID A ALCÁZAR DESDE JUNIO 2012 (ACTUALIZADO EL [illegible])

Tren		Núm.	Procedencias				Días que circula	Alcázar Llega	Alcázar Sale	Destinos				Observaciones
M.D		17000	Madrid At.	7.13			Exc. S. y D.	8.46				Alcázar	8.40	No circula [illegible]
Alaris		329	Madrid Ch.	7.15	Madrid At.	7.30	Exc. S. y D.	8.48	8.49	Albacete	9.48	Murcia	11.44	No circula del 1 al [illegible]
Talgo		376	Madrid Ch.	8.00	Madrid At.	8.19	Diario	9.36	9.37	Linares	11.17	Almería	14.22	
M.D		18008	Madrid Ch.	9.16	Madrid At.	9.28	Diario	11.01	11.02	Linares	12.01	Jaén	13.33	
Regional		17004	Madrid At.	11.30			Diario	13.02	13.03	Ciudad Real	14.11	Badajoz	18.21	
Alaris		328	Madrid Ch.	12.34	Madrid At.	12.51	Exc. Sábad.	14.03	14.04	Murcia	16.47	Cartagena	17.23	Diario del 1 al [illegible]. No circula [illegible]
M.D		18048	Madrid Ch.	14.19	Madrid At.	14.32	Diario	16.03	16.04			Albacete	17.15	
Talgo		378	Madrid Ch.	15.14	Madrid At.	15.33	Diario	16.53	16.53	Linares	18.37	Almería	21.46	
M.D		18032	Madrid Ch.	15.45	Madrid At.	15.58	Exc. S. y D.	17.22	17.23	Linares	19.11	Jaén	19.53	No circula [illegible]
Reg. Exp.		18044	Madrid Ch.	16.43	Madrid At.	16.57	Viernes	18.24	18.28			Albacete	19.41	No circula [illegible]
M.D		18034	Madrid Ch.	17.20	Madrid At.	17.34	Exc. Sábad.	18.53	18.54	Linares	20.35	Jaén	21.21	
M.D		18042	Madrid Ch.	18.19	Madrid At.	18.32	Exc. Sábad.	19.59	20.00			Albacete	21.04	Circula [illegible]
Altaria		338	Madrid Ch.	18.58	Madrid At.	19.18	Exc. Sábad.	20.33	20.34	Murcia	23.28	Cartagena	00.17	No circula [illegible]
M.D		18038	Madrid Ch.	19.18	Madrid At.	19.32	Diario	21.00	21.01	Linares	22.41	Jaén	23.23	
M.D		17008	Madrid Ch.	21.14	Madrid At.	21.28	Diario	23.01				Alcázar	23.01	

		Oro	Plata	Bronce
1	USA	35	33	32
2	Reino Unido	22	21	13
3	China	20	16	22
4	Alemania	13	8	11
5	Rusia	12	15	17
6	Japón	12	6	18
7	Francia	8	12	14
8	Italia	8	10	6
9	Holanda	8	4	4
10	Australia	7	10	10

2. El medallero olímpico general (En este caso de las Olimpiadas de Río de Janeiro de 2016)

3. Las tablas de composición nutricional de los alimentos

INFORMACIÓN NUTRICIONAL
Porción de 50g (1 bombón)

	Cantidad por porción	% VD *
Valor energético	143 kcal = 599 kJ	6
Carbohidratos	14g	4
Proteínas	1,3g	1
Grasas totales	8,8g	13
Grasas saturadas	6,3g	25
Grasas trans	0g	-
Fibra alimentaria	0g	0
Sodio	59mg	1

* % Valores Diarios con base a una dieta de 2000 kcal u 8400 kJ .Sus valores diarios pueden ser mayores o menores dependiendo de sus necesidades energéticas.

Estas utilidades junto con las nombradas anteriormente hacen de las matrices un instrumento totalmente funcional y necesario.

Esta gran versatilidad, a pesar de ser objetos tan simples, se debe a que el conjunto de las matrices posee una estructura sencilla y muy potente, que consiste fundamentalmente en la posibilidad de realizar diversas operaciones y aplicar propiedades importantes con estas. En este trabajo trataremos de, a partir de problemas contextualizados que muestren la utilidad de las matrices en la vida cotidiana, mostrar y dar sentido a las operaciones y propiedades que cumplen estos objetos matemáticos

Es fundamental resaltar el hecho de que aunque la mayor parte de las operaciones y las propiedades se conserven con respecto a las de los números, el producto y algunas de las cualidades del mismo, no lo hacen. Las matrices se multiplican de una forma peculiar que es imprescindible conocer y entender. Es por este motivo que en este trabajo uno de los objetivos principales es mostrar con problemas de la vida cotidiana el sentido de este producto y la necesidad de operar las matrices de esta forma.

Por último es relevante señalar la importancia de una buena enseñanza del Álgebra matricial en el Bachillerato. Esta enseñanza tiene cuatro beneficios fundamentales para el alumno tras su aprendizaje:

- Las matrices enseñan a organizar datos al alumno. Para la resolución de los problemas que se plantean en este tema, es fundamental saber disponer correctamente los datos del enunciado en forma de matriz o matrices (según lo requiera el problema) con el fin de poder operar correctamente y hallar nuevas matrices con los datos organizados.
- Las matrices también presentan un ejemplo de espacio vectorial con elementos distintos a los habituales. Los alumnos hasta entonces están acostumbrados a trabajar sobre el cuerpo de los números reales, y la aparición de las matrices supone para ellos una apertura hacia otras matemáticas que resultan muy interesantes.
- Las matrices muestran un nuevo conjunto de elementos en el que dejan de cumplirse algunas de las propiedades hasta ahora dadas por hecho en los conjuntos numéricos: la conmutatividad del producto, o la existencia generalizada de inverso.
- Por último, las matrices acercan al alumno a la funcionalidad de las matemáticas en la vida cotidiana. Si se les presenta a los alumnos estos elementos mediante problemas contextualizados, consiguen tanto entender mejor cómo se trabaja con ellos, como encontrar Matemáticas en una situación cotidiana.

2. Contenidos del objeto matemático a enseñar

Como ya se ha podido deducir de la introducción de este TFM, el objeto matemático que se va a tratar a lo largo del mismo son las Matrices. En particular se van a tratar tres puntos que forman parte de los contenidos del bloque II: Números y álgebra de la asignatura Matemáticas II impartida en 2º de Bachillerato y que se señalan a continuación:

I. Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Clasificación de matrices. Operaciones.
II. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.
III. Matriz inversa.

Según el Real Decreto 1105/2014. de 26 de Diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, estos tres puntos del bloque II se deberán evaluar teniendo en cuenta los siguientes criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables:

- Criterios de evaluación:
    1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución de problemas diversos.
    2. Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas e interpretando críticamente el significado de las soluciones.

- Estándares de aprendizaje evaluables:

    1.1. Utiliza el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante tablas o grafos y para representar sistemas de ecuaciones lineales, tanto de forma manual como con el apoyo de medios tecnológicos adecuados.

1.2. Realiza operaciones con matrices y aplica las propiedades de estas operaciones adecuadamente, de forma manual o con el apoyo de medios tecnológicos.
2.3. Resuelve problemas susceptibles de ser representados matricialmente e interpreta los resultados obtenidos.

Tanto los criterios de evaluación como los estándares de aprendizaje, están incluidos de una forma u otra en el apartado de Evaluación que se desarrolla más adelante.

En cuanto al campo de problemas, las técnicas y las tecnologías que se presentan en este trabajo podemos recalcar las siguientes cuestiones:

- El **campo de problemas** de este trabajo es muy amplio. Desde problemas muy sencillos que buscan la comprensión de determinados conceptos, formas, y propiedades del objeto matemático, hasta problemas que demuestran la necesidad de aparición de la matriz unidad, o problemas en los que surge la necesidad de aparición de la matriz inversa.

  Este campo de problemas está formado por las distintas situaciones que posteriormente se mostrarán como actividades para la introducción de los distintos conceptos y propiedades del objetivo matemático a trabajar (las matrices). Alguna de las situaciones donde vamos a encontrar estos problemas son las siguientes:

  - Para definir el concepto de matriz, problemas en los que tenemos que trabajar con la información de las "interacciones" entre los objetos de una colección (las conexiones aéreas entre varias ciudades, las distancias entre poblaciones, las relaciones entre las personas de un grupo…) o bien situaciones en las que tenemos una serie de características de varios objetos (el nº de habitaciones de cada tipo en los hoteles de una cadena…).

  - Para la suma o resta de matrices tendríamos situaciones en las que necesitamos agregar las características comunes de varios objetos, o restarlas con el fin de obtener otra información relevante en el problema (por ejemplo la matriz de reservas de habitaciones de una cadena hostelera cada día, la suma de matrices nos dará las reservas totales y las diferencias informarán sobre las habitaciones disponibles…)

- Para el producto, contextos en los que necesitamos multiplicar las matrices para obtener la información que relaciona las características no comunes a las dos matrices (por ejemplo, dada una matriz que informa de los tipos de cristales que hay en tres tipos de habitaciones de un hotel, y dada otra que aporta el número de bisagras que necesita cada tipo de cristal, con la matriz producto conoceremos el número de bisagras que se necesita para cada habitación del hotel)

- La metodología principal que se sigue en la propuesta didáctica de este trabajo está basada en el planteamiento de problemas como los ejemplificados anteriormente, cuya resolución permite la introducción de los conceptos y procedimientos propios del tema, es decir, a partir de los problemas, trataremos de demostrar el sentido que tiene trabajar con las matrices y operar de la forma en que se opera con estas. Es por ello que las **tecnologías** de este trabajo son los problemas.

- Las **técnicas** aparecen una vez se ha comprobado a través de un problema cómo se debe representar la matriz, operarla, y qué propiedades cumple.
  Las técnicas que se muestran en este trabajo son, entre otras, la suma de matrices, el producto de matrices, el producto de un número por una matriz, y el método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa.

3. Estado de enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Para conocer el estado de enseñanza-aprendizaje de las matrices, hemos analizado varios libros de enseñanza de las matemáticas de 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología y de Ciencias Sociales (algunos actuales y otros más antiguos), con el fin de conocer las justificaciones que se dan para la introducción de este objeto matemático, y los campos de problemas, técnicas y tecnologías que presentan habitualmente los libros.

Comencemos analizando cómo presentan varios libros el tema relacionado con las matrices, sus operaciones y propiedades.

- En el primer libro de Matemáticas 2 (Vizmanos Buelta, Hernández y Alcaide , 2011: 9), encontramos la siguiente introducción al tema:

> Gran parte de la información que manejamos diariamente está organizada en tablas numéricas: los horarios de una estación de autobuses, la clasificación de los equipos de la liga deportiva, las calificaciones de los alumnos de un centro en las pruebas de acceso a la universidad... En matemáticas, tanto las listas como las tablas de elementos reciben el nombre de matrices. Además de su utilidad para el estudio de los sistemas de ecuaciones, las matrices aparecen de forma natural en muchos ámbitos como la geometría, la estadística, la economía....
>
> Actualmente, muchos programas para ordenadores utilizan el concepto de matriz, ya que la mayoría de los datos se introducen en los ordenadores como tablas de filas y columnas. Así, los programas conocidos como hojas de cálculo y bases de datos no son más que una inmensa matriz de cientos de filas y columnas en cuyas casillas se introducen datos y fórmulas a partir de las cuales se realizan los cálculos a gran velocidad. Esto requiere utilizar las operaciones con matrices que aprenderás a realizar en esta unidad.

- En el segundo (Negro, Benedicto, Mariano, y Poncela, 1999: 26), encontramos el siguiente párrafo introductorio:

> Las matrices y las operaciones entre ellas fueron estudiadas sistemáticamente desde mediados del siglo XIX, pero una de sus primeras aplicaciones se produjo en 1925, cuando el físico Heisenberg propuso su versión de la mecánica cuántica llamada "mecánica matricial", en la que el estado de un átomo venía caracterizado por una matriz numérica de frecuencias e intensidades de radiación.
>
> La sorprendente propiedad de la no conmutatividad de la multiplicación de las matrices es la que expresa el famoso "principio de indeterminación". La

> mecánica matricial evolucionó más tarde a la versión equivalente, pero más sencilla, de la mecánica ondulatoria.

- Por último, el tercer libro (Martínez Mediano, y Cuadra López, 1997: 36) presenta la siguiente introducción al tema:

> Uno de los instrumentos más útiles y prolíficos del Álgebra lineal son, sin duda, las matrices, cuyo nombre fue sugerido por el matemático inglés James J. Sylvester (1814-1897), queriendo dar a entender que eran las “madres” de los determinantes, elementos de álgebra que se estudiarán posteriormente.
>
> Con las matrices, se logra la representación clara y manejable de los conjuntos de datos que pueden ser descritos mediante dos variables. Así, cualquier tabla de valores puede ser considerada como una matriz, siendo su uso muy frecuente. Buenos ejemplos de ello son los paneles de información de Renfe con los horarios de trenes de entradas-salidas y de procedencia-destino, o las calificaciones de los equipos de futbol con las puntuaciones totales, goles a favor y en contra, partidos jugados, etc.
>
> Siendo una idea tan sencilla de entender, presenta más de alguna dificultad cuando se trata de operar, tanto desde el punto de vista de la operación en sí, como de la interpretación de sus resultados. Por eso, y por ser una forma de representación nueva, habrás de poner cuidado en su manejo [...]

Con todo esto podemos concluir que, en cuanto a la justificación que presentan los libros en general para la introducción de las matrices, prácticamente todos hablan de la necesidad de las mismas para organizar datos, pero en ninguno se expone la necesidad de operar con ellas para obtener nuevas informaciones relevantes y de gran utilidad. Es fundamental que los alumnos conozcan el sentido que tienen tanto las operaciones como las propiedades de las matrices. Encontrar este sentido supone entender el porqué de esa forma tan peculiar de realizar el producto, el porqué de la no conmutatividad del mismo... Por lo tanto, es imprescindible que los alumnos tengan asentadas y perfectamente concebidas tanto las matrices como sus propiedades y operaciones, puesto que son instrumentos clave para la solución de muchos problemas, entre ellos, los sistemas de ecuaciones que se presentan en la etapa de secundaria y bachillerato y que los alumnos tienen que saber resolver.

