Trabajo Fin de Máster

Semejanza y teorema de Thales: una propuesta didáctica para 2º de E.S.O.

Similarity (geometry) and Thales' theorem: a teaching proposal for 2^{nd} year of Secondary Education

Autora

Claudia Anoro Sacristán

Director

Alberto Arnal Bailera

Facultad de Educación

2017

Índice

A. Introducción y justificación 4
B. Definición del objeto matemático 9
B.1 Objeto matemático a enseñar, curso y asignatura en la que lo sitúas. 9
B.2 Introducción del objeto matemático en el aula. 9
i. ¿Qué es la semejanza? 9
ii. ¿Qué es el Teorema de Thales? 10
B.3 ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar? 11
C. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático 13
C.1. Justificación habitual de la introducción escolar del objeto matemático. 13
C.2. Praxeología que se enseña en el aula y efectos que produce en el aprendizaje del alumno 26
D. Conocimientos previos del alumno 31
D.1 Conocimientos previos necesarios y vistos en la enseñanza anterior. 31
D.2 Actividades sobre los conocimientos previos. 33
E. Razón de ser de los objetos matemáticos 36
E.1 Razón de ser histórica 36
E.2 Razón de ser en el aula 38
E.3 Obstáculos epistemológicos en la enseñanza 39
E.4 Metodología 42
E.5 Problemas de razón de ser 45
F. Praxeología: campo de problemas, técnicas y tecnologías 51
F.1 Campo de problemas 1: Semejanza. Propiedades de las figuras semejantes. 52
F.2 Campo de problemas 2: Razón de longitudes y áreas 66
F.3 Campo de problemas 3: Escalas 75
F.4 Campo de problemas 4: Teorema de Thales 88
F.5 Campo de problemas 5: División de segmentos. 93

F.6 Campo de problemas 6: Construcción de polígonos semejantes. 96

F.7 Campo de problemas 7: Distancias inaccesibles. 102

G. Secuencia didáctica 108

H. Evaluación 110

H.1 Prueba escrita 111

H.2 Comunicación y gestión en clase de los resultados obtenidos en la prueba 127

H.3 Tarea a entregar: GeoGebra 129

I. Bibliografía 134

J. Anexos 137

Anexo I: Soluciones de la prueba inicial diagnóstica 137

Anexo II: Elementos de Euclides, Libro VI 139

A. Introducción y justificación

El siguiente Trabajo Fin de Máster está enfocado dentro del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas, especialidad de Matemáticas, en la Universidad de Zaragoza. La realización del mismo ha estado supervisada por Alberto Arnal Bailera, profesor del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de esta Universidad.

El trabajo consiste en el desarrollo de una propuesta didáctica dónde como objeto matemático hemos elegido la semejanza y como consecuencia de esta, hablaremos también del teorema de Thales.

A continuación, realizaremos un breve análisis sobre la trayectoria que ha tenido este objeto matemático a lo largo de nuestro sistema educativo. Empezaremos desde la Ley Orgánica General del Sistema Educativo (1990), continuaremos con la Ley Orgánica de Educación (2006) y acabaremos con Ley Orgánica para la Mejora de la calidad Educativa (2013), la cual es la más actual. Esta última se implantó en 1º y 3º de la E.S.O. en el curso escolar 2015-2016 y en 2º y 4º de la E.S.O. en el curso escolar actual 2016-2017.

<table>
<tr><th colspan="2">Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE), de 3 de octubre de 1990 (publicada en el BOE de 4 de octubre)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Según el Real Decreto 1345/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria, dentro del área de Matemáticas encontramos en el tercer bloque llamado "Representación y organización del espacio" la siguiente información:</td></tr>
<tr><th>Conceptos</th><th>Procedimientos</th></tr>
<tr><td>Figuras semejantes: la representación a escala:
– Representaciones manejables de la realidad: planos, mapas y maquetas.
– Características de dos formas iguales: igualdad de los ángulos y proporcionalidad de longitudes.
– El teorema de Tales.
– Relación entre el área y el volumen de figuras semejantes.</td><td>• Identificación de la semejanza entre figuras y cuerpos geométricos y obtención del factor de escala.
• Utilización del Teorema de Tales para obtener o comprobar relaciones métricas entre figuras</td></tr>
</table>

Ley Orgánica de Educación (LOE), **de 3 de mayo de 2006 (publicada en el BOE de 4 de mayo)**	
Según la Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón, dentro del área de Matemáticas de 2º de la E.S.O. encontramos en el cuarto bloque llamado "Geometría" la siguiente información:	
Contenidos	**Criterios de evaluación**
– El triángulo. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Semejanza de triángulos: teorema de Thales. Criterios de semejanza de triángulos. – Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza. Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Homotecia. – Utilización de los teoremas de Thales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.	Identificar relaciones de proporcionalidad numérica y geométrica y utilizarlas para resolver problemas en situaciones de la vida cotidiana. – *[...]* ser capaces de utilizar la homotecia para producir figuras semejantes de una razón dada y justificar la pertinencia de la construcción mediante la identificación de triángulos en la "posición de Tales".

Como podemos comprobar, tanto en la LOGSE como en la LOE, el objeto matemático "Semejanza" siempre va de la mano con el Teorema de Thales. De hecho, hasta hace poco, la ley indicaba que se debían enseñar en el curso de 2º de la E.S.O. Por este motivo, me asombré cuando descubrí en el currículo de la LOMCE que la semejanza se daba en 2º de la E.S.O. pero Thales no aparecía ni en 1º ni en 2º. Efectivamente, no emerge hasta el curso de 3º de la E.S.O. tanto en las Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas como a las Académicas. Veamos la siguiente tabla con la información más relevante para nuestro caso.

La Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE),

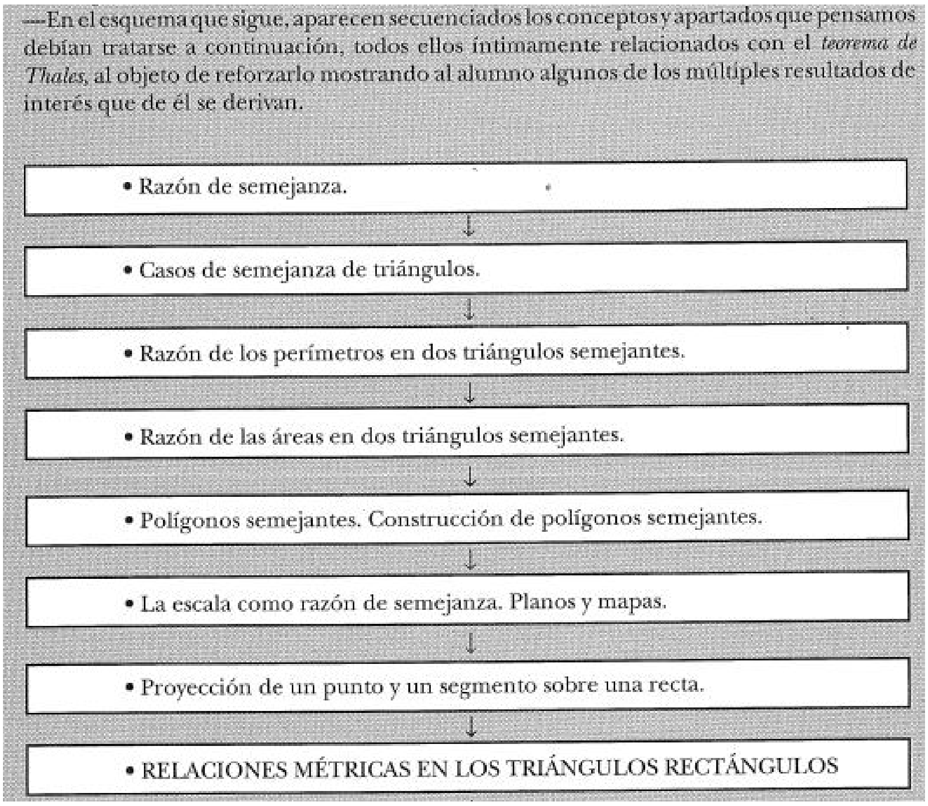
de 9 de diciembre de 2013 (publicada en el BOE de 10 de diciembre)

Según la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, dentro del área de Matemáticas de 2º de la E.S.O. encontramos en el tercer bloque llamado "Geometría" la siguiente información:

	Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de evaluación
2º de la E.S.O.	- Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	- Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.	• Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes. • Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.
3º de la E.S.O.	- Teorema de Tales. División de un segmento en partes proporcionales. Aplicación a la resolución de problemas	- Utilizar el teorema de Tales y las fórmulas usuales para realizar medidas indirectas de elementos inaccesibles y para obtener las medidas de longitudes [...]	• Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.

Este suceso, me ha hecho convencerme sobre la elección de mi TFM al querer analizar y responder cuestiones como: ¿por qué el Teorema de Thales no aparece hasta 3º de la E.S.O.?, ¿acaso es un concepto complejo de asimilar y se necesita retrasar un año para enseñarlo?, ¿dificulta o beneficia distanciar los conceptos de semejanza y Thales en cursos diferentes?

Tras realizar una pequeña investigación, he encontrado varios libros y artículos donde se propone enseñar primero el Teorema de Thales seguido de la semejanza. Entre estos, resalto a Pueyo (1989), el cual propone que los alumnos "descubran" dicho teorema a través de mediciones que realizan por el recortado y la manipulación de los triángulos. Observamos en la siguiente imagen cómo después de haber estudiado el teorema de Thales se pone de manifiesto el concepto de semejanza.



—En el esquema que sigue, aparecen secuenciados los conceptos y apartados que pensamos debían tratarse a continuación, todos ellos íntimamente relacionados con el *teorema de Thales*, al objeto de reforzarlo mostrando al alumno algunos de los múltiples resultados de interés que de él se derivan.

- Razón de semejanza.
- Casos de semejanza de triángulos.
- Razón de los perímetros en dos triángulos semejantes.
- Razón de las áreas en dos triángulos semejantes.
- Polígonos semejantes. Construcción de polígonos semejantes.
- La escala como razón de semejanza. Planos y mapas.
- Proyección de un punto y un segmento sobre una recta.
- RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

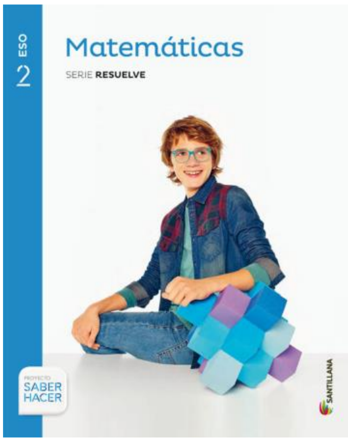
Por otra parte, Bernardis y Moriena (2013) sugieren enseñar el Teorema de Thales en dos etapas:

> - Primera etapa: en 2º año (14 años) el Teorema de Thales en su aspecto proyección, brindando una idea de movimiento respaldada en las características de la proyección paralela.
> - Segunda etapa: retomar el tema en 3er año (15 años) desde su aspecto homotecia, aprovechando la otra dinámica que utiliza las características de la homotecia. (p. 69)

De esta manera, proponen el currículo en espiral para este objeto matemático:

> Mientras se asciende a los niveles superiores, los núcleos básicos de la materia aumentan progresivamente la cantidad informativa, variando también el tipo de procedimiento, según el nivel de desarrollo de los alumnos. Pasando así de lo manipulativo a lo intuitivo, y desde lo intuitivo a lo simbólico (Hernández, 1991 citado en Bernardis y Moriena, 2013, p.70).

Por último, quiero mencionar que el libro de texto de Matemáticas de 2º de la E.S.O. que seguían en el colegio "El Buen Pastor", centro donde realicé el Practicum I, II y II, enseñaba el Teorema de Thales y la semejanza. Es importante destacar que este libro, el cual es de la editorial de Santillana, es del 2016, año en que la legislación educativa activa es la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (L.O.M.C.E.).



Como podemos comprobar, realmente no hemos encontrado ningún indicio sobre el hecho de que el Teorema de Thales sea indispensable verlo en tercero de secundaria. No obstante, es necesario verlo a lo largo de la secundaria ya que, como indica Piaget en su "etapa de operaciones formales", a partir de los 12 años se gana la capacidad para utilizar la lógica y así llegar a conclusiones abstractas que no están ligadas a casos concretos que se han experimentado de primera mano. En otras palabras, a partir de los 12 años, es apropiado que los alumnos se introduzcan en la iniciación a la demostración.

En conclusión, en el presente T.F.M. se propondrá una propuesta didáctica para 2º de la E.S.O., la cual estará centrada en el objeto matemático "semejanza" y como consecuencia de ella, también analizaremos al Teorema de Thales y sus aplicaciones.

B. Definición del objeto matemático

B.1 Objeto matemático a enseñar, curso y asignatura en la que lo sitúas.

El trabajo estará enfocado en el marco de la asignatura de Matemáticas dentro de los contenidos del tercer bloque "Geometría" del segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria, tal y como indica la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Los objetos matemáticos que hemos seleccionado para desarrollar la presente propuesta didáctica es el de semejanza y el Teorema de Thales. Se abordarán desde un punto de vista teórico y práctico en el curso de 2º de la E.S.O., es decir, para alumnos de unos 13-14 años.

Aunque anteriormente hemos visto que, según la L.O.M.C.E., el Teorema de Thales no emerge hasta 3º de la E.S.O., hemos creído conveniente incorporarlo para enriquecer la propuesta y usar sus aplicaciones para un mejor entendimiento en el aula.

B.2 Introducción del objeto matemático en el aula.

Este apartado se va a centrar en una breve explicación de cómo introduciríamos los objetos matemáticos en el aula teniendo en cuenta los saberes y conocimientos del alumnado.

i. ¿Qué es la semejanza?

Si analizamos el origen etimológico del término semejanza, estableceremos que emana de la suma de dos componentes léxicos: el vocablo proveniente del latín '*similia'*, que puede traducirse como “parecido”, y el sufijo –*anza*, que es equivalente a “cualidad”.

Seguramente, si preguntamos a un alumno ¿qué es la semejanza?, nos responda algo parecido a "que se parezca a algo o alguien" ya sea por color, forma, tamaño...

En cambio, en matemáticas el concepto de la semejanza está muy ligado al concepto de proporcionalidad. La Enciclopedia Libre Universal en Español (2002) la define de la siguiente manera:

> Una semejanza es una aplicación entre dos espacios métricos que modifica las distancias entre dos puntos cualesquiera multiplicándolas por un factor fijo. En el caso de los espacios euclídeos, por ejemplo, es la composición de una isometría y una homotecia. Intuitivamente, es una transformación que puede cambiar el tamaño y la orientación de una figura pero no altera su forma.

Nosotros nos centraremos en las semejanzas entre figuras planas, particularmente en los triángulos. De esta manera, diremos que dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma pero su tamaño y/u orientación varían entre ellos, es decir, si tienen los mismos ángulos y los lados correspondientes son proporcionales.

ii. ¿Qué es el Teorema de Thales?

El teorema de Thales es uno de los más importantes de la geometría métrica. De hecho, este junto con el teorema de Pitágoras establecen las bases fundamentales de la axiomática de las geometrías métrica y proyectiva.

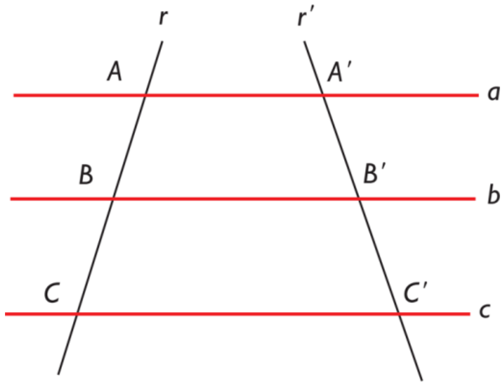
Debemos aclarar que existen dos teoremas atribuidos al filósofo, matemático y astrónomo griego Thales de Mileto. Nosotros sólo hablaremos del primero que dice:

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.

Asimismo, del primer teorema de Thales se deduce que:

Si dos rectas cualesquiera (r y r') se cortan por varias rectas paralelas (AA', BB', CC') los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra.

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$$



Además, de la explicación del teorema de Thales y de sus posibles variantes, se expondrá brevemente datos históricos sobre Thales de Mileto, el enunciado de su teorema y la importancia que tiene en la vida cotidiana con el propósito de tanto informar como despertar la curiosidad de los alumnos y motivarlos. A mi parecer, es importante que en el proceso de enseñanza-aprendizaje no nos conformemos con una exclusiva explicación teórica y/o práctica matemática. Por este motivo, propondremos en la metodología, la cual se verá en los siguientes apartados, incluir historia de las matemáticas relacionada con los objetos matemáticos elegidos. La finalidad será ilustrar al alumnado sobre los orígenes de su descubrimiento, cómo ha podido evolucionar el concepto, los matemáticos involucrados, etc.

B.3 ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

A continuación, mencionaremos brevemente la praxeología asociada a los objetos matemáticos que se pretenden enseñar. No obstante, se abordará más profundamente en los siguientes apartados de este Trabajo Fin de Máster.

Campo de problemas	1) Semejanza. Propiedades de las figuras semejantes 2) Razón de longitudes y áreas 3) Escalas 4) Teorema de Thales 5) División de segmentos en partes proporcionales 6) Construcción de polígonos semejantes 7) Distancias inaccesibles
Técnicas	• Criterio semejanza de polígonos semejantes • Criterios de triángulos semejantes • Propiedad fundamental de las proporciones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$ • Razón de semejanza como cociente de los lados correspondientes de dos figuras semejantes. • Relación entre la razón de semejanza (k), la razón de perímetros (k) y la razón de áreas (k^2) y razón de volúmenes (k^3). • Notación e interpretación de los diferentes tipos de escalas • Escala como cociente de las medidas de un objeto representado con las reales. • Formula del teorema de Thales • Triángulos en posición de Thales • División de un segmento en partes iguales y/o proporcionales • Construcción de polígonos semejantes por homotecia. • Métodos diversos para medir distancias inaccesibles.
Tecnología	• Visualización de figuras semejantes. • Propiedades de los triángulos • Definición de semejanza, razón de semejanza, razón de perímetros, razón de áreas y razón de volúmenes. • Definición de escala. • Tipos y clasificación de escalas. • Demostración del teorema de Thales. • Definición de homotecia.

C. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

Analizaremos tres libros de texto publicados en años bastante alejados para poder realizar una comparación entre ellos. Describiremos las características principales que se presentan con respecto a la introducción y tratamiento de los objetos matemáticos durante el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los libros utilizados para este apartado son:

- Álvarez, F., Garrido, L. M. y Ruiz, A. Fractal 2, Matemáticas, 2º *Secundaria.* Editorial Fractal, 1997.
- Colera, J. y Gaztelu, I. *Matemáticas 2º Secundaria. (Serie En tus manos).* Editorial Anaya, 2006.
- *Matemáticas 2º ESO. (Serie Resuelve, Proyecto Saber Hacer)*. Editorial Santillana, 2016.

C.1. Justificación habitual de la introducción escolar del objeto matemático.

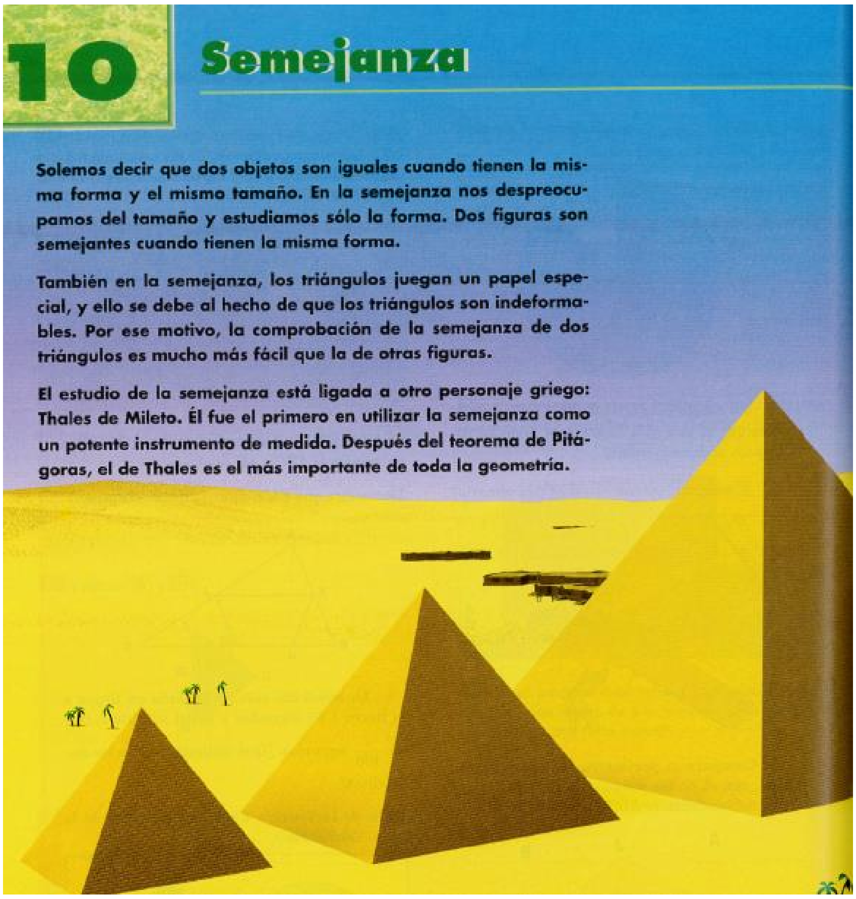
- **<u>Editorial Fractal (1997). Álvarez, F., Garrido, L. M. y Ruiz, A.</u>**

El libro es del 1997, año en que la legislación educativa activa era la Ley Orgánica 9/1995, de 20 de noviembre, de la participación, la evaluación y el gobierno de los centros docentes (B.O.E. 21/11/1995).

La unidad didáctica 10 "Semejanza" comienza con la introducción del concepto de semejanza y la conexión que tiene este con Thales de Mileto. A continuación, la veremos para realizar seguidamente nuestro análisis.

También es interesante saber que el guión que sigue este tema es el siguiente:

1) **Ampliación y reducción. Figuras semejantes.**
2) **Semejanza de triángulos. El caso de Thales.**
3) **Criterios de semejanza de triángulos.**
4) **Aplicaciones de la semejanza a la medida indirecta de una distancia.**
5) **La proporcionalidad de segmentos**



En este libro, generalmente se presenta primero un ejemplo del concepto que se va a introducir, después dan su definición y seguidamente lo justifican con otros ejemplos. Curiosamente, esto no pasa con los conceptos de "semejanza" y lados y ángulos "homólogos" puesto que simplemente los explican con un ejemplo, sin darles posteriormente una definición formal. A continuación, expondremos la manera en la que se introducen tanto la semejanza como el teorema de Thales y sus aplicaciones.

- <u>La semejanza se introduce de dos maneras</u>:

- En primer lugar, en la portada puesto que muestran la idea principal de la semejanza y la relacionan con Thales de Mileto.
- En segundo lugar, al comienzo del tema introducen el concepto de semejanza mediante varios ejemplos relacionados con la ampliación y reducción de figuras: gracias a una fotocopiadora, mapa, plano, maqueta, etc. Para ello, entra en juego rápidamente la "razón de semejanza", la cual la denominan "escala" en el apartado relacionado con la reducción de la realidad plasmada en mapas y planos.

Resulta curioso mencionar que el primer ejemplo del tema, el cual introduce realmente al objeto matemático semejanza, es el único que no es un figura plana. Se trata de la ampliación de una foto real de una obra del escultor neoclásico español Ponciano Ponzano, uno de los leones del Congreso de los Diputados situado en la entrada principal del Palacio de las Cortes, en Madrid.

Además, me ha sorprendido que en el margen de algunas páginas se nombran conceptos que no se explican hasta más adelante, lo cual me parece poco lógico puesto que nos olvidaremos de ello al llegar a la página donde se enseña la idea principal.

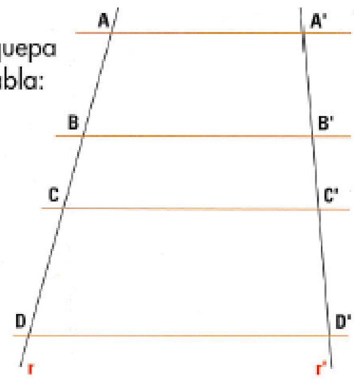
 La maqueta está hecha a escala 1:100. Calcula la longitud de la fachada sabiendo que la maqueta es de 15 cm. Esta imagen aparece en el margen de la primera página del tema (sin contar con la portada) donde no se menciona ni siquiera la razón de semejanza. Tres páginas más adelante se explica qué es la "escala" con ayuda de ejemplos muy precisos como los mapas y planas. No obstante, no hacen una mínima mención a las maquetas.	 Busca en la foto triángulos semejantes. Esta imagen aparece tres páginas antes de la explicación de las propiedades y criterios de semejanza de triángulos. De hecho, se muestra incluso antes del "caso de Thales".

- El Teorema de Thales y sus aplicaciones se introducen de la siguiente forma:

- Primero, en la introducción de la unidad didáctica se nombra a Thales como la primera persona en utilizar la semejanza como un potente instrumento de medida. Además, de fondo se pueden vislumbrar tres pirámides egipcias de tamaños diferentes. No obstante, el libro no vuelve mencionar nada relacionado con la introducción. En otras palabras, aunque el teorema de Thales se enuncia en la última página teórica del libro, en ningún momento mencionan quién fue Thales, cómo, cuándo y por qué uso la semejanza como un instrumento de medida, etc. Evidentemente, tampoco hacen mención a la pirámide de Keops ni a ninguna otra.
- Thales se menciona por segunda vez con la explicación de la "posición de Thales". Me sorprendió fijarme en que esta explicación estaba casi al principio del tema, cuando el teorema de Thales aparece al final de él, cinco páginas más adelante. Se introducen como conceptos aislados.
- Por último, el teorema de Thales se introduce con el siguiente breve ejercicio descontextualizado.

Dibuja una figura parecida a ésta que quepa en un folio. Toma medidas y rellena la tabla:

$\overline{AB}$ =	$\overline{BC}$ =	$\overline{CD}$ =
$\overline{A'B'}$ =	$\overline{B'C'}$ =	$\overline{C'D'}$ =



Compara los cocientes:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \qquad \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \qquad \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

Observarás que todos son iguales.

En consecuencia:

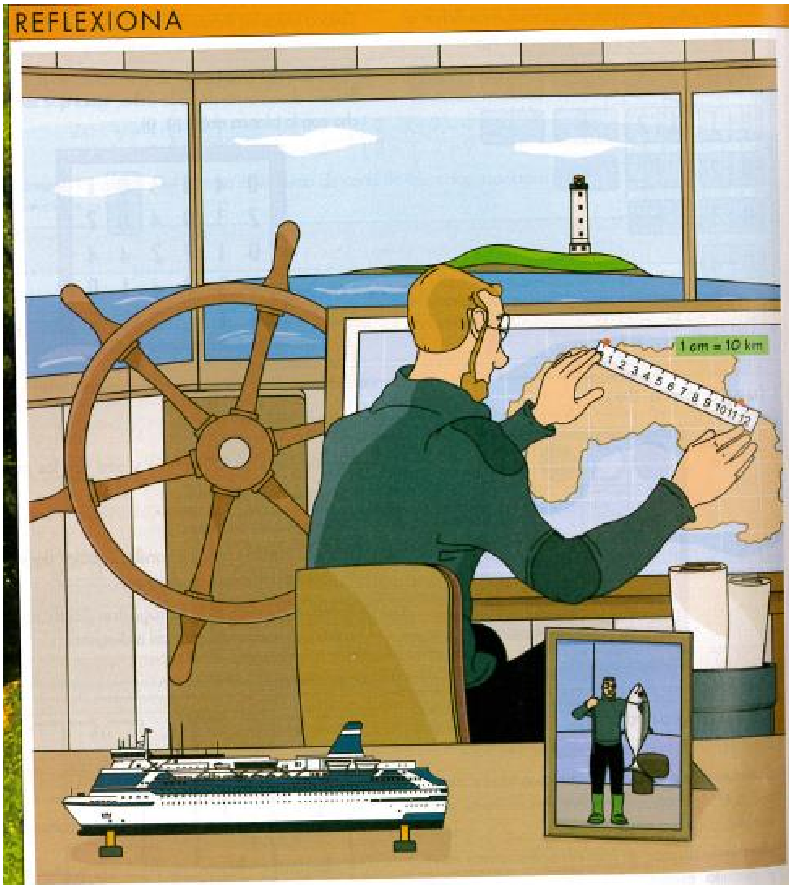
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

Seguidamente se enuncia el teorema pero no se demuestra. Su justificación se basa en el hecho de que los alumnos hayan comprobado anteriormente que el resultado del teorema es cierto para un determinado ejercicio. Al final, vuelve aparecer otro ejemplo descontextualizado, lo que produce que tanto el objeto matemático como sus múltiples aplicaciones se presenten con poca o ninguna credibilidad ante el alumnado de 2º de la E.S.O.

