Universidad Zaragoza
1542

Trabajo Fin de Máster

Propuesta para la enseñanza de la posición relativa de rectas y planos en 2º de Bachillerato

Proposal for the teaching of relative positions of lines and planes in the last year of middle education

Autor/es

Javier Medrano Guillén

Director/es

Miguel Ángel Marco Buzunariz

Facultad de Educación

2017

Índice

A. Estado de la enseñanza del objeto matemático

Este trabajo trata sobre la **posición relativa de rectas y planos en el espacio**. Esta unidad didáctica está pensada para un nivel de **2º de Bachillerato de Ciencias** (tanto el tecnológico como el de ciencias de la salud), en la asignatura de **Matemáticas II.**

Intentaré en este apartado resumir, en la medida de lo posible, todos los aspectos de la unidad didáctica que desarrollaré en profundidad en los apartados siguientes. Es decir, introducir los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías.

Campo de problemas: la intención es encontrar problemas contextualizados, que permita incidir en la interpretación geométrica de los resultados, intentando equiparar en importancia a la clásica interpretación y resolución algebraica. Se usará con cierta frecuencia (aunque no exclusivamente) problemas enmarcados dentro del contexto del desarrollo de videojuegos, al ser este un ámbito donde este tipo de problemas aparecen de manera natural.

Técnicas: enumeramos a continuación las técnicas que pensamos introducir. La elección de estas técnicas no es arbitraria, sino que están pensadas con la intención de facilitar y justificar la **interpretación geométrica** de lo que está ocurriendo, que es el interés central de esta propuesta.

1. **Cálculo de la posición relativa de recta y plano**
   1.1 Con la recta en ecuaciones implícitas y el plano en su ecuación general
   1.2 Con la recta expresada como un punto y el vector director

2. **Cálculo de la posición relativa de dos rectas**
   2.1 Con las rectas en sus ecuaciones implícitas
   2.2 Con las rectas dadas por un punto y un vector

3. **Cálculo de la posición relativa de dos rectas**
   3.1 Con las rectas en sus ecuaciones implícitas
   3.2 Con las rectas dadas por un punto y un vector

4. **Cálculo de la posición relativa de dos planos**
   4.1 Con los planos en su ecuación general

5. **Cálculo del haz de planos que contienen una recta**

6. **Cálculo del haz de planos perpendiculares a una recta**

7. **Cálculo del ángulo de incidencia de dos objetos geométricos (planos o rectas) secantes**

Tecnologías: enumeramos a continuación las tecnologías que nos van a permitir justificar las técnicas:

1. **Rango de matrices como medición de la cantidad de vectores linealmente independientes**
2. **Interpretación geométrica del producto escalar**
3. **Haz de planos**

B. Estado de la enseñanza del objeto matemático

Para este apartado se ha observado lo expuesto en tres libros de 2º de Bachillerato, los correspondientes a la editorial Anaya (2016), SM (2016) y Marea Verde.

1. Justificación habitual del objeto matemático

Antes de analizar en profundidad la justificación del objeto matemático, cabe destacar que en cursos superiores la justificación de las herramientas y conceptos que se introducen suelen reducirse cualitativamente respecto al esfuerzo que se hace en cursos inferiores.

Anaya: el tema que introduce la posición relativa de objetos geométricos en el espacio comienza con una introducción histórica de la aparición de la geometría no euclídea. En cuanto a la parte del tema en la que se introducen las partes relativas, no hay una justificación previa. Simplemente introduce las posibilidades que hay y cómo calcularlas.

SM: el capítulo comienza hablando sobre la cueva de Naica, en México, y la forma geométrica de los cristales que contiene. Indica también que la geometría del espacio sirve para representar el mundo exterior y es vital para la ingeniería, la arquitectura y el diseño 3D por ordenador, aunque sin indicar exactamente en qué medida ni cómo.

SM: Inicio de la unidad didáctica

Respecto a la parte del tema que trata sobre las posiciones relativas, de nuevo no hay una justificación como tal sino que se limita a dar las técnicas para poder conocer las posiciones relativas.

Posiciones relativas de dos planos

Para determinar las posiciones relativas que pueden adoptar dos planos π y π' en el espacio, se estudia la compatibilidad del sistema formado por sus ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} \pi : Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' : A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Para ello, se observan los rangos de $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$.

Se pueden dar los siguientes casos:

- $\mathbf{rg}(M) = \mathbf{rg}(M') = 1$ **Planos coincidentes**
  El sistema es compatible indeterminado con dos parámetros.
- $\mathbf{rg}(M) = 1 < \mathbf{rg}(M') = 2$ **Planos paralelos**
  El sistema es incompatible.
- $\mathbf{rg}(M) = \mathbf{rg}(M') = 2$ **Planos secantes**
  El sistema es compatible indeterminado con un parámetro. La recta *r* secante a ambos planos está determinada, precisamente, por las ecuaciones de los dos planos.

SM: Técnica de la posición relativa de dos planos

Marea Verde: este libro no tiene una introducción para el capítulo sobre geometría, de manera que no se justifica ni siquiera el objeto general de la geometría antes de enseñar las técnicas. A lo largo del capítulo no se incluye ninguna justificación más. La parte que inicia esta unidad didáctica se limita a enumerar la terminología que va a usar y adelanta la técnica que usará a lo largo de todo el tema.

3. POSICIONES RELATIVAS

Hablamos de posiciones relativas para indicar si dos o más figuras en el espacio tienen o no puntos en común. Las situaciones básicas a reconocer son:

1. **Secantes**: Las figuras tienen uno o más puntos en común.
2. **No secantes**: Las figuras no tienen puntos en común.
3. **Coincidentes**: Todos los puntos son comunes, por tanto son la misma figura.
4. **Contenidas**: Todos los puntos de una figura pertenecen a la segunda, pero no a la inversa.

Además, podemos clasificarlas en función de su dirección como:

1. **Paralelas**: Todos los puntos de una figura están a la misma distancia de la otra.
2. **Perpendiculares**: Las figuras forman un ángulo de 90°.

La estrategia fundamental para abordar este apartado es:

> El tercer concepto básico para resolver problemas de geometría en el espacio:
>
> "Para determinar los puntos en común de dos figuras (si existen) se resolverá el sistema formado sus ecuaciones"

Marea Verde: Parte inicial del tema

A modo de conclusión, habría que decir que ningún libro de los consultados ofrece una justificación satisfactoria al tema de la geometría en general ni desde luego al tema de las posiciones relativas de cuerpos geométricos en el espacio en particular.

2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías

La ausencia de justificación del objeto matemático hace que el campo de problemas sea prácticamente inexistente. Los ejercicios que se incluyen en este sentido no es más que una práctica de las técnicas mostradas en el capítulo. Esto principalmente se debe a la existencia de la prueba objetiva realizada al final de 2º de Bachillerato, que hace que los textos se centren en ejercitar las técnicas que se piden en dicha prueba.

Veamos las técnicas que se muestran y las tecnologías asociadas. Se toma como referencia las incluidas en el libro de la Marea Verde, aunque las de todos los libros son análogas.

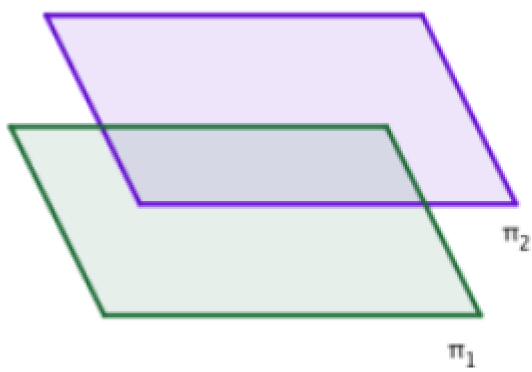
1. **Posición relativa de dos planos mediante su ecuación general**: se considera el sistema generado por las ecuaciones de los planos, y se estudia el sistema

mediante el rango de las matrices asociadas para ver si son coincidentes, paralelos o secantes. La tecnología es la discusión asociada a las posibles soluciones encontradas del sistema generado:

a. $rg(M) = rg(M^*) = 1 < nº\ incógnitas \Rightarrow\ S.C.I$: Al haber infinitas soluciones y las matrices de rango uno, significa que los **planos son coincidentes**. Incide en que esto ocurre únicamente si las filas de M y M^* son proporcionales, lo que indica que el plano es el mismo pero expresado de dos maneras distintas.

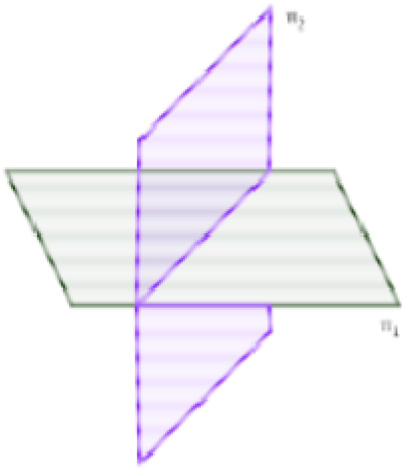
Marea Verde: Planos coincidentes

b. $rg(M) = 1\ \neq\ rg(M^*) = 2 \Rightarrow\ S.I$: El sistema no tiene solución, lo cual implica que los planos son **paralelos**. La interpretación que da de esto es que $rg(M) = 1$ implica que los vectores normales son paralelos, pero que $rg(M^*) = 2$ quiere decir que contienen puntos distintos.



Marea Verde: Planos paralelos

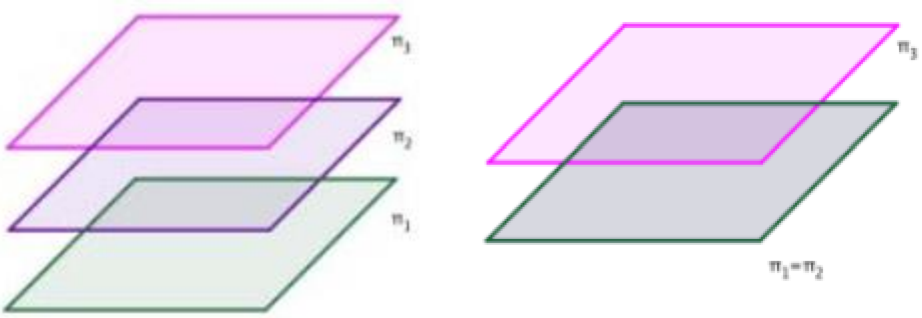
c. $rg(M) = rg(M^{*}) = 2 < nº\ incógnitas \Rightarrow\ S.C.I$: El sistema tiene infinitas soluciones, pero en este caso los vectores normales no son el mismo. Al no ser planos paralelos, la única opción que queda es que sean **secantes**. En este caso también concluye que en las ecuaciones implícitas de una recta, lo que estás dando en realidad son dos planos secantes que la generan al intersecarse.