En cuanto a los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan en estos libros, observamos que todos los libros siguen el mismo formato:

1. Teoría que presenta un objeto/operación/propiedad a trabajar del tema (definición de matriz, tipos de matrices, operaciones con matrices, propiedades de matrices,...)
2. Ejemplos que muestran la técnica que se ha de seguir para configurar correctamente el objeto u operar correctamente con el mismo.
3. Ejercicios mecánicos para practicar la técnica.

No se han encontrado campos de problemas para trabajar este tema, ni tecnologías que justifiquen la aparición de estos objetos ni de la forma en que se operan o las propiedades que cumplen.

Teniendo en cuenta tanto la inutilidad de las introducciones al tema si posteriormente no se encuentran problemas contextualizados que demuestren la necesidad del uso de matrices, y teniendo en cuenta también el formato de enseñanza que se presenta en la mayoría de los libros actuales podemos concluir que los efectos que produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno son excesivamente mecanizados, sin un referente que les muestre por qué y para qué se definen las matrices como se definen y se realizan las operaciones como se realizan.

4. Conocimientos previos del alumno

Las matrices no necesitan de grandes conocimientos previos. Podríamos decir que es necesario saber operar bien con los números reales, ya que trabajaremos sobre matrices cuyos elementos pertenecen a este cuerpo, y las operaciones con matrices están relacionadas directamente con las operaciones entre números. Al realizar tanto sumas y restas como productos, o al calcular la inversa, el rango y/o el determinante de matrices, se deben realizar cálculos con los elementos de la matriz que serán siempre (en 2º de bachillerato) números reales.

Además, al enseñar este objeto matemático en el último curso de bachillerato, consideramos que los alumnos deben haber adquirido una cierta habilidad para operar con los números reales, por lo cual no se considera necesaria ninguna actividad para tratar de asegurar que los alumnos posean estos conocimientos previos.

Por lo demás, no creemos necesario ningún otro conocimiento previo para abarcar este nuevo tema.

5. Razones de ser del objeto matemático

En 2º de Bachillerato, los alumnos de cualquier modalidad que eligieron Matemáticas II o Matemáticas Aplicadas a las CC.SS., afrontan, por primera vez, el estudio del álgebra matricial. Con esta unidad se pretende que los alumnos se familiaricen con el empleo de las matrices y con sus operaciones: suma y diferencia de matrices, producto de un número real por una matriz, producto de matrices, cálculo de la inversa de una matriz. También se introduce el concepto de rango de una matriz y su cálculo.

El dominio del álgebra matricial es fundamental para afrontar con éxito otros temas de este curso, que utilizan las matrices como herramienta, entre los que podemos citar, por ejemplo: determinantes, resolución de sistemas de ecuaciones lineales y, en el caso de los alumnos de Ciencias, la geometría en el espacio. También resulta muy útil la adquisición de estrategias para simplificar cálculos laboriosos.

En la resolución de problemas ligados a los sistemas lineales, la geometría del espacio, los movimientos, etc. podríamos encontrar razones de ser para el álgebra matricial, sin embargo este trabajo no se fundamenta sobre ninguna razón de ser relacionada con lo anterior.

Habitualmente se encuentra en los centros alumnos que no comprenden ni por qué ni para qué se utiliza el álgebra matricial, por qué cumple las propiedades que cumple y por qué se opera con elementos del mismo de una manera (en determinados momentos) distinta a la que están acostumbrados. Este trabajo surge de la necesidad de dar respuesta a cuestiones como las siguientes: ¿Para qué sirven las matrices en la vida cotidiana? ¿Por qué se trabaja con ellas de una manera particular? ¿Tiene sentido hablar de la suma de matrices elemento a elemento? ¿Y del producto? ¿Por qué el producto se efectúa de esa manera tan peculiar? ¿Para qué existe la matriz unidad en un contexto real? Todas estas preguntas recogen las dos razones de ser que fundamentan la programación que se presenta a continuación.

Este trabajo se centra en la necesidad de **mostrar la matriz como una nueva forma de organización de datos con los que poder resolver problemas de la vida cotidiana** y en la necesidad de **encontrar una explicación y un sentido a las operaciones y propiedades que cumplen estos objetos matemáticos.**

Nos preguntamos ahora si estas razones de ser coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto.

Los orígenes de las matrices y determinantes se encuentran entre los siglos II y III a.m. En escritos babilonios aparece, sobre el 300 a.m. enunciados del tipo:

"Tenemos dos campos con un área de 1800 yardas cuadradas. Uno produce grano en razón de 2/3 de celemín por yarda cuadrada, mientras que el otro lo hace en razón de 1/2 de celemín por yarda cuadrada. Si el total de la cosecha es de 1100 celemines ¿qué dimensiones tienen los campos?"

Entre los años 200 y 100 a.m. aparece en China el libro "Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático", escrito durante la dinastía Han, que da el primer ejemplo conocido de método matricial. El problema es parecido al anterior:

"Hay tres tipos de trigo, de los que tres sacos del primero, dos del segundo y uno del tercero hacen 39 medidas, dos del primero, tres del segundo y una del tercero son 34 medidas; una del primero, dos del segundo y tres del tercero son 26 medidas ¿Cuántas medidas de cada tipo de trigo contiene un saco?"

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

El autor distribuye los coeficientes en una tabla e instruye como resolverlo con operaciones por columnas en lo que puede suponer el germen del método de Gauss.

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

El autor dice que multiplicando la primera columna por tres y restándola de la tercera es el camino más rápido, así como, multiplicar la columna central por tres y restarla de la de la derecha las veces posibles:

0	0	3
0	5	2
3	6	1
99	24	39

El siguiente paso es multiplicar por 5 la última columna y entonces la columna central es restada de ella las veces posibles.

De aquí se puede obtener la solución por sustitución.

En el capítulo séptimo, "Ni mucho ni poco", de este mismo tratado, el concepto de determinante apareció por primera vez, dos mil años antes de su publicación por el matemático japonés Seki Kōwa en 1683 y el matemático alemán Gottfried Leibniz en 1693.

Después del desarrollo de la teoría de determinantes por los nombrados anteriormente para facilitar la resolución de ecuaciones lineales, a finales del siglo XVII, Cramer presentó en 1750 la ahora denominada “Regla de Cramer”. Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan desarrollaron la eliminación de Gauss-Jordan en el siglo XIX.

En 1853, Hamilton hizo algunos aportes a la teoría de matrices. Cayley introdujo en 1858 la notación matricial, como forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Una vez conocida parte de la historia del álgebra matricial, podemos concluir que sí coincide la razón de ser que se muestra en bachillerato para la introducción de las matrices con la razón de ser histórica, que en ambos casos es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, pero no coinciden las razones de ser el objeto matemático en este trabajo, pues nuestras razones de ser van más orientadas a la didáctica del álgebra matricial. Buscamos una manera más sencilla de que el alumno encuentre sentido a lo que está haciendo al construir matrices y operar con ellas.

6. Propuesta didáctica

A continuación se presenta una propuesta con una duración aproximada de 11 sesiones, de forma que en las 8 primeras se dará el contenido teórico del tema, en las 2 siguientes se realizarán problemas y ejercicios de repaso, y en la última sesión se llevará a cabo la prueba escrita de Evaluación.

6.1. Cronograma de la secuencia.

Teniendo en cuenta los contenidos que se van a enseñar y la metodología de enseñanza que se va a seguir, la propuesta didáctica esquematizada es la siguiente:

<table>
<tr><th><u>SESIONES</u></th><th colspan="2"><u>CONTENIDOS</u></th></tr>
<tr><td>Sesión 0</td><td colspan="2">Introducción al mundo de las matrices</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sesión 1</td><td rowspan="2">Definición de matriz</td><td>1. Concepto de matriz</td></tr>
<tr><td>2. Tipos de matrices:
-Matriz fila/matriz columna
-Matriz traspuesta
-Matriz simétrica</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Sesión 2</td><td rowspan="2">Operaciones con matrices I</td><td>1. Suma de matrices</td></tr>
<tr><td>2. Producto de un escalar por una matriz</td></tr>
<tr><td>Sesión 3</td><td>Propiedades de la suma de matrices</td><td>1. Propiedad conmutativa de la suma</td></tr>
</table>

		2. Propiedad distributiva
		3. Matriz Nula
		4. Matriz Opuesta
Sesión 4	Propiedades de la suma de matrices y el producto por un escalar	1. Producto de un número por suma de Matrices
		2. Suma de números por una matriz
		3. Producto de números por una matriz
Sesión 5	Operaciones con matrices II	1. Producto de matrices
Sesión 6	Propiedades del producto de matrices	1. No conmutatividad (en general) del producto de matrices.
Sesión 7	Tipos de matrices I	1. Matriz unidad
		2. Matriz triangular superior e inferior
		4. Matriz diagonal
Sesión 8	Tipos de matrices II	1. Matriz inversa
		2. Método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa.
Sesión 9	REPASO DEL TEMARIO	
Sesión 10	REPASO DEL TEMARIO	
Sesión 11	PRUEBA ESCRITA EVALUATORIA	

6.2. Metodología de la secuencia.

Todas las sesiones seguirán un formato de enseñanza muy parecido:

- Se comenzará planteando una serie de problemas en cuya resolución aparecerán los conceptos o métodos del álgebra matricial de los que se va a tratar en la sesión. A través de su resolución se trata de que los alumnos encuentren la justificación a la introducción posterior de los conceptos o procedimientos abstractos. Estos problemas son la tecnología que rige este trabajo, tratan de que los alumnos encuentren sentido y entiendan la teoría que hay detrás, con el fin de conseguir un mayor y mejor aprendizaje.

- Posteriormente se dará la teoría formal del contenido que servirá luego de referencia a la hora de hacer ejercicios para practicarla. Esta teoría será por lo general, definiciones y técnicas de operaciones y de propiedades de las matrices.
- Para finalizar la clase, se llevarán a cabo algunos ejercicios y se propondrán tanto ejercicios como problemas (parecidos a los de introducción de la sesión) con el fin de ejercitar la técnica explicada a la vez que le encuentran utilidad a la misma en problemas concretos.

Por una cuestión de espacio, se presenta en la secuencia didáctica únicamente los problemas introductorios explicados anteriormente, y tanto la teoría como los ejercicios y problemas de refuerzo, se encuentran expuestos en los Anexos I y II respectivamente.

En la primera parte de la sesión, cuando el docente muestre los problemas de introducción al concepto matemático que se va a enseñar en la misma, se fomentará un aprendizaje con el grupo completo, es decir, los alumnos trataran de pensar el problema individualmente durante unos minutos y posteriormente, entre todos, se tratará de llegar a la resolución y solución final. El docente siempre estará coordinando y planteando cuestiones que inviten a la reflexión y participación. El objetivo es que entre todos los alumnos interpreten los enunciados y sean capaces de llegar a la técnica que se debe utilizar para resolverlos.

No se trabajará en grupos reducidos, puesto que, por lo general, los alumnos de 2º de Bachillerato no están acostumbrados a una metodología de trabajo cooperativo, y consideramos que formar grupos conllevaría demasiada gente perdiendo el tiempo y no concentrados en resolver los problemas.

El docente procederá a resolver el problema únicamente en caso de que los alumnos no consigan entender cómo se debe realizar.

En la segunda parte será (normalmente) el docente el que de las explicaciones teóricas pertinentes que reflejen formalmente lo trabajado con los problemas anteriores.

Aunque en principio sea el docente quien vaya a formalizar los contenidos trabajados en la parte anterior de la sesión, siempre se debe preguntar si algún alumno sabría hacerlo y en caso de que sí lo sepa hacer, que lo muestre y lo explique a sus compañeros.

Es importante estar continuamente interactuando con los alumnos y tratar de evitar lo más posible la clase magistral. Cuanto más partícipes de la clase sean, más entretenidos y sobretodo más concentrados estarán, lo que conllevará un mayor aprendizaje.

En la tercera y última parte de la sesión, se proporcionarán unos ejercicios a los alumnos para practicar las técnicas enseñadas anteriormente. Conforme se vayan haciendo, los alumnos voluntarios saldrán a la pizarra para corregirlos.

6.3. Secuencia didáctica.

A continuación se muestran los problemas introductorios a cada sesión. Estos problemas son sobre los que se fundamenta la sesión y que además dan sentido a la teoría que se dará una vez se hayan realizado.

Sesión 0. Introducción al mundo de las matrices

En esta sesión de introducción al tema a tratar, se propone trabajar durante toda la clase sobre un problema que abarca gran parte de los aspectos a trabajar en las sesiones posteriores, a modo de introducción.

Con esto se pretende que los alumnos entren en materia y vean también que sobre un mismo problema con un contexto real se pueden trabajar varios contenidos matemáticos.

Problema de la sesión:

Una compañía de juguetes con sede en Múnich produce tres tipos de peluches de animales: osos panda, canguros, y conejos. La producción de cada uno de los peluches requiere horas de cortado, de costura y de acabado. Esta matriz muestra el número de horas de cada tipo de labor que se requieren para realizar cada tipo de peluche animal.

	OSO PANDA	**CANGURO**	**CONEJO**
CORTE	**0.5**	**0.8**	**0.4**
COSTURA	**0.8**	**1.0**	**0.5**
ACABADO	**0.6**	**0.4**	**0.5**

1. a. ¿Cuántas horas de corte se necesitan para fabricar un conejo?
   b. ¿Cuánto minutos de costura se requieren para el oso panda?
   c. ¿Cuál es el total de horas necesarias para producir dos canguros?
   d. Si se desean producir 4 peluches de cada tipo, ¿Cuántas horas de cada labor se necesitarán para elaborarlos? ¿Cuántas horas en total se necesitaran para elaborar 4 peluches de cada tipo?

La compañía también tiene una sede en Hamburgo. Las horas necesarias para elaborar cada peluche son las siguientes.

	OSO PANDA	**CANGURO**	**CONEJO**
CORTE	**0.8**	**0.95**	**0.7**
COSTURA	**1**	**1.2**	**0.7**
ACABADO	**0.95**	**0.65**	**0.8**

2. Los jefes de la empresa quieren analizar cuál es la productividad de trabajo en las dos sedes.
    a. ¿Cuál es la diferencia de horas que se tarda en cortar un oso panda de la sede de Hamburgo a la de Múnich?
    b. ¿Y de producir un canguro (teniendo en cuenta el corte, la costura y el acabado?
    c. Si entre Hamburgo y Múnich, la diferencia en el corte de un conejo es de -0.3, ¿Qué significado tiene el signo negativo en el contexto del problema?
    d. ¿Cómo podríamos calcular la diferencia de horas entre una sede y otra en las tres labores y en los tres peluches?

Este resultado nos muestra la ***diferencia de matrices***.