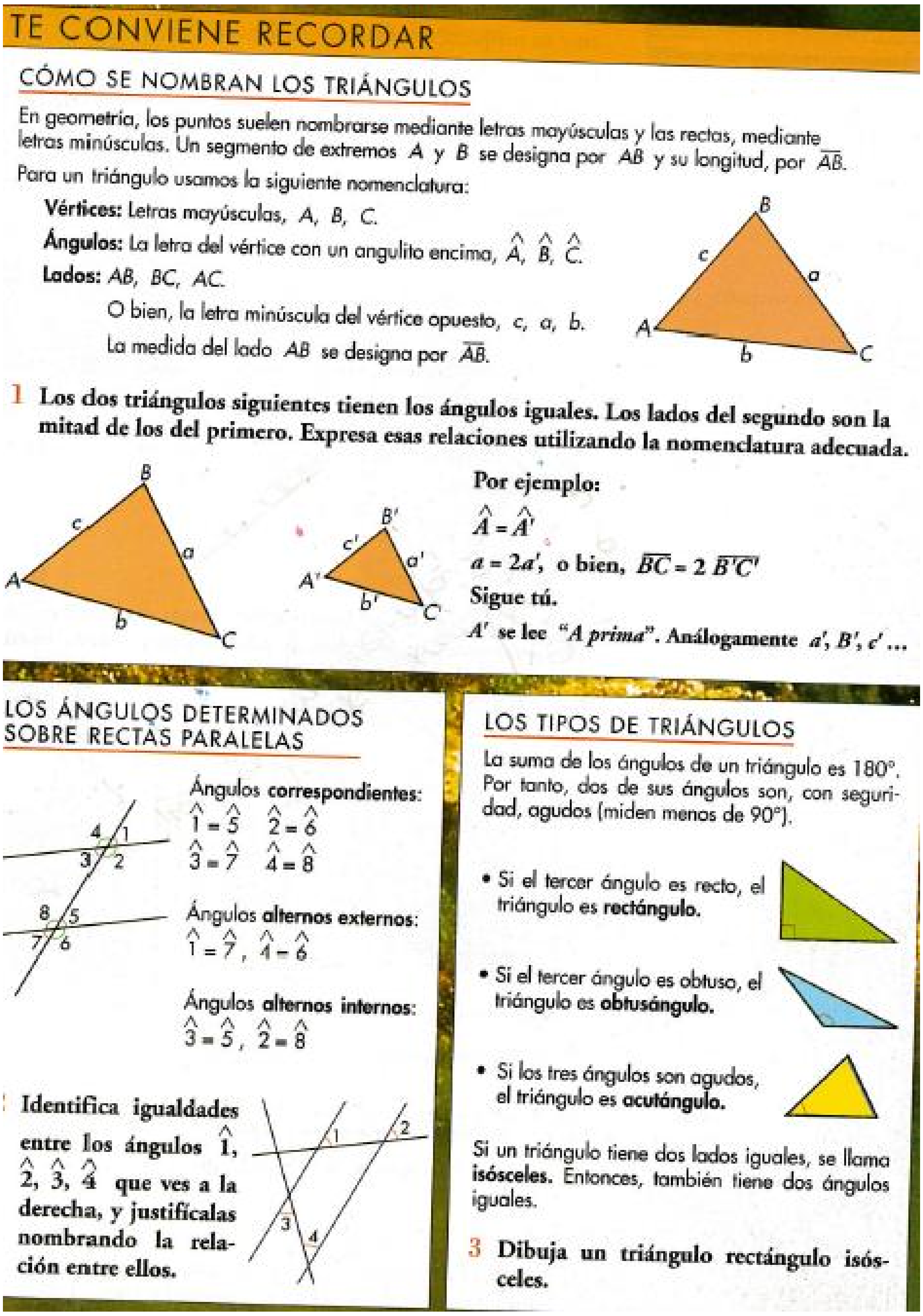
- **<u>Editorial Anaya (2006). Colera, J. y Gaztelu, I.</u>**

El libro es del 2006, año en que la legislación educativa activa era la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE 4/05/2006), concretada para Aragón en la Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA 1/06/2007).

La unidad didáctica 9 "Semejanza" comienza con un problema donde se tiene que reflexionar ideas que en este tema se van a explicar. Podríamos considerar este problema como la razón de ser de los objetos matemáticos que vamos a analizar. Asimismo, la siguiente página está dedicada a recordar la teoría que los alumnos ya han visto anteriormente y que necesitan refrescar para empezar con este tema.


REFLEXIONA

- El capitán del barco está midiendo con la regla la distancia entre dos puntos del mapa. Señala 11,3 cm. ¿Cuál es la distancia real entre esos dos puntos?
- Sabiendo que el capitán mide 1,80 m de alto, ¿cuál es la longitud real del pez que se ve en la fotografía?
- La maqueta del barco está realizada de modo que una longitud de 1 cm corresponde a 1 m en la realidad. Si el volumen de agua que desplaza la maqueta cuando está hundida hasta la línea de flotación es de 5 600 cm^3, ¿cuál es el volumen de agua que desplaza el barco?



TE CONVIENE RECORDAR

CÓMO SE NOMBRAN LOS TRIÁNGULOS

En geometría, los puntos suelen nombrarse mediante letras mayúsculas y las rectas, mediante letras minúsculas. Un segmento de extremos A y B se designa por AB y su longitud, por $\overline{AB}$.

Para un triángulo usamos la siguiente nomenclatura:

Vértices: Letras mayúsculas, A, B, C.

Ángulos: La letra del vértice con un angulito encima, $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

Lados: AB, BC, AC.

O bien, la letra minúscula del vértice opuesto, c, a, b.

La medida del lado AB se designa por $\overline{AB}$.

1 **Los dos triángulos siguientes tienen los ángulos iguales. Los lados del segundo son la mitad de los del primero. Expresa esas relaciones utilizando la nomenclatura adecuada.**

Por ejemplo:

$\hat{A} = \hat{A}'$

$a = 2a'$, o bien, $\overline{BC} = 2\,\overline{B'C'}$

Sigue tú.

A' se lee *"A prima"*. Análogamente a', B', c' …

LOS ÁNGULOS DETERMINADOS SOBRE RECTAS PARALELAS

Ángulos **correspondientes:**

$\hat{1} = \hat{5}$ $\hat{2} = \hat{6}$

$\hat{3} = \hat{7}$ $\hat{4} = \hat{8}$

Ángulos **alternos externos:**

$\hat{1} = \hat{7}$, $\hat{4} = \hat{6}$

Ángulos **alternos internos:**

$\hat{3} = \hat{5}$, $\hat{2} = \hat{8}$

Identifica igualdades entre los ángulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ que ves a la derecha, y justifícalas nombrando la relación entre ellos.

LOS TIPOS DE TRIÁNGULOS

La suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Por tanto, dos de sus ángulos son, con seguridad, agudos (miden menos de 90°).

- Si el tercer ángulo es recto, el triángulo es **rectángulo.**
- Si el tercer ángulo es obtuso, el triángulo es **obtusángulo.**
- Si los tres ángulos son agudos, el triángulo es **acutángulo.**

Si un triángulo tiene dos lados iguales, se llama **isósceles.** Entonces, también tiene dos ángulos iguales.

3 **Dibuja un triángulo rectángulo isósceles.**

El guión que sigue este tema es el siguiente:

1) **Figuras semejantes.**
2) **Planos, mapas, maquetas.**
3) **Cómo construir figuras semejantes.**
4) **Teorema de Thales.**
5) **Triángulos en posición de Thales.**
6) **Semejanza de triángulos.**
7) **Aplicaciones de la semejanza de triángulos.**

- <u>La semejanza se introduce de la siguiente manera</u>:

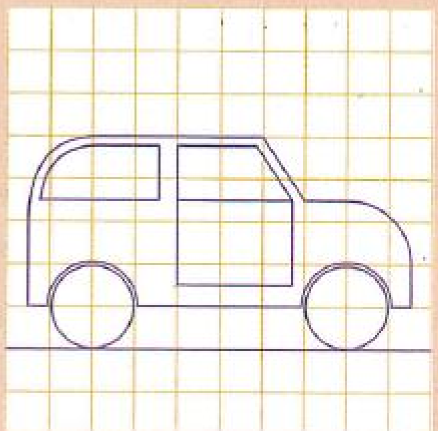
- Por un lado, como acabamos de ver se plantea en la introducción del tema un problema que tiene el papel de razón de ser de la semejanza.
- Por otro lado, se define el concepto de semejante precedido de este ejemplo:

> La maqueta del barco que vimos en la primera página de esta unidad es igual que el barco en forma, color, …, en todo salvo en el tamaño. El barco y su maqueta son **figuras semejantes**. La razón de semejanza es 1:100 porque 1 cm de la maqueta corresponde a 100 cm = 1 m de la realidad.

En matemáticas, el concepto de semejanza está vinculado a "tener la misma forma". En mi opinión, que en el primer ejemplo y por tanto en la primera referencia que se muestre a los alumnos se afirme que, en este caso el barco, sea de la misma forma, color, posición, orientación, etc. salvo el tamaño para referirse a la semejanza puede llevar a producir confusiones acerca del objeto matemático.

- En el análisis de la introducción del objeto matemático, también tenemos que tener en cuenta el primer ejercicio que se propondrá en el aula. Este libro, al contrario que el anterior, propone ejercicios de este estilo:

> 1 Toma una hoja de papel cuadriculado y dibuja sobre ella una ampliación del dibujo de abajo al doble de tamaño.

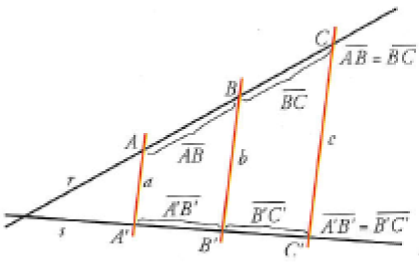


Dependiendo de cómo el docente enseñe el objeto matemático de semejanza al estudiante, este tipo de ejercicio podría servir perfectamente como razón de ser y se cuestionen preguntas como ¿debemos ampliar el dibujo "verticalmente" y/u "horizontalmente"?, ¿con ampliar el coche es suficiente?, ¿es necesario tener en cuenta la calzada?, ¿qué estrategia debemos usar, una aditiva o multiplicativa?, etc.

➤ Destacamos que todos los conceptos relacionados con la semejanza propuestos en el libro se introducen con ejemplos contextualizados, "dibujos" y definiciones más formales que en el anterior libro. Predominan los ejemplos de mapas, planos y distancias inaccesibles.

- <u>Thales se introduce de la siguiente manera</u>:

➤ El Teorema de Thales emerge precedido de un ejemplo concreto donde los alumnos tienen que medirlo con regla para que se lo crean.



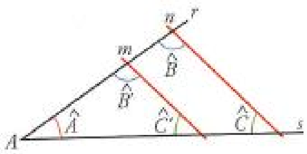
Las rectas a, b y c son paralelas y cortan a las rectas r y s.
Si los segmentos AB y BC son iguales, entonces los segmentos $A'B'$ y $B'C'$ son iguales.
Compruébalo midiéndolos.

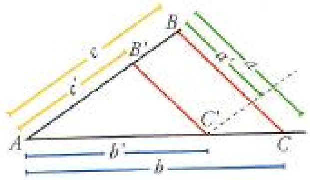
Puesto que de esta manera justifican el teorema definido posteriormente, no se demuestra. Todos los ejercicios y ejemplos propuestos en este apartado son descontextualizados. Esto provoca que los alumnos no vean la funcionalidad que tiene este resultado matemático y como consecuencia que no lo encuentren interesante e importante. De la misma manera que en el anterior libro, en este tampoco se menciona absolutamente nada de la identidad de Thales de Mileto ni del origen de utilizar la semejanza como un instrumento de medida. En mi opinión, sería ideal que hubiese un ejemplo sobre medir la pirámide de Keops dando los datos pertinentes para poder introducirles a su vez algún dato histórico interesante.

➤ "La posición de Thales" se muestra en la página posterior al enunciado del teorema puesto que utiliza este último como justificación del concepto. Este hecho es más coherente ya que al alumno no le costará tanto relacionar ideas. Además, en este apartado encontramos la única demostración del tema, la cual viene acompañada con un gráfico visual para su mejor comprensión:

TEN EN CUENTA

Si dos triángulos tienen sus ángulos respectivamente iguales, entonces son semejantes, pues los podremos poner en posición de Tales.





PROPIEDAD IMPORTANTE

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

DEMOSTRACIÓN

Tomamos dos triángulos en posición de Tales y vamos a demostrar que son semejantes, es decir, que sus ángulos son respectivamente iguales y sus lados, proporcionales.

- Sus tres ángulos son respectivamente iguales:

  El ángulo $\hat{A}$ es común a los dos triángulos.

  $\hat{B} = \hat{B}'$ y $\hat{C} = \hat{C}'$ por ser ángulos *correspondientes* entre rectas paralelas.

- Sus lados son proporcionales:

  Aplicando el teorema de Tales: $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

  Trazando por C' una paralela a AB se obtiene, aplicando nuevamente el teorema de Tales, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$.

  Por tanto, $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

- **<u>Editorial Santillana (2016).</u>**

El libro es del 2016, año en que la legislación educativa activa es la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (BOE 10/12/2013), concretada para Aragón en la Orden de 26 de mayo de 2016, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA 2/06/2016).

Como podemos comprobar, la definición de razón y proporción numérica se institucionaliza en la unidad didáctica 8 "Proporcionalidad numérica". No obstante, nosotros nos centraremos en la unidad didáctica 9 "Proporcionalidad geométrica", la cual sigue el siguiente guión:

UNIDAD	SABER	
8 Proporcionalidad numérica 146	1. Razón y proporción	148
	2. Propiedades de la proporcionalidad	149
	3. Magnitudes directamente proporcionales	150
	4. Magnitudes inversamente proporcionales	152
	5. Repartos proporcionales	154
	6. Porcentajes	156
	7. Aumentos y disminuciones porcentuales	158
9 Proporcionalidad geométrica	1. Segmentos proporcionales	170
	2. Teorema de Tales	171
	3. Semejanza de triángulos	173
	4. Criterios de semejanza de triángulos	174
	5. Polígonos semejantes	176
	6. Escalas	178

Las primeras páginas de la unidad didáctica, es decir "la portada", son muy curiosas. Estas se dividen en varias secciones:

- Recordatorio y actividades relacionadas con los conceptos y propiedades matemáticas que se han aprendido anteriormente y que se necesitarán para esta nueva unidad didáctica. En los otros libros, este "recordatorio" se centraba más en la clasificación y las propiedades de los triángulos y en la nomenclatura de los triángulos, y de los lados y vértices que los componen. No obstante, el libro de Santillana recalca las definiciones de recta, semirrecta y segmento y la propiedad fundamental de las proporciones.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

- Resumen sobre los contenidos del nuevo tema divididos en "saber" y "saber hacer".
- Exposición de la funcionalidad en la vida cotidiana que tendrán los nuevos conceptos matemáticos. Particularmente, hacen mención de la impresora:
  - Línea del tiempo: desde 1940, cuando Charles Babbage diseña la primera impresora para el primer computador de la historia, hasta 1998, cuando nacen las impresoras multifunción, capaces de imprimir, escanear, fotocopiar y enviar faxes.

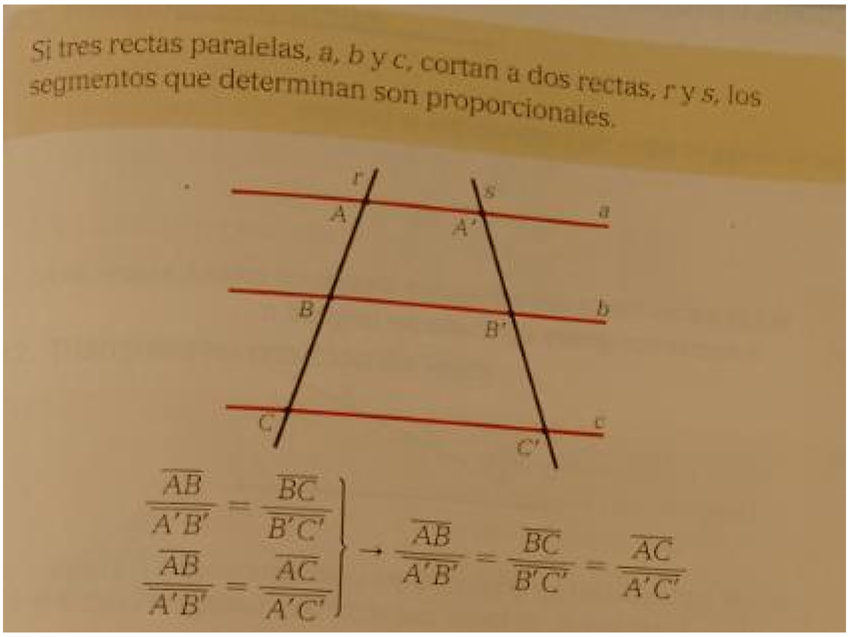
- Situación muy próxima al alumnado donde tendrán que hacer uso de la impresora: "Todos necesitamos imprimir trabajos, correos electrónicos o fotos, y la impresora nos hace ese trabajo".
- Problema de razón de ser: "Imprimes una careta con forma cuadrada para ti y otra para tu hermano pequeño. La de tu hermano la reduces un 10%. ¿Cuánto mide el lado de la careta de tu hermano?"

Por otra parte, podemos observar que el guión que sigue este libro de texto es diferente a los vistos anteriormente. En primer lugar, se define la razón de segmentos como:

- La **razón**, r, **de dos segmentos** AB y CD es el número que resulta de dividir la longitud del segmento AB entre la longitud del segmento CD.

$$r = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

En segundo lugar, continua con el teorema de Thales, el cual no se demuestra ni se justifica de ninguna manera.:


Si tres rectas paralelas, a, b y c, cortan a dos rectas, r y s, los segmentos que determinan son proporcionales.

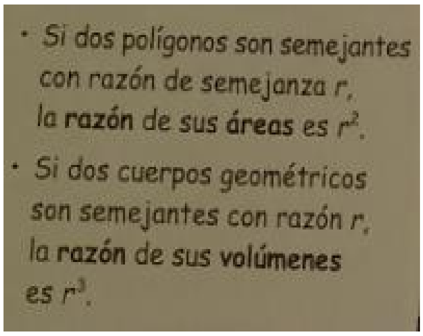
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \\[2mm] \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Para ambos objetos matemáticos, se presentan un ejemplo y se proponen varios ejercicios de contexto totalmente matemático.

En tercer lugar, seguimos con la semejanza de triángulos. En este apartado se menciona "la posición de Thales", lo cual es coherente ya que los alumnos acabarían de ver el Teorema de Thales. Además, se explica las propiedades de los triángulos semejantes y sus tres criterios de semejanza. No obstante, en ningún momento se da a conocer la definición explícita de semejanza. A mi parecer, esto es un error ya que es muy importante que el alumnado comprenda que en matemáticas, el concepto de semejanza está vinculado a "tener la misma forma", independientemente de su tamaño, color, orientación, etc.

Otro punto a destacar es que la "razón de semejanza" no se da a conocer hasta casi el final del tema con los "polígonos semejantes". ¿Por qué no se enuncia con los triángulos semejantes? ¿Es que la razón de semejanza sólo se puede aplicar a los polígonos con más de tres lados?

Por otra parte, curiosamente es la primera vez que percibimos las siguientes propiedades explícitamente. Asimismo, aunque se hable de la razón de los volúmenes entre dos cuerpos geométricos, en esta unidad didáctica no encontramos ningún problema o ejercicio en que se tenga que calcular el volumen de ninguna figura geométrica.



- Si dos polígonos son semejantes con razón de semejanza r, la **razón** de sus **áreas** es r^2.
- Si dos cuerpos geométricos son semejantes con razón r, la **razón** de sus **volúmenes** es r^3.

Por último, se encuentra el apartado de la "escala". Una posible explicación al por qué no se había definido la razón de semejanza hasta casi el final es para poder enlazar de mejor manera el concepto matemático "escala". La definición dada en este libro es más detallada ya que se preocupa por diferenciar la escala numérica y la escala gráfica. Sin embargo, únicamente hacen referencia a la escala de reducción la cual se expresa de la forma **1:n**, donde 1 unidad en la representación equivale a n unidades en la realidad. ¿Y la escala de ampliación? ¿Qué significaría que estuviéramos hablando en una escala n:1? ¿Y la escala natural?

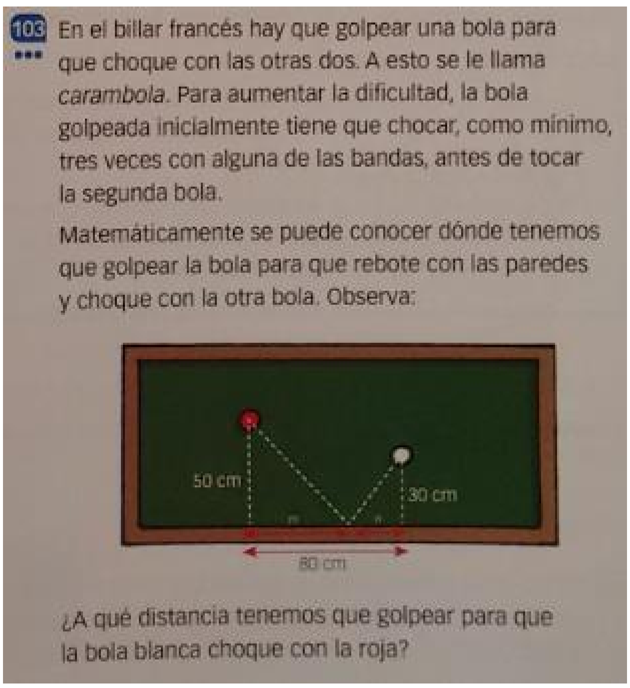
Este es el único apartado en toda la unidad dónde nos encontramos con problemas contextualizados, los cuales son más cercanos a la realidad. No obstante, se centran demasiado en los mapas, olvidándose de esta manera de los planos y las maquetas.

Consideramos que los ejercicios sí son suficientes para aplicar las técnicas que se enseñan en el libro. No obstante, estos no son suficientes para que el alumno pueda afrontar los ejercicios contextualizados que se le puedan presentar. Este hecho unido a que las actividades finales del libro están divididas en diferentes bloques de ejercicios titulados con la técnica que se debe utilizar para resolverlos, facilita a los estudiantes la aplicación de la técnica correcta, pero dificulta el desarrollo del pensamiento matemático.

De las seis páginas que forman las actividades finales del libro, sólo dos proponen problemas contextualizados y cercanos a la vida real.

Es interesante destacar que en las dos últimas páginas de la lección, se plantean dos problemas donde se necesita pensar utilizando un "razonamiento matemático". Una de dichas actividades es la demostración de Tales donde el libro lo demuestra grafíticamente y numéricamente, y el alumnado debe comprobarlo numéricamente. Asimismo, se propone un proyecto innovador donde de forma cooperativa los alumnos acabarán midiendo la altura de un edificio con los conocimientos adquiridos.

Por último, nos encontramos con dos problemas recogidos de las famosas pruebas PISA. Uno de ellos podría haber sido un perfecto problema de razón de ser histórico ya que en su contexto hablan de cómo Thales de Mileto calculó la altura de la pirámide de Keops. El segundo problema nos hace ver que las matemáticas se encuentran incluso en los juegos. Efectivamente, para poder golpear correctamente la bola en el "Billar francés a tres bandas", se sugiere utilizar los conocimientos matemáticos aprendidos para así poder ganar la partida.


103 En el billar francés hay que golpear una bola para que choque con las otras dos. A esto se le llama *carambola*. Para aumentar la dificultad, la bola golpeada inicialmente tiene que chocar, como mínimo, tres veces con alguna de las bandas, antes de tocar la segunda bola.

Matemáticamente se puede conocer dónde tenemos que golpear la bola para que rebote con las paredes y choque con la otra bola. Observa:

¿A qué distancia tenemos que golpear para que la bola blanca choque con la roja?

C.2. Praxeología que se enseña en el aula y efectos que produce en el aprendizaje del alumno

En general, los libros de texto analizados comienzan con algún ejemplo, definición y/o explicación del concepto para después ponerlo en práctica. En otras palabras, en cada apartado primero se enseñan y trabajan las técnicas institucionalizadas, después en algunas ocasiones se presentan las tecnologías que las justifican y finalmente se propone una serie de ejercicios y problemas. Al final del tema, se plantean varios ejercicios y problemas, los cuales están clasificados por "bloques" titulados con la técnica que tendrán que usar para resolverlos.

El campo de problemas es el siguiente:

- Identificar y/o dibujar figuras semejantes.
- Calcular datos desconocidos de triángulos (generalmente lados).
- Calcular la razón de semejanza. Si nos referimos a la escala, predominan problemas de la vida real y el uso de mapas y planos.
- Aplicar del Teorema de Thales.
- Calcular segmentos de un triangulo utilizando la posición de Thales.
- Aplicar los criterios de semejanza de los triángulos para calcular distancias inaccesibles.

Como hemos comprobado en el apartado anterior, el libro de la editorial Editorial Vicens Vivens (Álvarez, Garrido y Ruiz, 1997) propone un campo de problemas más descontextualizado mientras que el de la editorial Anaya (Colera y Gaztelu, 2006) y el de Santillana (2016) presentan en general un campo de problemas contextualizado salvo en el apartado del Teorema de Thales donde apenas hemos encontrado un problema contextualizado. Esto último producirá que los alumnos no vean la funcionalidad del teorema y por lo tanto no le den la suficiente importancia.

Sin embargo, gracias a mi Practicum II y III he podido preguntar directamente a los alumnos y estos me han expresado que aunque nunca lo hayan intentado, les parece asombroso que puedan calcular medidas inaccesibles como edificios o árboles con ayuda de las matemáticas. Esto me hizo reflexionar sobre dos cuestiones:

- ¿No sería muy beneficioso en el proceso de enseñanza-aprendizaje salir por ejemplo al patio del recreo o al parque y poner al descubierto los conocimientos aprendidos?

– ¿Hasta qué punto han resuelto problemas "tipo" que ni si quiera se plantearon "calcular la profundidad de un pozo"?

En todos los libros vistos, predominan los problemas "tipo" de calcular la escala y alturas inaccesibles, los cuales justifican las técnicas descritas. Por este motivo, consideramos que los ejercicios propuestos sí son suficientes para aplicar las técnicas que se enseñan en la unidad pero no son suficientes para que el alumno pueda afrontar cualquier ejercicio contextualizado que se le pueda presentar.

Las técnicas que se enseñan habitualmente son:

- El método de la cuadrícula para dibujar figuras semejantes.
- El método de la proyección.
- La fórmula del teorema de Thales.
- Los criterios de semejanza, especialmente de los triángulos. La posición de Thales.
- Procedimientos del cálculo de distancias inaccesibles como el siguiente:

Para calcular la altura de un árbol, $\overline{AB}$, procedemos del siguiente modo:

- Clavamos en el suelo, verticalmente, una estaca $A'B'$.
- Medimos la longitud de la estaca, $\overline{A'B'}$, y de las sombras, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$, del árbol y de la estaca, respectivamente.

Las tecnologías que se justifican son:

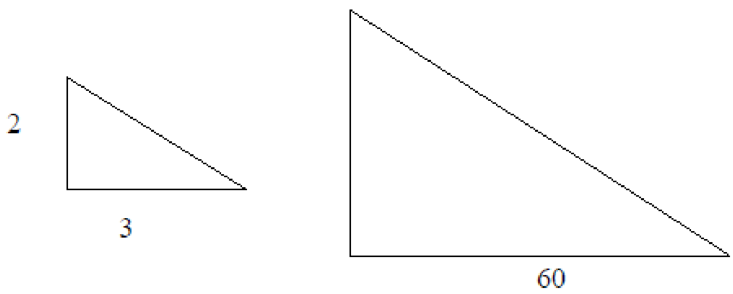
- El concepto de proporcionalidad.
- La definición de razón de semejanza y escala.
- Las propiedades de los triángulos.
- Los ejemplos.
- El teorema de Thales para justificar las técnicas de resolución de problemas de medidas indirectas.