Marea Verde: Planos paralelos

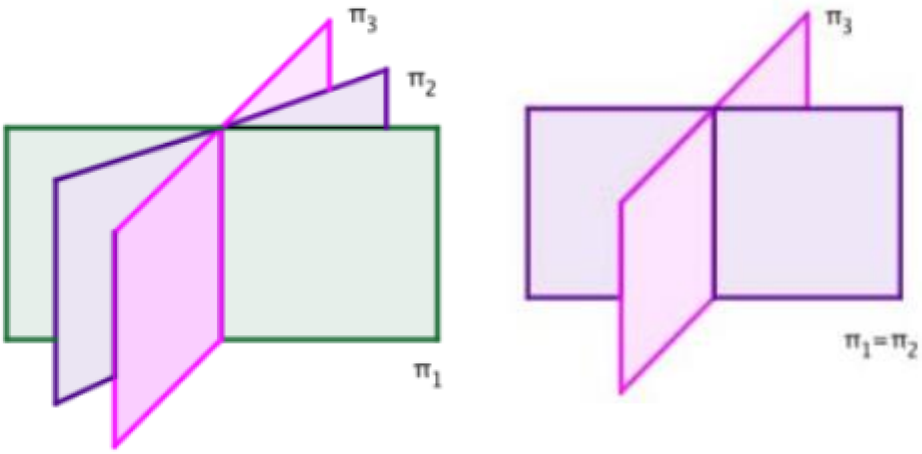
2. **Posiciones relativas de tres planos mediante su ecuación general**: análogo al anterior. Se estudia el sistema de ecuaciones a través del rango de las matrices asociadas. Las tecnologías son también análogas a la anterior, estudiando caso por caso los rangos de las matrices. Por simplicidad añadimos los casos que no se derivan del estudio previo:
   a. $rg(M) = 1\ \neq\ rg(M^{*}) = 2 \Rightarrow S.I$: Tenemos dos opciones: dos planos coinciden y uno es paralelo o el caso en que los tres planos son

paralelos sin coincidir. Para saber en qué caso estamos, vemos si hay o no dos ecuaciones que sean completamente proporcionales.



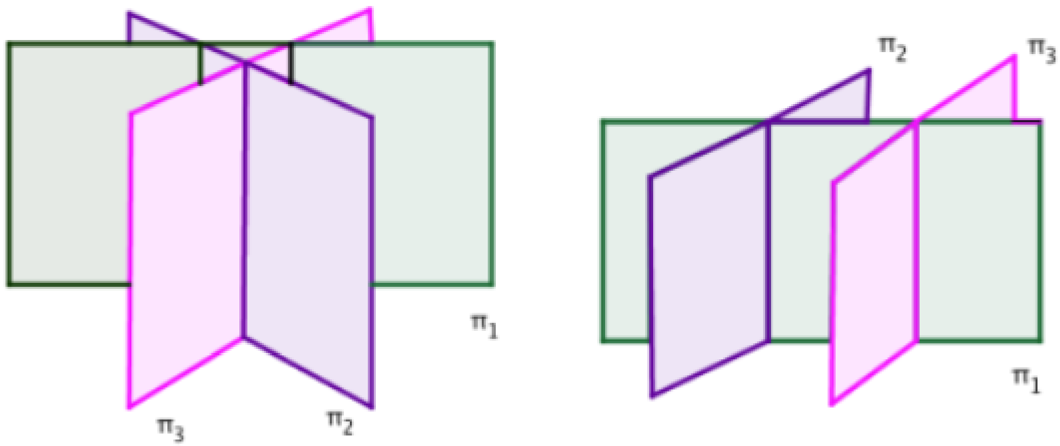
Marea Verde: Planos paralelos y/o coincidentes

b. $rg(M) = rg(M^*) = 2 < nº\ incógnitas \Rightarrow\ S.C.I$: Si dos ecuaciones son proporcionales, hay dos **planos coincidentes** que cortan al tercero en una recta. Si no, son tres **planos distintos que cortan en la misma recta**.



Marea Verde: planos secantes y coincidentes

c. $rg(M) = 2\ \neq\ rg(M^*) = 3 \Rightarrow\ S.I$: En este caso puede ocurrir que **dos planos sean paralelos y corten a un tercero** (esto se comprueba mirando si hay dos vectores normales proporcionales), o que **los tres planos definan un prisma**.



Marea Verde: Planos paralelos y/o coincidentes

3. **Haz de planos secantes a una recta**: se define como el conjunto de planos que contienen a dicha recta.
4. **Haz de planos perpendiculares a una recta**: análogamente al caso anterior, se define como el conjunto de todos los planos perpendiculares a esa recta.
5. **Posición relativa de una recta en implícitas y un plano en su ecuación general**: partiendo de una recta en implícitas (intersección de dos planos) y el plano en ecuación general, se estudia su posición relativa en función de los rangos de las matrices asociadas al sistema de ecuaciones generado por los planos que generan la recta y el plano sobre el que se quiere estudiar su posición relativa. En la justificación de esta técnica entra el haz de planos.
6. **Posición relativa de dos rectas en el espacio según sus ecuaciones implícitas**: partiendo de la ecuación de las rectas en ecuaciones implícitas, se estudia el rango del sistema generado por las cuatro ecuaciones de los planos que generan las dos rectas.

3. ¿Qué efectos produce esta enseñanza en el aprendizaje?

El enfoque tan excesivamente algebraico y matricial de este problema, hace que el alumno pierda el sentido espacial de lo que está haciendo. El alumno termina por memorizar los pasos para resolver el problema, alejándose de la visión tridimensional.

Por otro lado, es comprensible esta visión tan pragmática debido al curso en el que se imparte este objeto matemático y la gran cantidad de materia que se tiene que incluir.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno?

Enumeramos a continuación los conocimientos previos que necesita el alumno para afrontar la unidad didáctica sin problemas. A pesar de ser esta una unidad didáctica centrada en la interpretación geometría de la posición relativa de rectas y planos, también aparecerán aquí conocimientos pertenecientes al ámbito algebraico.

1. **Creación de un vector a partir de dos puntos**
2. **Cálculo e interpretación del producto escalar**
3. **Cálculo e interpretación del producto vectorial**
4. **Concepto de ortogonalidad en el espacio tridimensional**
5. **Cálculo de la ecuación de una recta dada un punto y un vector director**
6. **Cálculo de la ecuación de un plano dado un punto y un vector normal**
7. **Cálculo de la ecuación de un plano dado un punto y dos vectores contenidos en el plano**
8. **Cálculo de la ecuación de un plano dados tres puntos contenidos en el plano**
9. **Manejo de los distintos tipos de ecuaciones de rectas, y conversión de un tipo a otro**
10. **Manejo de los distintos tipos de ecuaciones de planos, y conversión de un tipo a otro**
11. **Cálculo del rango de una matriz**
12. **Interpretación del rango de una matriz como el número de vectores linealmente independientes**
13. **Cálculo del determinante de una matriz**
14. **Relación entre el rango de una matriz y el determinante**
15. **Estudio de las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones algebraicamente**

2. ¿El alumno cuenta con estos conocimientos?

La ventaja que tiene esta unidad didáctica respecto a otras es que todos y cada uno de los conocimientos, técnicas y herramientas necesarios se han visto este mismo curso.

Hay dos estructuras clásicas que siguen los profesores de matemáticas a la hora de impartir la asignatura de **Matemáticas II**. Una, es comenzar por el tema de análisis, debido a que en torno al 40% del temario forma parte de este apartado.

No obstante, la mayor parte de los profesores suelen comenzar por la parte algebraica. Esto suele hacerse así para continuar inmediatamente por la geométrica, debido a la gran relación entre una y otra. Además, esta opción permite dejar la parte de análisis al final, lo cual permite que el alumno lo tenga más reciente de cara a la prueba objetiva al final de curso.

En cualquier caso, todos los conocimientos necesarios para afrontar esta unidad didáctica se habrán visto en el tema anterior, de manera que no será necesario, a priori, tener que introducir conceptos nuevos en esta propuesta.

3. ¿Cómo se va a asegurar que el alumno posea estos conocimientos previos?

Como se ha dicho anteriormente, será el propio profesor el que habrá visto en las lecciones anteriores todos los conocimientos previos, ya que los **habrá impartido en las sesiones anteriores**. Esto implica que será durante el desarrollo de esas unidades didácticas que el docente valorará si los alumnos poseen o no los conocimientos previos.

Sabiendo cuáles son los conceptos necesarios y clave para el buen desarrollo de esta propuesta, bastará con que el docente prepare material para subsanar los conceptos que resulten más problemáticos, para lo cual se reservará el primer día de la unidad didáctica.

D. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Indica la secuenciación de la unidad didáctica

Esta propuesta tiene, como eje vertebrador, el uso del programa de software gratuito **GeoGebra**. La primera sesión servirá, además de para recordar conceptos clave, para introducir el uso del programa. Es totalmente gratuito, libre y de uso muy sencillo. En todas las sesiones se usarán los ordenadores que proporciona el programa **Escuela 2.0**, para que cada grupo de trabajo pueda contar con un ordenador, para poder trabajar simultáneamente de manera digital y manual. El uso de este software ha sido elegido debido al demostrado éxito que tiene en su doble enfoque (algebraico y geométrico), que casa perfectamente con el que pretende trabajar esta experiencia (Hall J.,Chamblee, G., 2013).

También es necesario comentar, como se ha insinuado anteriormente, que el trabajo será por **grupos de 4 alumnos**. Durante la parte correspondiente a las clases del enunciado e institucionalización de las técnicas, dos miembros del grupo deberán trabajar con el programa, mientras que los otros dos trabajarán manualmente. La idea es que después de que cada uno trabaje por separado, pongan en común lo que han ido aprendiendo con las diferentes maneras de resolver el problema.

Nº Sesión	Contenido
1	**- Repaso de los conceptos necesarios e introducción a GeoGebra**
2	**- Enunciado de la Propuesta 1 a los alumnos - Institucionalización de las técnicas asociadas al cálculo de la posición relativa entre recta y plano**
3	**- Enunciado de la Propuesta 2 a los alumnos - Ejercitación de las técnicas asociadas al cálculo de la posición relativa entre recta y plano (con y sin contexto)**
4	**- Enunciado de la Propuesta 3 - Institucionalización de las técnicas asociadas al cálculo de la posición relativa entre planos**
5	**- Ejercitación de las técnicas asociadas al cálculo de la posición relativa entre planos (con y sin contexto)**
6	**- Enunciado de la Propuesta 4 - Institucionalización de las técnicas asociadas al cálculo de la posición relativa entre rectas**
7	**- Ejercitación de las técnicas asociadas al cálculo de la posición relativa entre rectas (con y sin contexto)**
8	**- Repaso y ejercitación de todas las técnicas combinadas**
9	**- Realización de una prueba de evaluación**

2. Establece una duración temporal aproximada

Debido a que esta unidad didáctica está pensada para realizarse a lo largo de 9 sesiones, y que la asignatura de **Matemáticas II** tiene asignadas 4 horas semanales, la duración total será de **algo más de dos semanas** contando la evaluación. En la organización general del curso se dejarán dos sesiones más, por si hubiera cualquier contingencia.

E. Razones de ser del objeto matemático

1. **¿Qué razones de ser vas a tener en cuenta en la introducción del objeto matemático?**

La idea principal es tratar de reforzar el enfoque geométrico del objeto matemático. La razón de ser va a radicar en hacer necesario comprender el resultado a nivel visual por las implicaciones prácticas de los enunciados que inicien el debate sobre el objeto matemático.

Es decir, los problemas estarán planteados para que una resolución de tipo algebraico, aunque necesaria, no sea suficiente para dar una respuesta satisfactoria al problema y sea necesaria una interpretación espacial de lo que está ocurriendo. Esta doble sinergia entre álgebra y geometría permite relacionar dos aspectos diferentes de las matemáticas, redundando en un mayor interés y facilidad de comprensión por parte del alumno debido a la naturaleza de las tareas que se les van a proponer (Cetner, M., 2015).

También va a ser importante presentar en clase una representación espacial de lo que se está haciendo. Para ello se recurrirá al software gratuito Geogebra, aunque se verán ejemplos de esto más adelante.

2. **¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?**

Es difícil establecer las razones de ser históricas del objeto matemático referente a calcular las posiciones relativas de planos y rectas en el espacio. La aproximación más rápida sería la referente al nacimiento de la geometría analítica de la mano de Descartes, entre otros. No obstante, en su origen las coordenadas de descartes eran en dos dimensiones (por no decir que ni siquiera entendían a negativos como números.

Respecto a la posición relativa de planos y rectas en el espacio, no es fácil determinar la razón de ser histórica, aunque es poco probable que partiera de ejemplos prácticos, dado que los problemas prácticos que se pueden sacar no dejan de ser abstracciones relativamente artificiales, y es difícil que aparezcan de modo natural.