La compañía ha recibido pedidos para los meses de Octubre y Noviembre. Esta matriz muestra el número de peluches de cada tipo que se deben fabricar para cada mes

	OCTUBRE	**NOVIEMBRE**
OSO PANDA	**1000**	**1100**
CANGURO	**600**	**850**
CONEJO	**800**	**725**

3. a. ¿Cuántos canguros tienen que efectuarse para el mes de noviembre?
    b. ¿Cuál es el total de conejos que deben ser producidos entre Octubre y Noviembre?
    c. ¿Cuántos peluches deben fabricarse en Octubre?
    d. ¿Cuál es el total de animales de peluche que deben producirse entre Octubre y Noviembre?

    Si dividimos esta matriz anterior en dos submatrices columna, el aparado d. anterior representa la ***suma de matrices.***
4. La empresa necesita conocer el número de horas que tienen que invertir en la empresa de Múnich, en cortar durante el mes de Octubre.
    a. ¿Cuántas horas se requieren para cortar los osos panda en Octubre?

b. ¿Cuántas horas se requieren para cortar los canguros en Octubre?
c. ¿Cuántas horas se requieren para cortar los conejos en Octubre?
d. ¿Cuál es el total de horas de corte que se necesitan en el mes de Octubre?

5. Encuentra el número de horas de costura necesarias para cada tipo de peluche en Octubre y el total de las mismas.
6. El proceso utilizado para completar los apartados 3 y 4 anteriores se puede interpretar como una operación de matrices. Para encontrar el número de horas de acabado necesarias en el mes de Octubre, escribe la fila de la primera matriz donde indica horas de acabado para cada peluche, y pegada a esta escribe la columna de la segunda matriz que indica el número de animales que se necesita fabricar para el mes de Octubre.

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 600 \\ 800 \end{bmatrix}$$

   A continuación, multiplica el primer número de la matriz fila por el primero de la matriz columna, el segundo número de la matriz fila por el segundo de la matriz columna, el tercer número de la matriz fila por el tercero de la matriz columna, y suma los tres productos:

$$0.6 \cdot 1000 + 0.4 \cdot 600 + 0.5 \cdot 800 =$$

7. Escribe el total de horas de corte, costura, y acabado necesarias para la producción de los peluches de Octubre.
8. Ahora es necesario calcular también las horas de Noviembre. Teniendo en cuenta el apartado 5, ¿Cómo las calcularías? ¿Se podrían realizar los cálculos del apartado 5 y de este a la vez, teniendo en cuenta las dos primeras matrices? ¿Cómo?

   El proceso que acabamos de completar es conocido como ***el producto de matrices.***
9. Para describir una matriz, se debe escribir las filas primero y las columnas después. Por esto, la matriz que contenía las labores necesarias para cada tipo de peluche animal se describe como la matriz de labores por animales. Estaría mal nombrarla como la matriz de animales por labores.

a. ¿Cuál es la forma correcta de describir la matriz que contiene los pedidos realizados en Octubre y Noviembre?
b. ¿Cuál es la forma correcta de describir la matriz obtenida en el apartado 7?

Sesión 1. Definición de matriz

En esta sesión se pretende que los alumnos conozcan el nuevo objeto matemático que se va a trabajar en todas las sesiones posteriores: las matrices.

Con los problemas introductorios trataremos de que conozcan cómo es este objeto matemático, que representa cada fila, cada columna, y cada elemento en función de estas dos últimas, etc.

Además, con estos problemas tratamos de que los alumnos dejen de lado el pensamiento habitual de "¿Y esto para qué sirve?" y conozcan la funcionalidad de las matrices. Resulta muy interesante para ellos observar cómo aunque aparentemente sea una caja de números, al ponerla sobre un contexto (vuelos, conexiones...) cada elemento de la caja tenga un significado relevante y con sentido.

Por último, con los contenidos teóricos se profundizará en la notación matricial, lo cual resulta complicado para los alumnos, pero es necesario para trabajar formalmente tanto las operaciones como las propiedades. Además se tratarán varios tipos de matrices elementales que se deben conocer para posteriores sesiones.

- *Problemas introductorios:*

Conexiones aéreas entre ciudades

Cuatro ciudades están enlazadas por vía aérea de la siguiente forma: desde Oporto se puede viajar a Rio de Janeiro, a Londres y a Vigo. Desde Rio hay conexión con Oporto. Desde Londres se puede viajar a Oporto y Vigo. Por último, desde Vigo se puede ir a Londres. Vamos a buscar alguna forma de representar gráficamente estas conexiones aéreas. Ten en cuenta que los aeropuertos

deben ser puntos de conexiones (en un solo sentido o en ambos).

Posteriormente buscaremos también alguna forma numérica de representarlas. Prueba a partir de una tabla donde se da el valor 1 a las conexiones que existan entre aeropuertos y se da el valor 0 a aquellas que no existan.

Cuando hayas realizado estas dos técnicas de planteamiento del problema, contesta a las siguientes cuestiones fijándote en la tabla.

i. ¿Se representan de la misma forma las conexiones de Oporto a Londres que las de Londres a Oporto?

ii. ¿Qué representa el número que aparece en la tercera línea horizontal (3ª fila) y cuarta línea vertical (4ª columna)?

iii. ¿Qué representa el número que está situado en la segunda fila y segunda columna?

iv. ¿Qué significado tienen los números que aparecen en la tercera fila? ¿Y los que aparecen en la segunda columna?

v. ¿Es posible coger un avión en Londres para ir a Oporto y de allí coger un avión a Rio de Janeiro? ¿Y desde Vigo a Londres y de allí a Rio?

Cadena hotelera

Una cadena de hoteles posee tres hoteles en una determinada ciudad: Hotel Edén, Paraíso Hotel y Oasis Spa. Cada hotel dispone de tres tipos de habitaciones: de lujo, habitación doble e individual. El hotel Edén posee 6 habitaciones de lujo, 30 dobles y 10 individuales. El Paraíso Hotel, 4, 50 y 10 respectivamente y el Oasis Spa 4, 50 y 8. El precio por habitación y noche en los tres hoteles es de 120€ la habitación de lujo, 80€ la doble, y 50€ la individual.

i. Recoge estos datos en dos matrices.
ii. ¿Qué significa cada fila y cada columna de cada matriz obtenida?
iii. Si los precios de las habitaciones no fueran iguales de un hotel a otro, es decir, el precio de cada habitación por noche fuera distinto en cada hotel, ¿cómo se construiría la matriz con dichos datos?
iv. ¿Es posible reservar una habitación en el Oasis Spa si ya están reservadas 4 habitaciones de lujo, 48 habitaciones dobles y 7 individuales?

Sesión 2. Operaciones con Matrices I.

En esta sesión, se van a tratar dos operaciones elementales de las matrices:

- Suma de matrices
- Producto de un escalar por una matriz

Con los problemas introductorios buscamos dar sentido a dichas operaciones, que los alumnos comprendan la necesidad que hay de operar con las matrices de esta forma para obtener los resultados que se exigen, pero sin que piensen que dependiendo del problema se sumara o se multiplicará por un escalar de una forma u otra. Para eso, una vez dada la teoría de la sesión donde se generaliza y se definen formalmente las operaciones para cualquier matriz, se realizarán más problemas y ejercicios con el fin de que fortalezcan esta forma de operar y entiendan que siempre se realiza así.

- *Problemas introductorios:*

Suma de matrices

1. En el barrio de La Moraleja hay un colegio y un instituto. Las matrices siguientes indican qué idioma estudian los alumnos, según sean chicos o chicas:

COLEGIO

	Francés	**Inglés**	**Alemán**
alumnos	15	90	8
alumnas	20	78	10

INSTITUTO

	Francés	**Inglés**	**Alemán**
alumnos	12	85	8
alumnas	15	60	5

i. Recoge estos datos en dos matrices.
ii. ¿Cómo haremos para obtener el total de los alumnos que estudian cada idioma, también diferenciando chicos y chicas?
iii. Si quisiéramos hacer un estudio sobre la cantidad de alumnos que dejan de estudiar el idioma que estudiaban en el colegio para estudiar otro en el instituto o no estudiar ninguno, ¿Qué deberíamos hacer con respecto a las matrices anteriores? La matriz obtenida, ¿Qué información nos aporta?

2. Una empresa que fabrica televisores produce tres modelos con distintas características en tres tamaños diferentes. La capacidad de producción (en miles) en su planta número uno está dada por la matriz A.

PLANTA Nº 1

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} \textbf{Modelo I} & \textbf{Modelo II} & \textbf{Modelo III} \end{array} \\ \begin{array}{l} \textbf{Tamaño 1 (20 pulg.)} \\ \textbf{Tamaño 2 (23 pulg.)} \\ \textbf{Tamaño 3 (26 pulg.)} \end{array} & \left| \begin{array}{ccc} 5 & 3 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \\ 10 & 8 & 4 \end{array} \right| = A \end{array}$$

(En otras palabras, la capacidad de la planta es de 5.000 televisores modelo I de 20 pulgadas, 8.000 televisores modelo II de 26 pulgadas, etc.) La capacidad de producción de la planta número dos de la empresa, está dada por la matriz B.

PLANTA Nº 2

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} \textbf{Modelo I} & \textbf{Modelo II} & \textbf{Modelo III} \end{array} \\ \begin{array}{l} \textbf{Tamaño 1 (20 pulg.)} \\ \textbf{Tamaño 2 (23 pulg.)} \\ \textbf{Tamaño 3 (26 pulg.)} \end{array} & \left| \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 3 \\ 9 & 6 & 4 \\ 8 & 12 & 2 \end{array} \right| = B \end{array}$$

a. ¿Cuál es la capacidad de producción total en las dos plantas?
b. ¿Cuál es la diferencia de producción entre la planta nº1 y la planta nº2? ¿Qué quiere decir en la matriz A-B el elemento $(a\text{-}b)_{31}$?

Producto de un número por una matriz

1) Fijándonos en la fábrica de televisores del ejercicio anterior, si la empresa decide incrementar su producción en la planta nº 1 un 20%. ¿Cuál será la nueva producción en la planta? ¿Y en total?

2) Una cantera distribuye diariamente 47 Tm de arena a tres almacenes que se encuentran, respectivamente, a 28, 12 y 21 km. de la siguiente forma: 14 Tm al primero, 18 al segundo y 15 al tercero. Lógicamente cobrará a cada uno teniendo en cuenta ambos factores: distancia (1.2€ por km.) y mercancía suministrada (6.5€ por Tm.)

a. Represente los datos en una matriz

b. Representa en una matriz los datos correspondientes a una semana (5 días), considerando el kilometraje total a cada almacén y la arena que se ha enviado a cada uno. ¿Cómo podrías relacionar las dos matrices?

c. Recoge ahora la información del problema en dos matrices fila ¿Cuánto cobrará la cantera a cada almacén por los kilómetros recorridos después de 10 días distribuyéndoles arena? ¿Y por la mercancía? Obtén una matriz que represente el total de dinero que obtendrá la cantera de cada almacén.

Sesión 3. Propiedades de la suma de matrices

Es muy importante conocer las propiedades que se encuentran tras la suma de matrices. Estas propiedades hacen que el conjunto de matrices de dimensión mxn con la operación suma forme un grupo conmutativo.

En esta sesión se propone trabajar estas cualidades de la suma de matrices:

- **Conmutatividad de la suma**
- **Asociatividad de la suma**
- **Existencia de elemento nulo**
- **Existencia de elemento opuesto**

Comenzaremos probando que se cumplen las anteriores mediante nuevos apartados de problemas ya trabajados en sesiones anteriores. Con esto buscamos que se entiendan estas propiedades y que los alumnos, a partir de ejemplos concretos, encuentren la utilidad y el sentido de las mismas.

Problemas introductorios:

Propiedad conmutativa A+B=B+A

1) En el ejercicio del colegio y el instituto de La Moraleja, ¿podrías haberlo resuelto considerando en primer lugar los alumnos/as del Instituto y luego los del Colegio? ¿Por qué?

Evidentemente se trata de justificar la conmutatividad de la suma de matrices, encontrado la explicación en que se trata de varias sumas independientes de números que, como sabemos, son conmutativas.

Propiedad asociativa A+ (B+C) = (A+B)+C

1) Si en el barrio hubiese un segundo colegio con los siguientes datos:

COLEGIO

	Francés	Inglés	Alemán
alumnos	12	71	8
alumnas	14	56	7

a. ¿Cómo hallarías el total?
b. ¿Sería lo mismo añadir estos datos al total anterior que reunir primero a todos los de colegio y luego sumarles los del Instituto? ¿Por qué?

Igual que antes, encontraríamos la explicación en la asociatividad de la suma de números.

Matriz nula A+0=A y A+ (-A)=0

La introducción de los elementos neutro y simétrico se plantea como una cuestión teórica, aunque muy sencilla:

Hemos encontrado para la suma de matrices propiedades similares a las de la suma de números.

a. ¿Podrías encontrar una matriz que jugase el papel del 0? ¿Qué condición debería cumplir?

(Se pretende que analicen la expresión A+0=A con una matriz A genérica, y concluyan que 0 es la matriz que debe cumplir que todos sus elementos sean cero).

b. Dada una matriz A, ¿podrías encontrar otra opuesta a ella en el mismo sentido en que lo pueden ser dos números? ¿Cómo escribirías esto?

(Se busca que, conociendo el significado de “opuesto de un número”, lleguen a la conclusión de que la matriz opuesta a una matriz A se obtiene cambiando todos los signos de los elementos de la matriz A, es decir, multiplicándola por la constante -1.)

Sesión 4. Propiedades de la suma y el producto por un escalar de matrices

Existen también cualidades de las operaciones que enlazan tanto la suma de matrices como el producto por un escalar. En esta sesión se introducen tres propiedades que relacionan las dos operaciones anteriores:

- **Producto de un número por suma de matrices**
- **Suma de números por una matriz**
- **Producto de números por matriz**

En esta sesión también se introducen estas propiedades a partir de nuevos apartados de problemas anteriores que les resultan ya familiares y fáciles de comprender.

Problemas introductorios:

Producto de un número por suma de matrices: $\boldsymbol{r(A+B)=rA+rB}$

1) Si en el ejercicio de la cantera supiésemos que los tres almacenes reciben, además, arena de una segunda cantera situada a 15, 12, y 19 km, respectivamente, y que se transportan a ellos 13, 7 y 16 Tm diarios, respectivamente:
   a. Expresa los datos en una matriz.
   b. ¿Cómo podrías calcular el total semanal de desplazamientos y tonelaje que recibe cada almacén?
   c. ¿Sería igual hallar primero lo que corresponde semanalmente a cada cantera y después sumarlo, que hallar antes el total diario y luego multiplicar por el número de días?