En estos niveles, no se suele encontrar justificaciones muy detalladas de las técnicas. Efectivamente, se basan mayormente en definiciones, ejemplos y comprobaciones que los propios alumnos pueden realizar en clase. En ningún caso hemos encontrado la demostración del teorema principal.

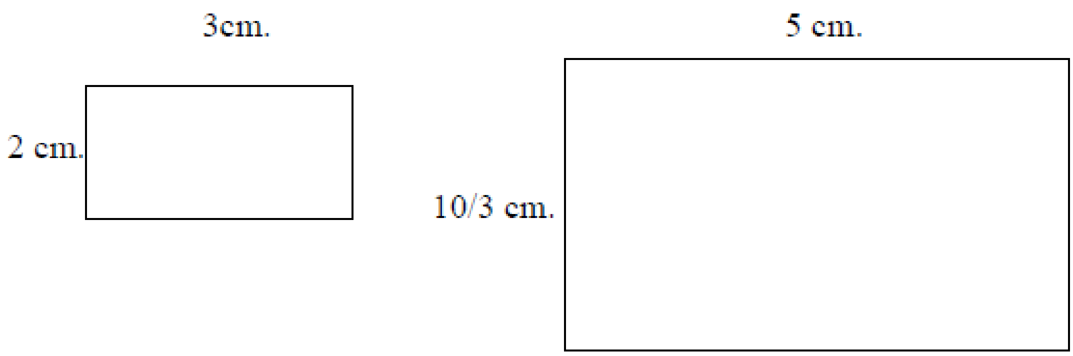
Hart y otros (1981 citado en Gualdrón y Gutiérrez, 2006) presentan algunas de las siguientes estrategias de resolución, dificultades más frecuentes y tipos de errores que fueron detectados en el aula cuando los estudiantes resolvían tareas relacionados con el presente TFM.

- Doble y mitad (*Doubling and halving*): cuando la razón no es 2:1, algunos alumnos duplicaban cuando se les pedía ampliar y partían para dos cuando se les pedía reducir.

- Construcción progresiva (*Build up*): a veces los alumnos evitan multiplicar fracciones y tienden a realizar una construcción progresiva a partir de una relación que establecen entre los elementos de la problemática. Por ejemplo, establecen una relación de 3 a 2 y luego 6 a 4, 9 a 6, 12 a 8, y así sucesivamente hasta llegar a 60 a 40, para concluir que el lado mide 40.



- Estrategia multiplicativa: el alumnado tiende a afirmar que una figura es semejante a otra cuando las medidas de los lados de una son múltiplos de los de la otra. No obstante, este método causa confusión ya que es un arma de doble filo. En otras palabras, cuando se observa que las medidas de los lados de una figura no son un múltiplo entero de las medidas de los lados de la otra, los estudiantes tienden a cree que no son figuras semejantes.



En este caso, ellos responderían que no son figuras semejantes puesto que 5 no es múltiplo de 3.

- Estrategia aditiva o de la diferencia constante: esto es otro método erróneo que algunos alumnos usan para evitar multiplicar fracciones. Si por ejemplo se les pidiera ampliar la figura de la izquierda de tal forma que la final tuviera base 12 cm:

Algunos estudiantes dan como respuesta que la altura de la nueva figura es 10 cm. En vez de concentrarse en la razón $\frac{a}{b} = \frac{12}{5}$, deciden realizar algunas de estas dos operaciones:

- Restar los lados correspondientes a cada rectángulo, 12-5=7, y a este valor sumarle la altura del primer rectángulo: 7+3=10
- Restar los lados del primer rectángulo, 5-3=2, y este valor se lo restan al lado conocido del rectángulo ampliado: 12-2=10

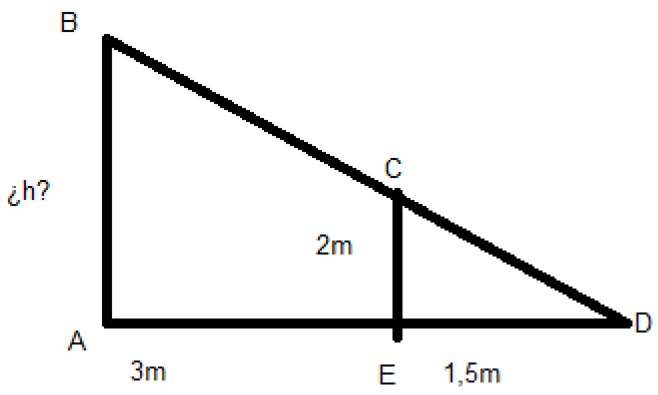
- Omisión de parte de los datos del problema: es muy común que en la resolución de problemas de razón y proporción, los alumnos ignoren parte de los datos del problema. Por ejemplo, si se les pregunta: *¿En qué terreno juegan más apretados los niños, en un campo de futbol de 12 m^2 de área con 6 niños o en uno de 16 m^2 con 8 niños?* Ellos responderán "el segundo, puesto que hay más niños en el terreno" (Gualdrón y Gutiérrez, 2006, p. 6).

Otras dificultades comunes que he detectado gracias a la ayuda que me han brindado los profesores de mi Practicum II y III son:

- Confundir el concepto "parecido" con "semejante".
- Dificultades con la notación de escala.
- No seleccionar correctamente los datos necesarios para resolver el problema y/o utilizar datos innecesarios.
- Vincular la escala a una única unidad de medida.
- No tener en cuenta las unidades de medida.
- Generalizar la razón de semejanza en áreas y volúmenes.
- Resolver erróneamente ejercicios al aplicar el Teorema de Thales:

- Aplicar el teorema de Thales cuando no se cumplen las hipótesis (como el paralelismo).
- Generalizar el teorema de Thales. Por ejemplo, si tenemos:

Ejercicio: Hallar la altura del triángulo ABD.



Respuesta del alumno:

Generaliza el teorema y realiza el siguiente calculo incorrecto:

$$\frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{h}$$

Cuando lo correcto sería:

$$\frac{1{,}5}{2} = \frac{3 + 1{,}5}{h}$$

D. Conocimientos previos del alumno

D.1 Conocimientos previos necesarios y vistos en la enseñanza anterior.

El alumnado antes de introducirse en el estudio del objeto matemático de semejanza y por tanto del teorema de Thales y sus aplicaciones, tiene que tener unos conocimientos previos en algunos de los bloques de matemáticas como en el de números, álgebra y principalmente el de geometría.

- Conocer y comprender conceptos como punto, recta, segmento, ángulo y medida y proporcionalidad.
- Saber diferenciar las rectas paralelas, perpendiculares y secantes.
- Reconocer y clasificar las diferentes figuras geométricas y sus propiedades.
- Identificar los diferentes tipos de triángulos teniendo en cuenta sus lados y ángulos. Saber las propiedades básicas de estas figuras planas como cuánto es la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- Manejar las unidades de medida.
- Operar con fracciones, número enteros, decimales, racionales, etc.
- Manejar con soltura el álgebra elemental: operar ecuaciones de una incógnita, saber despejar la variable, etc.

Como podremos comprobar a continuación, todos estos conocimientos previos los han adquirido en cursos anteriores de Primaria y E.S.O. Para ello, seleccionaremos los contenidos que nos interesan de cada nivel.

Según el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

Educación Primaria		
Bloque 2: Números	**Bloque 3: Medida**	**Bloque 4: Geometría**
Operaciones con fracciones. Porcentajes y proporcionalidad.	Desarrollo de estrategias para medir figuras de manera exacta y aproximada. Elección de la unidad más adecuada para la expresión de una medida. Realización de mediciones.	La situación en el plano y en el espacio. Posiciones relativas de rectas. Descripción de posiciones y movimientos. La representación elemental del espacio, escalas y gráficas

	Comparación de superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición. Sumar y restar medidas de longitud, capacidad, masa, superficie y volumen. Estimación de longitudes, capacidades, masas, superficies y volúmenes de objetos y espacios conocidos; elección de la unidad y de los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida. Medida de ángulos.	sencillas. Figuras planas: elementos, relaciones y clasificación. Clasificación de triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos. Identificación y denominación de polígonos atendiendo al número de lados. Perímetro y área. Poliedros. Elementos básicos: vértices, caras y aristas.

Según la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

1º y 2º de Educación Secundaria Obligatoria	
Bloque 2: Números y Álgebra	**Bloque 4: Geometría**
Fracciones equivalentes. Cálculos con porcentajes. Aumentos y disminuciones porcentuales. Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.	Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad. Ángulos y sus relaciones. Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones. Medida y cálculo de ángulos de figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Aplicaciones directas.

D.2 Actividades sobre los conocimientos previos.

Posteriormente, expondremos diversas actividades sencillas para que el alumnado pueda recordar y afianzar los conocimientos previos necesarios para abordar los objetos matemáticos tratados en este trabajo.

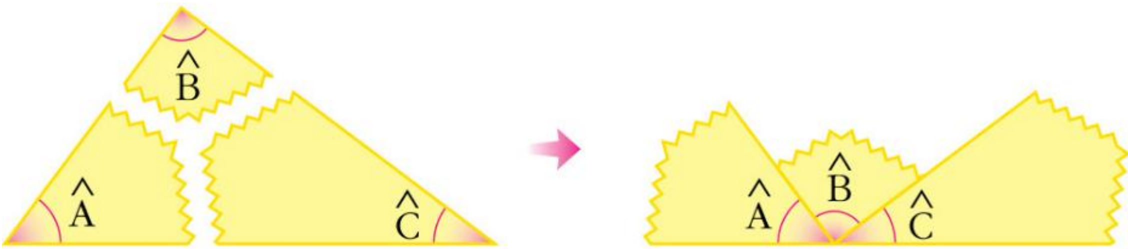
Estos ejercicios, los cuales se realizarán en el aula y de manera individual, serán el instrumento para realizar una evaluación diagnóstica acerca de los conocimientos de los estudiantes. Efectivamente, uno de los componentes para realizar una buena acción docente es el de conocer, en la medida de lo posible, a los alumnos que se enseña. Para ello, es muy útil el uso de las evaluaciones íniciales puesto que como dice David Paul Ausubel "El factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto y enséñese consecuentemente".

De esta manera, dependiendo de los resultados de dicha evaluación, el docente podrá decidir si es necesario dedicar algo de tiempo a un repaso de los conceptos básicos.

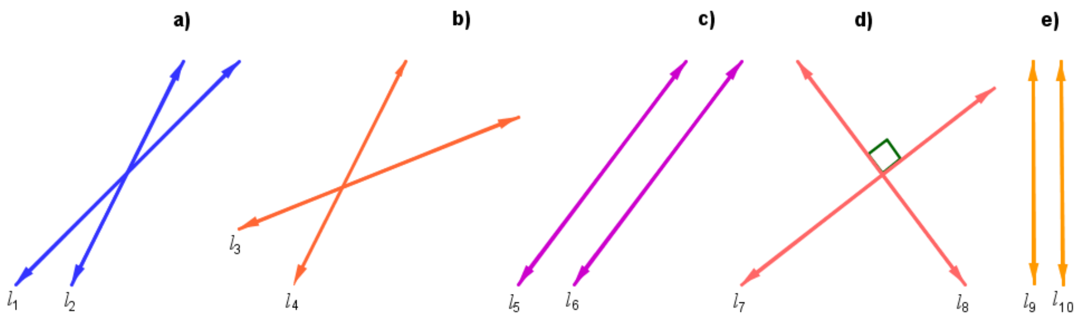
1) Dibuja los triángulos correspondientes. ¿Hay alguno que no se pueda dibujar? Justifica.

		SEGÚN SUS ÁNGULOS		
		ACUTÁNGULOS Tres ángulos agudos.	**RECTÁNGULOS** Un ángulo recto.	**OBTUSÁNGULOS** Un ángulo obtuso.
SEGÚN SUS LADOS	**EQUILÁTEROS** Tres lados iguales.			
	ISÓSCELES Dos lados iguales.			
	ESCALENOS Tres lados desiguales.			

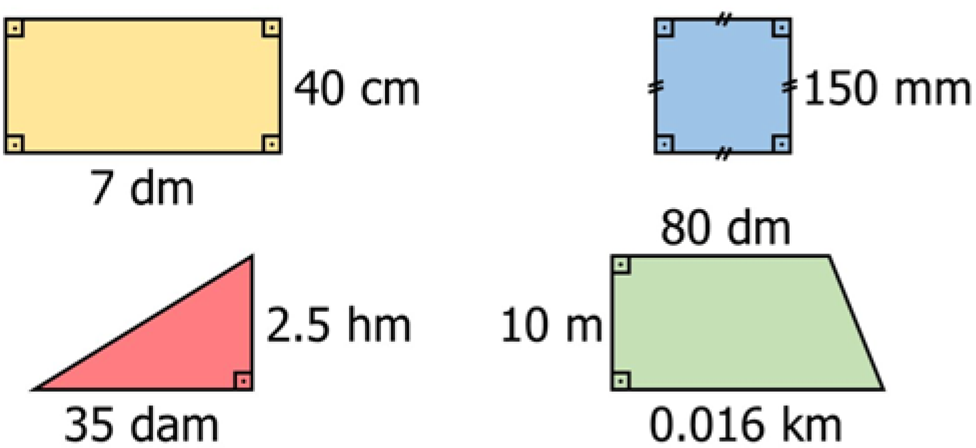
2) Dibuja cualquier triangulo. Recórtalo y une sus vértices como indica la figura. ¿Cuánto mide el ángulo que se forma al unir los tres vértices? ¿La suma de todos los ángulos de cualquier triángulo siempre es la misma?



3) Indica de qué tipo de rectas son cada una de estas rectas. ¿Qué diferencia existe entre las rectas secantes y las perpendiculares?



4) Calcula el área de las siguientes figuras planas en metros cuadrados.



5) **¡Las fracciones equivalentes necesitan tu ayuda!**

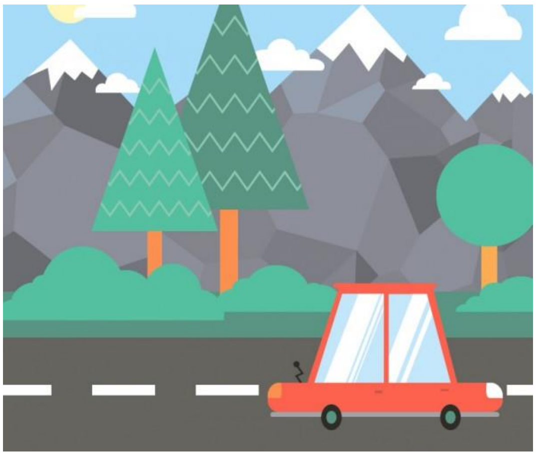
   a) **Calcula el valor de la incógnita en las siguientes proporciones.**

i. $\frac{3}{5}=\frac{12}{x}$	**ii.** $\frac{7}{4}=\frac{x+2}{16}$
iii. $\frac{x}{21}=\frac{-3}{7}$	**iv.** $\frac{20}{x}=\frac{4}{5}$

   b) **¿Quién es el intruso? Rodea la fracción que no es equivalente a las otras.**

$\frac{3}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{5}{15}$	$\frac{6}{10}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{5}$
$\frac{21}{12}$ $\frac{7}{4}$ $\frac{3}{10}$	$\frac{2}{4}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{8}{4}$

6) **Queremos comprar un vehículo cuyo precio inicial es de 8800€. No obstante, tras negociar el precio, conseguimos un descuento del 6%. ¿Cuánto tenemos que pagar por el vehículo?**



- **Sabemos que el coche que nos acabamos de comprar, gasta 7 litros de gasolina cada 100 kilómetros. Si quedan 9 litros en el depósito, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer?**

En el anexo I se encuentran las soluciones de estas actividades iniciales.

E. Razón de ser de los objetos matemáticos

Este apartado se centrará en la razón de ser histórica y la razón de ser de nuestra propuesta la cual se centrará en la necesidad que tenemos de utilizar la semejanza y el teorema de Thales en nuestro día a día. Asimismo, podremos observar como en cierta medida estas dos razones de ser se entrelazan y hasta llegan a coincidir debido a la evolución que han sufrido estos dos objetos matemáticos a lo largo de la historia.

E.1 Razón de ser histórica

El origen histórico del concepto de semejanza se remonta al desarrollo de la geometría euclidiana, la cual se fundamenta en axiomas (verdades absolutas) y teoremas. Retrocedamos en el tiempo para realizar un breve repaso acerca de la historia de nuestro objeto matemático.

Aunque el origen histórico de la Geometría es desconocido, sabemos que los conceptos más antiguos, como puede ser la semejanza, son consecuencia de las actividades prácticas. De hecho, los primeros hombres llegaron a formas geométricas a partir de la observación de la naturaleza.

Según Eudemo de Rodas, filósofo de la antigua Grecia y uno de los alumnos más importantes de Aristóteles, los egipcios descubrieron la geometría puesto que necesitaban medir constantemente sus tierras debido a que las inundaciones del Nilo borraban continuamente sus fronteras. Pese a que los egipcios se centraron en el cálculo de áreas y volúmenes, se encontraron rudimentos de trigonometría y nociones básicas de semejanza de triángulos

De la misma manera, las tablillas de cerámica a través de la escritura cuneiforme que heredamos de la cultura mesopotámica nos invitan a pensar en una familiarización con el concepto primitivo de semejanza a causa de sus múltiples problemas sobre medidas de triángulos. De hecho, Boyer (2001) afirma que posiblemente los babilonios ya se habían adaptado al originario concepto de semejanza entre figuras.

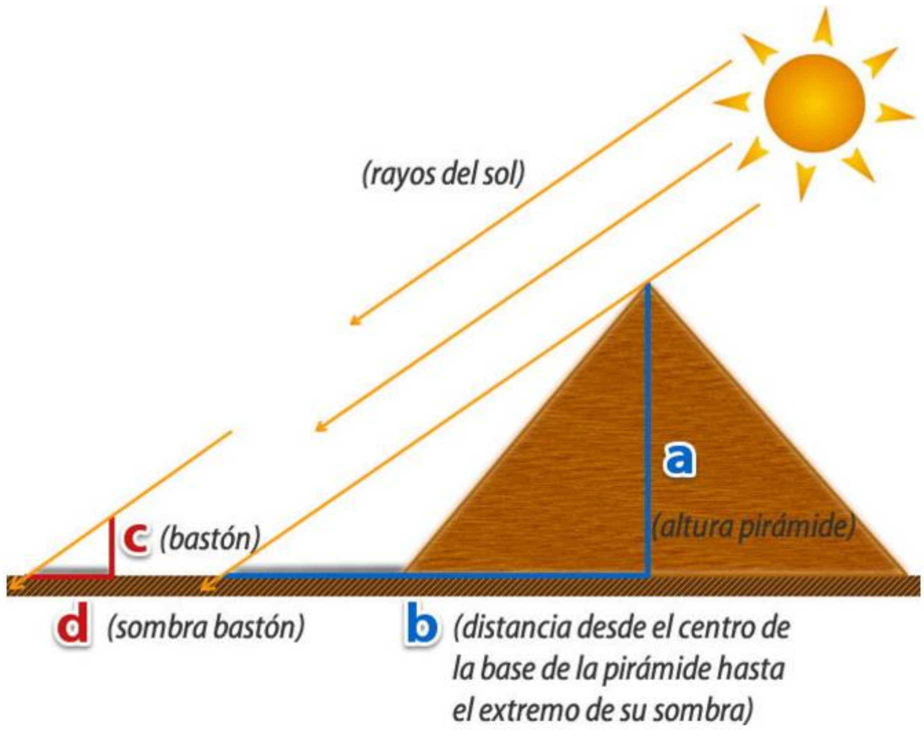
En resumen, es imprescindible resaltar las contribuciones que han aportado antiguas culturas, principalmente la babilónica y la egipcia, en la evolución de la geometría. Cardeas (2013) especifica que en "las diferentes etapas de su desarrollo, estas culturas dejaron textos, de cuya interpretación se desprende sobre todo en el ámbito de sus aplicaciones prácticas, que van dirigidas a la agrimensura y la construcción" (p. 3).

Con respecto a Thales de Mileto, se sabe muy poco a cerca de su vida y obra. Podemos presuponer que este filósofo, matemático, geómetra y físico griego nació sobre el año 625 a.C. puesto que "el eclipse del año 585 a.C., probablemente ocurrió cuando Tales estaba en la flor de la edad, digamos que alrededor de los cuarenta años" (Boyer, 2001, p. 75). Como curiosidad, mencionaremos que Thales fue capaz de predecir este eclipse solar, circunstancia que detuvo la célebre batalla entre Alyattes y Cyaxares.

Thales fue el fundador de la Escuela Jónica, se le consideró uno de los Siete Sabios de Grecia y fue conocido como el primer matemático verdadero de la geometría deductiva. Durante su primera etapa, Tales se dedicó parcialmente al comercio y se destacó por su astucia en los negocios.

Siendo aún comerciante, Thales visitó la Gran Pirámide de Guiza, también conocida como la Gran Pirámide de Keops. En aquella visita uno de los allí presentes formuló la pregunta de cuál era la altura de la misma. Ante tal reto geométrico, Thales se puso manos a la obra para resolver este problema. Finalmente, este calculó la altura de la pirámide por semejanza. A partir de la longitud de la sombra que proyectaba utilizando de esta manera el conocido primer Teorema de Thales. Existen diversas versiones de cómo lo hizo:

1. Por medio de Jerónimo de Rodas, Diógenes Laercio afirma que midió las pirámides por medio de la sombra, proporcionándola con la sombra de Thales cuando esta era igual a su altura.
2. Plinio supone que tomó como referencia las sombras de determinados objetos.
3. Plutarco narra que usó como elemento auxiliar un bastón colocado verticalmente. Se supone que Thales estableció una relación de proporcionalidad entre los lados de los triángulos determinados por la pirámide y su sombra y el bastón y la suya.



$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \textit{Si despejamos a;} \quad a=\frac{c\cdot b}{d}$$

E.2 Razón de ser en el aula

Lógicamente, el objeto matemático semejanza ha ido evolucionado a lo largo de la historia. Por este motivo, aunque su origen es el mismo, en el aula se utilizará como razón de ser un concepto matemático de semejanza más elaborado, ampliado y adaptado a nuestras necesidades actuales.

La razón de ser del objeto matemático semejanza la podemos enfocar desde varias perspectivas:

- Ampliación y reducción de imágenes.
- Utilidad e interpretación de los mapas, planos, escalas, etc.
- Resolución de problemas donde se demandan trabajar con medidas indirectas de distancias.

Por otra parte, la razón de ser histórica del teorema de Thales coincide con la razón de ser que se propondrá en el aula puesto que al fin y al cabo, el campo de problemas que se plantea proponer consistirá en calcular medidas inaccesibles e imposibles de deducir de forma exacta a simple vista.

E.3 Obstáculos epistemológicos en la enseñanza

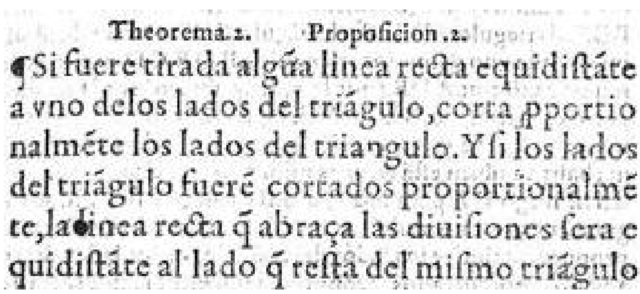
Los *Elementos*, escrito por el matemático griego Euclides cerca del 300 a. C. en Alejandría, es un tratado matemático y geométrico que se compone de trece libros.

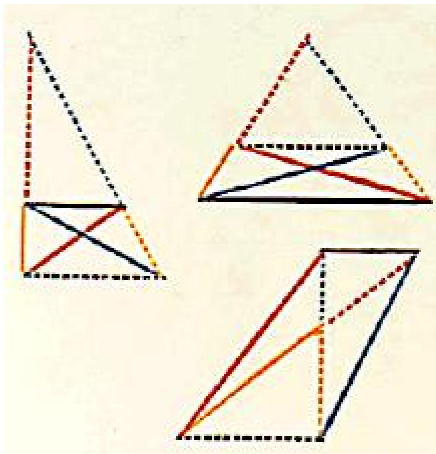
Este tratado es considerado como uno de los libros de texto más divulgado en la historia y el segundo en número de ediciones publicadas después de la Biblia.

Los trece volúmenes recopilan gran parte del saber matemático de su época, dando lugar, de una forma sencilla y lógica, a la Geometría euclidiana.

En el presente Trabajo de Fin de Máster, destacaremos el Libro VI, en el cual encontramos cinco definiciones, treinta y tres proposiciones y dos porismas, puesto que refleja formalmente la aparición del concepto matemático de semejanza. En resumen, este libro estudia la proporcionalidad entre segmentos y la semejanza entre figuras planas. Además, es interesante destacar que las primeras proposiciones tratan sobre la proporcionalidad en triángulos. Particularmente, la segunda proposición se suele enseñar actualmente como consecuencia del Teorema de Thales:

Proposición 2. *Si se dibuja una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado que queda del triángulo.*


Theorema.2. Propoſicion.2.
¶Si fuere tirada algũa linea recta equidiſtãte a vno delos lados del triãgulo, corta ꝓportio nalmẽte los lados del triangulo. Y ſi los lados del triãgulo fuerẽ cortados proportionalmẽ te, la linea recta q̃ abraça las diuiſiones ſera e quidiſtãte al lado q̃ reſtã del miſmo triãgulo



En el anexo II, encontraremos las proposiciones y las demostraciones del Libro VI relacionadas con el Teorema de Thales y los criterios de semejanza de triángulos.

Acerca del estudio de dicho libro realizado por Quintero (2012), creemos conveniente destacar las conclusiones obtenidas de la definición 1 y 3:

> **Definición 1.** Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales.
> [...] Euclides establece la semejanza únicamente como una característica de dos o más figuras rectilíneas (polígonos), pero no establece semejanza entre figuras no rectilíneas; la proporcionalidad geométrica se da entre al menos tres objetos geométricos (o más precisamente, entre al menos tres cantidades de magnitudes homogéneas).
> **Definición 3.** Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor es al menor.
> [...] esta definición contempla una alusión a la proporcionalidad geométrica, pero no una a la semejanza; ello por cuanto, como lo señalamos antes, la semejanza se da entre figuras rectilíneas (polígonos) y no entre segmentos. (p. 80)

Por último, queremos nombrar a Escudero (2005), el cual ha realizado un trabajo centrado en el tratamiento de la semejanza y el teorema de Thales tanto en los documentos curriculares oficiales como en los libros matemáticos escolares. En la elaboración del mismo, Escudero (2005) cree conveniente distinguir tres momentos en la evolución histórica de la semejanza para, al mismo tiempo, identificar tres aproximaciones al concepto cuando se considera como objeto de enseñanza. La finalidad de analizar la relación existente entre la evolución del concepto de semejanza con la situación correspondiente en la enseñanza es la de determinar ciertos obstáculos epistemológicos. De esta manera, Lemonidis (1990 citado en Escudero, 2005) distingue los siguientes tres periodos:

> a) El griego. La primera demostración del teorema de Thales y algunos teoremas relativos a figuras semejantes se encuentra en los Elementos de Euclides (s. IV a.C.). Hay que destacar de este periodo y, en general, en el periodo de la influencia de la geometría de Euclides, que las transformaciones no existen como tales.

b) Del siglo XVI al XVIII. Los problemas de la representación del espacio que surgen en el Renacimiento van a ser el germen para el estudio de las transformaciones. Durante estos siglos, se van a ir desarrollando lentamente, sin que se pueda identificar aún una etapa de utilización consciente y de conceptualización de las mismas. De este periodo, se resalta la consideración de una transformación como un útil en la resolución de problemas.

c) Siglos XIX y XX. Periodo de la estructuración y algebraización de la geometría. En el siglo XIX se produce la consideración de la homotecia y de la semejanza como objetos matemáticos, debido en gran parte al desarrollo que experimenta la geometría, entre las fechas de publicación de la geometría descriptiva de Monge (año 1799) y el Programa Erlangen de Felix Klein (año 1872) y a la evolución del campo numérico. (p.380)

Asimismo, Lemonidis (1991 citado en Escudero, 2005) establece tres momentos diferentes en el concepto de semejanza, desde los que, a su vez, se pueden determinar tres aproximaciones a ella. Dichas aproximaciones, las cuales se deben tener presentes cuando se considera a la semejanza como objeto de enseñanza, son:

a) Relación intrafigural. Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.

b) Transformación geométrica vista como útil. La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Se utiliza la semejanza como un útil en la resolución de problemas gráficos.

c) Transformación geométrica como objeto matemático. Caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones. (p. 380)

E.4 Metodología

La metodología de los problemas de razón de ser que propondremos en el próximo apartado será la siguiente:

i. Proponer al alumnado el enunciado de la correspondiente actividad.
ii. Otorgar el tiempo necesario para que los estudiantes de forma individual o en grupos pequeños de 2-3 personas, dependiendo de las características del grupo-clase, piensen, analicen y resuelvan dicha actividad. En esta fase, la labor del profesor será de observación activa del trabajo del alumnado. Se intentará, en la medida de lo posible, no ayudar a los alumnos para que ellos trabajen solos. No obstante, si se observa que alguno de ellos está atascado o no tiene la seguridad para avanzar con el ejercicio, el docente dará alguna pauta para encaminarlo propiciando y trabajando de esta manera la "Zona de desarrollo próximo". En ningún caso, el docente revelará la solución del problema.
iii. Iniciar una discusión en gran grupo, para comentar los resultados, procedimientos y conclusiones de los estudiantes. Después de dicha puesta en común, el profesor institucionalizará los conceptos y técnicas que hayan aparecido en la fase de resolución del problema.