3. **Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar**

Propuesta 1: En un videojuego, el jugador decide disparar una bala. El motor de juego sabe que la bala sale desde el punto $(0,2,3)$ en dirección $(1,1,0)$. Para no saturar el procesador, las balas desaparecen automáticamente cuando la bala tenga una altura (medida por el eje Z) superior a 20. ¿Llegará a desaparecer la bala? Si ves algún problema, ¿Cómo podrías solucionarlo? ¿Y si dispara en la dirección $(1,1,-1)$?

Este problema no solamente parte de un ejemplo concreto y práctico, sino que es imprescindible hacerse una buena idea visual de lo que ocurre para empezar a proponer soluciones al problema. Es fácil cambiar los datos del problema para discutir las diferentes situaciones que genera la posición relativa de recta y plano.

El uso de las posiciones relativas en los videojuegos es especialmente interesante por varios motivos. El principal es que es un ejemplo muy cercano a los estudiantes. Muchos de ellos los usan con mucha frecuencia y es una realidad conocida y cercana a casi todos ellos. Además aparecen de manera natural desde un punto de vista profesional, de manera que es difícil que se genere esa sensación en el alumno de que el problema sea artificial. Otro ejemplo, algo más complejo, podría ser el siguiente:

Propuesta 2: En ese mismo videojuego, el jugador, que está en la posición $(3,2,0)$ quiere saltar en la dirección determinada por el vector $(1,0,1)$. No obstante, el juego solamente le permite hacerlo si no hay ningún obstáculo en 10 unidades de distancia en la dirección del salto. Sabiendo que hay una pared cuya normal es $(0.5,-1,0)$ en el punto $(0,2,0)$, ¿dejará el juego saltar al jugador?

Esta segunda propuesta es interesante porque empieza a ser crucial la interpretación visual. Por un lado, el plano descrito de hecho corta a la recta que genera el jugador, pero lo hace por debajo del suelo y en la dirección contraria a la del salto. Esta distinción es crucial para que el alumno interprete el resultado visual y no solamente obtenga la solución.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La idea principal consistirá en ir construyendo poco a poco el problema entre todos, a fin de que entiendan bien lo que hay implicado en el proceso. Esta elección se ha hecho así debido a la aparente complejidad de los enunciados en bruto. Se muestra a continuación a modo de ejemplo el problema de posición entre recta plano.

Se dirá a los alumnos, si no se ha introducido en clases previas, que un motor de videojuegos sabe en todo momento la posición de todos sus elementos, así como la dirección en la que se mueven y el vector normal de sus caras (si las tiene).

Una vez hecha esta pequeña introducción, se propondrá el problema número 1 sin los datos. Es decir, se preguntará, sabiendo cuándo desaparecen las balas, cómo hará el motor para saber si la bala desaparecerá o no. La primera parte pasará porque piensen, entre todos, qué datos necesitarán preguntarle al motor para poder resolverlo.

Cuando se haya discutido esta parte, se permitirá a los alumnos que piensen en posibles respuestas, trabajando como se suele hacer en APB. Finalmente, cuando los alumnos lleguen a una solución algebraica y se institucionalice la técnica, se les preguntará a los alumnos por el qué está pasando y porqué la bala no choca nunca con el plano.

Finalmente, se mostrará a los alumnos una vista en Geogebra del problema para discutir qué interpretan de la imagen. Antes de dibujar cada elemento, se pedirá a los alumnos que piensen cómo aparecerá dibujado, con el fin de que mejoren su intuición espacial.

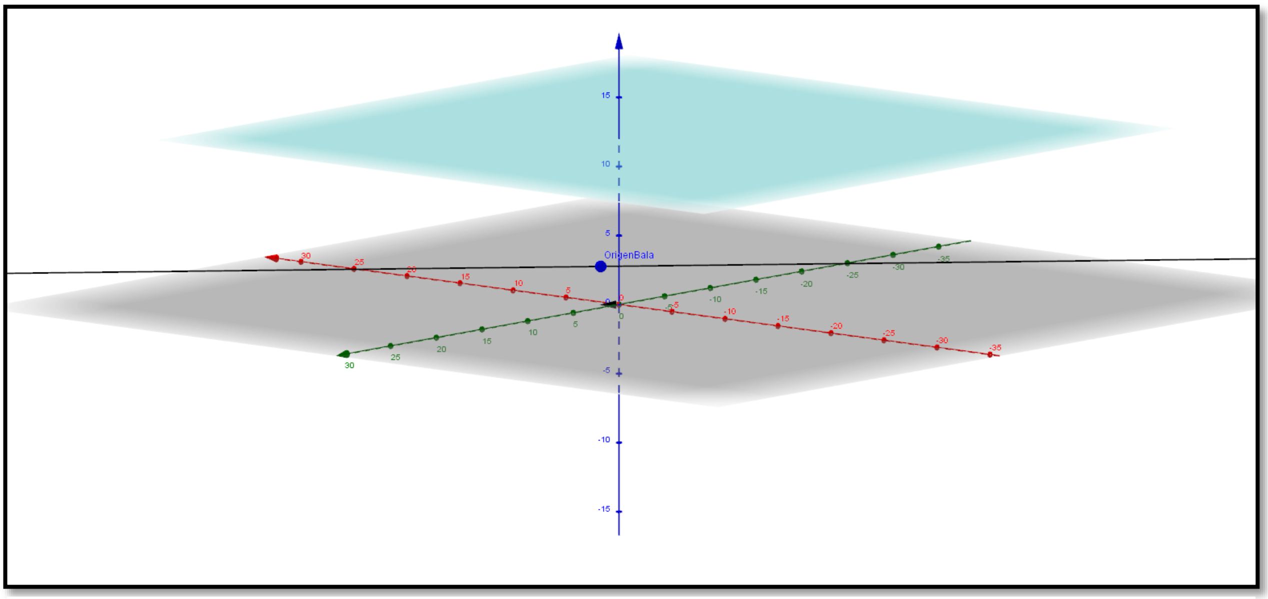


Imagen 1: Propuesta 1

Una vez concluida la parte uno, y con la imagen del GeoGebra proyectada, se les preguntará a los alumnos cómo poder solucionar el problema que tiene el juego. La idea es que busquen planos que permitan, llegado el caso, que la bala desaparezca. Lo mejor sería que aparecieran soluciones del tipo x = 12, y = 12, etc. Cuando esta discusión haya llegado a su fin, se dibujará cómo quedarían todos los planos propuestos en clase.

Para finalizar se volverá a la situación inicial del problema. Al hallar los puntos de corte de la nueva dirección de la bala y el plano $z = 12$ comprobarán que tiene punto de corte, de manera que es posible que muchos digan que efectivamente la bala desaparecerá. La discusión vendrá de si el punto de corte está por delante o por detrás de la dirección. Esto se podrá discutir mediante las coordenadas paramétricas de la recta y el signo que toma el parámetro λ en el punto de corte.

F. Sobre los campos de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula

Vamos a diseñar los problemas que van a generar las diferentes situaciones. Pondremos un ejemplo de cada pareja de cuerpos geométricos concretos: recta y recta y plano y plano. Ejemplos de recta y plano se puede ver en las **Propuesta 1** y **2**.

Hay que tener en cuenta que este tema se iniciará con la posición relativa entre planos, por resultar su estudio más sencillo y servir como un punto de partida perfecto para entender las ideas principales de todo el capítulo.

Propuesta 3: en un estudio de arquitectura, el arquitecto jefe recibe las ecuaciones de los planos de la fachada frontal de un edificio ($x + 3y + z = 1$) y de su tejado ($2x + 6y + 2z = 11$).

a. En seguida encontró que había un error, ¿eres capaz de verlo?
b. Después de corregir el error, le pasan el plano correcto, que es $x + 2y + 10z = 24$. ¿Cuál será la ecuación de la recta de la cornisa?

La discusión de este problema permitirá establecer una manera rápida de ver si los planos son o no paralelos (y coincidentes). Además puede servir para introducir (sin profundizar), la problemática de acotar regiones del espacio a través de fórmulas. Esto es así debido a que los alumnos pueden detectar que la ecuación de la recta es infinita y una

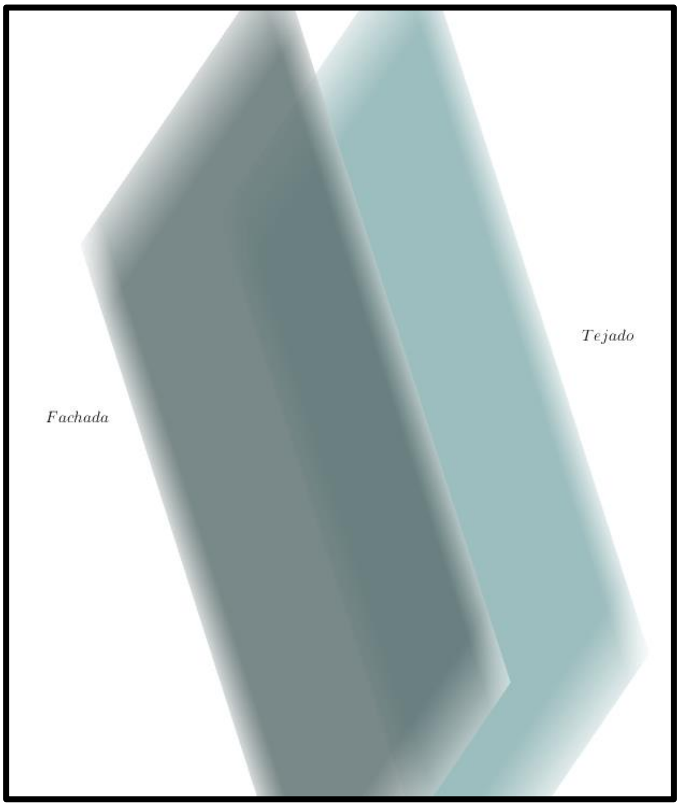


Imagen 2: Propuesta 3

cornisa, por el contrario, no lo es.

Propuesta 4: en un videojuego, dos tiradores disparan a la vez. Uno (llamado *Soldado 1* en la imagen de abajo) está en el suelo, en la posición (3,1,0) y apunta en la dirección del vector (1,2,2). El otro (llamado *Soldado 2* en la imagen de abajo), situado sobre una colina en la posición (3,3,2) dispara una bala en la dirección del vector (-1,-4,-4). ¿Llegarán las balas a chocarse? ¿Algún soldado saldrá herido? Sabiendo que los soldados ocupan únicamente un punto, ¿podrían resultar heridos los dos simultáneamente?