Suma de números por una matriz: $\boldsymbol{(r+s)A=rA+sA}$

1) La cantera del último problema ha distribuido arena durante 18 días en el mes de enero y 20 días en febrero.
   a. Calcula los totales de arena y desplazamientos realizados a cada almacén y expresa los resultados en forma de matriz
   b. ¿Sería igual si considerásemos el total de días trabajados, que si calculásemos lo que corresponde a cada mes y después lo sumásemos?

Producto de números por matriz: $\boldsymbol{r(sA) = (r \times s)A}$

1) El número de individuos de una población de avispas crece cada año multiplicándose por 1.35, de tal forma que, además, cada sector de edad lo hace también en dicha proporción.

   Si inicialmente se distribuían según la matriz línea:

de 0 a 1 año	de 1 a 2 años	de 2 a 3 años	de 3 a 4 años	de 4 a 5 años
(120	160	210	150	90)

   a. Calcula el número de individuos en cada sector al cabo de 1, 2, y 3 años.
   b. Busca una expresión matricial que relacione el número de individuos por sector con el número de años transcurridos.

La expresión $1.35 \times (1.35 \times A) = 1.35^2 \times A$, hasta llegar a $1.35^n \times A$ al cabo de n años, dota de significado a esta propiedad.

Sesión 5. Operaciones con Matrices II.

En esta sesión se va a trabajar el producto de matrices partiendo, como hasta ahora, de problemas con un contexto concreto en los que se busca que los alumnos analicen cómo deben operar para obtener los resultados que se piden, y una vez sepan lo que se debe hacer, mostrar cómo se define formalmente el producto de matrices y la relación que tiene con lo que ellos han averiguado a través del problema.

El producto de matrices es la operación que más complicada resulta al alumnado, pues aparentemente las operaciones con matrices comienzan siendo como operaciones entre números (se opera elemento a elemento tanto en la suma de matrices como en el producto por un escalar) pero el producto se realiza de una forma tan peculiar que suele resultar difícil de comprender.

Con los problemas de introducción, pretendemos que los alumnos consigan entender el sentido de definir el producto de esta forma y no les resulte tan complicado multiplicar matrices posteriormente.

Problemas introductorios:

Producto de matrices

1) En una granja se crían conejos, vacas y ovejas. Para su alimentación se han sembrado tres tipos de hierbas, de las que cada especie come libremente. Por término medio cada animal come los siguientes kilos de vegetal por semana:

	CONEJOS	**VACAS**	**OVEJAS**
vegetal 1	5	22	7
vegetal 2	2	19	11
vegetal 3	3	35	6

La granjera y el granjero tienen sus preferencias a la hora de comer carne, lo que hace que sus consumos medios según sus animales de la granja sean distintos:

	Granjera	**Granjero**
Conejo	0.3	0.8
Ternera	0.85	1
Oveja	0.6	0.75

¿Cuánto comen indirectamente el granjero y la granjera de cada uno de los vegetales?

La aceptación de esta operación por el alumno/a requiere una justificación más extensa que debe también explicar que para poder multiplicar dos matrices el números de columnas de la primera ha de ser igual al número de filas de la segunda, obteniéndose otra matriz con tantas filas como la primera y tanta columnas como la segunda, y donde cada elemento de la matriz producto c_{ij} es el resultado de multiplicar los elementos de la fila i de la primera por los de la columna j de la segunda.

Tras una explicación de la operación con el contenido teórico correspondiente, se propone un ejercicio de consolidación del producto de matrices utilizando la posible reversibilidad de los enunciados. Su significado es claro y su resultado sorprendente para los alumnos. Posteriormente resultará de interés para la comprensión de la propiedad asociativa.

2) Los individuos de cierta especie de escarabajos no alcanzan a cumplir los 3 años de edad. De los menores de 1 año sobreviven la mitad, y de los que tienen entre 1 y 2 años sólo 1/3. Se reproducen únicamente los mayores, después de haber cumplido los 2 años, con una descendencia media de 6 nuevos escarabajos por individuo.
    a. Si designamos por x, y, z a los individuos que hay en cada grupo de edad, ¿Cuántos habrá al año siguiente?
    b. Forma una matriz tal que al multiplica la matriz fila $(x \;\; y \;\; z)$ por dicha matriz, proporcione el resultado a la pregunta anterior. Recuerda que para poder multiplicar matrices sus dimensiones deben cumplir ciertos requisitos.

Con esto se pretende que concluyan que deben buscar una matriz 3x3 que verifique la igualdad:

$$(x \;\; y \;\; z)\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \left(6z \quad \frac{1}{2}x \quad \frac{1}{3}y\right)$$

   c. ¿Y después de 2 años?

Con esto se pretende que observen cómo sería la matriz fila resultante y que cumple la matriz hallada en el ejercicio anterior con respecto a este nuevo ejercicio.

   d. Si inicialmente hubiese 30 individuos en cada grupo de edad, ¿Cuántos habría al año, a los dos años, y a los tres?

En el segundo año se encontrarían con 180, 15 y 10, respectivamente, lo que plantearía un problema de alimentación a las crías importante, ya que hay 18 nuevos escarabajos por cada adulto, cuando la proporción media habíamos dicho que era de 6 a 1. En realidad esto resultaría un obstáculo para su desarrollo, que dependería de os valores iniciales x, y, z.

A continuación se pasa a explicar las propiedades del producto de matrices. Volvemos, en la medida de lo posible, a los problemas anteriores para reforzar la reflexión. Obviamente el manejo de las operaciones requiere cierta práctica que se obtiene reiterando en la resolución de ejercicios similares o puramente algebraicos.

Sesión 6. Propiedades del producto de matrices

En esta sesión se va a trabajar la propiedad fundamental del producto de matrices, la **no conmutatividad** del mismo. Es fundamental esta propiedad pues recalca la definición peculiar de producto de matrices (si este producto se definiera elemento a elemento, sí que se daría la conmutatividad, como sucede con los números reales) y aporta información relevante que se debe conocer para poder realizar correctamente el producto de matrices.

La no conmutatividad parte de la propia definición del producto, puesto que ya solo con la definición podemos conocer si se pueden conmutar dos matrices dadas o no, por lo tanto se debe hacer hincapié en las condiciones que deben cumplir las matrices para poderse multiplicar (fundamentalmente el orden de las mismas).

Partiremos de los problemas ya trabajados con el producto para conocer cómo deben ser las matrices que pueden conmutar, y posteriormente veremos cómo calcular matrices que conmuten con una dada.

Problemas introductorios

No conmutatividad del producto de matrices: $\boldsymbol{A \times B \neq B \times A}$

Deben constatar cómo la propia definición de este producto hace que la conmutatividad no se cumpla. Casi nunca podrán conmutar las matrices al multiplicarlas.

1) Retomemos el problema de los granjeros, sus animales y los vegetales. Supongamos que los granjeros comieran únicamente de dos tipos de animales, conejo y ternera, en estas proporciones de kilogramos por semana:

	Granjera	**Granjero**
Conejo	0.45	0.75
Ternera	1.15	1.55

   a. ¿Podríamos conocer los vegetales que comen indirectamente (a través de los animales) los granjeros, teniendo en cuenta la tabla que mostraba los vegetales que comían los animales y esta tabla anterior? ¿Qué tendríamos que hacer para poder averiguarlo?
   b. Si tomamos las matrices generadas por esta tabla y tenemos en cuenta el apartado anterior, ¿Qué parece que les deba suceder a la dimensiones de las matrices para que se pueda realizar el producto?

2) Dadas las matrices siguientes calcula $A \times B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

   a. Teniendo en cuenta la definición del producto de matrices, ¿Qué sucedería si intentásemos multiplicarlas en orden inverso?
   b. ¿Cómo deberán ser dos matrices para que puedan conmutarse respecto al producto? ¿Tendríamos entonces el mismo resultado? Pon un ejemplo y comprueba tu conjetura.

A continuación se propone un tratamiento formal:

Dadas dos matrices A_{mxn} *y* B_{pxq}*¿Cómo tienen que ser m, n, p y q para que se puedan calcular los dos productos AxB y BxA? Escribe dos matrices cuyas dimensiones cumplan la condición anterior y efectúa los dos productos.*

El siguiente ejercicio retoma la posibilidad de conmutar las matrices en casos concretos.

3) Busca matrices del tipo:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Que conmuten con

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sesión 7. Tipos de matrices I.

En esta sesión se introducen cuatro tipos de matrices cuadradas muy importantes, que no se utilizan tanto en bachillerato como en la gran mayoría de los grados científicos pero se deben conocer (sobre todo la matriz unidad):

- Matriz diagonal
- Matriz Triangular superior
- Triangular inferior
- Matriz unidad

Las tres primeras son sencillas y se introducen directamente con la teoría, que se dará previamente a trabajar la matriz unidad.

La matriz unidad se comenzará trabajando sobre un problema ya visto anteriormente con el fin de entender y darle sentido a la forma que tiene esta matriz. Posteriormente se darán los contenidos teóricos pertinentes que la relacionan con las matrices definidas en esta sesión y que la generalizan a cualquier orden.

<u>Problema introductorio a la matriz identidad:</u>

1) Retomando el ejercicio de los escarabajos, ¿Qué sucederá al cabo de 3 años? ¿Cuál es la matriz que se obtiene? ¿Tiene esta matriz algo que ver con la matriz obtenida en el primer apartado? Analiza la situación.

Al averiguar lo que sucede a los 3 años, los alumnos/as llegarán a que hay los mismo escarabajos de las distintas edades que en el primer año, es decir, $x,\ y,\ z$, y que la matriz tal que

$$(x\ \ y\ \ z)\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = (x\ \ y\ \ z)$$

Es la matriz obtenida para el primer año elevada al cubo, que resulta ser la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Supongamos ahora que de los que tienen menos de un año sobreviven una quinta parte y se reproducen únicamente los que tienen entre 1 y 2 años, con una descendencia media de 5 nuevos escarabajos por individuo. ¿Qué pasará al cabo de un año? ¿Y al cabo de dos?

Los alumnos obtendrán otra vez un ciclo donde al cabo de dos años se vuelven a tener los escarabajos del primer año, y la matriz obtenida será

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Utilizando la matriz obtenida al cabo de dos años, multiplícala por una matriz que tú elijas a izquierda y a derecha. ¿Qué sucede? ¿Qué tendrá que cumplir la matriz que elijas para que se pueda multiplicar a derecha y a izquierda por la matriz del problema?

Sesión 8. Tipos de matrices II

En esta sesión nos vamos a centrar en la matriz inversa: definición, cálculo y utilidad de la misma.

Para justificar una de las funcionalidades de trabajar con la matriz inversa, es necesario comenzar conociendo cómo se define y calcula esta, y posteriormente tratar el problema que justifica la necesidad de aparición de la misma, es decir, en el problema de esta sesión no trataremos de dar sentido ni a la definición ni a cómo se obtiene la matriz inversa, sino que buscaremos, una vez conocido esto, mostrar la utilidad de esta matriz para resolverlos.

Es por esto que, haciendo una excepción comenzaremos con los contenidos teóricos propios de la sesión (véase Anexo I) y el problema lo dejaremos para la segunda parte de la misma.

Problema relativo a la matriz inversa:

1) Retomemos el problema de los granjeros: Los análisis hechos con motivo de una revisión médica ordinaria revelan un importante desequilibrio en su alimentación. Según su edad, estatura y complexión respectivos, sus consumos de las citadas plantas deberían ser los de la tabla:

	Granjera	Granjero
vegetal 1	60	75
vegetal 2	72	64
vegetal 3	68	80

¿Cuál debería ser su nueva dieta para conseguir este objetivo?

Se plantea un producto de matrices $A \times B = C$ donde, ahora, la matriz B es nuestra incógnita (Conocemos A por el problema inicial, y conocemos C por la tabla anterior). Tendremos pues

$$A \times X = C$$

Y por lo tanto queremos despejar X. Para ello, multiplicamos a la izquierda en los dos lados

7. Evaluación

Este apartado consta de la evaluación que se va a llevar a cabo con el objeto de valorar los conocimientos, la actitud y rendimiento de una persona ante el objeto matemático trabajado, en este caso, las matrices.

Serán objeto de evaluación:

- Respecto al bloque I (Procesos, métodos y actitudes en matemáticas):
    1. Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, etc.
    2. Soluciones y/o resultados obtenidos: coherencia de las soluciones con la situación, revisión sistemática del proceso, otras formas de resolución, problemas parecidos, generalizaciones y particularizaciones interesantes.
    3. Práctica de los proceso de matematización y modelización en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
    4. Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico.
- Respecto al bloque II (Números y álgebra):
    1. Estudio de las matrices como herramienta para manejar y operar con datos estructurados en tablas y grafos. Clasificación de matrices. Operaciones.
    2. Aplicación de las operaciones de las matrices y de sus propiedades en la resolución de problemas extraídos de contextos reales.
    3. Rango de una matriz.
    4. Matriz inversa.

La evaluación se realizará a través de los siguientes instrumentos:

1. Revisión de forma continuada de las tareas realizadas en casa. (10%)
2. Observación por parte del profesor de la actitud y comportamiento del alumno en el aula. Será valorado positivamente su interés y participación en las sesiones impartidas. (10%)
3. Prueba escrita con el fin de valorar el aprendizaje de los contenidos del bloque II. Se valorará la claridad y los razonamientos correctos ante las cuestiones teóricas que se presentarán en dicha prueba. (80%)

Un alumno que obtenga menos de 3.5 ptos. en la prueba escrita, no optará a la evaluación continua de este tema. Deberá por lo tanto presentarse a una prueba de recuperación que tendrá lugar al final del cuatrimestre y en la que tendrá que realizar los ejercicios correspondientes a los temas que suspenda durante el mismo.

A continuación se muestra la prueba escrita detalladamente. Esta prueba consta de 9 ejercicios de tal forma que 4 de ellos serán obligatorios (todos los alumnos deberán efectuarlos) y tendrán una puntuación máxima de 5,5 puntos.

Por otra parte, de los otros 5 ejercicios (opcionales) cada alumno deberá elegir 3. Estos 3 tendrán una puntuación máxima de 4,5 puntos, lo que dará un total de 10 puntos al examen.