Efectivamente, el papel del docente no será la de trasmitir saberes, sino que se centrará en diseñar y planificar actividades, problemas, preguntas para amplificar el ejercicio, etc. que potencien el proceso de enseñanza-aprendizaje y emerja el conocimiento en el aula.

En resumen, la metodología propuesta consiste en que los alumnos trabajen de forma autónoma la resolución de un problema. Después, se realizará una puesta en común de los procedimientos, soluciones y conclusiones del problema, incitando y fomentando de esta manera una discusión en gran grupo. Finalmente, el docente se encargará de realizar el proceso de institucionalización.

Según Morera (2013), "las discusiones en gran grupo de la resolución de problemas matemáticos en clase son un recurso muy importante para crear oportunidades de aprendizaje a los estudiantes" (p. 2). Definiremos las oportunidades de aprendizaje como:

> todas las situaciones, que se dan en los procesos de resolución, en las que los alumnos se les presente la posibilidad de reorganizar sus estructuras

conceptuales, es decir, de aumentar sus conexiones o de relacionarlas con el aprendizaje de nuevas formas de proceder en la resolución de los problemas que estén trabajando. (Morera, 2013, p. 12)

El artículo de Ferrer, Fortuny y Morera (2014), basado en otras investigaciones como las de Morera, se centra especialmente en la figura del profesor y en la gestión de discusiones en gran grupo con la generación de oportunidades de aprendizaje matemático, en un contexto de resolución de problemas de semejanza.

En dicho artículo, se describe el concepto de orquestación como el "modo que tiene un profesor para gestionar los elementos singulares de una discusión y producir resultados compartidos" (Ferrer, Fortuny y Morera, 2014, p. 386). Para ello, es necesario que el docente realice un trabajo previo de planificación para que la ejecución del problema matemático en el aula sea lo más efectiva posible. Por este motivo, se propone una sistemática de seis fases para preparar y gestionar discusiones en gran grupo:

1) ***Anticipación a través del árbol***: estudio previo de cómo los estudiantes podrían abordar el problema planteado y prever sus posibles respuestas. Un instrumento relevante es el *árbol del problema* descrito por Morera, Souto y Arteaga (2011 citado en Ferrer, Fortuny y Morera, 2014, p. 386). Éste se basa en la idea de un árbol, cuyas ramas muestran las diversas estrategias que un alumno podría seguir en la resolución de un problema. Por una parte, si dichas estrategias son incorrectas, el árbol incluye posibles comentarios del docente orientados a dirigir el proceso de resolución del alumno. Por otra parte, si las estrategias son correctas, el árbol propone varias preguntas al alumno para que se plantee nuevos retos.

2) ***Configuración didáctica ampliada***: conjunto de artefactos, convencionales o tecnológicos, orientados a la enseñanza que el docente decide incluir en el desarrollo de su sesión de clase. En los problemas de razón de ser que propondremos a continuación, sólo haremos uso de artefactos convencionales.

3) ***Modo de explotación***: forma en la que el profesor interpreta una configuración didáctica para atender a sus intenciones didácticas.

4) **M*onitorización*:** en esta fase se inicia la ejecución del trabajo con los estudiantes. Se basa en el seguimiento de sus pensamientos matemáticos y sus estrategias de resolución mientras trabajan en el problema. La principal finalidad de una buena monitorización es fomentar posteriormente la interacción entre los alumnos y que las indicaciones del docente no limiten la posible.

5) ***Selección de situaciones:*** proceso mediante el cual el profesor lleva a cabo una selección de los alumnos en cada uno de los problemas de la secuencia para que compartan con el resto del grupo su interpretación, solución del problema, conclusiones, etc.

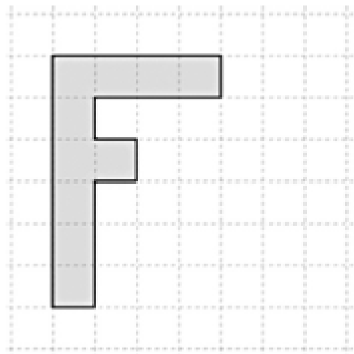
6) **S*ecuenciación de la implementación didáctica*:** se refiere a la gestión de la clase en general. En otras palabras, es el reflejo de la preparación previa de la sesión de discusión y su puesta en práctica en el aula. Para ello, tendremos en cuenta los siguientes ocho "estadios de la discusión en gran grupo de un problema", los cuales están ordenados según el desarrollo natural de la evolución de la discusión:

   - Situación del problema
   - Presentación de una solución argumentada
   - Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar
   - Estudio de casos particulares o extremos
   - Contraste entre diferentes soluciones
   - Conexiones con otras situaciones
   - Generalización y conceptualización
   - Reflexión sobre el progreso matemático

E.5 Problemas de razón de ser

- Problema 1: Semejanza de figuras.

Dada la siguiente letra del abecedario, representa otra que sea el doble de grande. A continuación explica brevemente cómo la has obtenido y compárala con la original.



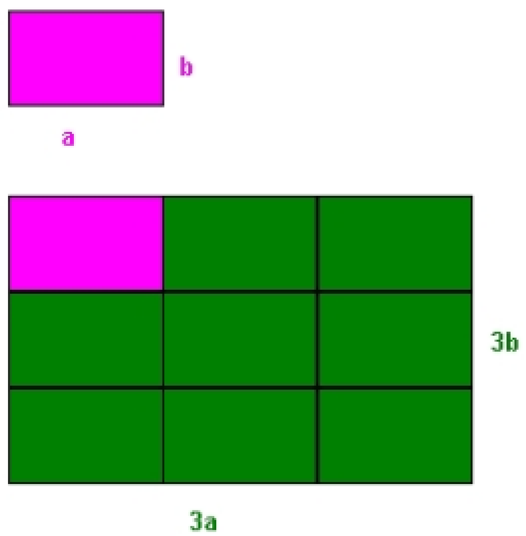
La actividad, que se presenta a los estudiantes de forma gráfica mediante el dibujo lineal de una figura bidimensional, tiene los siguientes objetivos matemáticos: estudiar la proporcionalidad de figuras poligonales, elaborar conjuntamente una definición de semejanza basada en la igualdad de ángulos y la proporcionalidad de lados homólogos, y relacionar los perímetros y las áreas de figuras semejantes de dos dimensiones (Ferrer, Fortuny y Morera, 2014, p. 390).

Como podemos observar, el enunciado del problema es ambiguo a causa de la indefinición implícita de la frase "el doble de grande". La finalidad es crear y enriquecer la discusión en clase. De esta manera, algunos estudiantes representarán una figura con el doble de perímetro que la original puesto que cada uno de sus lados es el doble de grande respecto al inicial. Así, los alumnos llegarán a la definición de figuras poligonales semejantes al percibir que los ángulos de ambas figuras son iguales pero los lados son proporcionales con factor 2.

Sin embargo, otros alumnos pueden interpretar la actividad como la demanda de una figura que tenga el doble de área. En este caso, la figura será únicamente semejante a la original si la razón entre los lados homólogos es $\sqrt{2}$. El uso de la cuadrícula servirá de ayuda para la construcción de dichas figuras.

Después de la discusión en gran grupo, el profesor puede pedir a su alumnado la relación existente entre la razón de los perímetros, la cual es la misma a la razón de semejanza entre las figuras, y la razón de las áreas de dos figuras poligonales semejantes, basándose en los datos y conclusiones que habían sacado entre todos anteriormente.

En el caso de que los alumnos no lleguen a ver y/o entender dicha relación, se les pedirá dibujar un rectángulo cuya razón de semejanza sea 3 con respecto al original de lados a y b.



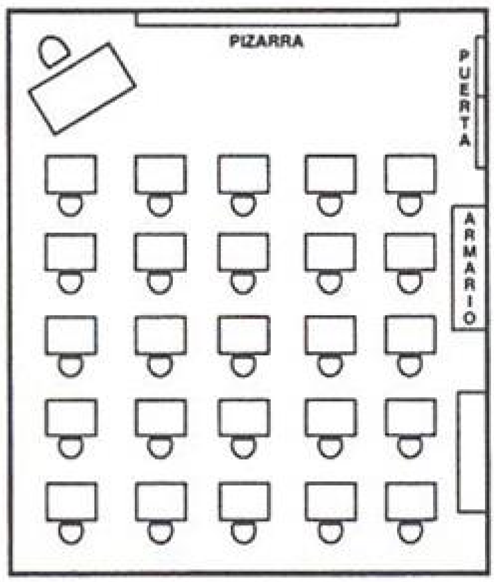
Efectivamente, observarán por sí mismos que:

- El área del rectángulo menor es $a \times b$
- El área del rectángulo mayor es $3a \times 3b = 9ab$

De este modo, acabarán concluyendo que la razón entre las áreas es: $\frac{\acute{A}rea\ del\ rect\acute{a}gulo\ mayor}{\acute{A}rea\ del\ rect\acute{a}ngulo\ menor} = 3^2$

Problema 2.1: Razón de semejanza. Escalas.

Queremos redecorar nuestra clase y para ello necesitamos comprar nuevos muebles que puedan caber en el aula. A continuación os presentamos un plano a escala 1:100 en centímetros. Elige los muebles idóneos y su distribución para que quepan correctamente en el aula



Los posibles muebles a elegir son los siguientes:

- Problema 2.2: Razón de semejanza. Escalas.

En verano, Juan decide irse de vacaciones a la playa. Como es muy ahorrador, decide informase de los precios de cada hotel. Finalmente, encuentra 3 habitaciones de hoteles distintos al mismo precio. Sus dimensiones son:

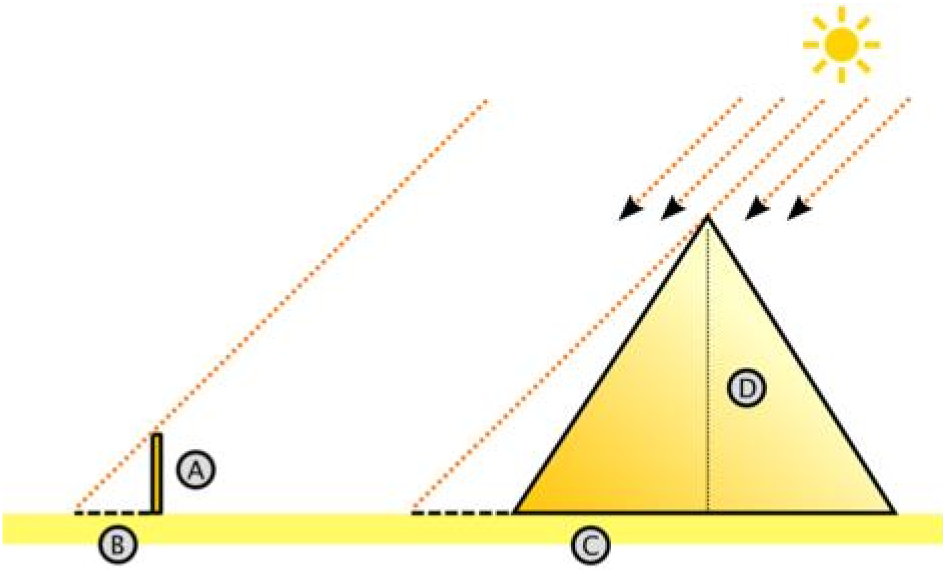
	Escala	**Dimensiones plano**	**Dimensiones reales**	**Área real de la habitación (en m^2)**
Habitación 1	1:50	**Ancho:** 6,5 cm **Largo:** 6,3 cm	**Ancho:** **Largo:**	
Habitación 2	1:100	**Ancho:** 4,2 cm **Largo:** 5,5 cm	**Ancho:** **Largo:**	
Habitación 3	1:250	**Ancho:** 1,5 cm **Largo:** 2 cm	**Ancho:** **Largo:**	

Completa la tabla. ¿Qué habitación debería escoger Juan?, ¿por qué?

Estos problemas de razón de ser propiciarán que los estudiantes vean la necesidad de saber utilizar, interpretar y operar tanto las medidas como las escalas de por ejemplo un plano. Al mismo tiempo, comprenderán los beneficios que les puede aportar en la vida cotidiana el manejo de estos saberes y conocimientos.

- Problema 3: Razón de ser histórica del Teorema de Thales.

Llegadas las vacaciones, Thales de Mileto, un famoso matemático, decidió hacer un poco de turismo y se fue a Egipto. Entusiasmado, visitó la Gran pirámide de Guiza, la cual es la más antigua de las siete maravillas del mundo. Allí mismo, se encontró con el faraón, el cual le retó a medir la altura de esa Gran pirámide, que sirvió de tumba a la dinastía Keops. Thales aceptó el reto y con ayuda de su bastón, el cual medía 1,5 metros, comenzó el reto aprovechando la semejanza de triángulos.



A una hora determinada del día, la sombra de la pirámide medía 280 metros y la sombra del bastón 2,87 metros. ¿Cuánto medía la pirámide?

Consideramos fructuoso proponer al alumnado este problema de razón de ser histórico para que el docente tenga la oportunidad de hablar sobre historia de las Matemáticas en el aula. De hecho, no podemos olvidar que

> La Historia de las Matemáticas es una fuente inagotable de material didáctico, de ideas y problemas interesantes y también, en un alto grado, de diversión y recreo intelectual, en suma de enriquecimiento personal, científico y profesional, que el profesor puede aprovechar para motivar su labor de transmisión del conocimiento, desdramatizando la Enseñanza de las Matemáticas. Finalmente la Historia de las Matemáticas como lugar de encuentro entre las ciencias y las humanidades, es un instrumento magistral para enriquecer culturalmente la Enseñanza de la Matemática e

> integrarla de forma armónica e interdisciplinar en el currículum académico. (González, 2004, p. 27)

En nuestra opinión, la Historia de las Matemáticas es un elemento importante a considerar en la Didáctica de la Matemática. Por este motivo, aludiremos a la famosa cita de Bell (1985 citado en González, 2004, p. 17): "Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas".

Al resolver el problema, los alumnos obtendrán como resultado del problema que la pirámide de Keops medía 146,34 metros. Es interesante, que el profesor comente en clase que esa era la altura aproximada que tenía la pirámide en la antigüedad. Actualmente mide aproximadamente 139 metros.

F. Praxeología: campo de problemas, técnicas y tecnologías

Los campos de problemas que se presentan a continuación se corresponden con las técnicas necesarias para su resolución. No obstante, destacamos el último campo de problemas llamado "Distancias inaccesibles", el cual es el único recogido por su contexto puesto que las técnicas utilizadas son las vistas en los anteriores problemas. Particularmente, utilizaremos el Teorema de Thales en este último.

Así pues, los campos de problemas propuestos son:

1) Semejanza. Propiedades de las figuras semejantes
2) Razón de longitudes y áreas
3) Escalas
4) Teorema de Thales
5) División de segmentos en partes proporcionales
6) Construcción de polígonos semejantes
7) Distancias inaccesibles

A lo largo de este apartado, se manifestará la metodología a seguir en el aula, las técnicas y las tecnologías que las justifican en cada campo de problemas. Estas dos últimas han sido recogidas de diversos libros académicos de texto de Matemáticas. Además, observaremos que:

- Las técnicas estarán adecuadas a los campos de problemas asociados al objeto matemático.
- La responsabilidad de justificar las técnicas, si es que hay tecnologías, será asumida algunas veces por el profesor y otras por el alumnado.
- En general, las técnicas se justificarán mediante definiciones, ejemplos tanto numéricos como visuales, y demostraciones. Para ello, usaremos diversos recursos como:
  - Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC): software de GeoGebra, ordenadores, proyector, Internet, etc.
  - Geoplanos.
  - Fichas con ejercicios.
  - Imágenes a diferentes escalas.
  - Problemas recogidos de fuentes externas como Grupo Beta (1993).

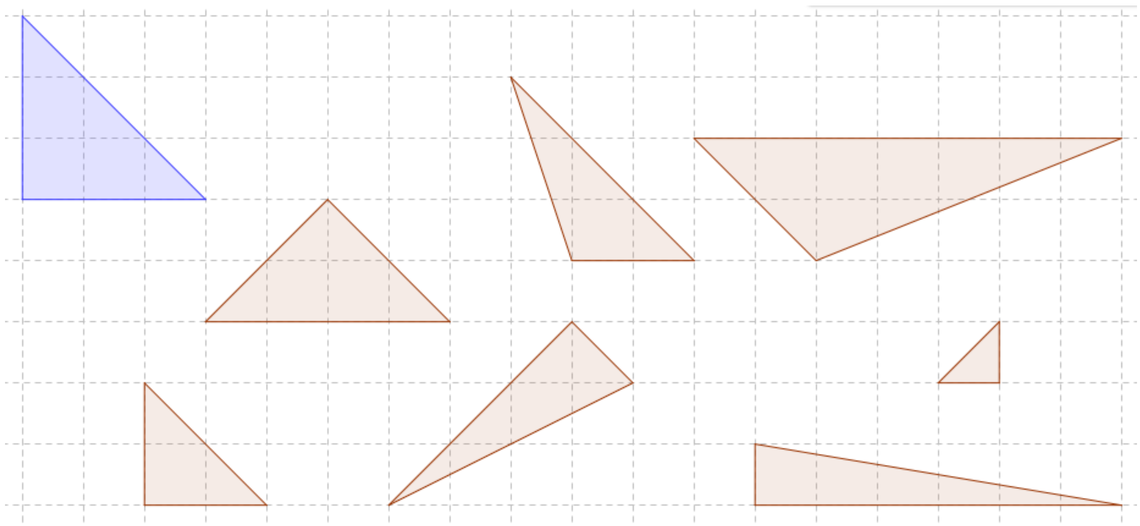
F.1 Campo de problemas 1: Semejanza. Propiedades de las figuras semejantes.

El primer campo de problemas se centrará en el objeto matemático de semejanza. Principalmente nos propondremos los siguientes objetivos:

i. Intentar que los alumnos se den cuenta por ellos mismos que en Matemáticas el concepto de "parecido" es diferente al de "semejante".
ii. Acordar entre toda la clase que "semejante" significa "tener la misma forma", lo cual implica de alguna manera comparar partes correspondientes de las dos figuras.
iii. Descubrir las propiedades que hacen que algunos polígonos se consideren semejantes.
iv. A partir de lo anterior, institucionalizar seguidamente los criterios de los triángulos semejantes.

Todos los problemas que se propongan en los siguientes campos de problemas serán resueltos de manera individual por el alumnado, excepto cuando se especifique lo contrario.

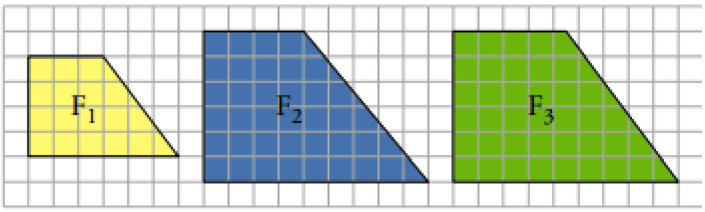
Problema 1.1: Rodea los triángulos marrones que aparecen en la cuadrícula que no sean semejantes con el triángulo azul:



¿Cuál es la razón de semejanza de los triángulos semejantes al azul?

El docente repartirá una ficha con dicho problema a cada alumno y dejará 5 minutos para que resuelvan la primera parte. Mientras tanto, el profesor estará atento a las posibles dudas que puedan surgir. Después, el problema lo corregirán en alto entre los estudiantes. Seguidamente, gracias a ciertas cuestiones y conclusiones que pueden manifestarse a través del docente o de los propios estudiantes, se dejará en evidencia la clara diferencia que existe entre el concepto de "parecido" y "semejante". De esta forma, el docente institucionalizará los nuevos objetos matemáticos de "semejanza" y "razón de semejanza". Con ayuda de la definición de razón, los alumnos deberán pensar y resolver la segunda cuestión propuesta.

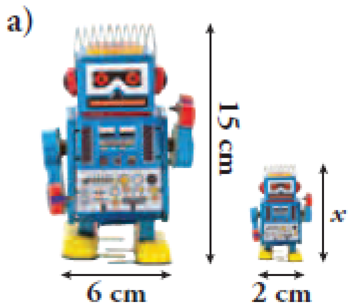
Problema 1.2: ¿Cuál de estas figuras son semejantes? ¿Cuál es la razón de semejanza?

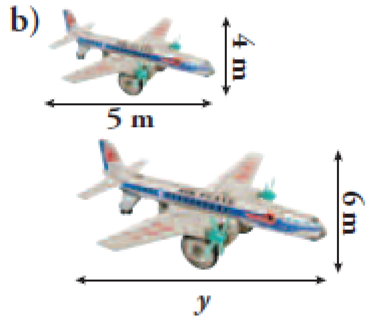


La finalidad de esta actividad es que los alumnos afiancen de una manera práctica y visual el concepto de "razón de semejanza", la cual hemos institucionalizado anteriormente. Además, les pondremos la dificultad de deducir por ellos mismos si dos figuras "iguales" son "semejantes".

Efectivamente, acabarán concluyendo que F_1 es semejante a F_2 y a F_3 con una razón de semejanza de $\frac{3}{2}$. Del mismo modo, F_2 y F_3 son semejantes con una razón de semejanza de 1.

Problema 1.3: Calcula las longitudes que faltan en estas figuras y halla la razón de semejanza entre ellas:





En la línea de Steinthorsdottir (2006), nótese que las medidas de los objetos están cuidadosamente elegidas para que no haya cocientes enteros al dividir longitudes de segmentos de la misma figura.

Por otra parte, no debemos limitarnos a proponer ejercicios donde aparezcan únicamente figuras geométricas planas. En otras, consideramos beneficioso para los alumnos proponer problemas donde aparezcan objetos que se pueden encontrar en su entorno como son en este caso un juguete y un avión.

La solución de dicho ejercicio es:

a) $\frac{6}{2} = \frac{15}{x} \rightarrow x = 5$. La razón de semejanza es: $k = \frac{6}{2} = 3$

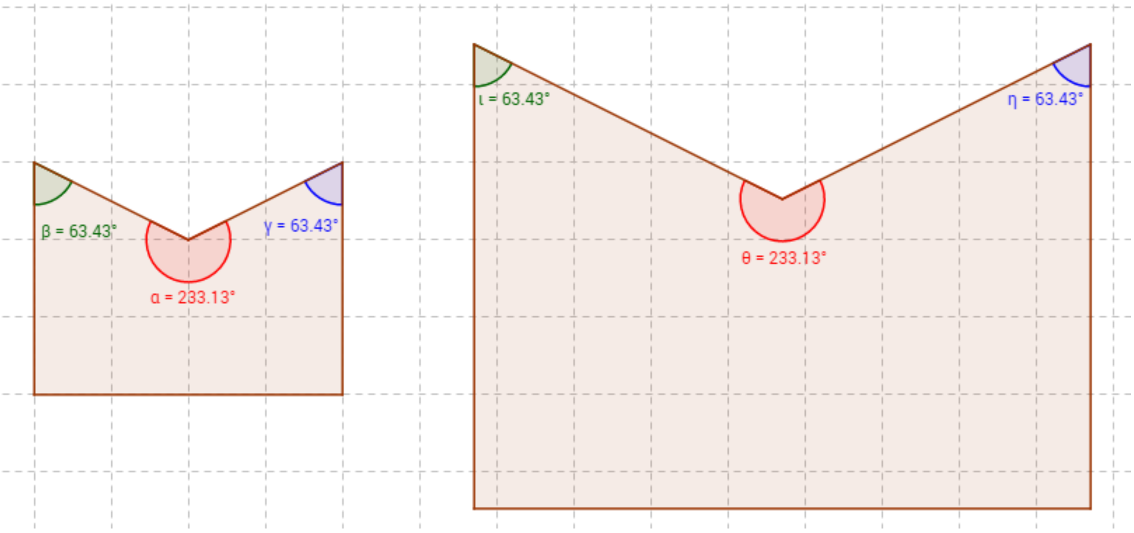
b) $\frac{4}{6} = \frac{5}{y} \rightarrow y = 7{,}5$. La razón de semejanza es: $k = \frac{4}{6} = 1{,}5$

Problema 1.4: Decide, razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Además, si es falsa pon un ejemplo que lo justifique.

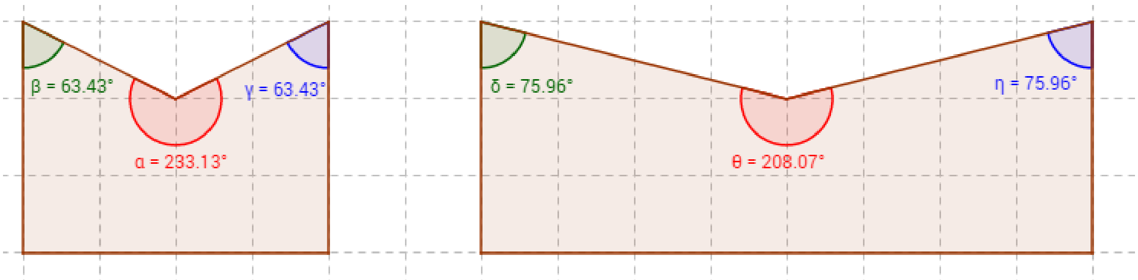
a) Todos los cuadrados son semejantes.

b) Todos los rectángulos son semejantes.

c) Los siguientes polígonos son semejantes.



d) Los siguientes polígonos son semejantes.



Tras saber que en matemáticas se dice que dos figuras geométricas son semejantes si tienen "la misma forma", pasaremos a determinar los diferentes criterios que deben cumplir los polígonos semejantes.

En primer lugar, los alumnos tendrán que pensar y resolver los dos primeros apartados con la idea "informal" que tengan sobre las propiedades de las figuras semejantes. Para ello, el docente entregará a cada estudiante un geoplano para que vayan dibujando cuadrados y posteriormente rectángulos de diferentes formas y tamaños. De esta manera, enfocaremos el problema de una manera menos abstracta y más manipulativa.

Después de resolver en la pizarra los dos primeros apartados, el docente dará unos minutos para que los estudiantes resuelvan los últimos apartados.

La idea es que el alumnado llegue a las siguientes conclusiones, ya sea autónomamente o con ayuda del profesor.

a) Verdadera, todos los cuadrados son semejantes. Si comparamos dos cuadrados veremos que todos los ángulos de ambos son rectos y los lados correspondientes de ambos son proporcionales puesto que los cuatro lados de un mismo cuadrado deben ser iguales. En otras palabras, si comparamos cada lado de un cuadrado de 5 centímetros de lado con respecto a los lados correspondientes de otro cuadrado de 10 centímetros de lado veremos que la razón será la misma para cada lado homólogo.

b) Falsa, no todos los rectángulos son semejantes. Si comparamos dos rectángulos veremos que todos los ángulos de ambos son rectos. No obstante, los lados correspondientes no tienen por qué ser proporcionales entre ambos. Un claro ejemplo son los rectángulos de lados 1 y 2 cm y 1 y 3 cm.