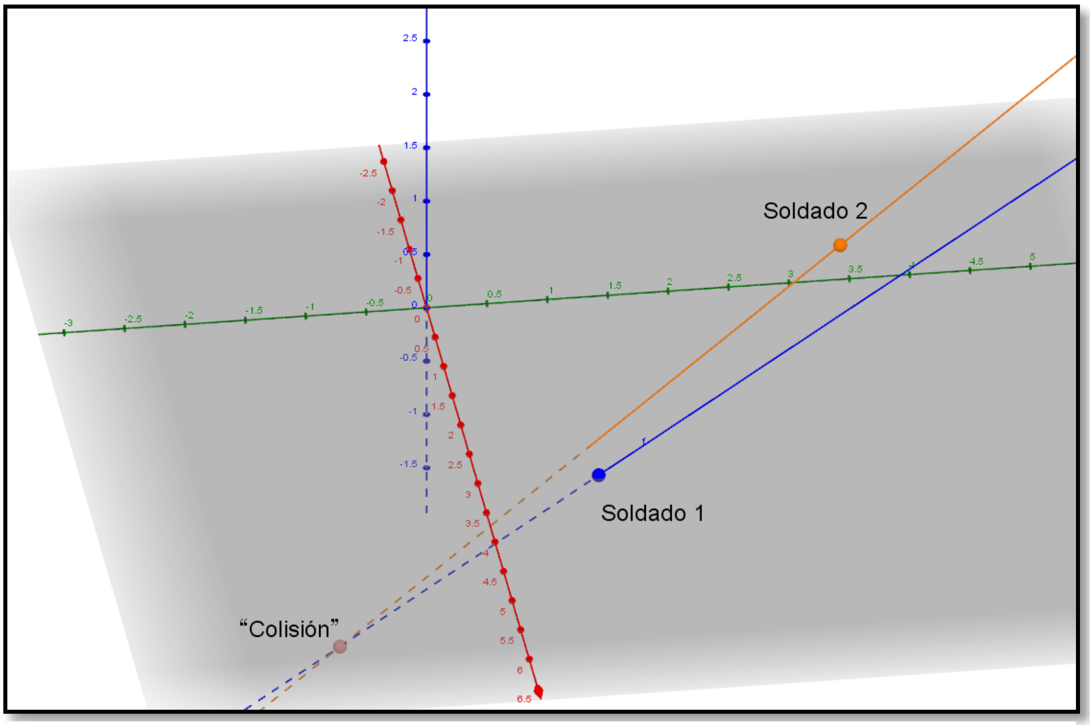


Imagen 2: Propuesta 4

La ventaja de este problema es que se pueden dar situaciones distintas e interesantes en función de los datos. Se les puede preguntar cómo hacer para que los dos soldados resulten heridos sin moverse (si se puede), o para que solamente uno lo sea. De nuevo, y como está siendo el objetivo del presente trabajo, en este ejercicio es imprescindible una interpretación geométrica de los datos para conseguir llegar a la solución.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Como ya hemos indicado en el apartado anterior, la técnica inicial es el cálculo de la posición relativa de planos y planos, así como su interpretación geométrica y espacial. Veamos las modificaciones de la técnica que aportan la **Propuesta 1,** la **Propuesta 2** (que aparecen en el apartado D), y la **Propuesta 4**, que son los que introducen el resto de posiciones relativas.

Propuesta 1: en la resolución de este ejercicio aparece la técnica de la posición relativa de recta y plano. En este caso tienen que poder montar un sistema de ecuaciones con la recta, para lo cual tendrán que usar su ecuación implícita. También tienen que interpretar qué significa que el sistema no tenga solución.

La segunda parte de este ejercicio, donde se nos pide cómo solucionar que la bala no desaparezca, requiere además que sean capaces de buscar un plano que haga que desaparezca la bala en determinado momento. Esto supone darle la vuelta a los ejercicios generales, donde te dan los cuerpos y te piden que halles la posición relativa.

La última parte del ejercicio, que nos pide que digamos qué ocurre si se dispara en una dirección concreta, permitirá introducir la técnica para conocer el sentido en el que “avanza” una recta.

Propuesta 2: este ejercicio, a pesar de ser también de posición relativa de recta y plano como la propuesta anterior, ofrece un punto de vista distinto que implica tener que calcular distancias entre el punto de corte del plano y la recta y la posición del jugador.

Aunque se supone que el conocimiento de distancia entre puntos en el espacio ya ha sido visto con anterioridad, aquí es quizá la primera vez que se necesita una aplicación concreta a un problema.

Propuesta 4: este ejercicio modifica la tecnología vista en los ejercicios anteriores para discutir cómo generar un sistema de ecuaciones para hablar sobre la posición relativa de rectas en el espacio. Esto implica tanto cómo generar el sistema como cómo discutir las posibles soluciones.

También la discusión sobre cómo hacer para que cada soldado pueda acertar implica que, como ocurría en la **Propuesta 1**, los alumnos tengan que construir los objetos matemáticos para que la posición relativa sea una determinada.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Veremos, como ejemplo, cómo sería la metodología de la **Propuesta 4**. En este problema la parte que tiene más complejidad algebraica es montar y resolver el sistema de ecuaciones. Después de exponer el enunciado, se pedirá a los alumnos que piensen en maneras de resolver el problema. Como se ha indicado anteriormente, de los grupos formados, dos usarán GeoGebra y dos lo harán de manera manual. A estas alturas probablemente los alumnos ya hayan deducido que estos problemas consisten en observar las posibles soluciones que tenga un sistema de ecuaciones concreto. Al aparecer esto después de haber visto posición relativa entre recta y plano también puede que se les ocurra pasar las ecuaciones de las dos rectas a implícitas y montar así el sistema. En caso contrario, se puede discutir qué similitudes existen entre este problema y los anteriores resueltos.

Una vez que se acuerda la manera de proceder, esto es, resolviendo el sistema de ecuaciones en implícitas

$$\left\{\begin{matrix} 2x - y = 5 \\ 2x - z = 6 \\ -4x + y = -9 \\ -4x + z = -10 \end{matrix}\right\}$$

Una vez que se ha resuelto el sistema, aparece la solución $(2, -1, -2)$. Así pues, es probable que los alumnos concluyan que efectivamente las balas colisionan. Y es aquí donde entra en escena la interpretación geométrica. Se dibujará la situación en GeoGebra, como se ve en la Imagen 2, y se les preguntará si siguen creyendo que chocan. Si llegados a este punto sigue sin verse que no chocan, se les recordará que el valor en el eje Z indica la altura del objeto, y que interpreten qué significa que el valor en z del punto de colisión sea negativo, y que lo comparen con las direcciones en las que fueron lanzadas las balas. Estos pasos intermedios se irán introduciendo conforme los alumnos vayan teniendo dificultades, si es que esto llega a ocurrir.

Una vez llegados a este punto, se pide calcular la dirección en la que tiene que apuntar cada uno para dar al otro. Esta parte sea probablemente la más fácil, puesto que es calcular el vector que une dos puntos. Los vectores serían, pues $(0,2,2)$ y $(0, -2, -2)$. Es interesante ahora que los alumnos que estén usando el ordenador dibujen los vectores, porque les permitirá observar de manera visual la dirección asociada a estos vectores. Llegados a este punto habría que preguntar a los alumnos qué relación ven entre esos vectores, para que deduzcan que marcan la misma dirección pero en sentidos distintos y porqué ocurre eso.

Para la última parte del ejercicio, se pide que intenten deducir si se podrían disparar mutuamente o no, suponiendo que el motor entiende a los soldados como puntos

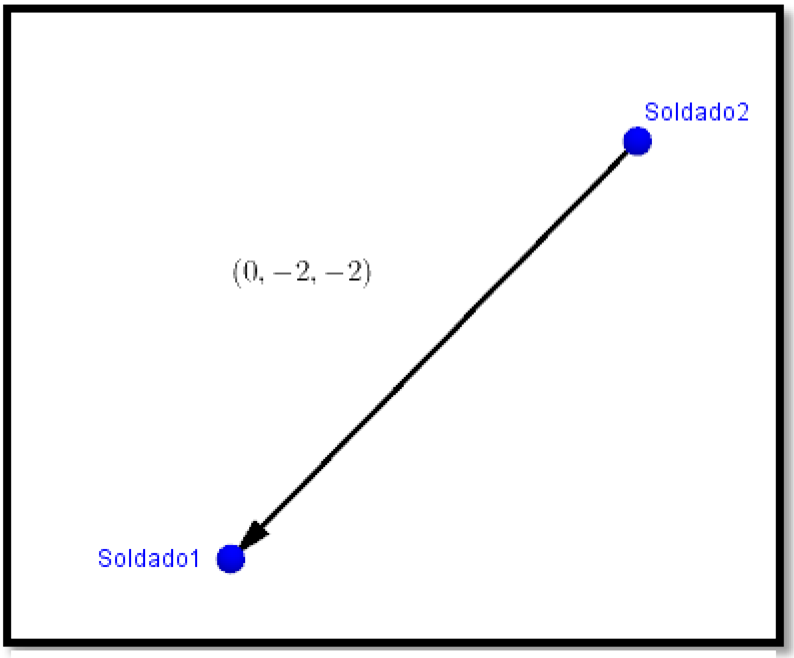


Imagen 3: Propuesta 4

y únicamente detecta colisiones en ese caso. Se les dejará trabajar para que intenten buscar soluciones ellos mismos, buscando estrategias y comparándolas con elementos vistos anteriormente. Puede ser que lleguen a una solución sin más que interpretar la situación. Es decir, que al estar disparándose un punto al otro, las balas chocarán en la colusión. Esta situación en realidad es la ideal, porque quiere decir que no han perdido de vista la situación propuesta por el problema y que la interpretación visual está funcionando. Si no se llegara el caso, es probable (y si no se explicitará) que hallen las ecuaciones de las rectas que unen a los dos soldados, a saber:

$$\left\{\begin{matrix} x = 3 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{matrix}\right\} \textit{del soldado } 1 \textit{ al soldado } 2$$

$$\left\{\begin{matrix} x = 3 \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{matrix}\right\} \textit{del soldado } 2 \textit{ al soldado } 1$$

Una vez llegados a esta solución, es cuestión de preguntarles si las rectas se cortan o no (para lo cual deberán aplicar la técnica enseñada anteriormente), y hacer una doble interpretación. La primera, qué quiere decir que todo valor de x sea solución (que no quiere decir más que las dos rectas son coincidentes). Después, cómo interpretar eso en el contexto del problema.

G. Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula

Al haber tres arquetipos de técnicas distintas (esto es, para los distintos pares de tipos de objetos geométricos que pueden considerarse), vamos a ver tipos de ejercicios que presentar en cada una. También hay que tener en cuenta que algunos arquetipos tienen más de una técnica asociada, por lo que resulta imprescindible enseñar todas las técnicas asociadas y las ventajas y desventajas de cada una en función del contexto geométrico del problema.

Una mención que hay que hacer es la aparición de ejercicios que prescindan de un contexto cotidiano. Esto es así por varios motivos. Primero, para que sean capaces de hacer una abstracción general a partir del caso particular. Segundo, porque en la prueba de tipo objetivo que se realiza al final de curso, correspondiente a la etapa pre-universitaria, tradicionalmente estos ejercicios se presentan sin contexto concreto. Así pues, para no alargarnos innecesariamente, no pondremos ejemplos de los dos tipos para cada arquetipo.

Propuesta 1: Sea r_A la recta con vector director $(1, \lambda, 2)$ que pasa por el punto $A = (1,2,1)$, r_B la recta con vector director $(1,1,1)$ que pasa por $B = (1,-2,3)$, y r_C la recta con vector director $(1,1,-2)$ que pasa por $C = (4,1,-3)$.

a) Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten
b) Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por $r_B y\ r_C$

Propuesta 2: Un avión está en la posición $(3,5,7)$, con dirección $(2,-3,-5)$. Al mismo tiempo, un pájaro, con posición $(5,2,3)$ vuela con dirección $(-4,6,0)$.

a) ¿Llegarán a chocar?

b) En vista de la dirección del avión, y sabiendo que el plano del suelo es el $z = 0$, ¿el avión está aterrizando, despegando o está en mitad del vuelo?
c) Propón una dirección del vuelo para el despegue, para mitad de trayecto y para el aterrizaje.