7.1. Prueba escrita

Ejercicio 1 (Obligatorio. 1,5 puntos):

a. Escribe la matriz $A = (a_{ij})$ que cumple:
   - ✓ $a_{ij} = i + j \qquad si\ i \neq j$
   - ✓ $a_{ij} = 1 \qquad si\ i = j$
   - ✓ el orden de la matriz es 3x4

b. Sea la matriz B definida igual que la anterior salvo el orden que es 3x3. ¿Es de algún tipo en particular esta matriz? ¿Cuál es la definición de este tipo de matrices?

c. Calcular mediante el método de Gauss-Jordan la matriz inversa de B, B^{-1}

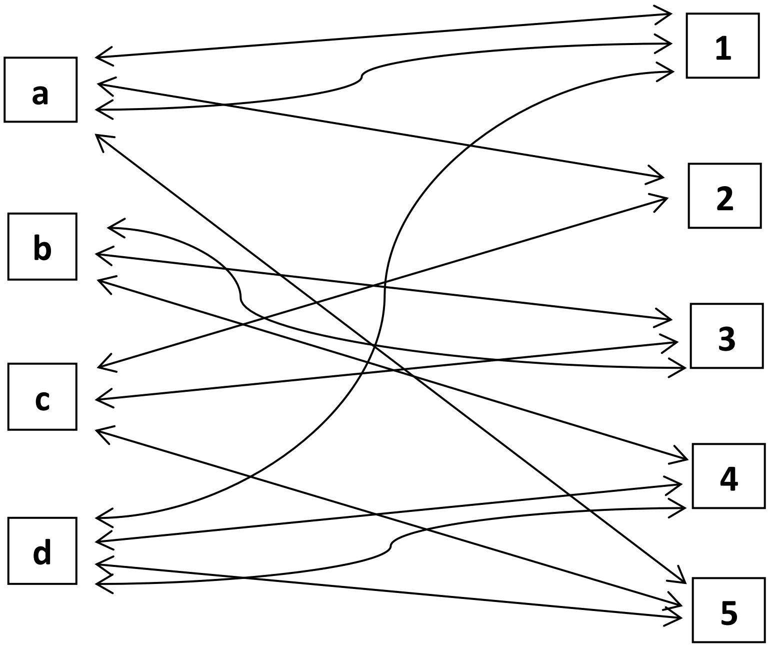
Ejercicio 2 (Obligatorio. 1 punto):

a. Demuestra que si A es una matriz cuadrada **idempotente** ($A^2 = A$), la matriz $B = 2A - I$ cumple $B^2 = I$.

b. Demostrar que si A es **antisimétrica** ($A^t = -A$) entonces A^2 es simétrica y A^3 es antisimétrica.

Ejercicio 3 (Obligatorio. 1,5 puntos):

a. Escribe una matriz A_{4x5} que refleje esta situación:



b. Teniendo en cuenta la matriz obtenida en a. y dadas las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz $D = AB - 2C$.

Ejercicio 4 (Obligatorio. 1,5 puntos):

Un constructor hace una urbanización con tres tipos de viviendas: sencillas (S), normales (N) y de lujo (L). Cada vivienda del tipo S tiene 2 ventanas grandes, 7 medianas y 1 pequeña. Cada vivienda del tipo N tiene 2 ventanas grandes, 9 mediantes, y 2 pequeñas. Y cada vivienda del tipo L tiene 4 grandes, 10 medianas y 3 pequeñas.

Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras; cada ventana mediana tiene 2 cristales y 4 bisagras; y cada ventana pequeña tiene 1 cristal y 2 bisagras.

a. Escribir una matriz que describa el número y el tamaño de ventana en cada tipo de vivienda y otra matriz que exprese el nº de cristales y bisagras para cada tipo de ventanas.
b. ¿Cómo se obtienen el nº de cristales necesita una vivienda normal? ¿Y bisagras una vivienda de lujo?
c. Calcular una matriz que exprese el nº de cristales y de bisagras en cada tipo de vivienda.

Ejercicio 5 (Opcional. 1,5 puntos):

a. Si una matriz A tiene p filas más que columnas, pruébese que AA^t tiene más elementos que A^tA, y que la diferencia del número de elementos es un múltiplo de p.
b. Verdadero o Falso: “si $AB = AC \rightarrow B = C$ ”. Justifica tu respuesta

Ejercicio 6 (Opcional. 1,5 puntos):

a. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, halla todas las matrices que conmutan con ella.
b. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar A^n

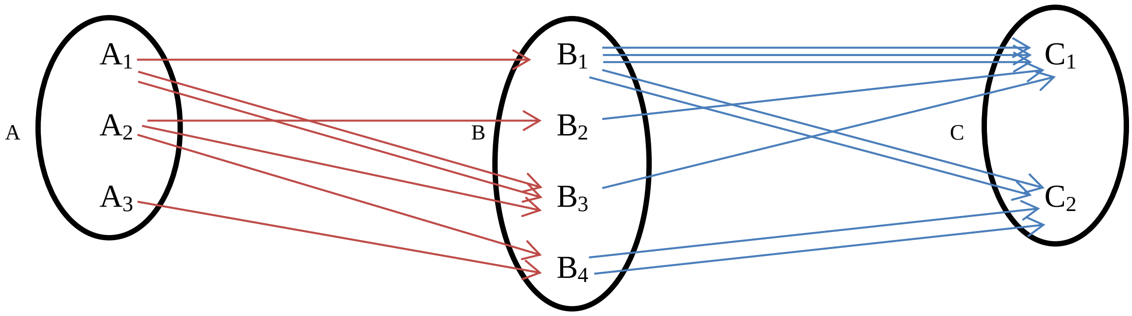
Ejercicio 7 (Opcional. 1,5 puntos):

a. Calcular **m** y **n** para que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $A^2 + mA + nI = 0$ donde 0 es la matriz nula de orden 2.
b. Una matriz es ortogonal si cumple: $MM^t = I$. Determinar si la matriz siguiente es ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 8 (Opcional. 1,5 puntos):

Mediante los gráficos que ves se dan los vuelos del país A al país B y los de éste al país C, especificando los aeropuertos de salida y llegada:



a. Describir estas posibilidades mediante matrices M y N.

b. ¿Qué significa la matriz MN?

c. Si se suprime un vuelo de A_1 a B_3, y se aprueban nuevos vuelos de A_1 a B_4, de A_2 a B_3, de A_3 a B_1 y de A_3 a B_2, ¿Cómo se obtiene la nueva matriz que representa los vuelos del país A al país B? ¿Cuál es dicha matriz?

Ejercicio 9 (Opcional. 1,5 puntos):

En una prueba de pentatlón tres atletas A_1, A_2, y A_3 han obtenido las puntuaciones siguientes:

	200*m.*	1500*m.*	*Longitud*	*Disco*	*Jabalina*
A_1	8	7	6	5	6
A_2	6	10	6	5	10
A_3	9	6	7	2	5

La ponderación de cada prueba varía según el juez J_i (i=1, 2,3) que califique, como muestra la siguiente tabla:

	J_1	J_2	J_3
200*m*	2	1	1,5
1500*m*	2	3	2
Longitud	2	2	3,5
Disco	2	2	1,5
Jabalina	2	2	1,5

a. ¿Cómo sería el podio según cada uno de los jueces? ¿Cuál sería el atleta ganador del pentatlón según el jurado (entendiendo que el jurado está formado por los tres jueces?
b. Si la puntuación del Juez 3 (J_3) hubiera sido

$$\begin{array}{cc} 200m. & 1 \\ 1500m. & 1{,}5 \\ Longitud & 2 \\ Disco & 1{,}5 \\ Jabalina & 4 \end{array}$$

¿Cambiaría el podio?

7.2. Qué se quiere evaluar

Los problemas que se proponen en los exámenes de matemáticas exigen del alumno la realización de tareas de distinta naturaleza:

1. **Tareas principales**

   Son aquellas tareas que claramente constituyen el objetivo principal de la calificación: valorar la comprensión del alumno sobre los contenidos matemáticos propios de los temarios de matemáticas de un curso determinado. A su vez, estas tareas también pueden distinguirse atendiendo a su carácter conceptual o procedimental.
2. **Tareas auxiliares**

   En el proceso de resolución del problema también hay que realizar otro tipo de tareas, que denominamos tareas auxiliares, con la finalidad de obtener las informaciones necesarias para dar la respuesta al problema. Identificamos dos grandes grupos de tareas auxiliares: las específicas y las generales.

   2.1. **Tareas auxiliares específicas**

   Son aquellas tareas que juegan un papel instrumental para alcanzar la solución de un problema en el que aparecen tareas principales sobre contenidos específicos. Por ejemplo, para calcular los extremos relativos de una función, la obtención de derivadas es una tarea auxiliar específica.

2.2. **Tareas auxiliares generales**

Consideramos como tareas auxiliares generales de un determinado curso de matemáticas a todo tipo de tareas matemáticas que ha realizado el alumno a lo largo de su formación matemática anterior.

A continuación se enumeran los objetivos de aprendizaje de cada ejercicio y los criterios que se llevan a cabo para evaluarlos. Además se señalan las tareas principales, tareas auxiliares específicas y generales de cada pregunta.

Ejercicio 1.

En este ejercicio se pretende evaluar los conocimientos de los siguientes aspectos:

1. La notación matricial.
2. Tipos de matrices (Simétrica).
3. El método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa.

Señalamos a continuación las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales del mismo:

- Tareas principales:
    1. Demostrar conocimientos acerca de los subíndices que señalan filas y columnas de una matriz y de la construcción de matrices a partir de una definición teórica de sus elementos.
    2. Demostrar conocimiento acerca de la forma de las matrices simétricas.
    3. Demostrar conocimientos sobre el proceso que se ha de seguir para llevar a cabo correctamente el método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa.
- Tareas auxiliares específicas:
    1. Conocer la definición formal de matriz simétrica.
    2. Realizar correctamente el proceso para hallar la matriz inversa. (Los errores de cálculo no se incluyen en este apartado.
- Tareas auxiliares generales:
    1. Realizar correctamente los cálculos aritméticos en cualquiera de los apartados del ejercicio.

Ejercicio 2

En este ejercicio se pretende evaluar los conocimientos de los siguientes aspectos:

1. Capacidad de razonamiento a partir de hipótesis y/o definiciones.
2. Las operaciones en el cuerpo de matrices.

Señalamos a continuación las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales del mismo:

- Tareas principales:
    1. Razonar y demostrar el resultado del enunciado mediante y un proceso claro y argumentado.

Al tratarse de un ejercicio más bien teórico, el proceso de resolución no requiere resultados auxiliares que podrían resultar tareas auxiliares específicas, ni requiere operaciones aritméticas que serían tareas auxiliares generales.

Ejercicio 3

En este ejercicio se pretende evaluar los conocimientos de los siguientes aspectos:

1. Capacidad de utilizar el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante grafos.
2. Las operaciones en el cuerpo de matrices.

Señalamos a continuación las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales del mismo:

- Tareas principales:
    1. Escribir correctamente la matriz que representa el grafo del apartado a.
    2. Demostrar que se conocen las técnicas para operar con matrices.
- Tareas auxiliares generales:
    1. Realizar correctamente los cálculos aritméticos que requiere el ejercicio.

En este ejercicio no hay tareas auxiliares específicas a evaluar.

Ejercicio 4

En este ejercicio se pretende evaluar los conocimientos de los siguientes aspectos:

1. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones en la resolución del problema.
2. Conocer qué representa cada matriz y cada elemento de la misma respecto al enunciado del problema.

Señalamos a continuación las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales del mismo:

- Tareas principales:
    1. Escribir correctamente la matriz que describa el número y el tamaño de ventana en cada tipo de vivienda y la matriz que expresa el nº de cristales y bisagras para cada tipo de ventanas.
    2. Conocer qué tipo de propiedades u operaciones tengo que realizar para resolver los demás apartados del problema
- Tareas auxiliares específicas:
    1. Conocer las técnicas de las operaciones con matrices.
- Tareas auxiliares generales:
    1. Realizar correctamente los cálculos aritméticos que requiere el ejercicio.

Ejercicio 5

En este ejercicio se pretende evaluar los conocimientos de los siguientes aspectos:

1. Capacidad de razonamiento ante una cuestión teórica.
2. Capacidad de pensamiento abstracto en lugar de razonar a partir de datos concretos.

Señalamos a continuación las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales del mismo:

- Tareas principales:
    1. Razonar y demostrar el resultado del enunciado mediante y un proceso claro y argumentado.
    2. Encontrar un contraejemplo que muestre la falsedad del apartado b.

Al tratarse de un ejercicio más bien teórico, el proceso de resolución no requiere resultados auxiliares que podrían resultar tareas auxiliares específicas, ni requiere operaciones aritméticas que serían tareas auxiliares generales.

Ejercicio 6

En este ejercicio se pretende evaluar los conocimientos de los siguientes aspectos:

1. Operaciones con matrices. En particular, el producto de matrices.
2. Trabajo con una matriz genérica junto con una concreta.
3. Capacidad de razonamiento deductivo.

Señalamos a continuación las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales del mismo:

- Tareas principales:
    1. Conocer cuáles son las matrices que conmutan con una dada y razonar cómo se ha llegado hasta ellas.
    2. Llegar a obtener el caso A^n mediante un proceso razonado correctamente, aunque no se consiga probar que realmente la matriz tiene esa forma.
- Tareas auxiliares específicas:
    1. Plantear y resolver correctamente el sistema de ecuaciones que se presenta en el apartado a.
    2. Probar que en efecto la matriz A^n es la matriz que han obtenido en el apartado b. (por el método de inducción que es el único que conocen).
- Tareas auxiliares generales:
    1. Realizar correctamente los cálculos aritméticos

Ejercicio 7

En este ejercicio se pretende evaluar los conocimientos de los siguientes aspectos:

1. Operaciones con matrices. En particular, suma de matrices, producto de un número por una matriz, y producto de matrices.
2. Capacidad de afrontar un ejercicio en el que necesitan aprender algo nuevo en el mismo momento para poder ejecutarlo.

Señalamos a continuación las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales del mismo:

- Tarea principal:
    1. Conocer las propiedades y operaciones de las matrices de forma que se aprecie en el ejercicio que se están realizando correctamente.
    2. Conocer la forma que tienen las matrices traspuestas para poder trasponer la matriz del apartado b. correctamente.
    3. Conocer tanto la matriz unidad como la matriz nula.
    4. Demostrar conocer la técnica del producto de matrices
    5. Resolver correctamente el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que se plantea en el apartado a.
    6. Realizar correctamente los cálculos aritméticos.