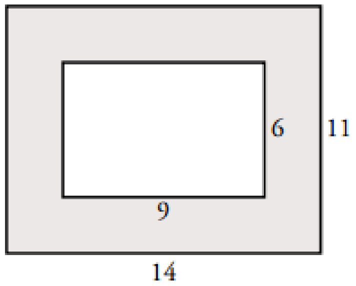
c) Verdadero. Podemos comprobarlo de dos maneras:

- Cada lado del primer polígono es proporcional al lado homólogo del segundo.
- Cada ángulo del primer polígono es igual al ángulo homólogo del segundo.

d) Falso. Podemos comprobarlo de dos maneras:

- Cada lado del primer polígono no es proporcional al lado homólogo del segundo.
- Cada ángulo del primer polígono no es igual al ángulo homólogo del segundo.

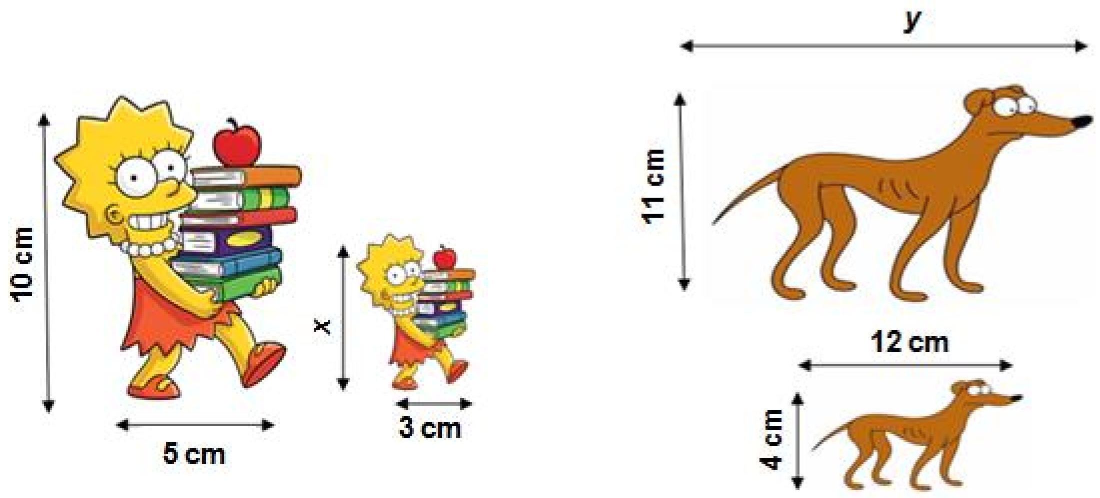
Problema 1.5: Una fotografía de 9 cm de ancho y 6 cm de alto tiene alrededor un marco de 2,5 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco? Responde razonadamente.



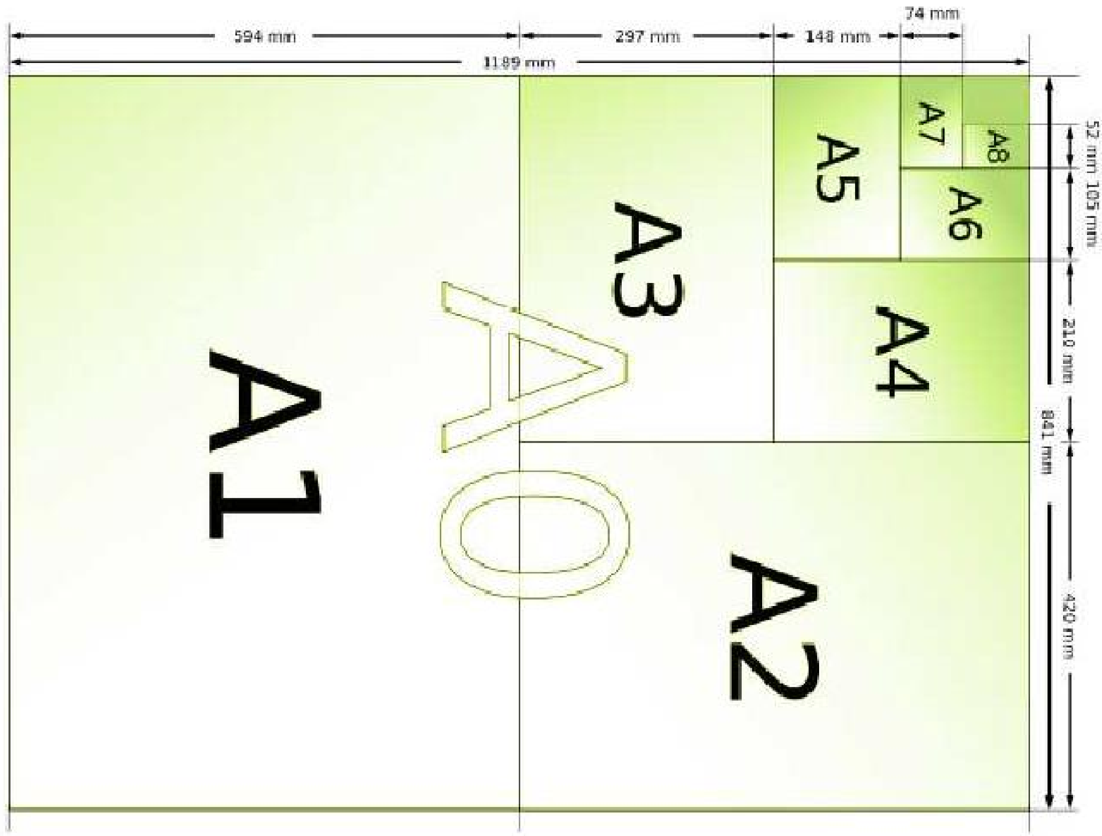
Tanto por el contexto como por la imagen presentada, a simple vista, es muy probable que los estudiantes afirmen que dichos rectángulos sean semejantes. Les mostraremos importancia de las matemáticas a la hora de contrastar una afirmación aparentemente cierta: $\frac{14}{9} \neq \frac{11}{6}$

Como podemos comprobar, en este caso no hay cocientes enteros de ninguna forma. Pero, ¿qué pasaría si existieran cocientes enteros entre las medidas del propio objeto?, ¿los alumnos tendrán dificultades?

Problema 1.6: Calcula las longitudes que faltan en estas figuritas y halla la razón de semejanza entre ellas:



Problema 1.7: Responde a las siguientes cuestiones.



a) ¿Cuál es la razón entre el lado mayor y el lado menor en todos los formatos?

b) ¿Cuál es la razón de semejanza que permite pasar del formato A4 al A3?

c) ¿Cuál es la razón de semejanza que permite pasar del formato A3 al A5? En el caso anterior hemos obtenido una ampliación, mientras que ahora se obtiene una reducción. ¿Qué relación guarda esto con la razón de semejanza?

d) Calcular el perímetro del A3, A4 y A5. ¿Existe alguna relación entre ellos?

e) Sabiendo que el formato A4 se obtiene doblando un A3, ¿cuál es el área del A4 en relación con el A3?

f) Organizar todos los datos anteriores en una tabla.

En primer lugar, los alumnos deberán agruparse por parejas para realizar la actividad que vamos a explicar a continuación.

En segundo lugar, el profesor repartirá a cada grupo un papel de DIN A3, A4 y A5 a cada para pedirles posteriormente que busquen todas las regularidades posibles. A simple vista, una de las características que observaran será que el papel en formato A5 es la mitad del papel en formato A4 y este a su vez es la mitad del A3.

Hasta ahora, hemos estado trabajando con los lados y los ángulos de los polígonos, por este motivo se espera que los alumnos los midan y los anoten en su cuaderno. Si el profesor percibe que esto último no se produce, dará indicaciones para volver al tema que nos interesa. Después de trabajar con los lados y los ángulos de dichos papeles, se espera que averigüen si los formatos son semejantes.

Finalmente, se acabará concluyendo en el aula que todos los formatos son semejantes y que cada formato se obtiene del anterior, doblándolo en dos partes iguales por el lado mayor.

A continuación, los alumnos tendrán que responder a las cuestiones que se han planteado anteriormente. Se estima que en total dicha actividad durará entre 30-40 minutos.

Problema 1.8: Con ayuda de GeoGebra, dibuja un triángulo de ángulos 90º y 30º respectivamente. A continuación realiza los siguientes pasos:

a) Anota en tu cuaderno las medidas de los lados y de los ángulos de dicho triángulo.
b) Mueve un vértice. ¿Este triángulo es semejante al primero?
c) Construye otro triángulo cualquiera con dos ángulos fijos. Seguidamente mueve un vértice. ¿El triángulo resultante es semejante al anterior? ¿Por qué crees que pasa esto?

Por parejas, los alumnos tendrán que realizar la actividad propuesta con el software GeoGebra. Después de poner en común los resultados de toda la clase, el profesor explicará que existe una serie de criterios que nos permiten identificar si dos triángulos son semejantes sin la necesidad de medir y comparar todos sus lados y ángulos. A partir de esta actividad, se expondrán los criterios de semejanza de triángulos.

Problema 1.9: Decide, razonando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Además, si es falsa pon un ejemplo que lo justifique.

a) Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
b) Todos los triángulos rectángulos son semejantes.
c) Todos los triángulos isósceles son semejantes.
d) Todos los triángulos que son a la vez rectángulos e isósceles son semejantes.

Después de haber formalizado los criterios que deben cumplir los triángulos semejantes, los alumnos volverán a tener unos minutos para responder los siguientes problemas con ayuda de un geoplano. Posteriormente, dicho problema se corregirá en voz alta por los alumnos.

Si las condiciones del aula y los recursos son idóneos, el uso de la pizarra se puede sustituir por un geoplano interactivo desde el ordenador para poder proyectarlo y de esta manera que el resto de la clase lo pueda ver. Una posible alternativa es el propuesto por NCTM (2015) en la siguiente página web: https://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=6385

Las soluciones de los apartados son:

a) Verdadera, todos los triángulos equiláteros son semejantes. Si comparamos dos triángulos equiláteros veremos que todos los ángulos de ambos miden 60º y, por lo tanto, son iguales. Asimismo, los lados correspondientes de ambos son proporcionales puesto que en cada triángulo equilátero sus tres lados deben ser iguales. En otras palabras, si comparamos cada lado de un triángulo equilátero de 3 centímetros de lado con respecto a los lados correspondientes de otro triángulo equilátero de 6 centímetros de lado veremos que la razón será la misma para cada lado homólogo.

b) Falsa, no todos los triángulos rectángulos son semejantes. De hecho, ni siquiera tienen por qué tener los respectivos ángulos iguales.
Únicamente, dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen:

- Un ángulo agudo igual, o bien,
- dos parejas de catetos correspondientes proporcionales, o bien,

- un par de catetos y las hipotenusas proporcionales.

c) Falsa, no todos los triángulos isósceles son semejantes. De hecho, ni siquiera tienen por qué tener los respectivos ángulos iguales.

d) Verdadera, todos los triángulos que son a la vez rectángulos e isósceles son semejantes. Los ángulos correspondientes son iguales ya que en todos los casos medirán 90º, 45º y 45º. Del mismo modo, los lados correspondientes son proporcionales, puesto que serán de la forma x, x y x $\sqrt{2}$ (por el teorema de Pitágoras).

El docente intentará que los alumnos realicen este ejercicio de manera autónoma e individual.

Después de corregir en la pizarra el apartado a) y b), el profesor enumerará las condiciones que deben cumplir dos triángulos rectángulos para que sean semejantes. Del mismo modo, después de corregir los apartados c) y d), puesto que seguramente los alumnos habrán realizado el apartado d) teniendo en cuenta los ángulos, el profesor, haciendo uso del Teorema de Pitágoras, les enseñará de forma numérica como se cumple también que los lados correspondientes de dos triángulos rectángulos isósceles son proporcionales.

Problema 1.10: Las siguientes ternas de números representan las longitudes de los lados de una pareja de triángulos. Estudia, en cada caso, si son o no semejantes. En caso afirmativo, determina la correspondiente razón de semejanza.

a)	2	4	5	8	16	20
b)	3	4	6	4,5	6	8,5
c)	2,5	5,5	7	6,25	13,75	17,5

En este problema, los alumnos repasaran la definición de razón de semejanza y los criterios de triángulos semejantes institucionalizados anteriormente.

a) Los lados de los triángulos son proporcionales: $\frac{8}{2} = \frac{16}{4} = \frac{20}{5} = 4$

Por lo tanto, los triángulos son semejantes con razón de semejanza $k = 4$ del segundo respecto del primero.

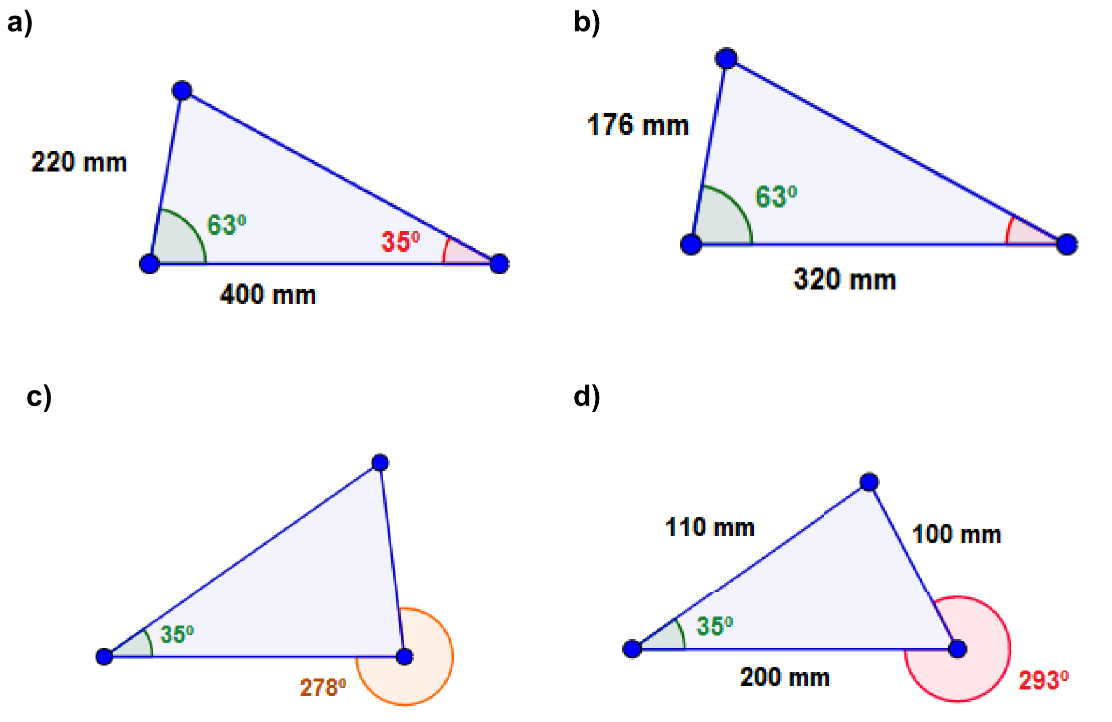
b) Los lados de los triángulos no son proporcionales: $\frac{4,5}{3} = \frac{6}{4} \neq \frac{8,5}{6}$

Por lo tanto, los triángulos no son semejantes.

c) Los lados de los triángulos son proporcionales: $\frac{6,25}{2,25} = \frac{13,75}{5,5} = \frac{17,5}{7} = 2,5$

Por lo tanto, los triángulos son semejantes con razón de semejanza $k = 2,5$ del segundo respecto del primero.

Problema 1.11: ¿Los siguientes triángulos son semejantes? Razona tu respuesta.



El objetivo principal de este problema es que los alumnos pongan en práctica las técnicas y teoría que han aprendido hasta el momento. Asimismo, se fomentará una discusión en grupo donde se comenten los procedimientos usados para determinar si el triángulo d) es semejante a los anteriores. Efectivamente, es el único caso donde se puede usar más de un criterio de semejanza. Por último, el profesor realizará la siguiente cuestión: ¿Cuál de los tres criterios es el más óptimo para utilizar en este caso? Evidentemente, esta pregunta es abierta puesto que dependerá de las estrategias metacognitivas que tenga cada alumno. De este modo, emergerán diferentes respuestas con justificaciones totalmente válidas

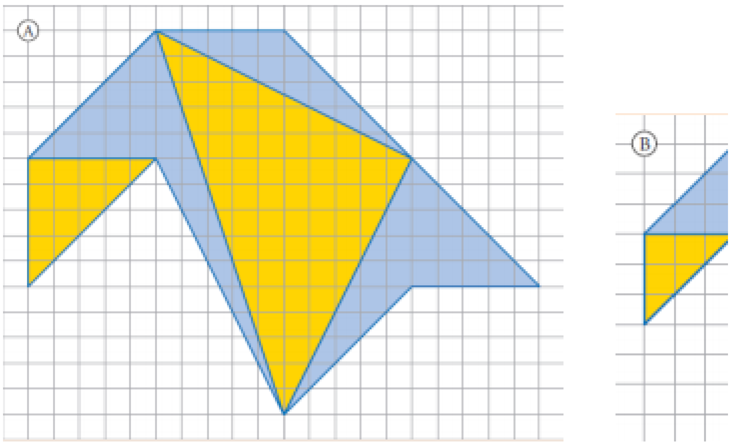
Los triángulos a), b) y c) son semejantes entre sí:

a) - b) Los triángulos tienen un ángulo igual (63º) y los lados que lo forman son proporcionales: $\frac{220}{176} = \frac{400}{320}$

a) - c) Ambos triángulos tienen los mismos ángulos interiores: 35º, 63º y 82º.

a) - d) No presentan los mismo ángulos.

Problema 1.12 (opcional): Dibuja y completa la figura inacabado. ¿Cuál es la razón de semejanza que transforma A en B?



Este problema se realizará en casa para entregarla y corregirla posteriormente en el aula. Es una actividad poco corriente en la que a partir de las figuras dibujadas sobre una cuadrícula, se pretende que averigüen la razón de semejanza a partir de la proporcionalidad de los segmentos de ambas. La mayor dificultad reside en la representación de las líneas oblicuas, las cuales que no coinciden con los cuadrados de la cuadrícula.

<u>Técnicas y tecnologías</u>

Para calcular si dos figuras geométricas planas son semejantes, utilizaremos las siguientes posibles técnicas:

- Criterio de semejanza de polígonos: dos polígonos son semejantes si tienen los ángulos homólogos iguales y los lados correspondientes son proporcionales. Para averiguar si los lados correspondientes son proporcionales, utilizaremos el concepto de "razón de semejanza". La técnica para calcular la razón de semejanza es un cociente entre segmentos. Por ejemplo, dados dos rectángulos ABCD y A'B'C'D', estos son semejantes si se cumple:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} = k$$

  Así pues, k es la razón de semejanza. Si no se cumplen las igualdades anteriores, entonces los polígonos no serían semejantes.

  Si nos piden hallar un lado desconocido de dos polígonos semejantes, la técnica se reducirá a operar con fracciones. En otras palabras, se tendrá que utilizar la regla de los productos cruzados para despejar la incógnita. Veamos el siguiente ejemplo. "Sean dos rectángulos ABCD y A'B'C'D semejantes. Calcula el valor de $\overline{B'C'}$ teniendo en cuanta que conocemos el valor de todos los demás lados de los polígonos".

Sea x:= lado desconocido $\overline{B'C'}$

<table>
<tr>
<td>Operaciones algebraicas:
– Significado de incógnita.
– Despejar incógnita.

Operaciones aritméticas:
– Operaciones con fracciones (regla de los productos cruzados)</td>
<td>Operaciones algebraicas:
– Significado de incógnita.
– Despejar incógnita.

Concepto de razón de semejanza</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{x} \rightarrow x = \frac{\overline{BC} * \overline{A'B'}}{\overline{AB}}$</td>
<td rowspan="2">Puesto que: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k$

entonces:

$\frac{\overline{BC}}{x} = k \quad \rightarrow x = \frac{\overline{BC}}{k}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{\overline{BC}}{x} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} \rightarrow x = \frac{\overline{BC} * \overline{C'A'}}{\overline{CA}}$</td>
</tr>
</table>

- Criterios de semejanza de triángulos:
  1) Dos triángulos, ABC y A'B'C', son semejantes si sus lados son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$$

  2) Dos triángulos, ABC y A'B'C', son semejantes si tienen dos ángulos iguales:

$$\begin{cases} \hat{A} = \widehat{A'} \\ \hat{B} = \widehat{B'} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} \hat{A} = \widehat{A'} \\ \hat{C} = \widehat{C'} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} \hat{B} = \widehat{B'} \\ \hat{C} = \widehat{C'} \end{cases}$$

  3) Dos triángulos, ABC y A'B'C', son semejantes si tienen un ángulo igual y los dos lados que lo forman son proporcionales:

$$\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A'} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} \hat{B} = \widehat{B'} \\ \frac{\overline{BA}}{\overline{B'A'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} \hat{C} = \widehat{C'} \\ \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} \end{cases}$$

La tecnología que sustenta a dichas técnicas son:

- Visualización de figuras semejantes.
- La definición de semejanza: en matemáticas se dice que dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma.
- La definición de razón de semejanza: cociente entre la longitud de un lado de un polígono y la longitud del lado correspondiente del otro polígono.
- La definición de los conceptos: segmento, proporcionalidad, homólogo, número entero, incógnita, etc.
- Las propiedades necesarias para realizar operaciones tanto aritméticas como algebraicas: la regla de signos, la jerarquía de operaciones, etc.
- La definición y las propiedades de los polígonos, especialmente las de los triángulos (la suma de todos sus ángulos interiores es 180º)

F.2 Campo de problemas 2: Razón de longitudes y áreas

Para comenzar con este campo de problemas, sería idóneo realizar un breve repaso sobre las fórmulas de los perímetros y la áreas de los diferentes polígonos. De esta manera, posteriormente nos centraremos únicamente en los nuevos conceptos que transmitiremos al alumnado.

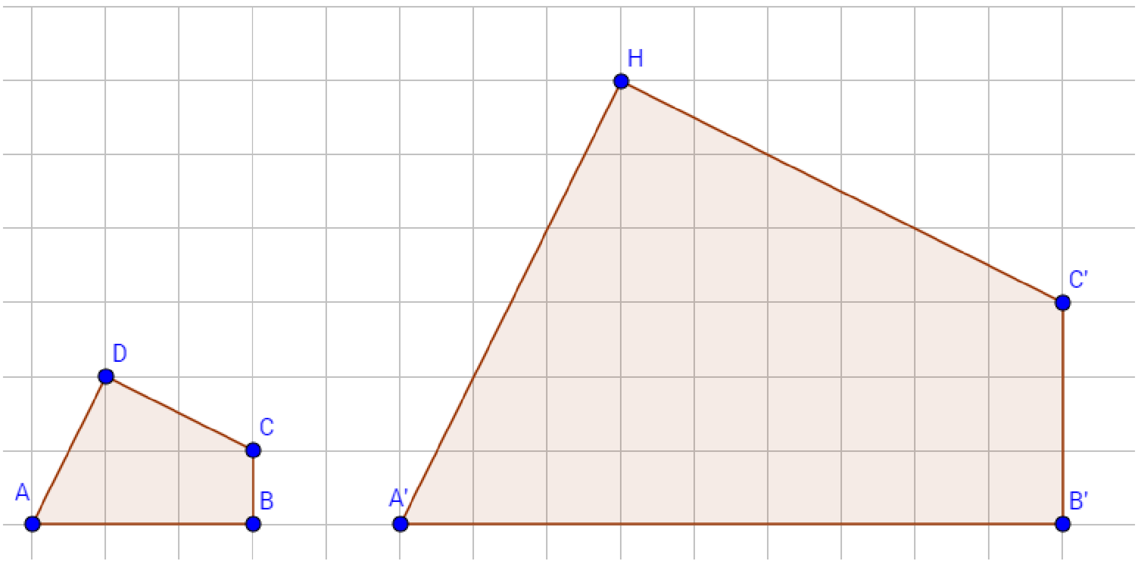
Los objetivos principales que nos propondremos con este campo de problemas son:

i. Relacionar los perímetros y las áreas de las figuras semejantes.

ii. Establecer una correspondencia entre las razones de semejanza, de perímetros y de áreas entre figuras semejantes.

Resulta muy conveniente tratar este campo de problemas después del anterior porque seguiremos estudiando las figuras semejantes pero añadiendo una dificultad, la de comparar otras características como sus perímetros, áreas y volúmenes.

Problema 2.1: Sean dos polígonos semejantes:



a) Halla la medida de sus lados, perímetros y áreas.

b) Calcula la razón de semejanza, la razón de perímetros y la razón de áreas.

c) ¿Qué relación existe entre ellas?

En primer lugar, los alumnos realizarán los dos primeros apartados de forma individual, del problema. Gracias a la definición y fórmula de la razón de semejanza, el alumnado deberá pensar y razonar cuales serán la razón de perímetros y de áreas. El papel de docente será la de pasearse por el aula percatándose de las posibles obstáculos que les presente y orientado a los que muestren dificultades.

Después de unos minutos, el ejercicio se corregirá en la pizarra por los alumnos. Tras la explicación que darán varios alumnos sobre la razón de perímetros y de áreas, el profesor las institucionalizarán.

Por último, se iniciará una discusión en grupo en voz alta para la resolución del apartado c).

Puesto que la finalidad de este problema es el de que los estudiantes concluyan por si mismos tanto las fórmulas como la relación existente entre la razón de perímetros y de áreas, hemos creído conveniente proponer una actividad visual. Esto se debe a que no queremos que la dificultad se presente en el contexto del problema sino en su resolución. La solución es la siguiente:

a) Medida de los lados:

$\overline{AB} = 3 \quad \overline{BC} = 1 \quad \overline{CD} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \quad \overline{AD} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\overline{A'B'} = 9 \quad \overline{B'C'} = 3 \quad \overline{C'D'} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \quad \overline{A'D'} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Medida de los perímetros:

$P_{ABCD} = 3 + 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 4 + 2\sqrt{5}$

$P_{A'B'C'D'} = 9 + 3 + 3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 12 + 6\sqrt{5}$

Medida de las áreas:

$$A_{ABCD} = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right) + \left(\frac{2 \cdot 1}{2}\right) + (2 \cdot 1) = 4$$

$$A_{A'B'C'D'} = \left(\frac{3 \cdot 6}{2}\right) + \left(\frac{6 \cdot 3}{2}\right) + (6 \cdot 3) = 36$$

b) Razón de semejanza: $k = \frac{9}{3} = \frac{3}{1} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3$

Razón de perímetros: $\frac{P_{A'B'C'D'}}{P_{ABCD}} = \frac{12+6\sqrt{5}}{4+2\sqrt{5}} = \frac{6(2+\sqrt{5})}{2((2+\sqrt{5})} = \frac{6}{2} = 3$

Razón de áreas: $\frac{A_{A'B'C'D'}}{A_{ABCD}} = \frac{36}{4} = 9$

c) Por una parte, observamos que la razón de perímetros coincide con k, luego es igual a la razón de semejanza. Por otra parte, la razón de áreas coincide con k^2, luego es igual al cuadrado de semejanza.

Problema 2.2: Las medidas de un rectángulo son 0,03 y 0,05 metros. Calcula las medidas de un rectángulo semejante al anterior, cuya área mida 135 centímetros cuadrados.

En primer lugar, puesto que en las matemáticas se produce un aprendizaje continuo, el alumnado debe acordarse de la importancia de pasar todos los datos a la misma unidad y de la fórmula del área de un rectángulo.

En segundo lugar, es útil dar la vuelta a los problemas. En otras palabras, los alumnos estaban acostumbrados a hallar la longitud del lado correspondiente del polígono semejante para así calcular la razón de semejanza. No obstante, en este caso hemos planteado un problema donde, sin preguntarlo explícitamente, deben averiguar la razón de áreas para más adelante calcular la razón de semejanza y así las longitudes de los lados del nuevo rectángulo semejante.

Estos son los pasos que se esperan del alumnado:

Primero, pasamos todos los datos a la misma unidad de medida: 0,03 m = 3 cm y 0,05 m = 5 cm.

Segundo, calcula el área del rectángulo original: $A_1 = 3 \cdot 5 = 15\ cm^2$.