Propuesta 3: Dados el punto $P = (1,1,1)$ y los planos $\pi_1 \equiv 3x + ay + z = 0$, $\pi_2 \equiv ax + y + 2z = 0$ y $\pi_3 \equiv x + y - z = 0$.

a) Calcula el valor de a para que los tres planos se corten en una recta
b) Si $a = 2$, halla la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a la recta intersección entre π_1 y π_2
c) Si $a = -4$, calcula la distancia de P a π_1 y π_2

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Propuesta 1: En este ejercicio se trabajan diversas técnicas en cada apartado. Veamos uno por uno las técnicas que ejercita:

a) En este apartado se ejercita, por un lado, el **cálculo de la ecuación de una recta dado un punto y el vector director**. Además, dependiendo de la técnica con la que pretenda hacer el estudio de la posición relativa, usará también **el cambio de expresión de la ecuación de una recta**. Finalmente, para resolver el ejercicio tendrá que usar la técnica del **estudio de la posición relativa de dos rectas**. Esto puede hacerse con dos maneras distintas. Es decir, o mediante el estudio de las posibles soluciones del **sistema engendrado por las ecuaciones generales de las rectas**, o bien mediante el estudio de la relación entre sus **vectores directores y el vector generado por un punto de cada recta**. Para esta propuesta sería necesario el uso de la técnica del **cálculo de un vector en el espacio dados dos puntos**.

b) Este apartado también involucra diversas técnicas por parte del alumno. La primera es el **cálculo del producto vectorial** entre dos vectores, para calcular el vector perpendicular al plano. También se pueden aplicar las diversas técnicas que hay para comprobar la posición relativa entre recta y plano, como **discutiendo las posibles soluciones del sistema generado por sus ecuaciones generales**, o viendo **la relación entre el vector director de la recta y el normal del plano**.

Dependiendo de la solución escogida por el alumno, tendrá que **calcular la ecuación de la recta dados un punto y dos vectores**, así como las técnicas asociadas al **cambio de expresión de la ecuación de un plano**.

Propuesta 2: Este ejercicio sí que tiene contexto, por lo que el alumno tiene que, además de resolver el problema geométrico asociado, contextualizar e interpretar todos los elementos que aparecen.

a) De nuevo una de las técnicas usadas es la de **discutir las posibles soluciones del sistema generado por sus ecuaciones generales**, o viendo **la relación entre los vectores directores de la recta y el vector generado por un punto de cada recta**.

Además, serán necesarias técnicas auxiliares tales como el **cálculo de un vector conocidos dos puntos**, o el **cálculo del rango de una matriz**.

b) En este apartado es complicado indicar el uso o no de una técnica a la hora de resolverlo. Esto es así porque lo verdaderamente importante consiste en **interpretar la componente *z*** en los términos del problema, tanto de la posición del avión como de la dirección. Al concluir el avión tiene componente positiva, la dirección con z negativa ha de ser la del avión aterrizando, pues se aproxima al plano $z = 0$.

c) En este apartado ocurre algo similar al apartado anterior. Lo importante es que contextualice el problema desde un punto de vista geométrico, con el fin de que pueda descubrir lo que es importante geométricamente sobre la posición del avión respecto del suelo.

Propuesta 3: Esta propuesta, como la primera, no tiene contexto, con el fin de que puedan enfrentarse a problemas similares a los que se encontrarán en la prueba objetiva realizada al final de curso:

a) En este apartado se usan diversas técnicas. Pueden usarse todas aquellas que tengan que ver con el **cálculo de la posición relativa de planos**, pudiéndose usar la de planos **dos a dos** o la de **tres planos**.

Además, como técnicas auxiliares se usan algunas como el cálculo del **rango de una matriz**.

b) Las técnicas empleadas en este apartado son el **cálculo de la ecuación de la recta de intersección de dos planos**, el **cálculo de la ecuación de un plano en función de un punto y su vector director**.

También puede que el alumno tenga que usar la técnica de **calcular el producto vectorial** entre los vectores normales de los planos, para hallar el vector director de la recta, en caso de que le resulte más sencillo obtener la recta en **paramétricas**.

c) Este apartado tiene una técnica que se aplica de manera clara, que es **el cálculo de la distancia entre punto y plano**. No obstante, es muy fácil comprobar la distancia de P a π_1 si el alumno aplica la técnica de **comprobar si un punto está en un plano**, ya que $P \in \pi_1$, y por lo tanto $d(P, \pi_1) = 0$.

3. Dichas técnicas, ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Hay que hacer una aclaración sobre este apartado, dado que de los ejercicios propuestos hay dos que no pertenecen al campo de problemas y se tratan de ejercicios sin contexto. Todo lo que se diga en este apartado se refiere al ejercicio propuesto con contexto, y se puede extender también a todos los del mismo tipo que se quieran proponer.

Las técnicas requeridas en el problema contextualizado son claramente adecuadas en lo concerniente al campo de problemas. Dado que el este no deja de ser una contextualización de ejercicios de geometría (más concretamente de posiciones relativas de cuerpos geométricos), es innegable la relación existente entre las técnicas a aplicar y las conclusiones que se piden los ejercicios con contexto.

En este ejercicio se requieren técnicas relacionadas con la posición relativa entre cuerpos geométricos (en este caso **recta y plano**). El único elemento que se puede considerar exótico dentro del enunciado es el apartado donde se piden direcciones del avión, aunque lo que se está pidiendo en realidad es una interpretación geométrica del contexto. Esto hace que pase a considerarse como parte del campo de problemas, además de tener una relación directa con la razón de ser propuesta para esta unidad didáctica.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Para ejemplificar la metodología, vamos a mostrar la referida a la **Propuesta 2**, ya que, al ser el contextualizado, nos va a permitir recalcar los puntos más interesantes de la propuesta.

Este ejercicio aparecerá una vez que hayan visto la técnica referente a la posición relativa de rectas. La idea de realizar este ejercicio será poner a los alumnos por grupos (de 3 o 4 personas), proponer el enunciado y dejar que realicen el ejercicio. En caso de que haya dudas, se tratará de ir dando pistas poco a poco. En principio, el orden en el que se irán introduciendo las pistas será la siguiente:

1. ¿Qué cuerpo geométrico describe la trayectoria de un avión o un pájaro?
2. ¿Cuál es el plano del suelo?
3. ¿El avión está por encima o por debajo del suelo? ¿Qué quiere decir eso?
4. ¿Qué determina que se acerque o aleje del suelo?

Estas son solo algunas de las dudas más recurrentes, pero estas se pueden adaptar dependiendo de las dudas que tenga el alumno. Una vez que haya pasado el tiempo determinado (en principio unos 5-10 minutos) o todos los alumnos crean que lo han resuelto, se irá resolviendo paso a paso el ejercicio en la pizarra. Durante la resolución, se irá preguntando antes de dar un paso qué han pensado los alumnos.

H. Sobre las Tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

La justificación de las técnicas se irá desarrollando conforme estas vayan apareciendo. Debido a las técnicas principales (muchas de las cuales consisten en determinar la posición relativa en función de las posibles soluciones del sistema), muchos de los razonamientos serán análogos. Por este motivo, cuando en este apartado indiquemos esta tecnología, no explicitaremos la misma para otras técnicas cuya justificación es similar.

Rango de matrices: esta tecnología justifica casi todas las técnicas sobre a la posición relativa de objetos geométricos. Expondremos el razonamiento asociado a dos planos, ya que contiene todos los elementos cualitativos a este respecto. Así pues, se procederá siguiendo el siguiente esquema. Primero se expondrán las ecuaciones de los planos en sus ecuaciones generales. Después, si a ningún alumno se le ocurre nada que proponer, se preguntará a los alumnos si sabrían decir si hay puntos comunes entre el problema a resolver y lo visto en la parte de álgebra.

Si pese a todo no consiguen establecer un vínculo, se les preguntará en qué consiste resolver un sistema de ecuaciones. Cuando propongan (si no se les ocurre lo tendrá que proponer el profesor) que resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los puntos que cumplen todas las condiciones, se les mostrará (si a ellos no se les ocurre) que el problema que se presenta es básicamente el mismo.

Esta tecnología tiene, a efectos de mostrar los conocimientos del curso, un doble propósito. Por un lado, en un inicio la justificación de la tecnología vendrá dada por el conocimiento previo del alumno del rango de matrices. No obstante, conforme el alumno esté más familiarizado con este concepto, el profesor (o al propio alumno) podrá dar una interpretación geométrica del rango de una matriz. Esta característica tiene un gran interés desde el punto de vista de la justificación de cualquier aspecto matemático, ya que se consigue reforzar una faceta sobre la que se habla mucho pero no suele hacerse hincapié, como es la retroalimentación y relación de todos los elementos de las matemáticas.

Interpretación geométrica del producto escalar: La relación que hay entre el producto escalar y la posición entre los vectores es crucial a la hora de ver la posición relativa de una recta respecto a un plano. Esta tecnología no necesita, en principio, una explicación extra, ya que esta relación se ha visto ya en el tema previo. En clase hay que enfatizar esto, preguntando a los alumnos cómo se puede usar el producto escalar para observar la posición relativa entre la recta y el plano. Además esta tecnología permite justificar el cálculo de ángulo entre dos vectores, y por tanto, el ángulo formado por dos superficies (rectas o planos) secantes.

Haz de rectas: Esta tecnología se introduce para hablar de la posición de rectas. En principio no hará falta insistir excesivamente en la relación entre el haz de planos y la ecuación implícita de la recta, ya que eso se habrá visto en el tema anterior. Se incidirá, no obstante, en la relación entre el haz de rectas y la posición relativa entre recta y plano. A pesar de que se terminará reduciendo el problema a los rangos de matrices, esta tecnología pretende relacionar el problema de posición relativa de tres planos y el de recta y plano.

2. ¿Quién será el responsable de justificar las técnicas?

Debido al carácter dialéctico de la propuesta, no está establecido quién será el encargado de justificar las técnicas. Por un lado, al principio se propondrá a los alumnos un problema para que lo resuelvan. Esto, unido a que la mayor parte de las tecnologías se han visto el tema anterior o este mismo curso, propicia que pueda ser **el propio alumno** el que encuentre el camino de la justificación de las técnicas y las comparta con sus compañeros a lo largo de las propuestas de la resolución.

No obstante, puede ser que ningún alumno sea capaz de justificar las técnicas por múltiples motivos. En ese caso, es responsable el **profesor** de justificar las técnicas durante la institucionalización de las mismas.

La idea general es que el alumno sea lo suficientemente autosuficiente para justificar las técnicas que genere desde un punto de vista algebraico, pero que sea el profesor el que relacione todo el aspecto algebraico y geométrico y sirva de guía.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático

Pondremos aquí dos ejemplos. El primero será la institucionalización del caso de **recta y plano con sus ecuaciones generales** y servirá para ejemplificar la institucionalización de técnicas basadas en los rangos de matrices. Para empezar, el profesor escribirá el sistema de ecuaciones generado por las ecuaciones de los objetos geométricos. Después preguntará qué significa resolver un sistema de ecuaciones. La idea es que los alumnos (y si no será el profesor) indiquen que eso es buscar las incógnitas que hacen que se cumplan las tres ecuaciones. Una vez aclarado esto se les preguntará, teniendo eso en mente, qué significa que haya una única solución de este sistema generado por las ecuaciones del plano y la recta. Lo esperado es que algún alumno indique que se cortan en un punto.

No obstante, hay que tener en cuenta que este es el punto clave de toda la institucionalización, de manera que hay que dejar claro esta relación entre la parte algebraica y la geométrica.

Una vez aclarado este punto, se pedirá al alumno que teorice sobre qué significará que el sistema sea compatible indeterminado y que sea incompatible. La relación entre la dimensión del subespacio vectorial generado por las soluciones es vital para esta propuesta.

El otro ejemplo será también el de la posición general de recta y plano pero esta vez con la **recta dada por un punto y un vector director**. En este caso, se les preguntará a los alumnos cómo interpretarían geométricamente el hecho de que el producto escalar del vector director de la recta y el vector normal del plano. Llegados a este punto, es posible que algún alumno indique o bien que es paralela o bien que la contiene. En caso de que ninguno exponga las dos opciones (o incluso que ninguno exponga ninguna), se procederá a dar una explicación de este caso. Una vez aclarado esto, se les preguntará a los alumnos cómo saber si la recta está contenida o es paralela. Si a ninguno se le ocurre cómo discernir esto, se les expondrá que basta con averiguar si un punto de la recta está en el plano.