En este ejercicio no existen tareas auxiliares.

Ejercicio 8

En este ejercicio se pretende evaluar los conocimientos de los siguientes aspectos:

1. Capacidad de utilizar el lenguaje matricial para representar datos facilitados mediante grafos.
2. Comprensión de los datos obtenidos y del significado que tienen dentro del contexto del problema.

Señalamos a continuación las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales del mismo:

- Tareas principales:
    1. Plantear correctamente la matriz del anunciado
    2. Conocer el significado en el contexto del problema de la matriz producto MN.
    3. Saber plantear algebraicamente el enunciado del apartado c.
- Tareas auxiliares generales:
    1. Realizar correctamente los cálculos aritméticos.

En este ejercicio no hay tareas auxiliares específicas. El ejercicio es sencillo y todo se considera tarea principal.

Ejercicio 9

En este ejercicio se pretende evaluar los conocimientos de los siguientes aspectos:

1. Capacidad de Transcribir problemas expresados en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlos utilizando técnicas algebraicas determinadas, interpretando críticamente el significado de las soluciones.
2. Capacidad de utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices para describir e interpretar datos y relaciones facilitados mediante tablas en la resolución de problemas diversos.

Señalamos a continuación las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales del mismo:

- Tareas principales:
    1. Plantear correctamente las matrices del problema.
    2. Saber interpretar el enunciado del apartado b. y calcular la matriz producto.
    3. Resolver correctamente el resto de apartados del problema
- Tareas auxiliares específicas:
    1. Realizar correctamente el cálculo del atleta ganador según el jurado.
- Tareas auxiliares generales:
    1. Realizar correctamente los cálculos aritméticos.

7.3. Respuestas esperadas y posibles errores

Por una cuestión de espacio, las respuestas correctas de cada cuestión del examen se encuentran en el Anexo III. A continuación se presentan los posibles errores que podrían cometer los alumnos en dichos ejercicios y problemas.

Ejercicio 1

Respuesta correcta:

a. La matriz $A = (a_{ij})$ tiene 3 filas y 4 columnas, es decir, i=1, 2,3. y j=1, 2, 3,4. Por lo tanto la matriz genérica de tamaño 3x4 es

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta cómo se define la matriz, y el tamaño de la misma, la matriz A es la siguiente:

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

b. Sea B definida igual que A salvo en el tamaño, que en este caso es 3x3. Por lo tanto, la matriz tendrá 3 filas y 3 columnas (i=1,2,3; j=1,2,3) y la matriz será

$$B=(b_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Se trata de una matriz simétrica. Estas matrices se definen de la siguiente forma:

Una matriz A es simétrica si coincide con su traspuesta, es decir, $A = A^t$.

c. A continuación, se realiza el método de Gauss-Jordan para encontrar la inversa de la matriz obtenida en el apartado b. (la matriz B).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{c} f_2=(-3)f_1+f_2 \\ f_3=(-4)f_1+f_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -7 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -11 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} (-\frac{1}{8})f_2 \\ (-\frac{1}{7})f_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} & \frac{4}{7} & 0 & -\frac{1}{7} \end{array}\right) \rightarrow f_4=(-1)f_3+f_4 \rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{39}{56} & \frac{11}{56} & \frac{1}{8} & \frac{1}{7} \end{array}\right) \rightarrow \left(\frac{56}{39}\right) f_4 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{39} & \frac{7}{39} & \frac{8}{39} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} f_1 = (-4) f_3 + f_1 \\ f_2 = \left(-\frac{7}{8}\right) f_3 + f_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -\frac{5}{39} & -\frac{28}{39} & -\frac{12}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & -\frac{7}{39} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{39} & \frac{7}{39} & \frac{8}{39} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow f_1 = (-3) f_2 + f_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{20}{39} & \frac{5}{39} & -\frac{5}{13} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & -\frac{7}{39} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{39} & \frac{7}{39} & \frac{8}{39} \end{array}\right)$$

La matriz B^{-1} es la siguiente:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{20}{39} & \frac{5}{39} & -\frac{5}{13} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & -\frac{7}{39} \\ \frac{11}{39} & \frac{7}{39} & \frac{8}{39} \end{pmatrix}$$

Posibles errores

- No entender el significado de los subíndices
- Confundir el orden de la matriz (cambiando el nº de filas por el nº de columnas)
- No saber la definición de matriz simétrica. Confundirla con otro tipo de matriz.
- No conocer el método de Gauss-Jordan para el cálculo de matrices inversas.
- Cometer errores en las operaciones al realizar el método.

Ejercicio 2

a. Sea la matriz A idempotente, $A^2 = A$, y sea $B = 2A - I$. ¿Se verifica que $B^2 = I$?

$$B^2 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I$$

Teniendo en cuenta que la matriz A es idempotente, se tiene que

$$B^2 = 4A^2 - 4A + I = 4A - 4A + I = I.$$

Por lo tanto $B^2 = I$.

b. Sea A antisimétrica de tal forma que $A = -A^t$. ¿ A^2 es simétrica, es decir, si $(A^2)^t = A^2$? Veámoslo:

$$A^2 = AA = (-A^t)(-A^t) = (A^t)^2 = (A^2)^t.$$

¿Y A^3 es antisimétrica? Veámoslo:

$$A^3 = AAA = (-A^t)(-A^t)(-A^t) = -(A^t)^3 = -(A^3)^t$$

Posibles errores

- No saber demostrar un enunciado a partir de una hipótesis.
- No recordar la fórmula de la identidad notable que aparece en el ejercicio.
- No conocer las propiedades que cumple una matriz.

Ejercicio 3

a. La matriz A de orden 3x4 donde las filas reflejan las letras a, b, c, y d, y las columnas los números 1,2,3,4, y 5 del grafo del enunciado es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b. Teniendo en cuenta la matriz A anterior y las matrices del enunciado B, y C, realizamos la operación AB-2C

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 & 10 \\ -1 & 2 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 14 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 10 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & 10 \\ -1 & 0 & 4 & -16 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ -8 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Posibles errores

- No saber formar la matriz a partir del grafo dado en el enunciado
- Confundirse en el orden de la matriz y generar una matriz 5x4 con la que no se puede llevar a cabo la operación del apartado b.
- No realizar correctamente el producto de matrices.
- Cometer errores de cálculo en las operaciones del apartado b.

Ejercicio 4

a. Generamos las matrices de enunciado.

VIVIENDAS / VENTANAS	*Pequeña*	*Mediana*	*Grande*
Sencilla	1	7	2
Normal	2	9	2
Lujo	3	10	4

Así, la matriz A que expresa el número y tamaño de las ventanas en cada tipo de vivienda es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$$

Por otro lado,

VENTANAS / ELEMENTOS	*Cristales*	*Bisagras*
Pequeña	1	2
Mediana	2	4
Grande	4	8

Así, la matriz B que expresa el número de cristales y bisagras para cada tipo de ventana es la siguiente:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

b. Para hallar el número de cristales para las viviendas normales, se debe tomar la fila de A que representa las ventanas en las viviendas normales, y la columna de B que representa los cristales en cada tipo de ventana, y multiplicarlas, es decir,

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 28$$

Por lo tanto se necesitan 28 cristales para las viviendas normales

Para hallar el número de bisagras para las viviendas de lujo, se debe tomar la fila de A que representa las ventanas en las viviendas de lujo, y la columna de B que representa las bisagras en cada tipo de ventana, y multiplicarlas, es decir,

$$\begin{pmatrix} 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 78$$

Por lo tanto se necesitan 78 bisagras para las viviendas de lujo.

c. Para hallar el nº de cristales y bisagras para cada tipo de vivienda, se deben multiplicar las matrices A y B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 46 \\ 28 & 56 \\ 39 & 78 \end{pmatrix}$$

Así, la matriz obtenida nos indica la tabla siguiente:

VIVIENDAS / ELEMENTOS	*Cristales*	*Bisagras*
Sencilla	23	46
Normal	28	56
Lujo	39	78

Posibles errores

- No saber plantear las matrices del sistema.
- Confundirse en la distribución de elementos tanto en A como en B.
- Equivocarse con el orden de la matriz B de forma que no se puedan multiplicar en el apartado b y c.
- No reconocer tanto en b. como en c. que para conocer los datos que se exigen, se deben multiplicar o las matrices directamente, lo filas y columnas de ambas respectivamente.
- Fallar en los cálculos al realizar el producto de las matrices y obtener datos erróneos.

Ejercicio 5

a. Sea la matriz $A_{(m+p)xm}$ con m+p filas y m columnas, entonces A^t tiene m filas y m+p columnas, es decir, $A^t_{mx(m+p)}$. Así

$$A_{(m+p)xm} \cdot A^t_{mx(m+p)} = (AA^t)_{(m+p)x(m+p)}$$

Y por lo tanto la matriz AA^t tiene $(m+p)^2$ elementos (puesto que es de orden m+p).

Por otro lado

$$A^t_{mx(m+p)} \cdot A_{(m+p)xm} = (A^tA)_{mxm}$$

Y por lo tanto la matriz A^tA tiene m^2 elementos (puesto que es de orden m).

Así, ya hemos comprobado que la matriz AA^t tiene más elementos que la matriz A^tA. Veamos que la diferencia es múltiplo de p

$$(m+p)^2 - m^2 = m^2 + 2mp + p^2 - m^2 = 2mp + p^2 = p(2m+p).$$

b. El apartado b. es falso, y para demostrarlo basta un contraejemplo. Sean las matrices

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Veamos que AB=AC.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, $B \neq C$.

Posibles errores

- No saber trabajar con los órdenes de las matrices.
- No conocer el orden del producto de dos matrices.
- Intentar demostrar en el apartado b. que es verdadero y no probar con un contraejemplo que demuestre su falsedad.

Ejercicio 6

a. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Buscamos una matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de tal forma que $AB = BA$.

Entonces, por un lado se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Y por otro, se tiene

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ c-d & 2c \end{pmatrix}$$

Por lo tanto si AB=BA, entonces

$$\begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ c-d & 2c \end{pmatrix}$$

Así se tienen las siguientes igualdades elemento a elemento:

$$a + 2c = a - b$$

$$b + 2d = 2a$$
$$-a = c - d$$
$$-b = 2c$$

Al operar en la primera igualdad, nos queda igual a la última, y operando la 2º y 3º, teniendo en cuenta la 4º, obtenemos otra igualdad entre la 2º y 3º. Por lo tanto nos quedan únicamente las ecuaciones.

$$-a = c - d$$
$$-b = 2c$$

Tomando $c = \alpha$ y $d = \beta$, se tiene que

$$a = \beta - \alpha$$
$$b = -2\alpha$$
$$c = \alpha$$
$$d = \beta$$

Y por lo tanto, las matrices de la forma

$$B = \begin{pmatrix} \beta - \alpha & -2\alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

Conmutan con la matriz A.

b. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ veamos qué sucede al ir multiplicándola por ella misma:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A == \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Parece que la matriz A^n será de la forma

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Demostrémoslo por inducción sobre n.

Sea n=1, entonces según la matriz A^n

$A^1 = \begin{pmatrix} 2^{1-1} & 2^{1-1} \\ 2^{1-1} & 2^{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Que es cierto por la propia definición de A.

Supongamos ahora que se verifica que

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 2^{n-2} \end{pmatrix}$$

Es decir, que se verifica la forma de la matriz A^n para n-1. ¿Se verifica para n?

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 2^{n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-2} + 2^{n-2} & 2^{n-2} + 2^{n-2} \\ 2^{n-2} + 2^{n-2} & 2^{n-2} + 2^{n-2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2^{n-2} & 2 \cdot 2^{n-2} \\ 2 \cdot 2^{n-2} & 2 \cdot 2^{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{1+n-2} & 2^{1+n-2} \\ 2^{1+n-2} & 2^{1+n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Y por lo tanto ya estaría demostrado que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Posibles errores

- No saber resolver el sistema que se plantea para poder hallar la matriz que conmuta con A en el apartado a.
- No saber realizar una demostración por inducción.
- Confundirse en los cálculos que lleven a una respuesta errónea tanto en a. como en b.

Ejercicio 7

a. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Operemos la igualdad del enunciado para calcular m y n.

$$A^2 + mA + nI = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m & m \\ m & 2m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2m+n & 4+m \\ 4+m & 5+2m+b \end{pmatrix}$$

Veamos cuales deben ser los valores de m y n para que se dé la siguiente igualdad:

$$\begin{pmatrix} 5+2m+n & 4+m \\ 4+m & 5+2m+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualamos elemento a elemento y obtenemos estas dos ecuaciones con dos incógnitas (se repiten 2 a 2).

$$\begin{cases} 5 + 2m + n = 0 \\ 4 + m = 0 \end{cases}$$

Y resolviendo el sistema anterior por cualquier método (sustitución, igualación o reducción) se tiene que

$$n = 3$$
$$m = -4$$

b. Veamos si la matriz del enunciado es ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ¿AA^t = I? \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como se aprecia anteriormente, la matriz obtenida no es la matriz identidad, por lo tanto A no es una matriz ortogonal.

Errores posibles

- No conocer cómo funcionan las operaciones con el cuerpo de matrices.
- No saber resolver el sistema que se presenta en el apartado a.
- No saber realizar el producto de matrices
- No conocer cómo se define la matriz traspuesta.
- Errar en los cálculos aritméticos.

Ejercicio 8

a. Con la matriz M vamos a representar los vuelos entre los países A y B. La matriz que se obtiene a partir del grafo es la siguiente:

$$M=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

La fila i de M representa los vuelos de A_i a B_1, B_2, B_3, y B_4 respectivamente, con i=1, 2,3.

Con la matriz N vamos a representar los vuelos entre los países B y C. La matriz que se obtiene a partir del grafo es la siguiente:

$$N=\begin{pmatrix}3&2\\1&0\\1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

La fila i de N representa los vuelos de B_i a C_1, y C_2 respectivamente con i=1, 2, 3,4.

b. La matriz MN representa los vuelos existentes desde cada ciudad A_i de A, a cada ciudad C_j de C haciendo trasbordos en ciudades del país B.

c. La nueva matriz que representa los vuelos de A a B, se obtiene al sumar la matriz que representa los vuelos que se han suprimido y los que se han añadido. Esta matriz es la siguiente:

$$M'=\begin{pmatrix}0&0&-1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la nueva matriz que representa los vuelos de A a B es

$$M+M'=\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-1&1\\0&0&1&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&2&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}$$

Errores posibles

- No saber representar el grafo en forma matricial
- No poner los órdenes de las matrices correctamente de forma que no se puedan multiplicar.
- No saber interpretar el enunciado del apartado c. como una nueva matriz y cambiar directamente valores en la matriz M.