Así pues, la razón de áreas es $\frac{A_2}{A_1} = \frac{135}{15} = 9$ y la razón de semejanza es $k = \sqrt{9} = 3$

Por lo tanto, las medidas del nuevo rectángulo serán:

$k \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9\ cm$ y $k \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15\ cm$

Problema 2.3: Los lados de un cuadrilátero miden 2, 3, 4 y 5 cm respectivamente.

a) Calcula la media de los lados de otro cuadrilátero semejante al anterior y que tenga por perímetro 49 centímetros.

b) ¿Cuál será la razón de las áreas entre los dos cuadriláteros?

c) ¿Podríamos estar ante un rectángulo o un trapecio? Dibuja ambos cuadriláteros y compruébalo.

Volvemos a pedir la razón, esta vez de los perímetros, de forma implícita. Los estudiantes que tienen que acostumbrarse a analizar todos los datos plantea el problema para poder usarlos en su beneficio.

Evidentemente, para el último apartado de esta actividad, los alumnos deben recordar las propiedades de los cuadriláteros. Es una forma sutil de que pongan continuamente en práctica los conocimientos aprendidos de las unidades didácticas anteriores así como de hacerles entender que los conocimientos matemáticos aprendidos no están aislados, sino que están relacionados entre sí.

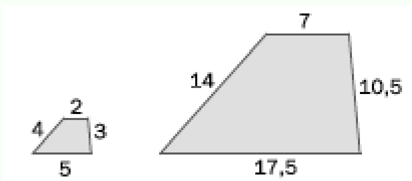
a) La razón de semejanza es igual a la razón de los perímetros:

$k = \frac{49}{2+3+4+5} = \frac{49}{14} = 3{,}5$. Por lo tanto, el lado homólogo al de:

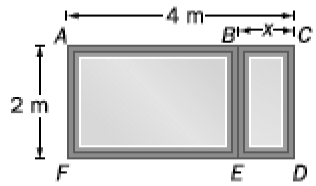
- 2 cm mide $2 \cdot k = 2 \cdot 3{,}5 = 7$ cm
- 3 cm mide $3 \cdot k = 3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5$ cm
- 4 cm mide $4 \cdot k = 4 \cdot 3{,}5 = 14$ cm
- 5 cm mide $5 \cdot k = 5 \cdot 3{,}5 = 17{,}5$ cm

b) La razón de áreas será $k^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25$

c) No podría ser un rectángulo puesto que sus lados no son iguales dos a dos. Aunque no tendría que ser obligatorio, dichos cuadriláteros podrían ser trapecios:



Problema 2.4: Se quiere construir un ventanal formado por dos rectángulos, ABEF y BCDE, representados en la siguiente imagen.



a) Calcula el valor del lado BC para que los rectángulos ACDF y BCDE sean semejantes.

b) Halla las áreas de los rectángulos anteriores. ¿Qué relación existe entre dicha razón de aéreas y la razón de semejanza?

c) Comprueba si el rectángulo ABEF es también semejante a los anteriores

Con este problema realizaremos un repaso de los conceptos más relevantes del presente campo de problemas

a) $\frac{AC}{CD} = \frac{BE}{BC} \rightarrow \frac{4}{2} = \frac{2}{x} \rightarrow x = 1\,m$

b) $A_{ACDF} = 4 \cdot 2 = 8\,m^2$

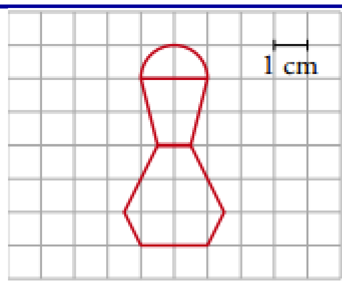
$A_{BCDE} = 2 \cdot 1 = 2\,m^2$

La razón de semejanza entre los dos rectángulos es: $k = \frac{4}{2} = 2$

La razón de áreas entre los dos rectángulos es: $\frac{A_{ACDF}}{A_{BCDE}} = \frac{8}{2} = 4$, que coincide con k^2

c) Los lados de ABEF miden 3 y 2 m, por lo tanto este rectángulo no es semejante a los anteriores ya que sus respectivos lados no son proporcionales a los de los anteriores.

Problema 2.5 (opcional):



a) Calcula el perímetro y el área de la siguiente figura representada.

b) Dibuja una figura semejante a la anterior. ¿Cuál es la razón de semejanza?

c) Compara las dos figuras semejantes y responde, ¿cuál es su razón de perímetros?, ¿y de áreas?

Este problema es abierto. Efectivamente, los alumnos pueden dibujar la figura semejante que ellos prefieran. Será una buena oportunidad para que el profesor analice si el alumnado ha optado por ampliar o reducir la figura. ¿Qué les resultará más fácil y cómodo? ¿Se atreverán a dibujar una figura cuya razón de semejanza sea por ejemplo una fracción o se "acomodarán" en los números naturales?

Asimismo, podremos constatar si ha habido algún estudiante que ha tenido la picardía de dibujar una figura igual a la dada (razón de semejanza 1). ¿Se les pasará por la cabeza dicha idea o simplemente no la verán como una posible opción?

Por último, es muy interesante observar el procedimiento que han elegido para calcular la razón de perímetros y de áreas. ¿Calcularán de nuevo el perímetro y el área de la nueva figura para posteriormente hallar dichas razones? ¿Realizarán las operaciones pertinentes a partir del valor de la razón de semejanza? En mi opinión, es una buena oportunidad para que el docente compruebe si los conceptos están bien asimilados y se atreven a afirmar que la razón de semejanza es igual a la razón de perímetros y la razón de áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

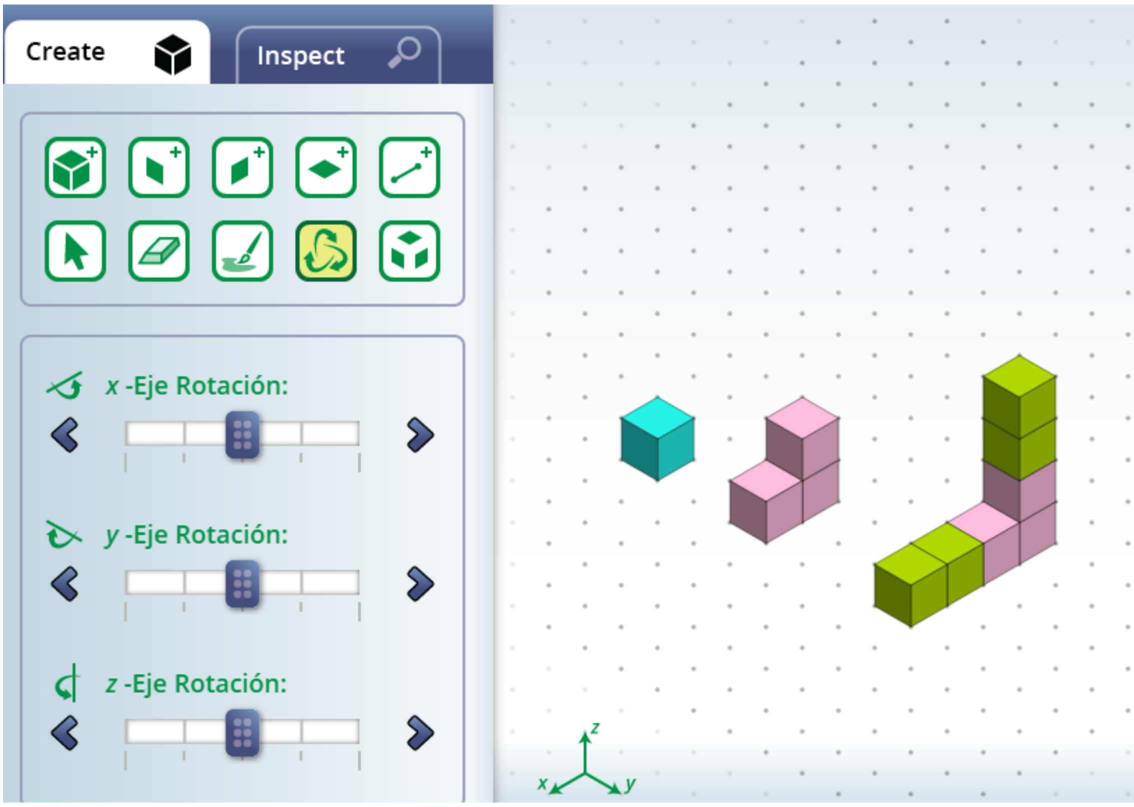
La dificultad de esta tarea aumenta por la simple característica de que es el primer problema donde aparece una semicircunferencia. ¿Hasta qué punto significará este hecho una dificultad?

Problema 2.6 (ampliación):

Con el siguiente material, construye una figura con forma de “L” utilizando 3 cubitos. A continuación, construye un cuerpo semejante doble al anterior.

Dejaremos que los alumnos trabajen de forma individual. Es posible que una de las dificultades que surjan es que los alumnos tiendan a ampliar el cuerpo en sólo dos dimensiones y no en tres. Para ayudar a superar este obstáculo, el docente pedirá a los estudiantes que dibujen las caras de la figura en un geoplano, recordándoles al mismo tiempo que las caras de la nueva figura deben ser semejantes con las correspondientes a la figura original.

Uno de los posibles recursos interactivos que el profesor puede hacer uso en el aula, es el propuesto por NCTM (2014) en la siguiente página web: http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=4182



Después de que hayan conseguido la correcta construcción de la figura, el profesor pedirá que los alumnos calculen las áreas y los volúmenes de ambas figuras geométricas. Seguidamente, copiarán dichos datos en una tabla.

Finalmente, se preguntará en voz alta: ¿Qué relación existe entre estos datos? Debido a que ya saben, gracias a los problemas planteados anteriormente, la relación entre la razón semejanza y la de áreas, sólo dudarán en la relación con la razón de volúmenes puesto que es un concepto nuevo que acaba de aparecer por primera vez. Para ello, se creará una lluvia de ideas en la que el alumnado expresará sus propias conjeturas. Por último, se generalizará el resultado: "Si la razón de semejanza es k, entonces la razón entre áreas k^2 es y la razón entre volúmenes es k^3".

Problema 2.7 (ampliación):

King Kong es un gorila de un tamaño 20 veces mayor al un gorila real. Busca en internet el peso de un gorila adulto y el peso que soporta la sección de sus huesos. Justifica si es posible que exista un gorila como el de la película.

De una forma original, los alumnos volverán a manejar los conceptos matemáticos aprendidos. Se hará especial hincapié en la razón entre volúmenes para finalmente concluir que la existencia de King Kong sería imposible. Esto es debido a que su peso es tan grande que sus huesos no lo podrían soportar.

Hagamos un breve análisis de la situación:

- Debido a que la razón de semejanza entre un gorila real y King Kong es *k=20,* entonces cada segmento del monstruo es 20 veces más largo que el correspondiente del gorila real.
- La razón de áreas semejantes es k^2, luego en este caso será: $k^2 = 20^2 = 400$. En otras palabras, las patas del monstruo tendrían una sección cuatrocientas veces mayor que las del gorila real.
- La razón de volúmenes semejantes es 3, luego en este caso será: $k^3 = 20^3 = 8000$. Por lo tanto, el peso del monstruo, el cual es proporcional al volumen, sería ocho mil veces mayor al de King Kong.

Si sobre un área cuatrocientas veces mayor cae un peso ocho mil veces mayor, la presión por unidad de superficie es cuarenta veces mayor en el monstruo que en el gorila normal. Ante tal aumento de presión, se quebrarían las patas del monstruo.

Técnicas y tecnologías

Sin perder de vista las técnicas mencionadas en el apartado anterior, las técnicas principales que se necesitan para este campo de problemas son:

- La proporción formada por el cociente de los perímetros, áreas y volúmenes de dos cuerpos semejantes.
- La relación que existe entre la razón de semejanza, la razón de perímetros y la razón de áreas. Si el tiempo es propicio y los alumnos no presentan demasiadas dificultades, también se presentará la relación existente con la razón de volúmenes.

La tecnología que sustenta dichas técnicas son:

- La definición de la razón de semejanza,
- La definición de la razón de perímetros/ longitudes
- La definición de la razón de áreas.
- La definición de la razón de volúmenes.

- **Razón de longitudes/ de perímetros**: Cociente entre los perímetros de dos figuras geométricas. La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza. Sea F_1 y F_2 dos figuras semejantes, entonces: $\frac{P_{F_1}}{P_{F_2}} = k = \frac{L_{F_1}}{L_{F_2}}$ donde *P* representa el perímetro de la figura F_i y L el lado correspondiente a esta.

- **Razón de áreas**: Cociente entre las áreas de dos figuras geométricas. La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza. Sea F_1 y F_2 dos figuras semejantes, entonces: $\frac{A_{F_1}}{A_{F_2}} = k^2$; $\frac{L_{F_1}}{L_{F_2}} = k$ donde *A* representa el área de la figura F_i y *L* el lado correspondiente a esta.

- **Razón de volúmenes**: Cociente entre los volúmenes de dos cuerpos geométricos. La razón entre los volúmenes de dos cuerpos semejantes es igual al cubo de su razón de semejanza. Sea C_1 y C_2 dos cuerpos semejantes, entonces: $\frac{V_{C_1}}{V_{C_2}} = k^3$; $\frac{L_{F_1}}{L_{F_2}} = k$ donde *V* representa el volumen del cuerpo C_i y *L* el lado correspondiente a este.

F.3 Campo de problemas 3: Escalas

Podríamos afirmar que este campo de problemas es uno de las más importantes desde el punto de vista práctico. Efectivamente, durante el desarrollo de nuestra vida cotidiana usaremos e interpretaremos mapas, maquetas y planos.

Los objetivos principales que nos propondremos con este campo de problemas son:

i. Interpretar las escalas dadas en diferentes formatos (gráficamente, numéricamente, etc.).
ii. Calcular distancias y áreas a partir de mapas, maquetas y/o planos gracias a la escala.
iii. Representar a escala un objeto o espacio de la realidad.

Hemos decidido que este sea el tercer campo de problemas puesto que la escala también es una razón de semejanza. De esta manera, continuamos "en la misma línea" pero enfocada de una manera diferente. A continuación, plantearemos los siguientes problemas:

Problema 3.1: En un mapa se indica que la escala es 1:25 000.

a) Explica la interpretación de la escala es 1:25 000
b) ¿Cuál es la razón de semejanza entre la realidad y la realidad representada?
c) Si la distancia entre dos ciudades en ese mapa es de 15,5 centímetros, ¿cuál será la distancia real que las separa? Da el resultado en kilómetros.

Primeramente, el docente institucionalizará el concepto de escala como el cociente entre la longitud en la reproducción (mapa, plano o maqueta) y la correspondiente longitud en la realidad. Es decir, es la razón de semejanza entre la reproducción y la realidad.

Luego, los estudiantes de manera individual se enfrentarán a dicho problema con la definición de escala y los conocimientos aprendidos anteriormente.

a) La interpretación de 1:25 000 es la siguiente: un centímetro del mapa representa 25000 cm en la realidad.

b) La razón de semejanza es: $k = \frac{25000}{1} = 25000.$

c) Los 15,5 cm del mapa corresponden a 15,5 · 25000= 387500 cm= 3,875 km en la realidad.

Problema 3.2: Queremos comprar un mapa de la provincia de Granada. ¿Dónde apreciaremos mejor los detalles, en un mapa a escala 1:100, 1:1000, 100:1 o 1000:1? Razona tu respuesta.

He comprobado, gracias a mi periodo del Practicum, que una de las dificultades que sin duda aparece en el aula es la de interpretar erróneamente si estamos ante una escala que amplia o reduce la realidad. Por este motivo, me parece oportuno proponer este problema.

Naturalmente, está planteado de una forma que cree debate en el aula puesto que dos de las posibles opciones son totalmente imposibles.

Si la escala presentada en el mapa estuviera a 100:1 o 1000:1 significaría que estaríamos ampliando la propia provincia de Granada por 100 o 1000 respectivamente, algo imposible.

Por último nos queda saber si apreciaremos mejor los detalles en un mapa a escala 1:100 o 1:1000. Efectivamente, la respuesta correcta es a 1:100 puesto que cada centímetro del mapa correspondería a 100 cm en la realidad.

Después de haber corregido en voz alta dicho problema, el docente escribirá el esquema en la pizarra para que los alumnos lo copien en sus cuadernos:

Existen tres tipos de escalas:

- <u>Escala natural</u>: el tamaño físico representado en el plano coincide con la realidad, es decir, 1:1.
- <u>Escala de reducción</u>: el tamaño físico representado en el plano es menor que la realidad, es decir, 1:n con n>1.
- <u>Escala de ampliación</u>: el tamaño físico representado en el plano es mayor que la realidad, es decir, n:1 con n>1.

Problema 3.3: Relaciona cada una de las escalas dadas en forma gráfica con cada una de las escalas dadas mediantes una proporción numérica.

a) 

b) 

c) 

d) 

i. 1:500 000

ii. 1:500

iii. 1:1 200 000

iv. 1:1200

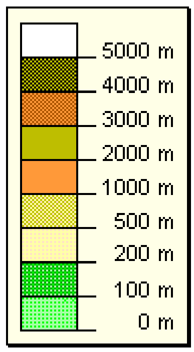
El profesor explicará a su alumnado que las escalas se pueden representar de diversas formas, entre ellas nos encontramos con la escala numérica y la gráfica. Asimismo, aclarará que en la escala numérica, la longitud real y la de su representación se expresan siempre en la misma unidad. Por ejemplo, 1:250

- 1 cm en el plano representa 250 cm en la realidad, o bien,
- 1 m en el plano representa 250 m en la realidad, o bien,
- ...

Esta actividad se desarrollará de la siguiente manera:

El docente proyectará en el aula planos o mapas, dependiendo del apartado que se esté realizando, para que los estudiantes puedan visualizar las escalas gráficas correspondientes con su plano o mapa.

Por último, para enriquecer los conocimientos de los alumnos, el profesor proyectará un último mapa en el aparezca una escala cromática. Aun que no la vayan a necesitar en esta unidad didáctica, les haremos saber que en los mapas que representan, por ejemplo, el relieve de un terreno, se utilizan diferentes colores para identificar las distintas alturas y profundidades y para dicha representación se necesitará una escala cromática.



La solución del problema anterior es la siguiente:

a) En la escala gráfica **a)**, 1 cm equivale a 12 m, es decir, a 1200 cm reales. Por lo tanto, se corresponde con la escala numérica **iv)**

b) En la escala gráfica **b)**, 1 cm equivale a 12 km, es decir, a 1200000 cm reales. Por lo tanto, se corresponde con la escala numérica **iii)**

c) En la escala gráfica **c)**, 1 cm equivale a 5 m, es decir, a 500 cm reales. Por lo tanto, se corresponde con la escala numérica **ii)**

d) En la escala gráfica **d)**, 1 cm equivale a 5 km, es decir, a 500000 cm reales. Por lo tanto, se corresponde con la escala numérica **i)**

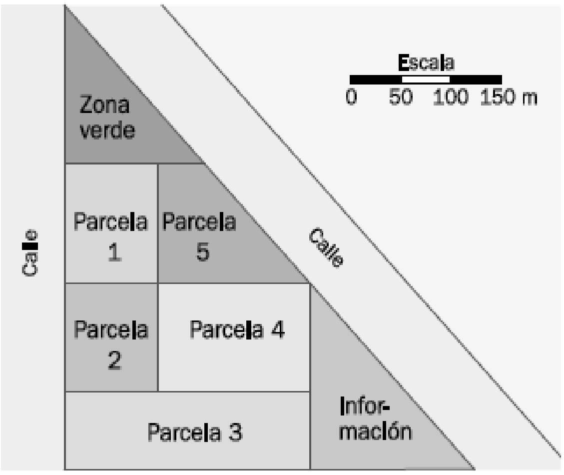
Problema 3.4: El siguiente plano representa un proyecto de un nuevo polígono industrial.

a) Interpreta la escala gráfica.

b) Calcula las dimensiones de las parcelas 1, 2, 3 y 4.

c) Halla las dimensiones y el área de la parcela 5.

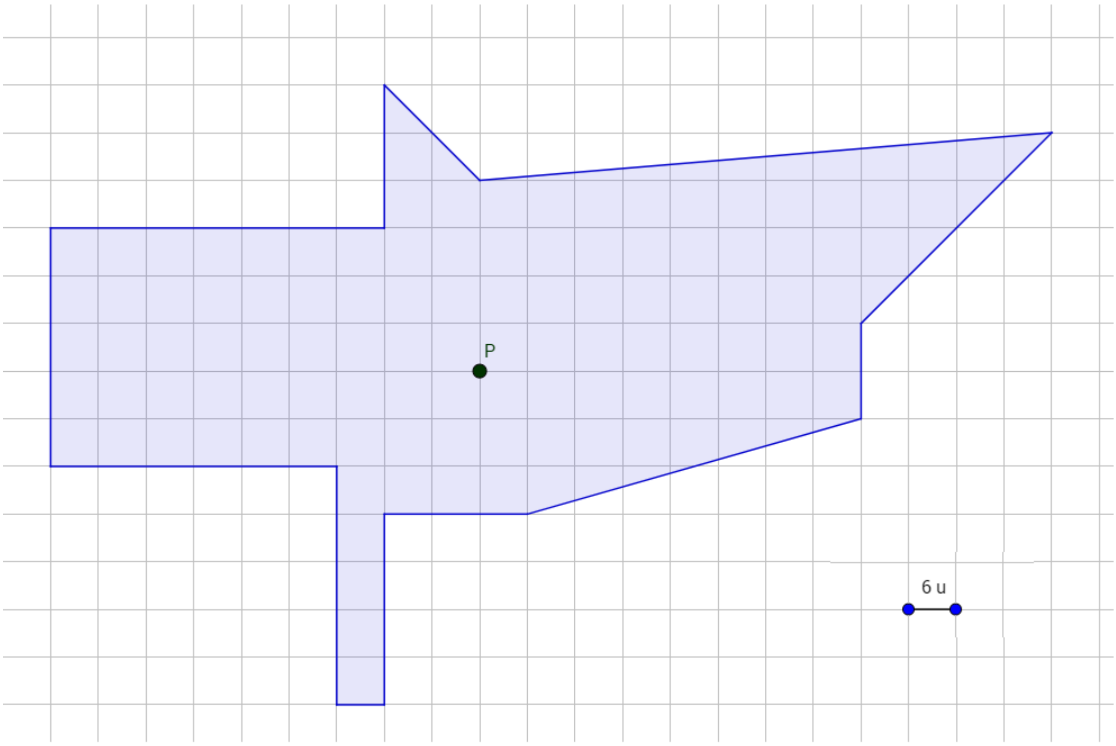
d) ¿Cuáles son las dimensiones de las parcelas destinadas a zona verde e información?



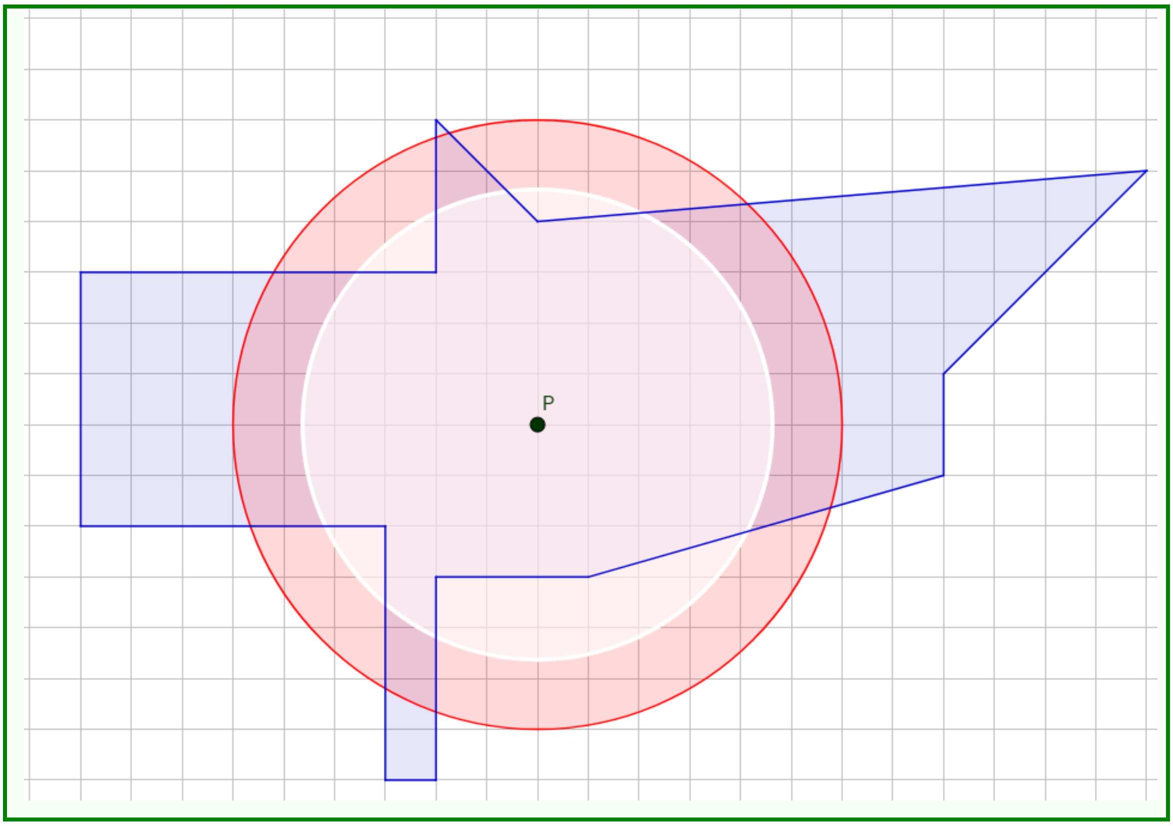
Para este problema, los alumnos utilizarán por primera vez en este campo de problemas su regla. La finalidad, es que ellos mismo averigüen las medidas del plano y hagan la conversión a las medidas reales con ayuda de la escala gráfica que se les presenta. Evidentemente, tendrán que recordar las fórmulas de las áreas de ciertos polígonos como el rectángulo, el triángulo y el trapecio.

Problema 3.5: El siguiente plano representa una zona se quieren colocar molinos para la generación de energía eléctrica.

Los molinos deben estar situados a más de 28 kilómetros y menos de 36 kilómetros del punto P. Copia el plano en tu cuaderno y señala la zona donde pueden ir ubicados los molinos.



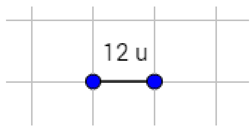
Según la escala gráfica, 1 unidad en el plano equivale a 6 km. Por lo tanto, los molinos deben situarse en el plano a más de $\frac{28}{6} \approx 4{,}67$ unidades y a menos de $\frac{36}{6} = 6$ unidades del punto P. En conclusión, el área donde pueden colocarse los molinos es la intersección de la zona inicial con la corona circular de centro P y radios 4,67 y 6 unidades.