Análogamente, se expondrá el caso de que el producto escalar no sea nulo.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Como ya se ha explicado anteriormente, la idea es que la metodología sea muy **dialéctica**. Esto implica que durante la resolución del problema que dé lugar a la técnica, se les irá preguntando a los alumnos del porqué de sus propuestas.

Principalmente se pretende que sean los propios alumnos los que intenten armar un argumento matemático dentro de sus posibilidades. El profesor, en la pizarra, pedirá a los alumnos que den propuestas de porqué la técnica puede funcionar en función de sus conocimientos previos.

I. Evaluación

1. Prueba escrita

1. El servicio de inteligencia de un país quiere destruir una torre vertical de vigilancia de 14 metros de altura y cuya base está en $(12, a, 0)$ (en kilómetros). Suponiendo que el misil sale de la posición $(10,5,20)$ con dirección $(2,0,-10)$ y sabiendo que el plano del suelo es el $z = 0$:
    a. Calcula la ecuación de las rectas sobre las que se encuentran la torre de vigilancia y el misil
    b. Calcula a para que el misil dé en el objetivo
    c. Si $a = 5$ y el misil sale en dirección $(10,0,0)$, ¿el misil dará en el objetivo? ¿Por qué?

2. Un avión trata de sobrevolar una montaña de 6 kilómetros de altitud. El avión está en la posición $(10,3,4)$ (en kilómetros), y viaja con dirección $(5,10,1)$. La ladera de la montaña más próxima se encuentra limitada por el plano $\pi \equiv -x - y + 2z = -20$.
    a. Calcula la ecuación de la recta que describe la trayectoria del avión
    b. Calcula la posición relativa de la recta anterior con el plano de la montaña

c. ¿Se llegará a chocar el avión? ¿Por qué?
d. Suponiendo que el piloto quiere cambiar la dirección a $(5,10,a)$ para evitar la colisión, ¿existirá un valor de a que haga que el avión no choque?.

3. Dos alumnos que se aburren mucho en clase tratan de dibujar una casa cúbica con GeoGebra en 3D. Para montar una pared, uno de los dos propone usar un plano, cuya ecuación es $\pi \equiv 3x + 2y - z = 30$. El otro alumno propone dos ecuaciones de planos: $\pi_1 \equiv 6x + 4y - 2z = -20$ y $\pi_2 \equiv 2x + y + 12z = 4$, uno para el suelo y otro para la pared de enfrente.
   a. Estudia la posición relativa del plano π respecto a π_1 y π_2 respectivamente.
   b. En función de esto, ¿cuál será el plano de la pared del suelo? ¿Y de la pared de enfrente? ¿Por qué?
   c. Calcula la ecuación en paramétricas de las rectas que forman las paredes con el suelo
   d. Al montar los planos, ven que el suelo está inclinado. Demuestra que esto es así y propón un plano que no esté inclinado.

2. Aspectos del conocimiento de los alumnos que pretendo evaluar con cada una de las preguntas

Este examen consta, como hemos podido ver, de 3 preguntas, cada una de las cuales tiene 3 apartados. Veamos qué pretendemos evaluar con cada una de estas preguntas.

Antes de comenzar, vamos a hacer una recopilación de todos los estándares de aprendizaje que se evalúan en la prueba, con el fin de citarlos una única vez y hacer referencia en el desarrollo únicamente a su código:

- <u>Est.MA.1.1.1</u>: Expresa verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido en la resolución de un problema, con el rigor y la precisión adecuados.
- <u>Est.MA.1.2.1</u>: Analiza y comprende el enunciado a resolver o demostrar (datos, relaciones entre los datos, condiciones, hipótesis, conocimientos matemáticos necesarios, etc.)

- Est.MA.1.4.1: Usa el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados al contexto y a la situación.
- Est.MA.1.8.1: Identifica situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés.
- Est.MA.1.8.2: Establece conexiones entre el problema del mundo real y el mundo matemático: identificando el problema o problemas matemáticos que subyacen en él, así como los conocimientos matemáticos necesarios.
- Est.MA.1.8.3: Usa, elabora o construye modelos matemáticos adecuados que permitan la resolución del problema o problemas dentro del campo de las matemáticas
- Est.MA.1.8.4: Interpreta la solución matemática del problema en el contexto de la realidad.
- Est.MA.4.1.1: Realiza operaciones elementales con vectores, manejando correctamente los conceptos de base y de dependencia e independencia lineal.
- Est.MA.4.2.1: Expresa la ecuación de la recta de sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente, identificando en cada caso sus elementos característicos y resolviendo los problemas afines entre rectas.
- Est.MA.4.2.2: Obtiene la ecuación del plano en sus distintas formas, pasando de una a otra correctamente.
- Est.MA.4.2.3: Analiza la posición relativa de planos y rectas en el espacio, aplicando métodos matriciales y algebraicos.
- Est.MA.4.2.4: Obtiene las ecuaciones de rectas y planos en diferentes situaciones.
- Est.MA.4.3.1: Maneja el producto escalar y vectorial de dos vectores, significado geométrico, expresión analítica y propiedades.

Pregunta 1

Apartado a: En este apartado, se pide calcular la ecuación de la recta sobre la que está la torre. Este apartado cumple un doble propósito. Por un lado, servirá de **ayuda al alumno** dándole una manera de empezar el ejercicio y obligándole a sacar una de los elementos necesario para resolver los dos apartados siguientes.

Por otro lado, también se evalúa la técnica de hallar la **ecuación de una recta dados dos puntos** o bien **dado un punto y un vector**. Por último, y quizá más relevante debido al objetivo de esta propuesta metodológica, evalúa la **interpretación geométrica de datos contextualizados** y permite observar si el alumno se hace una idea espacial de lo que ocurre en el problema. En este caso, consiste en determinar o bien otro punto de la torre en función de los datos (por ejemplo $(12, a, 14)$), o bien determinar un vector perpendicular al suelo (por ejemplo $(0,0,1)$).

Tareas principales	- Encontrar una estrategia adecuada para hallar la ecuación de la recta determinada por la torre
Tareas auxiliares específicas	-Cálculo de la ecuación de una recta conocidos dos puntos -Cálculo de la ecuación de una recta conocido un punto y un vector -Cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos
Tareas auxiliares generales	-Operaciones aritméticas y algebraicas

- <u>Estándares de aprendizaje</u>: Est.MA.1.1.1, Est.MA.1.2.1, Est.MA.1.4.1, Est.MA.1.8.1, Est.MA.1.8.3, Est.MA.1.8.4, Est.MA.4.1.1, Est.MA.4.2.4.

Apartado b: El campo de problemas de este apartado tiene que ver con la **posición relativa de dos rectas**, en este caso **en función de un parámetro**. Las técnicas que se pueden emplear son varias, aunque la que más se trabaje en clase será **la posición relativa de dos rectas en función de su ecuación general**. Esto es así porque el hilo conductor de todas estas técnicas será la de la discusión de las soluciones de ecuaciones. No obstante, no será la única técnica vista, por lo que podrían aplicar **la posición relativa de dos rectas conocidos los vectores directores y dos puntos.**

También esta pregunta evalúa nuevamente la interpretación geométrica de los resultados, pues tienen que interpretar qué significa que el misil impacte a efectos geométricos.

Tareas principales	- Encontrar una estrategia adecuada para hallar una a que haga que el misil impacte
Tareas auxiliares específicas	-Cálculo de la posición relativa de dos rectas en función de sus ecuaciones generales -Extracción de información de una recta a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.) - Cálculo de la posición relativa de dos rectas en función de sus vectores directores y un punto de cada una -Cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos -Cálculo del rango de una matriz -Cálculo del determinante de una matriz
Tareas auxiliares generales	-Operaciones aritméticas y algebraicas

- Estándares de aprendizaje: Est.MA.1.1.1, Est.MA.1.2.1, Est.MA.1.4.1, Est.MA.1.8.1, Est.MA.1.8.3, Est.MA.1.8.4, Est.MA.4.1.1, Est.MA.4.2.1, Est.MA.4.2.4

Apartado c: Este apartado también tiene que ver con el campo de problemas de **la posición relativa de dos rectas**, pero a diferencia del apartado anterior, en este caso la resolución no depende de un parámetro. Como en hemos visto arriba, se pueden aplicar dos técnicas distintas para la resolución de este ejercicio, en función de si estudias la posición relativa **en función de sus ecuaciones generales** o **en función de los vectores directores y un punto de cada recta**.

Independientemente de la técnica elegida, una parte importante del ejercicio, y que atañe a la razón de ser tenida en cuenta en el presente trabajo, es la interpretación de la validez de la solución obtenida en función del contexto. En este caso, el punto de corte obtenido es el $(12,5,20)$. Al mirar la altura a la que chocaría (que corresponde con la coordenada z), se ve que la altura supera a la de la torre (20 frente a 14), por lo que pese a que las rectas sí que se cortan, el misil no alcanzaría el objetivo.

Tareas principales	- Encontrar una estrategia adecuada para dilucidar si el misil efectivamente impacta o no.
Tareas auxiliares específicas	-Cálculo de la posición relativa de dos rectas en función de sus ecuaciones generales -Extracción de información de una recta a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.) - Cálculo de la posición relativa de dos rectas en función de sus vectores directores y un punto de cada una -Cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos -Cálculo del rango de una matriz -Cálculo del determinante de una matriz
Tareas auxiliares generales	-Operaciones aritméticas y algebraicas

- Estándares de aprendizaje: Est.MA.1.1.1, Est.MA.1.2.1, Est.MA.1.4.1, Est.MA.1.8.1, Est.MA.1.8.3, Est.MA.1.8.4, Est.MA.4.1.1, Est.MA.4.2.1, Est.MA.4.2.4

Pregunta 2

Apartado a: Este apartado, como pasaba con el primer apartado del ejercicio anterior (y pasará con el del siguiente ejercicio) trata de ser una ayuda para empezar el ejercicio a los alumnos y obtener información necesaria para la resolución de los apartados subsiguientes.

La técnica a evaluar es nuevamente el **cálculo de la ecuación de una recta conocido un punto y el vector director**.

Tareas principales	- Encontrar una estrategia adecuada para hallar la ecuación de la recta de la trayectoria del avión
Tareas auxiliares específicas	-Cálculo de la ecuación de una recta conocidos dos puntos -Cálculo de la ecuación de una recta conocido un punto y un vector -Cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos
Tareas auxiliares generales	-Operaciones aritméticas y algebraicas

- <u>Estándares de aprendizaje</u>: Est.MA.1.1.1, Est.MA.1.2.1, Est.MA.1.4.1, Est.MA.1.8.1, Est.MA.1.8.3, Est.MA.1.8.4, Est.MA.4.1.1, Est.MA.4.2.4.

Apartado b: Este apartado tiene por objeto aplicar la **técnica de la posición relativa entre recta y plano**. La idea principal del ejercicio de la técnica es acostumbrar al alumno a ejercicios más similares a los de la prueba objetiva realizada al final de curso.

Tareas principales	- Encontrar una estrategia adecuada para calcular la posición relativa entre la recta del avión y el plano
Tareas auxiliares específicas	-Cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus ecuaciones generales -Extracción de información de una recta a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.) - Cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus vectores directores y un punto de la recta -Cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de la ecuación paramétrica y la ecuación general del plano -Cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos -Cálculo del rango de una matriz -Cálculo del determinante de una matriz
Tareas auxiliares generales	-Operaciones aritméticas y algebraicas

- Estándares de aprendizaje: Est.MA.1.1.1, Est.MA.1.2.1, Est.MA.1.4.1, Est.MA.1.8.1, Est.MA.1.8.3, Est.MA.1.8.4, Est.MA.4.1.1, Est.MA.4.2.4.

Apartado c: En este apartado se espera que el alumno interprete geométricamente el resultado, comparando el punto de corte hallado anteriormente con la altura de la montaña. Al observar que la altura (la componente z) es menor, tendrá que concluir que el avión sí se estrella.