Ejercicio 9

a. Para obtener el podio según cada uno de los jueces, se deben multiplicar las matrices que representan las tablas del enunciado, es decir, las matrices que simbolizan en primer lugar las puntuaciones que han obtenido los atletas en cada prueba, y en segundo lugar las valoraciones de cada prueba por cada juez.

Por lo tanto, se tiene que:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 10 & 6 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

A es la matriz que representa las puntuaciones de cada atleta en cada prueba

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1{,}5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3{,}5 \\ 2 & 2 & 1{,}5 \\ 2 & 2 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

B es la matriz que representa las valoraciones de cada prueba por cada juez.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 10 & 6 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1{,}5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3{,}5 \\ 2 & 2 & 1{,}5 \\ 2 & 2 & 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 63 & 63{,}5 \\ 62 & 66 & 63{,}5 \\ 58 & 55 & 60{,}5 \end{pmatrix}$$

AB es la matriz que representa las puntuaciones de cada atleta por cada juez. Observando la matriz AB obtenida, podemos concluir que:

- Para el juez 1 (J_1) el podio sería para el Atleta 1 (A_1)
- Para el juez 2 (J_2) el podio sería para el Atleta 2(A_2)

- Para el juez 3 (J_3) ha habido un empate, y en el podio están tanto el atleta 1 como el atleta 2.

Para conocer el atleta ganador del pentatlón, se deben sumar las puntuaciones de los jueces que forman el jurado. Obtenemos los siguientes resultados:

Atleta 1: 64+63+63,5=190,5

Atleta 2: 62+66+63,5=191,5

Atleta 3: 58+55+60,5=173,5

Por lo tanto, el ganador del pentatlón es el Atleta 2 con una puntuación total de 191,5.

b. Para realizar este apartado únicamente hay que cambiar la tercera columna de la matriz B por los datos que aparecen en el enunciado y volver a realizar el producto AB.

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1{,}5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2{,}5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 10 & 6 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1{,}5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2{,}5 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 64 & 63 & 67 \\ 62 & 66 & 61{,}5 \\ 58 & 55 & 57 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto sí que cambiar el podio para el Juez 3, y sería el atleta 1 ganador y también cambiaría el atleta ganador del pentatlón, que pasaría a ser el atleta 1.

Posibles errores

- No escribir correctamente las matrices que ofrece el enunciado a través de tablas.
- No darse cuenta de que la matriz producto es la necesaria para resolver tanto el apartado a. como el b.

- Errar en los cálculos y obtener resultados erróneos que afectan directamente al resultado del problema.

7.4. Criterios de calificación. Guía de corrección

A la hora de calificar, para cada uno de los ejercicios tendremos en cuenta las tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales. Se valorará cada ejercicio utilizando el modelo de tercios o modelo de penalización de errores (Gairín, Muñoz, Oller, 2012: 271).

De esta forma se considera que quedará valorado correctamente cada ejercicio. Siempre queda el criterio del docente para añadir o restar décimas (que estará limitado a un punto por encima o por debajo de la nota que tenía en toda la prueba) en función del alumno que sea y del trabajo que muestre durante toda la prueba.

A continuación se muestran, para cada ejercicio, una serie de criterios de calificación que se deberán tener en cuenta a la hora de puntuar.

Ejercicio 1

- El primer apartado se puntuará con 0,6 de la calificación del ejercicio (1,5 puntos) en caso de haber construido correctamente la matriz. En caso de no hacerlo no obtendrá ninguna puntuación.
- El segundo apartado se puntuara con 0.3 de la calificación del ejercicio. No obtendrá ninguna puntuación este apartado en caso de no saber que la matriz que se obtiene es una matriz simétrica pero obtendrá la mitad de la puntuación en caso de saberlo pero no conocer la definición formal una matriz de este tipo. (Se valora más el saber reconocer una matriz simétrica que la definición formal de la misma).

- El tercer apartado se puntuará con 0.6 de la calificación del ejercicio. Por dos o más errores de cálculo no obtendrá ninguna puntuación.

Ejercicio 2:

Ambos apartados se puntuarán con 0.5 puntos de la nota final. Por un buen razonamiento se obtendrá dicha puntuación. Al tratarse de un ejercicio sencillo, en caso de no llegar a una correcta solución no se obtendrá ninguna puntuación.

Ejercicio 3:

- El primer apartado se puntuará con 0.75 de la calificación del ejercicio (1.5 puntos) En el caso de que la matriz no se construya correctamente no se obtendrá ninguna puntuación.
- El segundo apartado se puntuará con 0.75 de la calificación del ejercicio. En el caso de no haber construido bien la matriz en el apartado a. pero haber realizado correctamente el apartado b. aunque sea con una matriz equivocada, se obtendrá toda la puntuación. En el caso de tener dos o más errores de cálculo, no se obtendrá ninguna puntuación.

Ejercicio 4:

- El primer apartado se puntuará con 0.7 puntos de la calificación del ejercicio (1.5 puntos). No se obtendrá ninguna puntuación en caso de construir mal las dos matrices.
- El segundo apartado se puntuará con 0.2 puntos. No se obtendrá ninguna puntuación en caso de contestar mal alguna de las dos preguntas.
- El tercer apartado se puntuará con 0.5 puntos, En el caso de tener dos o más errores de cálculo, no se obtendrá ninguna puntuación.

Ejercicio 5:

Cada apartado se puntuará con 0.75 puntos de la calificación del ejercicio (1,5 puntos). Quedará a criterio del docente la puntuación que se le da a cada apartado según se hayan resuelto por parte de cada alumno.

Ejercicio 6:

- El primer apartado se puntuará con 0.75 de la calificación total del ejercicio (1,5 puntos). Si el razonamiento es correcto hasta llegar al sistema de ecuaciones que se genera, se obtendrá 0.45 puntos. La resolución correcta del sistema será valorada con los 0.30 puntos restantes.
- El segundo apartado se puntuará con los 0.75 puntos restantes del ejercicio. En este apartado, podría darse el caso de que un error de cálculo condujera a un error en la matriz final (que es lo único que exige el apartado b.), por lo tanto en caso de que exista un error de este tipo en este apartado, será valorado como una tarea auxiliar específica mal realizada, es decir, podrá quitarse por este error hasta 2/3 de la calificación del apartado, es decir, 0.5 puntos, dependiendo de cómo sea y cuánto afecte al resultado final.

Ejercicio 7:

Este ejercicio es el más sencillo del examen. Se puntuará con 0.75 cada apartado y no se obtendrá ninguna puntuación en caso de realizar mal los cálculos, pues influyen significativamente en el resultado del ejercicio, en caso de no saber escribir la matriz traspuesta, o no saber plantear el sistema que se genera en el apartado a.

Ejercicio 8:

- El primer apartado se puntuará con 0.6 puntos de la calificación del ejercicio (1,5 puntos). En caso de que alguna de las dos matrices esté mal construida, no se obtendrá ninguna puntuación.
- El segundo apartado se puntuará con 0.4 puntos de la calificación del ejercicio.
- El tercer apartado se puntuará con 0.5 puntos de la calificación del ejercicio. En caso de no construir la matriz que se genera con los datos del apartado y luego restarla a la original, se penalizará con 0.35 puntos.

Ejercicio 9:

- El primer apartado se valorara con 0.8 puntos de la calificación total del ejercicio (1,5 puntos). En caso de realizar dos o más cálculos incorrectamente no se obtendrá ninguna puntuación.

- El segundo apartado se valorara con 0.7 puntos de la calificación total del ejercicio. En caso de realizar dos o más cálculos incorrectamente no se obtendrá ninguna puntuación.

7.5. Gestión de los resultados

Una vez corregidas las pruebas realizadas por los alumnos, se llevará a cabo un análisis de los ejercicios y/o problemas que han resultado más dificultosos y aquellos que no han elegido mayoritariamente los alumnos.

Cuando se conozcan estos ejercicios, se realizará una corrección de los mismos en el aula con el fin de que los alumnos puedan conocer cómo se efectúan y puedan entenderlos para futuros exámenes.

Para realizar la corrección, en caso de que algún alumno haya realizado correctamente el ejercicio en el examen que se pretende corregir en el aula, se pedirá que sea él el que lo efectúe en la pizarra. Si después de su corrección todavía hay alumnos que no lo han logrado entender, el docente será el encargado de terminar la explicación de dicho ejercicio.

Una vez realizadas las correcciones de los ejercicios seleccionados, se entregarán los exámenes a los alumnos y se les dejará 10 minutos para revisarlo. Se ofrecerá la posibilidad de subir la nota del examen si el alumno que lo desee trae el examen correctamente completado (con los 9 ejercicios realizados) y lo entrega en la siguiente sesión.

8. Referencias

- Froelich, G. (1995). *Connecting mathematics.* Reston, Va: NCTM.
- Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM
- Gámez Pérez, J., Marín García, S., Martín Palomo, A., Pérez Saavedra, C. and Sánchez Figueroa, D. (2016). *Matemáticas II, 2º Bachillerato*. 1ª ed. Tres Cantos, Madrid: Santillana Educación.
- Labraña, A. (1995). *Álgebra lineal*. Madrid: Síntesis.
- Martínez Mediano, J.M. y Cuadra López, R. (1997). *Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales: 2º bachillerato*. Primera edición. Madrid: McGraw Hill.
- Recursostic.es. (2017). Matrices: Índice. Recogido en: http://recursostic.es/descartes/web/materiales_didacticos/matrices/index.htm
- Negro, A., Benedicto, C., Mariano, M., y Poncela, J.M. (1999). *Matemáticas 2.* Madrid: SANTILLANA, S.A.
- Orden ECD/494/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. Autónoma de Aragón. Boletín Oficial de Aragón, n.º 105, 2016, 2 de junio.
- Real Decreto 1105/2014, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato (Real Decreto 1105/2014, 26 de diciembre). Boletín Oficial del Estado, n.º 3, 2015, 3 de enero.
- Rosales Góngora, A. (2009) *Evolución Histórica del Concepto de Matriz.* Revista digital Matemática, Educación e Internet. Recogido en: https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV9_n1_2008/Evolucion_Historica_del_concepto_de_matriz.pdf
- Vizmanos Buelta, J., Hernández Joaquín, and Alcaide, F. (2011). *Matemáticas [2]*. Madrid: SM.

Anexo I. Contenido teórico para cada sesión.

Sesión 1: Definición de matriz

<u>*Contenido teórico:*</u>

Una **matriz de m filas y n columnas** es una tabla de datos de dimensión mxn, es decir, los datos aparecen dispuestos en m filas y en n columnas.

Para un estudio general, a las matrices se las suele designar así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Observemos que los términos de la matriz tienen dos subíndices: el primero indica la fila; y el segundo la columna. Así el término a_{32} es el que está en la 3ª fila y 2ª columna.

En lugar de poner tan detalladamente los elementos de la matriz, para simplificar se suele poner

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \text{ ; o bien } (a_{ij})_{m,n}$$

y cuando no hay duda de la dimensión que tiene la matriz, se la designa más sencillamente mediante (a_{ij}).

Tipos de matrices:

1. ***Matriz fila:***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Matriz formada por una fila y n columnas.

2. ***Matriz columna:***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Matriz formada por una columna y m filas.

3. ***Matriz traspuesta***:

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, se designa por A^t a la matriz que se obtiene al cambiar en A las filas por las columnas y las columnas por las filas:

$$A = (a_{ij})_{m,n} \qquad A^t = (a_{j.i})_{n,m}$$

4. Se dice que una matriz **A** es **cuadrada** si tiene el mismo número de filas que de columnas. Cuando se trate de una matriz cuadrada nxn diremos que es **de orden n.**

5. ***Matriz simétrica***: Una matriz cuadrada (con el mismo número de filas que de columnas) es simétrica si coincide con su traspuesta.

Sesión 2: Operaciones con matrices I

Contenido teórico:

Suma de matrices

Sean dos matrices de la misma dimensión, $m\ x\ n$,

$$A=(a_{ij})_{m,n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=(b_{ij})_{m,n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Para que dos matrices puedan sumarse es necesario que tengan la misma dimensión (como las matrices dadas en el enunciado). En tal caso, las matrices se suman término a término:

$$\left(a_{ij}\right)+\left(b_{ij}\right)=(a_{ij}+b_{ij})$$

es decir,

$$A+B=(\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}+b_{ij})_{m,n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{n1}+b_{n1} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{n2}+b_{n2} \\ .. & ... & ... & ... \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Producto de un número por una matriz

Dada una matriz $A=(a_{ij})_{m,n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, para multiplicar un número por esta, se multiplica por él cada término de la matriz:

$$k\cdot A=k\cdot(a_{ij})_{m,n}=\begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & ... & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & ... & k\cdot a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & ... & k\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Sesión 3: Propiedades de la suma de matrices

Contenido teórico:

Las matrices cumplen las siguientes propiedades respecto al producto de estas por números reales:

1. **Producto de un número por suma de matrices:** Dadas dos matrices $A_{mxn} = (a_{ij})_{mn}$ y $B_{mxn} = (b_{ij})_{mn}$ de la misma dimensión (para poder sumarse), y dado $k \in \Re$ se tiene que
$$k \cdot (A + B) = k \cdot (a_{ij} + b_{ij}) = (k \cdot a_{ij}) + (k \cdot b_{ij}) = k \cdot A + k \cdot B$$

2. **Suma de números por una matriz:** Dados $k, s \in \Re$, y dada la matriz $A_{mxn} = (a_{ij})_{mn}$ se tiene que
$$(k + s) \cdot A = (k + s) \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij}) + (s \cdot a_{ij}) = k \cdot A + s \cdot A$$

3. **Producto de números por matriz:** Dados $k, s \in \Re$, y dada la matriz $A_{mxn} = (a_{ij})_{mn}$ se tiene que
$$k \cdot (s \cdot A) = (k \cdot s) \cdot A = (s \cdot k) \cdot A = s \cdot (k \cdot A)$$

Sesión 4: Propiedades de la suma de matrices y el producto por un escalar

Contenido teórico:

Las matrices cumplen las siguientes propiedades respecto al producto de estas por números reales:

4. **Producto de un número por suma de matrices:** Dadas dos matrices $A_{mxn} = (a_{ij})_{mn}$ y $B_{mxn} = (b_{ij})_{mn}$ de la misma dimensión (para poder sumarse), y dado $k \in \Re$ se tiene que

$$k \cdot (A+B) = k \cdot (a_{ij} + b_{ij}) = (k \cdot a_{ij}) + (k \cdot b_{ij}) = k \cdot A + k \cdot B$$

5. **Suma de números por una matriz:** Dados $k, s \in \Re$, y dada la matriz $A_{mxn} = (a_{ij})_{mn}$ se tiene que

$$(k+s) \cdot A = (k+s) \cdot (a_{ij}) = (k \cdot a_{ij}) + (s \cdot a_{ij}) = k \cdot A + s \cdot A$$

6. **Producto de números por matriz:** Dados $k, s \in \Re$, y dada la matriz $A_{mxn} = (a_{ij})_{mn}$ se tiene que

$$k \cdot (s \cdot A) = (k \cdot s) \cdot A = (s \cdot k) \cdot A = s \cdot (k \cdot A)$$

Sesión 5: Operaciones con matrices II

Contenido teórico:

Así como la suma de matrices y el producto por un número se definen de forma muy sencilla, el producto de matrices es complicado. Por eso, empecemos multiplicando dos matrices especiales.