Este problema se planteará con el uso de GeoGebra. De esta forma, el problema se puede modificar y preguntar cuestiones como:

Con ayuda de un deslizador que te modifique los radios de las circunferencias y por tanto, el tamaño de la corona averigua:

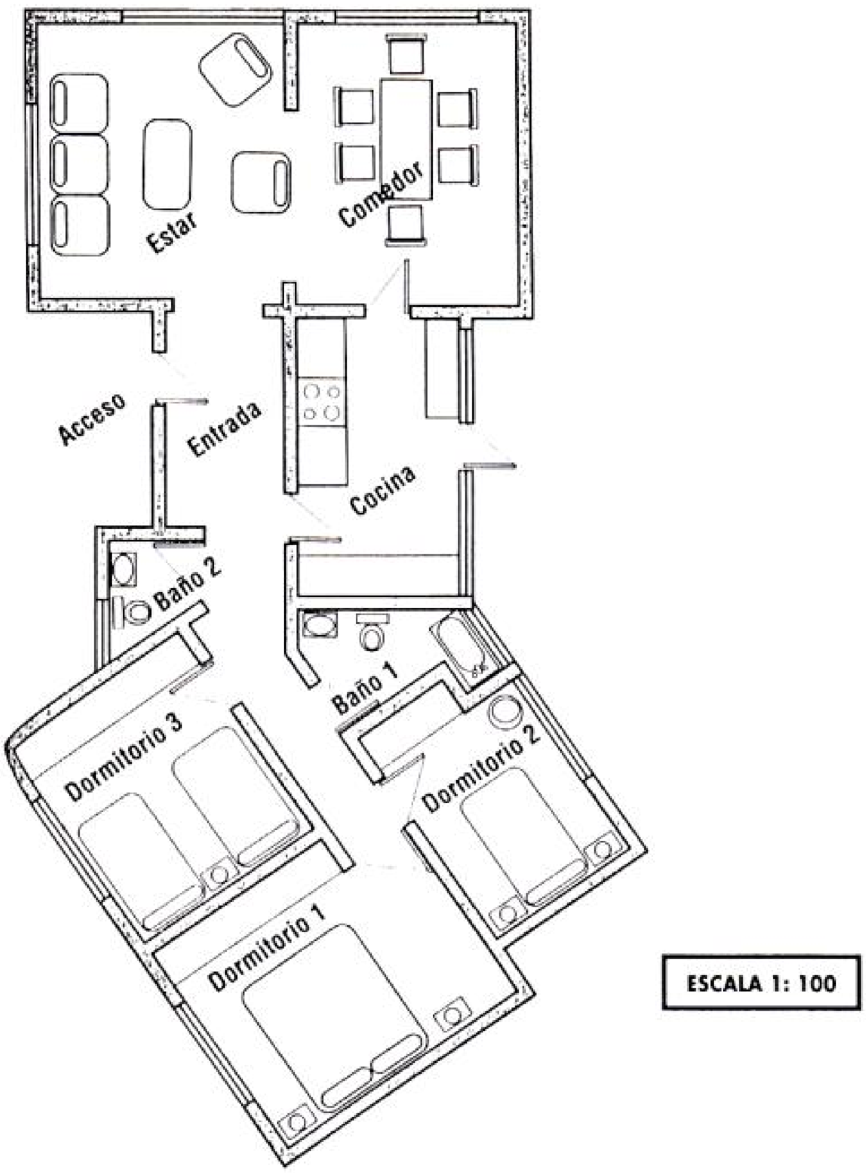
- ¿Cuál sería la distancia máxima a la que se tendrían que colocar los molinos para optimizar todo el terreno disponible? Expón tu resultado tanto en kilómetros como en unidades utilizando la escala dada.
- Si la escala inicial del plano hubiera sido la siguiente: ¿Habríamos podido colocar más o menos o los mismos molinos? Compruébalo.



Como podemos comprobar, gracias a las diversas variaciones que podemos tener del problema gracias a GeoGebra (cambiar el tamaño de la corno circular, modificar el terreno inicial, etc.) podríamos ampliar dicho problema dependiendo de las dudas o dificultades que vayan surgiendo en el aula.

Problema 3.6: Los arquitectos usan sus planos para calcular los materiales necesarios para cubrir todas las habitaciones de una casa. Mide con tu regla este plano y responde:

1) ¿Cuántos metros cuadrados de material se necesitan para cubrir la sala de estar y el comedor?
2) Calcula las medidas y el área real de cada dormitorio.
3) Si al medir cometes un error de 5 mm, ¿cuánto es el error real?
4) ¿Cuántos cerámicos de 0,25 cm x 0,25 cm se necesitan para la cocina?
5) ¿Cuál es el largo real de la ventana del dormitorio matrimonial (dormitorio 1)?

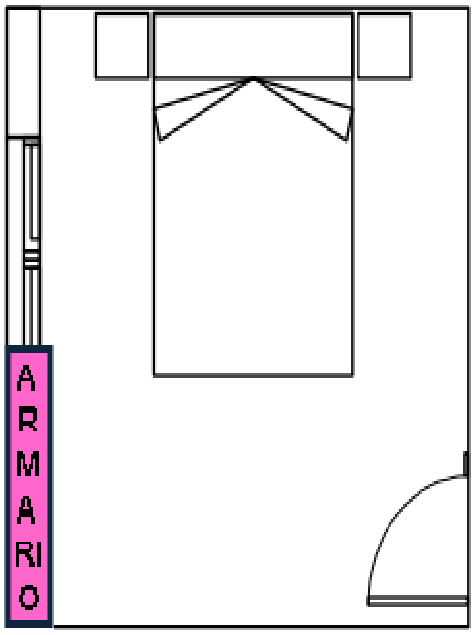


Problema 3.7: Los padres de Laura quieren cambiar la cama de la habitación de su hija. Sabemos que la habitación tiene un área de $235200\ cm^2$ y que uno de sus lados mide 420 cm en la realidad. Si el plano de la habitación de Laura es el siguiente:

¿A qué escala numérica está la habitación? Dibuja la escala gráfica.

Calcula las dimensiones reales de la cama.

Teniendo en cuenta las medidas del armario, ¿podré colocar, tal como se indica en el plano, un armario de 260 cm de ancho?



Con este problema, se dará un repaso general de los conceptos vistos en este campo de problemas. Además, se amplía la dificultad al preguntar por primera vez la escala de un plano a partir de un área.

a) Primero, vamos a calcular la longitud de cada lado de la habitación en la realidad:

$$235200 : 420 = 560\ cm$$

Luego un lado medirá 420 cm y el otro 560 cm.

Segundo, medimos con la regla los lados de la habitación en el plano y averiguamos que un lado mide 6 cm y el otro 8 cm.

Para hallar la escala, podríamos usar una regla de tres:

$6 \rightarrow 420$ $1 \rightarrow x$ $\longrightarrow$ x= $\frac{420}{6}$ = 70	$8 \rightarrow 560$ $1 \rightarrow x$ $\longrightarrow$ x= $\frac{560}{8}$ = 70

Observamos que en ambos casos nos sale que 1 centímetro del plano corresponde a 70 centímetros en la realidad luego la escala numérica será 1:70.

También podríamos haber resuelto este ejercicio sabiendo que:

$$E^2 = \frac{\text{Área en el plano}}{\text{Área en la realidad}}$$

b) La cama tiene una superficie en el plano de 4,5 cm x 2,5 cm. Luego en la realidad, cada lado medirá:

- 4,5· 70= 315 cm
- 2,5· 70=175 cm

c) En primer lugar, mediremos el ancho del armario actual en el plano para saber cuál es la medida máxima que puede tener un armario para que quepa en ese trozo de la habitación. Con la regla obtenemos que mide 3,5 cm, es decir, 245 cm en la realidad (3,5·70 =245). Por lo tanto, no cabría un armario de 260 cm de ancho.

Por último, propondremos problemas donde se utilicen los mapas para averiguar a cuanta distancia o cuanto nos costaría llegar a un determinado lugar.

Problema 3.8: Juan quiere hacer una excursión por la montaña. Con ayuda de un mapa de escala 1:50 000, observa la distancia del camino recto que tiene que seguir para llegar a un lago mide 6,5 centímetros. ¿Cuánto tiempo tardará Juan en llegar a su destino si camina a una velocidad de 5 kilómetros por hora?

Problema 3.9: La distancia entre Badajoz y Lisboa es de 230 kilómetros. Calcula la distancia que separa ambas ciudades en un mapa de escala 1: 1250 000

Problema 3.7: Este mapa está a escala 1:20 000 000

a) Justifica que 1 cm en el mapa corresponde a 200 km en la realidad.
b) Halla la distancia de Lanzarote a San Sebastián.
c) Sitúa tu localidad en el mapa y halla su distancia a Argel y a Marrakech.

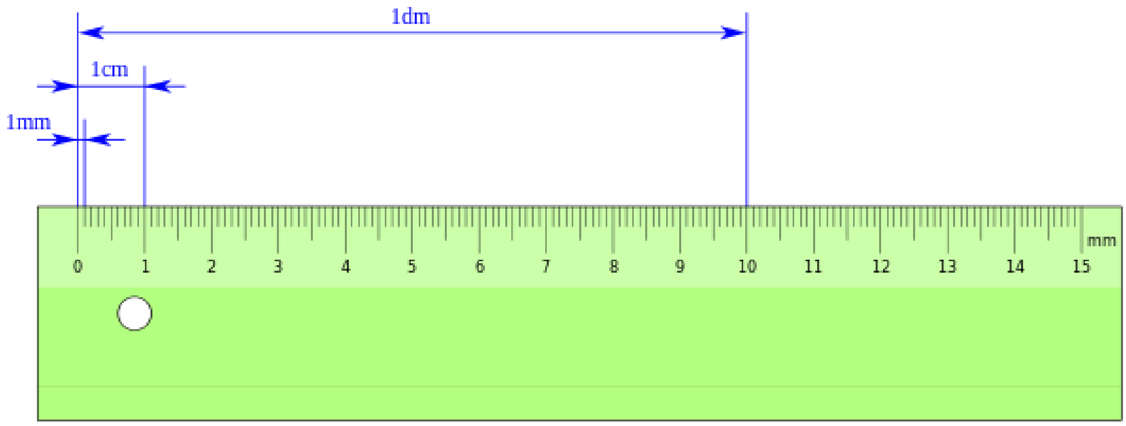
Para la realización de este problema, tendrán que utilizar la regla.

a) 1 cm en el mapa equivale a 20 000 000 cm en la realidad.
   20000000 cm = 200 km
b) La distancia, en el mapa, en línea recta, es de 10,5 cm.
   10,5 cm equivale a 10,5 · 200 = 2100 km en la realidad.
c) Respuesta abierta.

Técnicas y tecnologías

Las técnicas principales que se necesitan para este campo de problemas son:

- La proporcionalidad numérica que relaciona dos magnitudes. En este caso, el cociente de las medidas de un objeto representado en una maqueta, plano, mapa, etc. por las medidas de dicho objeto en la realidad.
- La notación de la escala numérica dependiendo de si es una escala de ampliación, reducción o natural.
- La relación que existe entre la escala de longitudes y la escala de áreas.
- Transformación de unidades de medidas:
  - Unidades de longitud: estamos ante un sistema métrico decimal, es decir, un sistema de unidades que tiene por unidades de base el metro y, en el cual los múltiplos o submúltiplos de las unidades de una misma naturaleza siguen una escala decimal. En otras palabras, los múltiplos y los submúltiplos de la unidad de medida están relacionados entre sí por múltiplos o submúltiplos de 10. Veamos un ejemplo gráfico:



    Así pues, 1 centímetro equivale a 10 milímetros, 1 decímetro equivale a 10 centímetros, etc.

  - Unidades de áreas: en este caso, los múltiplos y los submúltiplos de la unidad de medida están relacionados entre sí por múltiplos o submúltiplos de 100.

Nombre	Símbolo	Equivalencia en metros cuadrados
Kilómetro cuadrado	km^2	1 000 000 m^2
Hectómetro cuadrado	hm^2	10 000 m^2
Decámetro cuadrado	dam^2	100 m^2
Metro cuadrado	m^2	1 m^2
Decímetro cuadrado	dm^2	0,01 m^2
Centímetro cuadrado	cm^2	0,0001 m^2
Milímetro cuadrado	mm^2	0,000001 m^2

– Unidades de volúmenes: en este caso, los múltiplos y los submúltiplos de la unidad de medida están relacionados entre sí por múltiplos o submúltiplos de 1000.

Nombre	Símbolo	Equivalencia en metros cuadrados
Kilómetro cúbico	km^3	1 000 000 000 m^3
Hectómetro cúbico	hm^3	1 000 000 m^3
Decámetro cúbico	dam^3	1 000 m^3
Metro cúbico	m^3	1 m^3
Decímetro cúbico	dm^3	0,001 m^3
Centímetro cúbico	cm^3	0,000001 m^3
Milímetro cúbico	mm^3	0,000000001m^3

La tecnología que sustenta dichas técnicas son:

- La definición de la escala.
- Los tipos de escalas.
- La definición de la razón de semejanza.
- Los conceptos de amplitud y reducción de la razón de áreas.

❖ **Escala**: es la razón de semejanza entre la figura representada y la figura original.

$$E = \frac{Distancia\ en\ la\ representación}{Distancia\ en\ la\ realidad}$$

De la misma forma, tenemos que la escala de áreas es:

$$E^2 = \frac{Área\ en\ la\ representación}{Área\ en\ la\ realidad}$$

❖ **Tipos de escalas.** Dependiendo de cómo queramos representar las escalas tenemos principalmente:

1. La escala numérica. De pendiendo de si la figura original es más grande, más pequeña o igual a la original distinguimos tres tipos de escalas numéricas:
    - Escala de ampliación: cuando el tamaño físico del objeto representado es mayor que en la realidad. Se expresa de la forma n:1, es decir, n unidades en el plano equivale a 1 unidad en la realidad
    - Escala de reducción: cuando el tamaño físico del objeto representado es menor que en la realidad. Se expresa de la forma 1:n, es decir, 1 unidad en el plano equivale a n unidades en la realidad
    - Escala natural: cuando el tamaño físico del objeto representado coincide con el su tamaño en la realidad. Se expresa de la forma 1:1

2. La escala gráfica, la cual es un segmento que indica la relación entre la longitud de la representación y la de la realidad. Veamos un ejemplo:

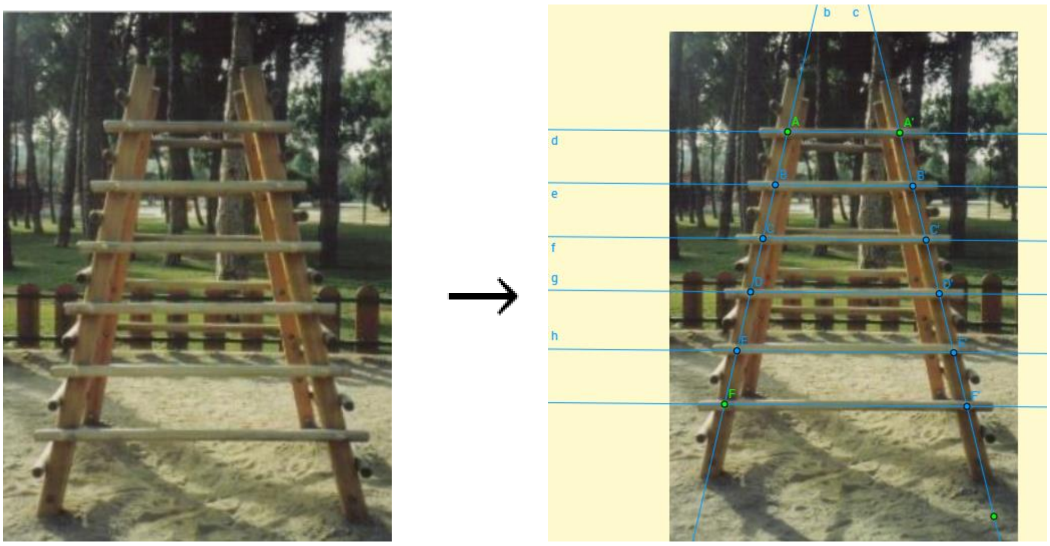
En este caso, una unidad del plano equivale a 12 metros en la realidad.

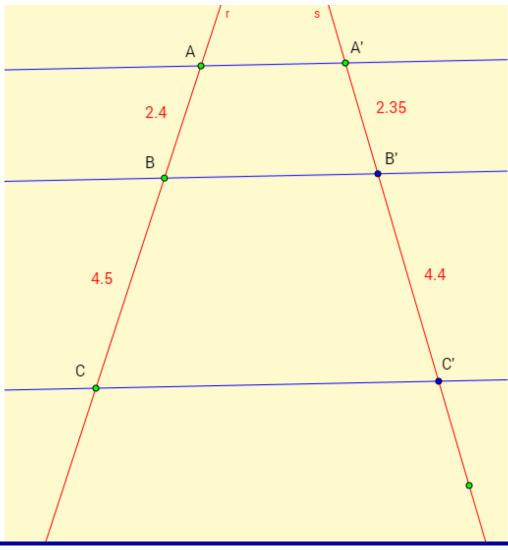
F.4 Campo de problemas 4: Teorema de Thales

Introduciremos el Teorema de Thales por medio del software GeoGebra.

El primer problema es de Ruiz (2015).

Problema 4.1: ¿Qué formas geométricas observas en el siguiente columpio? ¿Qué tipos de líneas observas?





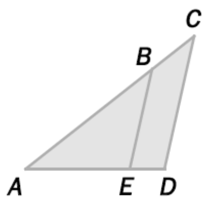
Establece las siguientes razones:

$$\frac{AB}{A'B'} =$$
$$\frac{BC}{B'C'} =$$
$$\frac{AB}{A'B'} =$$

¿Qué observas?

Este problema es una buena oportunidad para introducir el Teorema de Thales.

Problema 4.2: Los lados CD y BE del siguiente triángulo son paralelos. Además, sabemos que: AB= 3, AE= 2, y BE= 2



a) ¿Cómo son los triángulos ABE y ACD?

b) Calcula las medidas de los segmentos AD, ED y CD.

c) ¿Cuánto vale la razón de semejanza?

Para el primer apartado del problema, esperamos que los alumnos reaccionen de algunas de las siguientes maneras:

- Los triángulos son semejantes porque se ve a simple vista
- Necesitamos saber las medidas de los lados de ambos triángulos para poder saber si son semejantes.
- Los triángulos son semejantes porque si los segmentos CD y BE son paralelos, entonces, en este caso los ángulos de ambos triángulos son iguales.

En cualquier caso, será una buena oportunidad para introducir en el aula el concepto de "la posición de Thales".

Para la resolución del segundo apartado, tendrán que hacer uso del Teorema de Thales. Para el tercer apartado, necesitarán los conocimientos aprendidos anteriormente puesto que aunque diferenciemos los problemas en varios campos, todos están interrelacionados.

La solución de este problema es la siguiente:

a) Los triángulos ABE y ACE son semejantes, ya que están en posición de Tales

b)

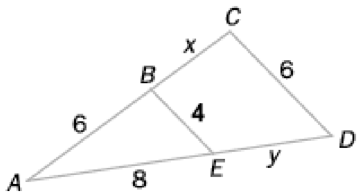
$$\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AE} \rightarrow \frac{3+1}{AD} = \frac{3}{2} \rightarrow AD = \frac{8}{3}$$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{ED} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{ED} \rightarrow ED = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BE}{AE} = \frac{CD}{AD} \rightarrow \frac{2}{2} = \frac{CD}{8/3} \rightarrow CD = \frac{8}{3}$$

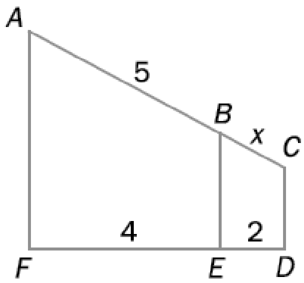
c) La razón de semejanza vale 4/3

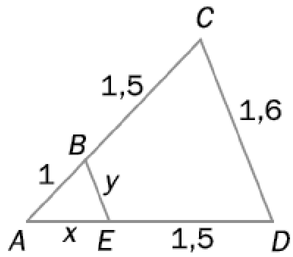
Problema 4.3: Calcula el valor de las longitudes desconocidas x e y. ¿Los triángulos están en posición de Thales?



El docente pedirá que cada alumno recorte con tijeras ambos triángulos para que comprueben de forma práctica que ambos triángulos están en posición de Thales. En otras palabras, tendrán que colocar un triángulo encima del otro para verificar que ambos triángulos tienen el mismo ángulo Â. De la misma forma, comprobarán también que $\hat{B} = \hat{C}$ y $\hat{E} = \hat{D}$.

Problema 4.4: Calcula el valor de los segmentos desconocidos en cada una de las siguientes figuras.





El último problema propuesto está recogido de Grupo Beta (1993).

Problema 4.5: Utilizando el Teorema de Thales, calcular las longitudes del segmento x en las siguientes figuras.

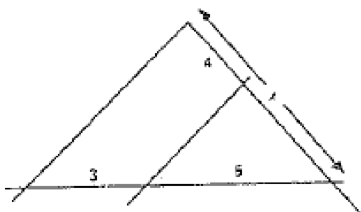


Figura 6 58

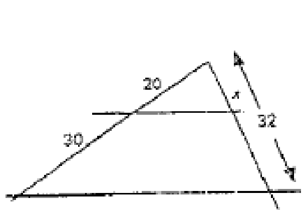


Figura 6 59

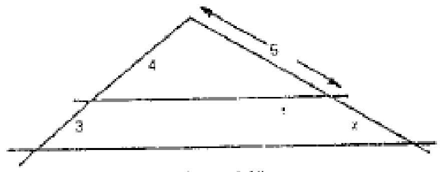
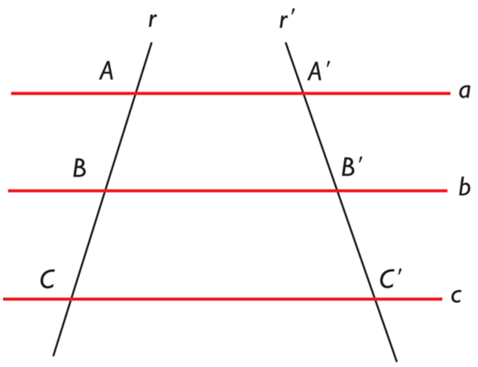


Figura 6 60

Técnicas y tecnologías

Las técnicas utilizadas en este campo de problemas es la propia aplicación del Teorema de Thales y la posición de Thales

- **Teorema de Thales**: Si tres rectas paralelas, a, b y c, cortan a dos rectas r y r', los segmentos que determinan son proporcionales.

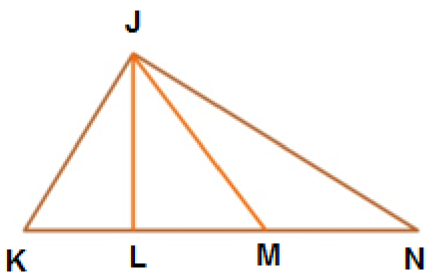


$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \end{array}\right. \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

La tecnología que le sustenta es la demostración del Teorema de Thales.

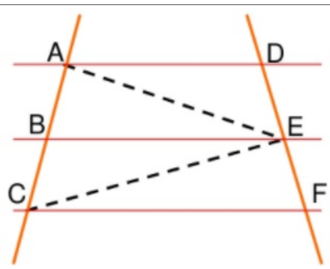
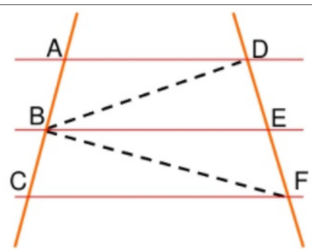
- **Demostración**:

Si DE es la altura del triángulo ΔABD, también lo será del ΔBCD entonces:



$$\frac{\text{Área } \Delta KMJ}{\text{Área } \Delta MNJ} = \frac{(KM \cdot JL)/2}{(MN \cdot JL)/2} = \frac{KM}{JL}$$

Por lo tanto,

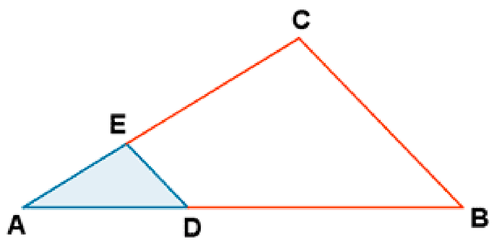
 $\frac{\text{Área } \Delta ABE}{\text{Área } \Delta BCE} = \frac{AB}{BC}$	 $\frac{\text{Área } \Delta DBE}{\text{Área } \Delta EBF} = \frac{DE}{EF}$

Luego los triángulos ABE y DBE tienen la misma base (BE) y las alturas relativas a BE son congruentes, por lo tanto estos triángulos son equivalentes (tienen igual área). De la misma forma, los triángulos BCE y EBF son también equivalentes:

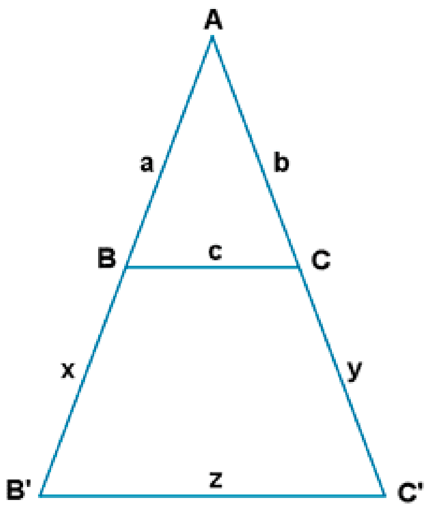
$$\frac{Área\ \Delta ABE}{Área\ \Delta BCE} = \frac{Área\ \Delta DBE}{Área\ \Delta EBF}$$

De esto, podemos deducir que $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$, por lo tanto el teorema queda demostrado.

- **<u>Triángulos en posición de Thales</u>**: Dos triángulos ΔABD y ΔADE están en posición de Thales cuando tienen un ángulo común, Â, y los lados opuestos a este ángulo, DE y BC, son paralelos.



Dos triángulos en posición de Thales son siempre semejantes. El procedimiento que tendríamos que seguir es el siguiente:



$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{a+x}{b+y} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+x}{b+y} = \frac{c}{z}$$

Las tecnologías para esta técnica son:

- Teorema de Thales
- Definición de semejanza
- Criterios de semejanza de los triángulos

F.5 Campo de problemas 5: División de segmentos.

En este campo de problemas diferenciaremos:

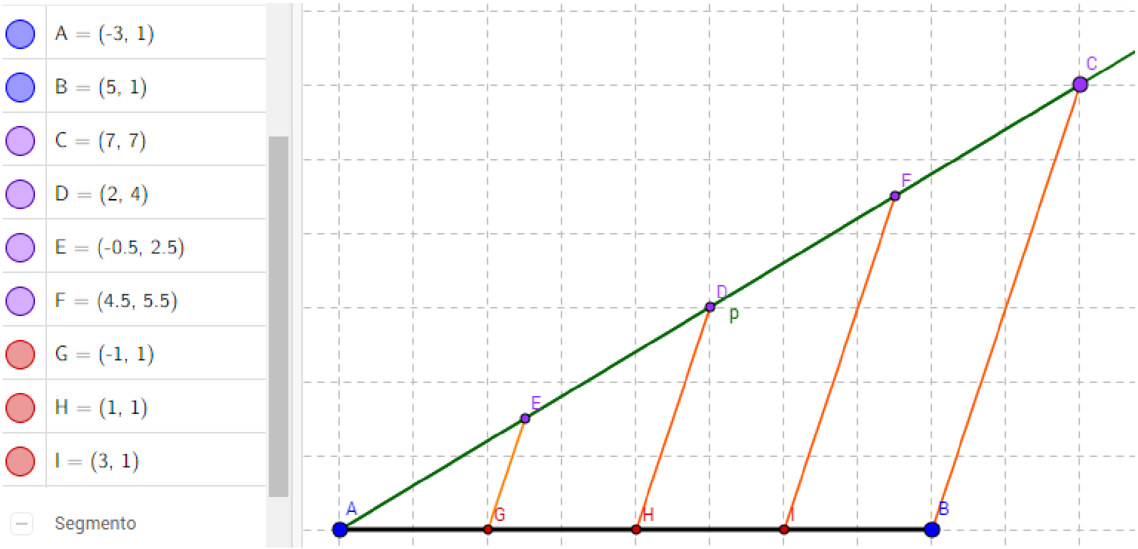
- División de segmentos en partes iguales.
- División de segmentos en partes proporcionales.

Ambos apartados seguirán en gran medida la misma técnica. No nos extenderemos demasiado en el presente campo de problemas puesto que los conceptos a enseñar son muy sencillos.

Problema 5.1: Divide un segmento de longitud cualquiera en 4 partes iguales.

El primer problema del presente campo de problemas lo realizaremos con GeoGebra. De esta forma, al finalizar el ejercicio, los alumnos podrán comprobar que aun que muevas uno de los extremos del segmento inicial, las longitudes de las cuatro partes en las que hemos dividido dicho segmento seguirán siendo iguales unas a otras.

De manera individual, los alumnos tendrán que crear un segmento AB, el cual tendrán que dividir. Después, crearán una semirrecta auxiliar cuyo origen sea A y que forme menos de 90º con respecto al segmento AB. Seguidamente, se trazaran 4 segmentos de la misma longitud sobre esa semirrecta. Dicha longitud será a la elección de los alumnos.



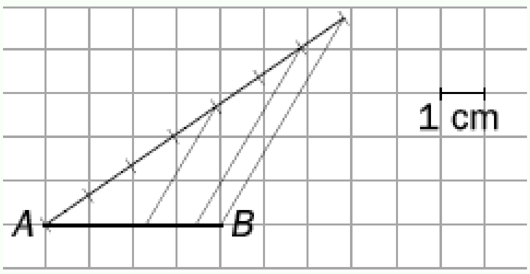
En nuestro caso, los segmentos formados en la semirrecta serán AE, ED, DF y FC. Luego, unirán el extremo del último segmento de la semirrecta, C, con el punto B.