Tareas principales	- Encontrar una estrategia adecuada para dilucidar si el avión efectivamente se estrella o no.
Tareas auxiliares específicas	-Cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus ecuaciones generales -Extracción de información de una recta a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.) - Cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus vectores directores y un punto de la recta -Cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de la ecuación paramétrica y la ecuación general del plano -Cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos -Cálculo del rango de una matriz -Cálculo del determinante de una matriz
Tareas auxiliares generales	-Operaciones aritméticas y algebraicas

- Estándares de aprendizaje: Est.MA.1.1.1, Est.MA.1.2.1, Est.MA.1.4.1, Est.MA.1.8.1, Est.MA.1.8.3, Est.MA.1.8.4, Est.MA.4.1.1, Est.MA.4.2.2, Est.MA.4.2.3, Est.MA.4.2.4.

Apartado d: Este apartado pertenece al campo de problemas de **posición relativa de recta y plano**, pero esta vez dependiendo de un parámetro. Las posibles técnicas a evaluar serían las mismas que en el apartado anterior.

En este caso, la posible **interpretación geométrica del ejercicio** puede hacer que no sea ni necesario hacer cálculo, como se puede ver más adelante. Este tipo de razonamiento no solo es válido, sino que sería un reflejo de que mi propuesta (y de la principal razón de ser esgrimida) está dando frutos.

Tareas principales	- Encontrar una estrategia adecuada para encontrar una a que impida la colisión.

Tareas auxiliares específicas	-Cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus ecuaciones generales -Extracción de información de una recta a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.) - Cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus vectores directores y un punto de la recta -Cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de la ecuación paramétrica y la ecuación general del plano -Cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos -Cálculo del rango de una matriz -Cálculo del determinante de una matriz
Tareas auxiliares generales	-Operaciones aritméticas y algebraicas

- <u>Estándares de aprendizaje</u>: Est.MA.1.1.1, Est.MA.1.2.1, Est.MA.1.4.1, Est.MA.1.8.1, Est.MA.1.8.3, Est.MA.1.8.4, Est.MA.4.1.1, Est.MA.4.2.2, Est.MA.4.2.3, Est.MA.4.2.4.

Pregunta 3

Apartado a: Este apartado es relativo al campo de problemas de **posición relativa de planos**. Está pensado para ayudar a los alumnos a llegar a la conclusión correcta, forzándoles a realizar el estudio necesario de todos modos. Respecto a la técnica a evaluar, se puede utilizar tanto la **posición relativa de dos planos usando sus ecuaciones generales** o la **posición relativa de dos planos usando sus vectores directores**.

Tareas principales	-Encontrar una estrategia adecuada para estudiar la posición relativa de los dos planos
Tareas auxiliares específicas	-Cálculo de la posición relativa de plano y plano en función de sus ecuaciones generales -Extracción de información de un plano a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.) - Cálculo de la posición relativa de plano y plano en función de sus vectores directores -Cálculo del rango de una matriz -Cálculo del determinante de una matriz
Tareas auxiliares generales	-Operaciones aritméticas y algebraicas

- <u>Estándares de aprendizaje</u>: Est.MA.1.1.1, Est.MA.1.2.1, Est.MA.1.4.1, Est.MA.1.8.1, Est.MA.1.8.3, Est.MA.1.8.4, Est.MA.4.1.1, Est.MA.4.2.2, Est.MA.4.2.3.

Apartado b: En este ejercicio se espera que el alumno **interprete geométricamente la información obtenida anteriormente**, con el fin de que sepa interpretar qué significa que sea la pared de enfrente (en este caso que el plano sea paralelo) y que sea el suelo.

Tareas principales	- Encontrar una estrategia adecuada para dilucidar qué plano será la pared de enfrente y qué plano será el suelo
Tareas auxiliares específicas	-Extracción de información de un plano a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.)
Tareas auxiliares generales	-Operaciones aritméticas y algebraicas

- <u>Estándares de aprendizaje</u>: Est.MA.1.1.1, Est.MA.1.2.1, Est.MA.1.4.1, Est.MA.1.8.1, Est.MA.1.8.3, Est.MA.1.8.4, Est.MA.4.1.1, Est.MA.4.2.2, Est.MA.4.2.3.

Apartado c: Este apartado sigue formando parte del campo de problemas de **posición relativa de planos**, pero en este caso se requiere de la técnica de **determinar el ángulo que forman dos planos**.

Además, para la segunda parte del apartado se necesita usar la técnica anterior para **encontrar un vector perpendicular a otro**, para usar ese vector como director y conseguir un plano perpendicular a los planos que forman las paredes.

Tareas principales	-Encontrar una estrategia adecuada para determinar el ángulo generado por los planos de las paredes y el suelo -Encontrar una estrategia adecuada para hallar un plano perpendicular a las paredes
Tareas auxiliares específicas	-Generación de un plano a partir de su vector director -Cálculo de la posición relativa de dos planos -Extracción de información de un plano a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.)
Tareas auxiliares generales	-Operaciones aritméticas y algebraicas

- <u>Estándares de aprendizaje</u>: Est.MA.1.1.1, Est.MA.1.2.1, Est.MA.1.4.1, Est.MA.1.8.1, Est.MA.1.8.3, Est.MA.1.8.4, Est.MA.4.1.1, Est.MA.4.2.2, Est.MA.4.2.3, Est.MA.4.2.4.

3. Respuestas esperadas en las preguntas en función del conocimiento

Expondremos a continuación, por cada apartado, las posibles respuestas acertadas y los posibles errores encontrados. No se incluirán, no obstante, los posibles errores recurrentes en las cuentas o a la hora de aplicar mal alguna de las fórmulas.

Esto es así porque consideramos que no aporta nada cualitativo para el nivel del estudio que estamos realizando. Se incluirán aquellos errores que estén relacionados con lo que representa el enunciado y con las tareas principales o, según el caso, auxiliares específicas.

<u>Pregunta 1</u>

Apartado a

- **Resoluciones:** El cálculo de la recta de la **torre**, como se ha dicho anteriormente, puede resolverse principalmente de dos maneras distintas. La primera, que es la esperada como más usual, consiste en reconocer un **vector perpendicular al plano $\boldsymbol{z = 0}$**, que es el del suelo, por ejemplo el $(0,0,1)$, y calcular la ecuación de la recta dado un punto (la base de la torre) y el vector hallado.

Otra opción consiste en reconocer que es la variable z la que determina la altura, y escoger **otro punto de la torre** con la componente z distinta (por ejemplo, $(12, a, 1)$). Una vez obtenido este punto, bastaría con aplicar la fórmula para obtener la ecuación de una recta conocidos dos puntos.

Para el cálculo de la recta del **misil**, lo esperado es el cálculo de la recta usando la posición y la dirección (puesto que está indicado en el enunciado).

- **Posibles errores:** El punto más delicado de este apartado es la obtención de la recta de la torre. En vista de esto, pueden darse diversos errores. El principal, y que puede ser común a muchos de los apartados del examen, es **no interpretar adecuadamente la situación en términos geométricos**, y por lo tanto, no ser capaces de extraer otro dato necesario sobre la torre para calcular la ecuación de su recta. Esto puede llevar, entre a otras cosas, a no ser capaz de hallar un vector perpendicular al suelo, o suponer que ese vector debe de ser el que tiene como componente $z = 0$, por ejemplo $(1,1,0)$.

Respecto al cálculo de la recta del misil, es complicado pensar en una mala interpretación geométrica, debido a que el propio enunciado especifica la posición y la dirección del misil, sin que sea necesario por parte del alumno la extracción de más datos. Este hecho permite subsanar un bloqueo en este sentido para el alumno y que sea capaz al menos de responder a la mitad de este apartado.

Apartado b:

- **Resoluciones:** La resolución más común consiste en el estudio de la posición relativa entre las rectas del misil y de la torre. Estos datos han tenido que obtenerse en el apartado anterior, de manera con el estudio de la posición relativa ya mencionado. Esto se puede hacer, como se ha dicho anteriormente, mediante **sus ecuaciones generales**, o mediante **los vectores directores y un punto de cada recta**. En esta ocasión es más probable que usen esta última, debido a que los datos son más propensos a usar esto, pero es probable que un alumno se considere con más soltura con el otro método y lo utilice pese a esto.

Otra posibilidad es que algún alumno estudie los datos cuidadosamente, y observe que el **vector de dirección del misil**, $(2,0,-10)$, **no varía el componente de la y**, que es el que tiene el componente a. Esto hace que forzosamente a tenga que ser el mismo que la posición inicial del misil, esto es, $a = 5$. Una vez visto esto, es cuestión de ver si las rectas vistas anteriormente, cambiando a por 5 se llegan a cortar o no.

- **Posibles errores:** Aparte de los potenciales errores en las cuentas, o aquellos derivados de una incorrecta aplicación del procedimiento a la hora de estudiar la posición relativa, está la posibilidad de **no interpretar adecuadamente el contexto geométrico**.

Otro posible error, derivado de la última resolución propuesta anteriormente, es interpretar que con observar que $a = 5$ el ejercicio ha concluido, sin comprobar que las rectas efectivamente se cortan.

Apartado c:

- **Resoluciones:** Este problema se resuelve, principalmente, calculando la posición relativa de las rectas originadas por la torre y el misil, aunque quitando en este caso el parámetro a. Por ello, las principales resoluciones que se pueden dar son las mismas que las de arriba, es decir **usando sus ecuaciones generales**, o bien **usando sus vectores directores y un punto de cada recta**. Una vez obtenido el punto de corte, que es el $(12,5,20)$, el alumno tiene que argumentar que no habría un choque, pues la altura de la supuesta colisión es más alta que la de la torre.

No obstante, y como ocurría en el apartado anterior, un alumno podría observar que **la recta únicamente varía la componente $\boldsymbol{x}$**, por lo que la componente z del hipotético punto de corte tendría que ser $(12,5,20)$. A partir de aquí, hay dos vertientes. Un alumno puede intentar observar si ese punto pertenece a la recta, y después hacer el razonamiento de la altura. No obstante, también podría darse cuenta antes de que, al ser $(12,5,20)$ el único punto donde podría cortar, corte o no corte la altura de la torre queda por debajo, y por lo tanto no hay colisión posible.

- **Posibles errores:** El error más esperado en este apartado es que comprueben que las rectas se cortan y **no comprueben la altura**. Al ver que efectivamente las rectas son secantes pueden concluir, erróneamente, que el misil dará en el objetivo a pesar de que no es así.

No obstante, también se pueden dar errores frecuentes a la hora de aplicar mal las técnicas del cálculo de la posición relativa o una interpretación incorrecta del contexto geométrico.

Pregunta 2

Apartado a:

- **Resoluciones:** Este ejercicio tiene varias resoluciones, debido a que el enunciado no especifica el tipo de ecuación pedido para la recta. No obstante, debido a los datos lo normal es que opten por una **ecuación vectorial** o **paramétricas**. Al tener que ver, posteriormente, la posición relativa, también es probable e interesante que muchos intenten escribirlo mediante su **ecuación general**, pese a que en clase se verá también la técnica del cálculo de la posición relativa en función de la ecuación vectorial.

- **Posibles errores**: En este caso es poco probable que haya un error de interpretación geométrica del contexto, ya que para calcular la recta únicamente hace falta la posición y la dirección, y ambas cosas están dadas por el enunciado.

No obstante, sigue siendo posible que algún alumno cometa **errores en las cuentas o en la aplicación de las técnicas**.

Apartado b:

- **Resoluciones:** Este apartado tiene varias posibles resoluciones, dependiendo de si se usa la técnica de la posición relativa usando el **vector director y un punto de la recta**, o de si se usan su **ecuación general**.

  En cualquiera de los dos casos, se espera que el alumno calcule el **punto de corte**.