El producto de un vector fila por un vector columna, ambos con el mismo número de componentes, es un número que se obtiene multiplicándolos término a término y sumando los resultados:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}$$

Para multiplicar dos matrices $A_{mxn} = (a_{ij})_{mn}$, y $B_{nxp} = (b_{ij})_{np}$, es necesario que el número de columnas de A coincida con el número de filas B para poder realizar los productos fila por columna como se ha realizado el producto anterior, pues así los vectores fila de la matriz A tendrán el mismo número de componentes que los vectores columna de la matriz B.

El producto $A \cdot B$ es otra matriz $C_{mxp} = (c_{ij})_{mp}$ cuyos elementos se obtienen del siguiente modo:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Sesión 6: Propiedades del producto de matrices

Contenidos teóricos:

Respecto a la no conmutatividad del producto no hay contenidos teóricos como tal, ya que por la propia definición del producto se puede observar que no se pueden multiplicar las matrices en cualquier orden, y además, que aunque se puedan multiplicar no tiene por qué obtenerse la misma matriz producto al multiplicarlas en un orden otro.

Para constatar la no conmutatividad es preferible realizar varios ejercicios y problemas que ratifiquen este hecho, demostrándolo así de una forma más práctica.

Sesión 7: Tipos de matrices I

Contenido teórico I (Previo al problema de introducción a la matriz unidad):

Para tratar estos tres tipos de matrices, es necesario considerar previamente la definición de **diagonal principal**:

1. Se llama **diagonal principal** de una matriz $A=(a_{ij})$ a la diagonal formada por los elementos a_{ij} con $i=j$.

   Ejemplo de diagonal principal:

   Los elementos de la diagonal principal de la matriz A definida en el apartado anterior son 1, 4 y -1

Ahora sí, definimos los tipos de matrices establecidos para esta sesión:

- Se dice que una matriz cuadrada A es **triangular superior** si todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal son nulos.

  Ejemplo de matriz triangular superior:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Se dice que una matriz cuadrada A es **triangular inferior** si todos los elementos que están por encima de la diagonal principal son nulos.

  Ejemplo de matriz triangular inferior:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se dice que una matriz cuadrada A es **diagonal** si todos los elementos que están tanto por encima como por debajo de la diagonal principal son nulos, es decir, si es tanto triangular superior como inferior.

  Ejemplo de matriz diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>*Contenido teórico II:*</u>

- La **matriz identidad** (o unidad) de orden n, es una matriz cuadrada de orden n, representada por I_n**,** en la que todos sus elementos son cero, excepto los de la diagonal principal que son unos, es decir, se trata de una matriz diagonal de orden n con la diagonal principal formada por unos:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

  Esta matriz cumple una propiedad muy importante: I_n es conmutativa respecto al producto con cualquier matriz cuadrada del mismo orden, es decir,

$$A_n \cdot I_n = I_n \cdot A_n = A_n$$

  En otras palabras, I_n **representa el elemento unitario para el producto de matrices.**

Sesión 8: Tipos de matrices II

Contenidos teóricos:

Teniendo en cuenta la aparición de la matriz identidad, puede hablarse de matriz inversa de una matriz dada.

En concreto, sea A una matriz cuadrada (de orden n), diremos que **A es inversible** si existe otra matriz B tal que:

$$A_n \cdot B_n = B_n \cdot A_n = I_n$$

En este caso, a la matriz B la llamaremos **inversa de A**, y la representaremos A^{-1}, así podremos expresar mejor:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

No todas las matrices son inversibles. Existen varios métodos tanto para conocer si una matriz es inversible o no, como para el cálculo de la matriz inversa.

Teniendo en cuenta los contenidos de este trabajo, nos limitaremos a matrices que sabemos que son inversibles y a conocer cómo se calculan las inversas mediante el método de Gauss-Jordan. No añadimos la explicación del método por falta de espacio.

Cuando ya hayamos justificado razonadamente la técnica de obtención de la matriz inversa (transformaciones de Gauss-Jordan) se propondrá el siguiente problema:

Anexo II. Ejercicios y problemas complementarios para cada sesión.

Sesión 1: Definición de matriz

1. Estas son las calificaciones que han obtenido Daniel y Manuel en los cuatro controles de Matemáticas de esta evaluación

	C1	C2	C3	C4
Daniel	8	7	9	10
Manuel	6	8	10	9

   a. Elabora una matriz A con estos datos.
   b. Calcula la matriz traspuesta de la matriz anterior, A^t. ¿Nos aporta la misma información? ¿En qué se diferencian?
   c. ¿Cómo podríamos conocer la puntuación total de Daniel observando la matriz A? ¿Y observando A^t?
   d. ¿Cómo podríamos conocer la puntuación media de los controles de ambos alumnos observando la matriz A? Calcúlalas.

2. Escribe una matriz de dimensión 2x3 donde se cumpla que:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & si \quad i+j=4 \\ -1 & si \quad i+j \neq 4 \end{cases}$$

3. Escribe una matriz de dimensión 4x3 cuyos elementos a_{ij} sean nulos si la suma i+j es un número primo y 1 en caso contrario
4. Determina los valores a,b,c y d para que estas dos matrices sean iguales:

$$A = \begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 & 2 \\ c-2 & 3-a & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & b+1 & d-1 \\ 2c & 1 & b+2 \end{pmatrix}$$

5. Escribe una matriz cuadrada de orden 3 cuyos elementos estén determinados por esta igualdad:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i=j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

Sesión 2: Operaciones con matrices I

1. Realiza la siguiente operación matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -8 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Sean $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Calcula A + A^t – B.

3. Calcula los valores a,b,c y d para que se cumpla que A = B + C siendo

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 7 & 8+d \\ a & 9 & c+9 & e+2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a-2 & 9 & c+9 & 4 \\ 2 & 0 & a-3 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & 0 & b \\ 1 & e & 7 & d \end{pmatrix}$$

4. Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:
   a. $3A - B + 2C$
   b. $2C + B - 3A$

5. Una empresa produce tres artículos: A, B y C. Los precios de coste por unidad son 32€, 46€ y 71€, respectivamente, y los precios de venta de cada unidad son 53€, 82€ y 140€. El número de unidades vendidas anualmente de estos artículos es 2100, 1400, y 900, respectivamente. Determina la matriz fila de costes por unidad, la matriz fila de ventas por unidad, la matriz fila de beneficios por unidad, la matriz columna de unidades vendidas y el beneficio anual obtenido.

6. Una cadena de tiendas electrónicas tiene dos distribuidores en Lima. En mayo, las ventas de tv, radio y mp3 en los dos almacenes fueron las siguientes:

	TV	**RADIO**	**MP3**
Almacén 1	22	34	16

	TV	RADIO	MP3
Almacén 2	14	40	20

¿Cuál ha sido la venta total de cada producto de la cadena de tiendas electrónicas? Si la dirección considera que las ventas de Junio aumentarán en un 50% sobre las ventas de mayo de todos los productos, ¿Cuál será la venta esperada para Junio?

Sesión 3: Propiedades de la suma de matrices

1. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

   Comprueba con estas matrices la propiedad conmutativa de la suma.

2. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   ¿Qué relación hay entre A - B y B - A?

3. Considera las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

   Calcula:

   a. A+B-C
   b. A-B+C
   c. –A-B+C
   d. –A+B+C
   e. A-(B-C)
   f. C-(A+B)

4. Determina una matriz X que verifique A+X=B siendo

$$A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Dadas las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

   Encuentra una matriz X que cumpla la siguiente ecuación matricial:

$$(A-C)+X-A=B$$

Sesión 4: Propiedades de la suma y del producto por un escalar de matrices

1. Realiza las siguientes operaciones matriciales teniendo en cuenta en todos los apartados las propiedades de la suma de matrices junto al producto de una matriz por un escalar:

   a. $3\cdot\left[\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right]$

   b. $4\cdot\begin{pmatrix}-3&-1\\1&2\end{pmatrix}-7\cdot\begin{pmatrix}-3&-1\\1&2\end{pmatrix}+12^2\cdot\begin{pmatrix}-3&-1\\1&2\end{pmatrix}$

   c. $12\cdot\left[5\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\\3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4\\7&0\\1&-3\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}1&8\\0&2\\-4&3\end{pmatrix}\right]$

   d. $7\cdot\begin{pmatrix}60&48&132&72\\-108&0&-24&12\end{pmatrix}$

2. Determina los valores de t para que se cumpla la siguiente ecuación

$$t^2\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}+3t\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}=t\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&-1\end{pmatrix}$$

3. Determina el valor de x para que se cumpla la siguiente ecuación

$$3x\cdot\begin{pmatrix}1&-1&5&2\\2&4&-1&0\\0&3&1&1\\1&0&2&0\end{pmatrix}-x\begin{pmatrix}3&-12&6&-3\\9&0&3&12\\0&-6&-15&0\\-3&6&-9&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&3&3\\-1&4&-2&-4\\0&5&6&1\\2&-2&5&-2\end{pmatrix}$$

4. Dadas las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&4&2\\2&0&2&-1&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&1&4&2\\-2&0&-3&-1&5\end{pmatrix}$$

   Realiza la siguiente operación matricial:

$$\frac{1}{2}A+3(A+B)-4B$$

Sesión 5: Operaciones con matrices II (Producto de matrices)

1. Considera las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & -8\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 4\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}4 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -3\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

   Realiza, si es posible, los siguientes productos:

   a. AB
   b. BA
   c. AC
   d. BC

2. Con las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 5\\ 3 & 8\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

   Calcula, si es posible:

   a. ABC
   b. 2AB
   c. A(B-C)
   d. B(3C)

3. Sea A una matriz mxn.

   a. ¿Existe una matriz B tal que BA sea una matriz fila? Si existe, ¿Qué dimensión tiene?
   b. ¿Se puede encontrar una matriz B tal que AB sea una matriz fila? Si existe, ¿Qué dimensión tiene?
   c. Busca una matriz B tal que $BA=\begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$ siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$

   a. Calcula AB y BA.
   b. Comprueba que $(A+B)^2=A^2+B^2$

5. Sean A una matriz de dimensión 5x3, B una matriz de dimensión mxn y C una matriz de dimensión 4x7. Si sabemos que se puede obtener la matriz ABC, ¿Cuáles son las dimensiones de B y de ABC?
6. Dadas tres matrices A, B, y C, se sabe que ABC es una matriz de dimensión 2x3, y que BC es una matriz de dimensión 4x3. ¿Cuál es el orden de A?
7. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula A^{10}
8. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Encuentra la regla de cálculo de las potencias sucesivas de A, es decir, de A^n, para cualquier número natural n.
9. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:
    a. Para cada número natural n, hallar A^n
    b. Calcular $A^{22} - 12A^2 + 2A$

10. Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1.2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1.3 horas de administración.

    a. Representar la información en dos matrices.

    b. Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

11. Una fábrica elabora dos tipos de productos, X e Y, que vende a tres empresas A,B, y C. Inicialmente distribuía 1000 unidades de cada producto a cada una, pero hoy la empresa A recibió 600 unidades de X y 300 de Y; la empresa B recibió 400 unidades de X y 800 de Y, y la empresa C recibió 900 unidades de X y 700 de Y. Representa mediante una matriz esta información anterior y representa mediante otra matriz las disminuciones porcentuales que han producido en la distribución de los productos a estas empresas ¿Qué representa la matriz producto respecto al contexto del problema?

Sesión 6: Propiedades del producto de matrices

1. Comprueba que, en general, el producto de matrices no cumple la propiedad conmutativa multiplicando estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. ¿Qué deben cumplir dos matrices A de dimensión mxn y B de dimensión pxq para que, por lo menos, se pueda realizar el producto AB y BA?
3. Halla todas las matrices que conmutan con las siguientes:
   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
   b. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix}$
4. Comprueba que se cumple la propiedad distributiva del producto de matrices con respecto de la suma utilizando estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sesión 7: Tipos de matrices I

1. Escribe una matriz de cada tipo:
    a. Simétrica
    b. Triangular inferior
    c. Triangular superior
    d. Diagonal
2. Sea A una matriz simétrica ¿Cómo es su traspuesta? Pon un ejemplo
3. Sea A una matriz diagonal ¿Cómo es su traspuesta? Pon un ejemplo
4. Sean dos matrices triangulares inferiores ¿Cómo es su suma? ¿Y su producto?
5. Sean A y B dos matrices diagonales ¿Cómo es el producto AB? ¿Qué cumplen respecto al producto de matrices?
6. Diseña un problema de forma que la matriz que represente los datos del mismo sea una matriz triangular inferior.
7. Se dice que una matriz A es ortogonal si cumple que

$$AA^t = I$$

Donde A^t es la matriz traspuesta de A e I es la matriz identidad.

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Son ortogonales?

8. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & & \\ 0 & \cos b & sen\, b \\ 0 & -sen b & \cos b \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de a y b es ortogonal A?

Sesión 8: Tipos de matrices II

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$$

Donde x es un número real, halla los valores de x para que la matriz A posea inversa.

2. Calcula la matriz inversa de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Halla la inversa de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(A^{-1})^{-1}$ y $(B^{-1})B$

¿Por qué se obtiene este resultado?

5. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   i. Comprueba que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
   ii. Calcula $(B^2)^{-1}$, de la manera más rápida posible

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $(A^t A^{-1})^2 A$.