- **Posibles errores**: Los posibles errores asociados y esperados en este ejercicio son principalmente de tipo **aritmético**, debido a que las cuentas tienen una ligera complejidad. Como pasara en ejercicios anteriores, también puede haber errores al **aplicar la técnica**.

Apartado c:

- **Resoluciones:** En caso de no haber hallado el punto de corte en el apartado anterior, el alumno deberá calcularlo.

En función del punto de corte se espera que el alumno **compare la componente z con la altura de la montaña** dada por el enunciado. Este componente vale 5.15, de manera que el alumno tiene que concluir que sí que chocaría.

- **Posibles errores**: Además de los errores esperados comunes a todos los apartados, como son fallos de tipo aritmético o de desconocimiento de la técnica necesaria, está el error de **no interpretar geométricamente los resultados obtenidos**. Esto puede lugar, como ocurría en el apartado c del ejercicio anterior, a que los alumnos concluyan que al haber punto de corte hay colisión, cuando el motivo es que ese punto de corte se encuentra a una altura menor que la de la montaña.

Apartado d:

- **Resoluciones:** Este ejercicio tiene dos resoluciones principales. La primera, más ardua, consiste en **calcular la posición relativa en función de a**, y darle un valor para que no haya soluciones. En este caso, si $a = \frac{15}{2}$, el rango de la matriz (sin ampliar) del sistema es 2, luego o la recta está contenida o son paralelas. Como el punto del avión no está en el plano, hay que concluir que serían paralelas, luego con ese a obtendríamos una dirección que evitaría la colisión. También se puede obtener una situación parecida anulando el producto escalar entre el vector normal del plano y el vector de la dirección.

No obstante, puede que algunos alumnos, con la situación en mente, consideren que si aumentan la a lo suficiente, el avión cada vez se irá elevando más, por lo que el punto de corte de las rectas estará más alto (aumenta el componente z). Por lo tanto, en algún momento habrá una a que haga que la componente z sea mayor que la altura de la montaña. Esta resolución, que viene dada por una **interpretación geométrica del problema**, lejos de ser un problema significa que está adquiriéndose adecuadamente lo que hemos constituido la razón de ser de la unidad didáctica.

- **Posibles errores:** Uno de los principales errores que pueden cometer los alumnos en este ejercicio es no interpretar adecuadamente la situación a efectos geométricos, Por ejemplo, no interpretar qué quiere decir que no haya solución, o directamente que no se les ocurra qué procedimientos geométricos aplicar para resolver esta cuestión.

Pregunta 3

Apartado a:

- **Resoluciones:** Al ser este apartado una ejercitación de la técnica de la posición relativa de planos, y no requerirse nada más, se espera por tanto que el alumno use la técnica de **cálculo de la posición de dos planos usando sus ecuaciones generales**.

No obstante, es probable que algún alumno observe rápidamente que el plano π_1 es paralelo al plano π, debido a que sus vectores normales son proporcionales, pero su término independiente no lo es. Análogamente, el vector normal al plano π_2 no es proporcional al de π, por lo que los planos son secantes.

- **Posibles fallos:** En este caso, los únicos fallos posibles asociados a este problema consisten en el desconocimiento o la mala aplicación de las técnicas. En particular, es posible que un alumno no concluya satisfactoriamente la **relación entre la proporcionalidad o no de los vectores normales** y su posición relativa.

Otro posible error es que se apresure en sus conclusiones y obtenga que dado que los vectores son proporcionales, los planos han de ser paralelos, **sin comprobar el término independiente**.

Apartado b:

- **Resoluciones:** este apartado, que resulta bastante sencillo si se ha hecho bien el anterior, pretende que el alumno **interprete geométricamente los resultados obtenidos previamente**. Así pues, se espera que el alumno diga que el plano que no corta tiene que ser la pared de enfrente, mientras que el que sí colisiona tiene que ser el suelo.

Cabe la posibilidad de que el alumno lleve a cabo un razonamiento válido en este apartado sin haber resuelto el anterior, **observando únicamente los vectores directores**

de $\boldsymbol{\pi_1}$ y $\boldsymbol{\pi_2}$. No obstante, esto es poco probable debido a que el razonamiento para esto es análogo al usado previamente

- **Posibles fallos:** Al no ser necesario realizar cuentas para hacer este apartado, es poco probable hallar errores de tipo aritmético (salvo que este apartado incluya lo que se supone que tendría que haber hecho anteriormente).

Lo que sí que es plausible es que el alumno interprete de manera errónea los elementos y características geométricas necesarias para realizar este apartado. **Es decir, que no relacione que las paredes opuestas de una casa cúbica son paralelas**. Otro fallo interpretativo es que no vea que **el suelo siempre corta a las paredes**, y por tanto el plano del suelo tiene que ser secante respecto al plano de las paredes.

Apartado c:

- **Resoluciones:** En este caso, para determinar que el suelo está inclinado, el alumno puede optar por dos caminos. El primero, más seguro, consiste en aplicar la **técnica del cálculo de incidencia de dos planos**.

No obstante, un alumno podría darse cuenta de que si fuera perpendicular, los vectores normales de los planos tendrían que ser perpendiculares, y reduce el problema a calcular el **producto escalar entre los vectores directores** y observar que es distinto de 0. Para calcular un plano que no esté inclinado, basta con generar cualquier plano cuyo vector normal sea perpendicular al normal de las paredes

- **Posibles fallos:** En este apartado, como en los anteriores, se corre el riesgo de que el alumno no interprete adecuadamente a efectos geométricos lo que se pide y no sepa por dónde empezar. También, como el apartado anterior, puede que **no entienda la relación entre los vectores directores del plano y su posición relativa**.

También puede que tengan problemas para encontrar un plano que no está inclinado, o incluso que pongan un **plano cuyo vector normal sea** $(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1})$, dado que se estarán imaginando visualmente de manera errónea los planos de las paredes, imaginándolos paralelos al eje z.

4. Criterios de calificación

Para los criterios de calificación, nos limitaremos a usar el **modelo de tercios** (Gairín, J.M., Muñoz, J.M, Oller, A.M., 2012) **propuesto durante las clases**. Las siguientes tablas se ha preparado teniendo en cuenta la distribución y distinción de tareas propuesto en el Apartado 2 del trabajo.

Ejercicio 1 Apartado A	Descalificación máxima
No encuentra una estrategia adecuada para hallar la ecuación de la recta determinada por la torre	100%
Error conceptual en el cálculo de la ecuación de una recta conocidos dos puntos	66%
Error conceptual en el cálculo de la ecuación de una recta conocido un punto y un vector	66%
Error conceptual en el cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos	66%
Errores de tipo aritmético	33%

Ejercicio 1 Apartado B	Descalificación máxima
No encuentra una estrategia adecuada para hallar una a que haga que el misil impacte	100%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de dos rectas en función de sus ecuaciones generales	66%
Error en la extracción de información de una recta a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.)	66%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de dos rectas en función de sus vectores directores y un punto de cada una	66%
Error conceptual en el cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos	66%
Error conceptual en el cálculo del rango de una matriz	66%

Error conceptual en el cálculo del determinante de una matriz	66%
Errores de tipo aritmético	33%

Ejercicio 1 Apartado C	Descalificación máxima
No encuentra una estrategia adecuada para dilucidar si el misil efectivamente impacta o no	100%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de dos rectas en función de sus ecuaciones generales	66%
Error en la extracción de información de una recta a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.)	66%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de dos rectas en función de sus vectores directores y un punto de cada una	66%
Error conceptual en el cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos	66%
Error conceptual en el cálculo del rango de una matriz	66%
Error conceptual en el cálculo del determinante de una matriz	66%
Errores de tipo aritmético	33%

Ejercicio 2 Apartado A	Descalificación máxima
No encuentra una estrategia adecuada para hallar la ecuación de la recta de la trayectoria del avión	100%
Error conceptual en el cálculo de la ecuación de una recta conocidos dos puntos	66%
Error conceptual en el cálculo de la ecuación de una recta conocido un punto y un vector	66%
Error conceptual en el cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos	66%
Errores de tipo aritmético	33%

Ejercicio 2 Apartado B	Descalificación máxima
No encuentra una estrategia adecuada para calcular la posición relativa entre la recta del avión y el plano	100%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus ecuaciones generales	66%
Error en la extracción de información de una recta a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.)	66%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus vectores directores y un punto de la recta	66%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de la ecuación paramétrica y la ecuación general del plano	66%
Error conceptual en el cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos	66%
Error conceptual en el cálculo del rango de una matriz	66%
Error conceptual en el cálculo del determinante de una matriz	66%
Errores de tipo aritmético	33%

Ejercicio 2 Apartado C	Descalificación máxima
No encuentra una estrategia adecuada para dilucidar si el avión se estrella o no	100%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus ecuaciones generales	66%
Error en la extracción de información de una recta a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.)	66%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus vectores directores y un punto de la recta	66%

Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de la ecuación paramétrica y la ecuación general del plano	66%
Error conceptual en el cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos	66%
Error conceptual en el cálculo del rango de una matriz	66%
Error conceptual en el cálculo del determinante de una matriz	66%
Errores de tipo aritmético	33%

Ejercicio 2 Apartado D	**Descalificación máxima**
No encuentra una estrategia adecuada para saber si existe una a que impida la colisión	100%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus ecuaciones generales	66%
Error en la extracción de información de una recta a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.)	66%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de sus vectores directores y un punto de la recta	66%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de recta y plano en función de la ecuación paramétrica y la ecuación general del plano	66%
Error conceptual en el cálculo de un vector en el espacio conocidos dos puntos	66%
Error conceptual en el cálculo del rango de una matriz	66%
Error conceptual en el cálculo del determinante de una matriz	66%
Errores de tipo aritmético	33%

Ejercicio 3 Apartado A	**Descalificación máxima**

No encuentra una estrategia adecuada para estudiar la posición relativa de los dos planos	100%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de dos planos en función de sus ecuaciones generales	66%
Error en la extracción de información de un plano a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.)	66%
Error conceptual en el cálculo de la posición relativa de dos planos en función de sus vectores directores	66%
Error conceptual en el cálculo del rango de una matriz	66%
Error conceptual en el cálculo del determinante de una matriz	66%
Errores de tipo aritmético	33%

Ejercicio 3 Apartado B	Descalificación máxima
No encuentra una estrategia adecuada para dilucidar qué plano será la pared de enfrente y qué plano el suelo	100%
Error en la extracción de información de un plano a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.)	66%
Errores de tipo aritmético	33%

Ejercicio 3 Apartado C	Descalificación máxima
No encuentra una estrategia adecuada para determinar el ángulo generado por las paredes y el suelo	100%
No encuentra una estrategia adecuada para hallar un plano perpendicular a las paredes	100%
Error conceptual en la generación de un plano a partir de su vector director	66%
Error en la extracción de información de un plano a partir de su ecuación (vector director, puntos, etc.)	66%
Errores de tipo aritmético	33%

I. Referencias Bibliográficas

Alcaide F., Hernández, J., Moreno, M., Rivière, V., Sanz, L., Serrano, E., 2016, Matemáticas II, Madrid, España, SM.

Cetner, M., 2015, Weaving Geometry and Algebra Together, The Mathematics Teacher, Vol. 108, No. 8, pp. 584-590

Chamblee, G., Hall, J., 2013, Teaching Algebra and Geometry with GeoGebra: Preparing Pre-Service Teachers for Middle Grades/Secondary Mathematics Classrooms, Computers in the Schools: Interdisciplinary Journal of Practice, Theory, and Applied Research, 30:1-2, 12-29

Colera Cañas, R., Corela Jiménez, J., Oliveira González, Mª. J., 2016, Matemáticas II, Madrid, España, Anaya

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. & Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En Investigación en Educación Matemática XVI, pp. 261-274

González, L., Valdés Á. y Latasa, M. (2015), Rectas y planos en el espacio. En Latasa, M., Matemáticas II, pp. (139-183), España, Marea Verde