Posteriormente, trazarán rectas o segmentos paralelos a CB, cortando de esta manera al segmento a AB en los puntos G, H e I.

Gracias al teorema de Thales, se puede asegurar que los segmentos AG, GH, HI e IB nos iguales.

Problema 5.2: Divide un segmento de 4 cm de longitud en tres partes de forma que la primera sea el doble de la segunda, y está el doble de la tercera

Realizaremos prácticamente el mismo procedimiento que en el problema anterior. Sin embargo, puesto que en este caso la longitud de dichas partes tienen que ser proporcionales de forma que: la primera sea el doble de la segunda, y la segunda sea el doble de la tercera, marcaremos en la semirrecta 7 segmentos de la misma longitud. Luego, volveremos a unir con un segmento el extremo del último segmento de la semirrecta con el punto B. Después, realizaremos dos paralelas a este último de forma que se cumplan las condiciones demandas en la división del segmento AB.



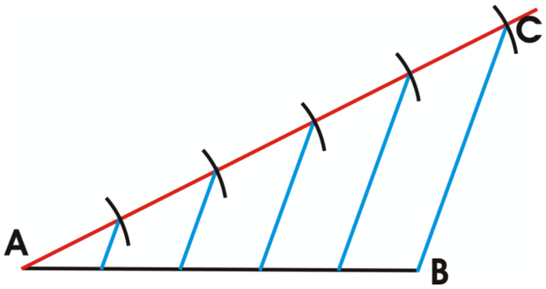
Finalmente, propondremos un problema contextualizado.

Problema 5.3: Pepe y José quieren repartirse 13 metros de cable eléctrico en partes proporcionales a 7 y 3. ¿Cuántos metros le tocará a cada uno? Divide el cable mediante la división de un segmento en partes proporcionales.

Técnicas y tecnologías

Las técnicas usadas son:

- **División de un segmento en partes iguales:**
  - Trazamos un segmento AB.
  - Trazamos una semirrecta de origen A y que forme con el segmento AB un ángulo menor de 90º.
  - Sobre esta semirrecta dibujamos tantos segmentos consecutivos de la misma longitud como partes iguales queramos obtener del segmento AB
  - Unimos el extremos final del último segmento con el punto B, y trazamos paralelas a esta recta por los extremos de los otros segmentos que hemos marcado en la semirrecta.



- **División de un segmento en partes proporcionales:**
  - Trazamos un segmento AB.
  - Trazamos una semirrecta de origen A y que forme con el segmento AB un ángulo menor de 90º.
  - Sobre esta semirrecta dibujamos los segmentos proporcionales consecutivos que queremos obtener del segmento AB.
  - Unimos el extremos final del último segmento con el punto B, y trazamos paralelas a esta recta por los extremos de los otros segmentos que hemos marcado en la semirrecta.

Las tecnologías que sustentan dichas técnicas es el Teorema de Thales y la visualización de los propios segmentos iguales o proporcionales junto a su medición.

F.6 Campo de problemas 6: Construcción de polígonos semejantes.

Los objetivos principales de este campo de problemas son:

- Aprender a construir polígonos semejantes por medio de diferentes procedimientos.
- Entender el concepto matemático "Homotecia".
- Comprender la diferencia entre homotecia y semejanza.

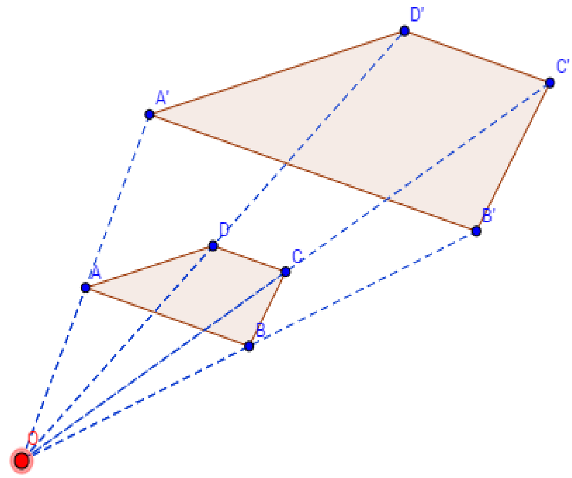
En primer lugar, el profesor explicará, por medio del siguiente problema, que una homotecia es una transformación a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor.

Problema 6.1: Construye un trapecio semejante a otro cualquiera ABCD con razón de semejanza *k*=2.

Manipulando GeoGebra, mostraremos a los estudiantes que dependiendo de la posición del punto O, el cual será el centro de homotecia, podemos realizar dicha construcción de diversas maneras:

- <u>Si O es un punto exterior:</u>
  1. Tomamos un punto exterior O cualquiera y trazamos semirrectas con origen en el punto O y que pasen por cada uno de los vértices del trapecio dado ABCD.
  2. Por una de las semirrectas, por ejemplo OA, marcamos un punto A' de modo que se cumpla:

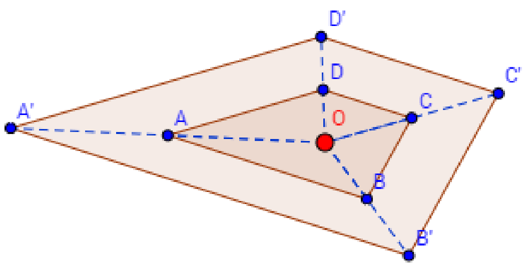
     $$\frac{OA\prime}{OA} = 2 \quad \rightarrow \quad OA' = 2 \cdot OA$$



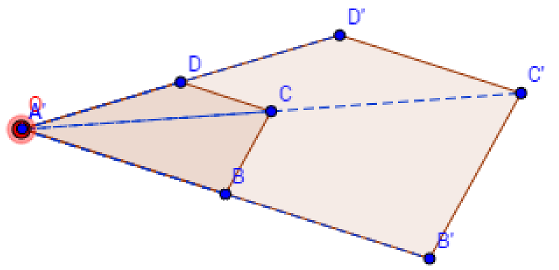
  3. Realizamos el proceso anterior con los puntos B', C' y D' de modo que se cumpla que $OB' = 2 \cdot OB$, $OC' = 2 \cdot OC$ y $OD' = 2 \cdot OD$. Observamos que el segmento A'B' es paralelo al AB, el B'C' es paralelo al BC, y así sucesivamente.

A partir de aquí, pediremos al alumnado que prueben las diferentes posiciones relativas que puede tener el punto O. De esta manera, verán estas dos situaciones:

Si O es un punto interior:



Si O es uno de los vértices de la figura



En ambos casos se sigue cumpliendo que: $OA' = 2 \cdot OA$, $OB' = 2 \cdot OB$, $OC' = 2 \cdot OC$ y $OD' = 2 \cdot OD$

Asimismo, destacaremos que cuando el punto O es uno de los vértices de la figura, ambos polígonos están en posición de Thales.

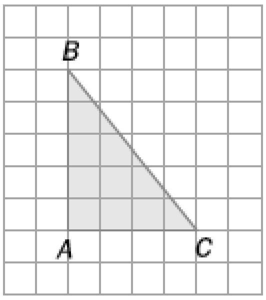
Finalmente, gracias a un deslizador que pondremos en el problema, los estudiantes experimentarán que ocurre si se modifica la razón de semejanza *k.* Pediremos que anoten todas sus observaciones en su cuaderno para ponerlas en común posteriormente. Así pues, se acabará concluyendo en el aula principalmente que si:

- Si *k>1*, el tamaño de la figura transformada es mayor que el de la original.
- Si *-1<k<0*, el tamaño de la figura transformada es menor que el de la original.
- Si *k<-1*, el tamaño de la figura transformada es mayor que el de la original.
- Si *k=1*, la figura transformada coincide con la original.
- Si *k=-1*, la figura transformada se transforma en una simétrica a la original de centro O (simetría central).

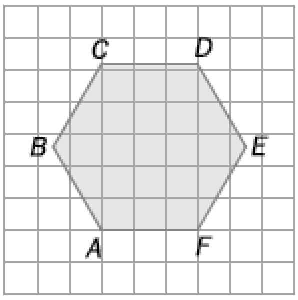
Gracias a este problema, se espera que los alumnos hayan comprendido el concepto homotecia de una forma práctica.

Problema 6.2: Construye un tu cuaderno polígonos semejantes a los siguientes siendo la escala 1:2 teniendo como punto de referencia uno de sus vértices. ¿Cuál es la razón de semejanza del original con respecto al pedido? ¿Los polígonos semejantes están en posición de Thales? ¿Por qué?

a)

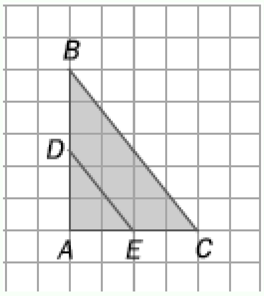


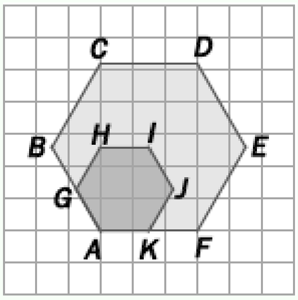
b)



La solución de este problema es la siguiente:

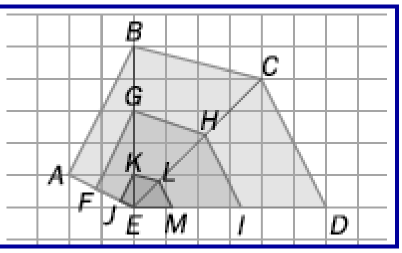
- Los triángulos ABC y ADE son semejantes con razón de semejanza 0,5
- Los hexágonos ABCDEF y AGHIJK son semejantes con razón de semejanza 0,5





Podemos comprobar rápidamente que ambos están en posición de Thales.

Problema 4.: ¿Cual es la razón de semejanza de los pentágonos ABCDE y FGHIE? ¿Y la de los pentágonos ABCDE y JKLME?



La solución de este problema es la siguiente:

Los pentágonos ABCDE y FGHIE son semejantes con razón de semejanza 3/5.

Los pentágonos ABCDE y JKLME son semejantes con razón de semejanza 1/5.

La siguiente actividad ha sido recogida de Grupo Beta (1993)

Problema 4.: Observa los siguientes pares de figuras y distingue las que son homotéticas de las que sólo son semejantes.

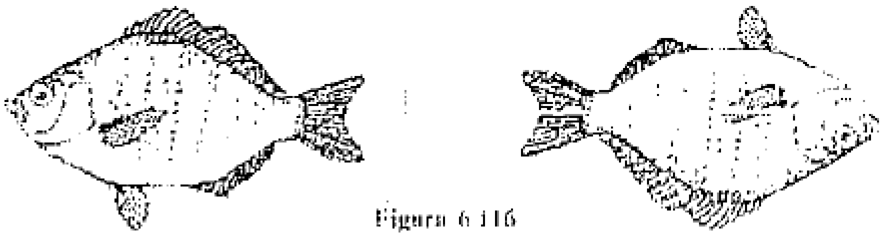


Figura 6 116

Figura 6 117

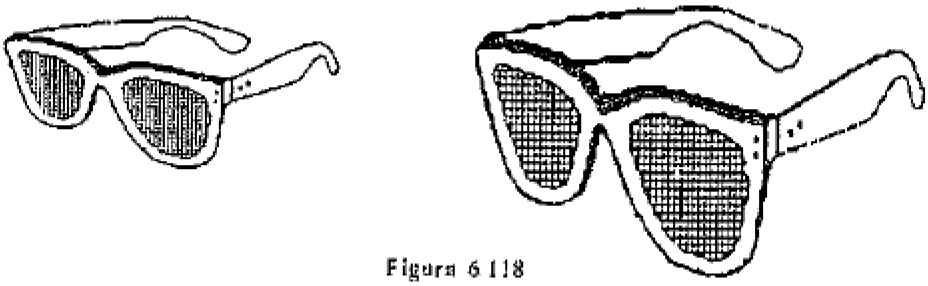


Figura 6 118

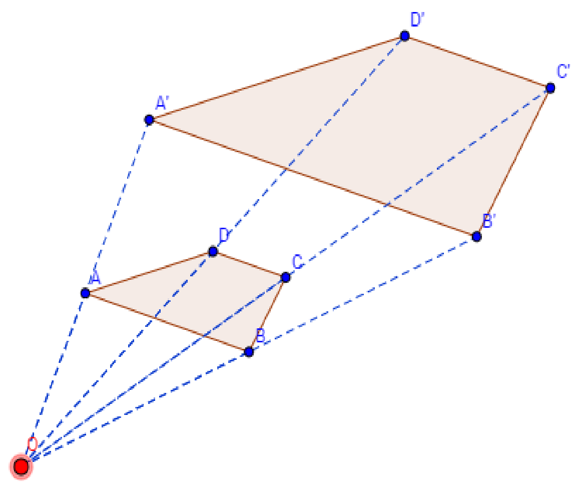
Figura 6 119

Los alumnos observarán que las figuras semejantes se pueden obtener moviendo las que son homotecias. Esto nos dará pie a hacer razonar a los alumnos sobre el hecho de que una semejanza es la transformación geométrica que se obtiene como composición de una homotecia con un movimiento.

Técnicas y tecnologías

La técnica utilizada para la construcción de polígonos semejantes por homotecia es la siguiente:

1. Tomamos un punto O cualquiera y trazamos semirrectas con origen en el punto O y que pasen por cada uno de los vértices de la figura. Dicho punto O, puede ser exterior, interior o uno de los vértices de la figura. En este caso, construiremos un trapecio semejante y tomaremos como O a un punto exterior cualquiera de la figura.



2. Por una de las semirrectas, por ejemplo OA, marcaremos un punto A' de modo que se cumpla: $\frac{OA'}{OA} = 2 \;\; \rightarrow \;\; OA' = 2 \cdot OA$
3. Con respecto al punto A', podemos construir B', C' y D' de dos formas:
   - De la misma manera que como hemos explicado anteriormente con el punto A'.
   - Dibujando rectas paralelas de los segmentos del polígono original con respecto a las semirrectas. Por ejemplo, para marcar el punto B', realizaremos una recta paralela del segmento AB teniendo como extremos del nuevo segmento el punto A' y un punto de la semirrecta que contiene al punto B.

   En ambos casos, se debe cumplir que $OA' = k \cdot OA, OB' = k \cdot OB,\;\; OC' = k \cdot OC$ y $OD' = k \cdot OD$ siendo k la razón de semejanza entre ambos polígonos.

Las tecnologías que sustenta dicha técnica son la definición de polígonos semejantes, posición de Thales, semejanza, razón de semejanza y homotecia.

- **Homotecia**. Una homotecia de centro O y razón k, $k \neq 0$, es una transformación geométrica afín que transforma un punto A en otro A' alineado con O y A, de modo que:

$$k = \frac{OA'}{OA}$$

  En otras palabras, es una transformación que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por un mismo factor. En general una homotecia de razón diferente de 1 deja un único punto fijo, llamado centro.

  Además, se cumple que cuando:

  1) $k = -1$, corresponde a una simetría central.
  2) $|k| > 1$, implica una ampliación de la figura.
  3) $|k| < 1$, implica una reducción de la figura.
  4) $|k| < 0$, la homotecia se puede expresar como la composición de una simetría con una homotecia de razón $|k|$, ambas de igual centro.

- **Semejanza**: es la transformación geométrica que se obtiene como composición de una homotecia con un movimiento. En una semejanza se cumplen las siguientes características:
  - Los segmentos homólogos son proporcionales y su razón coincide con la razón de homotecia.
  - Los ángulos homólogos son iguales. Puesto que las homotecias y los movimientos conservan los ángulos, en una semejanza se tendrá que los ángulos homólogos son iguales.
  - Si la razón de homotecia es k = 1, esta se reduce a la identidad, y la semejanza considerada es el movimiento que aplicamos.
  - Si el movimiento es la identidad, la semejanza considerada se reduce a una homotecia.
  - Una semejanza es directa o inversa según el movimiento aplicado. Diremos que una semejanza es directa si conserva el sentido de la figura; en caso contrario, es inversa.

F.7 Campo de problemas 7: Distancias inaccesibles.

Este campo de problemas engloba las técnicas y tecnologías que hemos explicado anteriormente. Nuestro objetivo principal será aprender a utilizar, sobre todo, la semejanza de triángulos y el Teorema de Thales para resolver problemas de contexto cotidiano. En definitiva, los alumnos deberán poner en práctica todos los conocimientos vistos para abordar distintos problemas aprendiendo al mismo tiempo los diferentes métodos que podemos utilizar para calcular una distancia inaccesible, usando la semejanza de triángulos.

Dependiendo de la ubicación del centro escolar, los problemas sugeridos en el presente campo de problemas se pueden realizar físicamente. En otras palabras, el docente junto a sus alumnos pueden ir a un parque para medir la altura de un árbol, a la Plaza Aragón para medir el Monumento al Justiciazgo, etc. De la misma forma, se pueden plantear el cálculo de la medición de otros objetos más disponibles como el propio edificio del centro, una farota, etc.

Problema 6.1: En la Plaza Aragón de Zaragoza, nos encontramos con el majestuoso Monumento al Justiciazgo. Calcula la altura del monumento sabiendo que en un día soleado a una hora determinada, se midieron las siguientes longitudes:

- La sombra del monumento es: 22 m
- La altura de una persona es: 1,70 m
- La sombra de esa persona es: 2,34 m

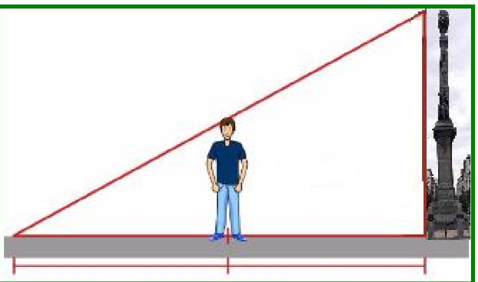
El primer problema planteado tiene un contexto muy cercano al alumnado puesto que se cuestiona un dato desconocido de un monumento ubicado en la Plaza Aragón, el cual probablemente verán muy a menudo.

El propio problema platea el método que usaremos, el método de las sombras. Evidentemente, al plantear el problema en el aula, los alumnos verán la necesidad de usar los conceptos de la posición de Thales y de la semejanza de triángulos.

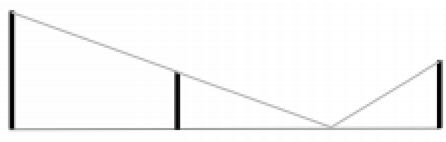
Así mismo, el docente aprovechará para recordarles la historia de cómo midió Thales de Mileto la pirámide de Keops, gracias a este método (pero en vez de usar su propia sobra, usó la de un bastón).

a) Sea h la altura del monumento:

$$\frac{h}{22} = \frac{1{,}70}{2{,}34} \rightarrow h = \frac{22 \cdot 1{,}70}{2{,}34} \approx 16\, m$$



Problema 6.2: Eva quiere saber qué altura tiene un casa. Para ello, coloca un espejo en el suelo, entre el edificio y ella, de forma que en posición erguida, pueda ver la parte más alta del edificio reflejada en el espejo.



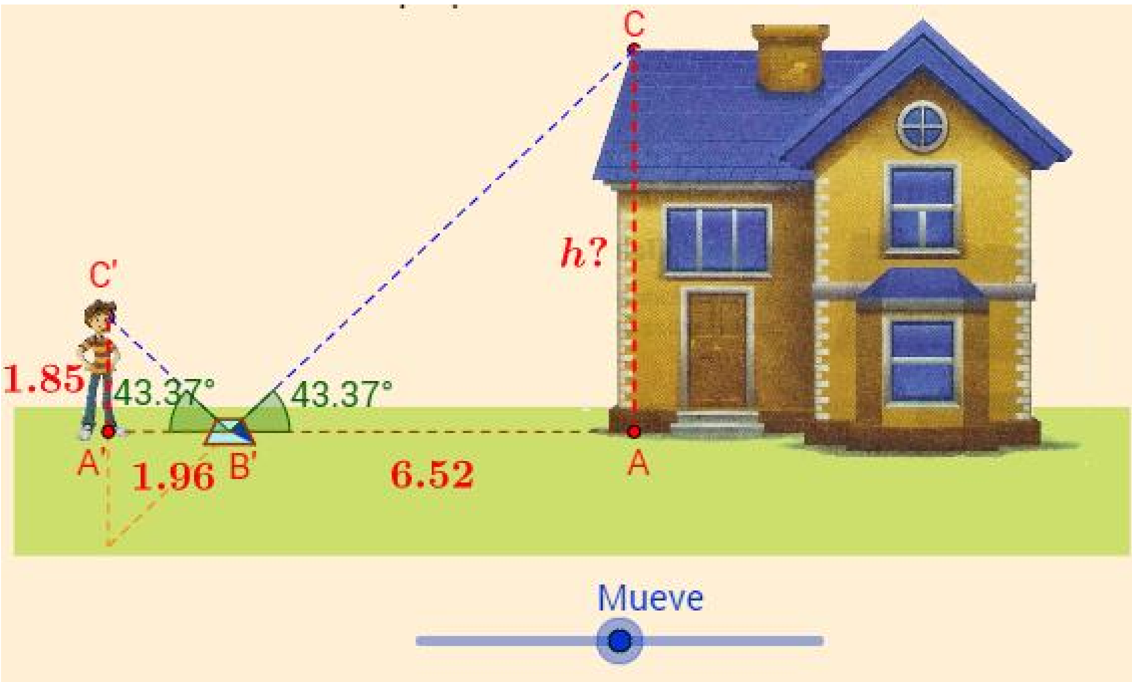
Si sabemos que

- La altura de Eva (desde los ojos al suelo) es: 1,85 m
- La distancia de la base del edificio al espejo es: 6,52 m
- La distancia del espejo al pie de la observadora es 1,96 m

¿Cuánto mide la altura del edificio?

Para la realización de este problema, el profesor proyectará en el aula dicho ejercicio puesto que lo podemos encontrar de manera interactiva en la página web: https://www.geogebra.org/m/EBmggRRr

Es muy interesante que los alumnos vean el planteamiento de este problema desde la página web mostrada puesto que, de manera interactiva, pueden observar el procedimiento que hay que seguir para la "Medición de alturas con un espejo".



A lo largo de este problema, el docente realizará diversas cuestiones en voz alta para lograr una discusión en grupo como:

- **¿Cómo son el ángulo de reflexión y el ángulo de incidencia que se forman en el espejo?** (El ángulo de incidencia y el de reflexión en una superficie plana son iguales).
- **¿Los dos triángulos de la figura son semejantes?¿Por qué?** (Si, porque tienen dos ángulos iguales. Por una parte, el de incidencia y el de reflexión. Por otra parte, los dos ángulos rectos).

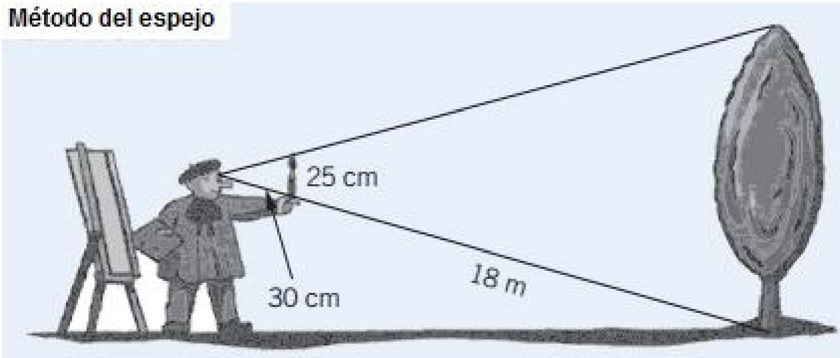
Al final, calcularemos que:

Si h es la altura del edificio entonces:

$$\frac{h}{1{,}85} = \frac{6{,}52}{1{,}96} \rightarrow h = \frac{1{,}85 \cdot 6{,}52}{1{,}96} \approx 6{,}15\ m$$

Antes de continuar con el siguiente problema, aprovecharemos para preguntar a los estudiantes la siguiente cuestión: ¿Creéis que este método sólo se podría realizar con un espejo? Por medio de una lluvia de ideas, saldrán otras opciones como que este método se puede efectuar gracias a un charco de agua o cualquier objeto que refleje correctamente. La finalidad de esta pregunta es la de dar al alumnado herramientas suficientes para que puedan poner en práctica dicho método.

Problema 6.3: ¿Cómo crees que se calculan las distancias por el método del pintor? Calcula la altura del siguiente árbol.



Con ayuda de la ilustración, el alumnado deducirá en qué consiste el método del pintor. Si se desviarán del tema, el docente les volverá a encauzar en la dirección correcta por medio de preguntas, ejemplos, etc.

Finalmente, concluiremos en clase que el método del pintor consiste en colocar un pincel, u otro objeto, verticalmente frente a la vista del observador, de forma que tape completamente el objeto del que se desea aproximas la altura. Conociendo la distancia a la que se encuentra el pincel y la del pincel al objeto, se puede aplicar el Teorema de Thales (los triángulos están en posición de Thales).

Tenemos que tener en cuenta que los datos no están expresados en diferentes medidas.

$$\frac{0{,}25}{h} = \frac{0{,}3}{18} \quad \rightarrow \quad h = \frac{0{,}25 \cdot 18}{0{,}3} = 15$$

Problema 6.4: Claudia necesita medir el ancho del río que pasa cerca de su propiedad, pero no puede llegar al otro lado. No obstante, se le ocurre una idea y realiza los siguientes pasos:

1. Identifica un punto determinado al otro lado del río, en donde quiere medir el ancho del río, por ejemplo el árbol (Punto A).

2. Del punto A, traza una línea imaginaria sobre la longitud que quiere medir. Ésta debe ser perpendicular al cauce del río para que la medida que obtenga sea la adecuada (Punto B).

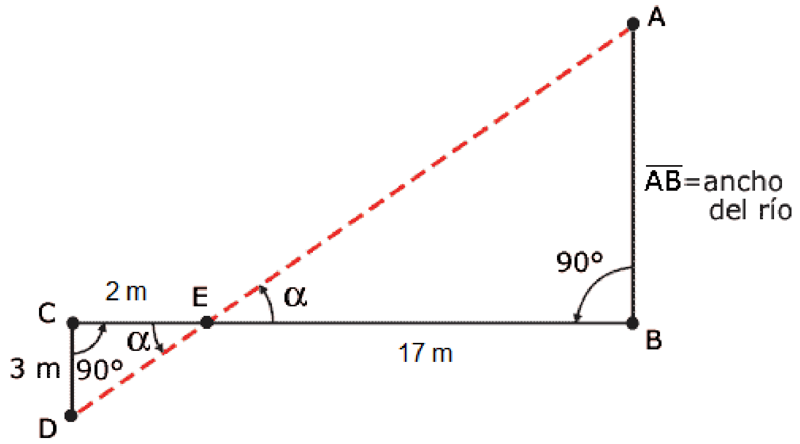
3. Se desplaza a uno de los lados del punto de observación, también de manera perpendicular, a una distancia considerable (Punto C).

4. De ahí, camina de manera perpendicular al cauce, alejándose del río para establecer un segundo punto de observación (Punto D).

5. Claudia, pide ayuda para que se ponga una "Marca" (Punto E) en la intersección del segmento $\overline{CB}$ y la línea imaginaria que resulta de mirar desde el punto D, el punto A .

Si $\overline{CD} = 3\ m$, $\overline{CE} = 2\ m$, $\overline{EB} = 17\ m$. ¿Cuánto mide el ancho del río

En primer lugar, el profesor pedirá a sus alumnos que dibujen en sus cuadernos el siguiente croquis:



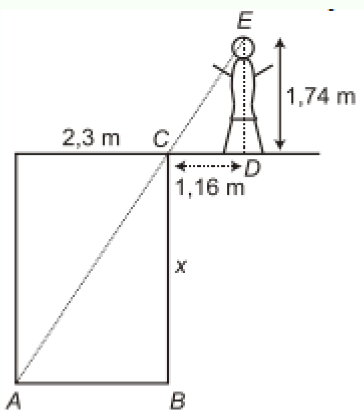
Seguidamente, tendrán que explicar de forma razonada por qué estos dos triángulos son semejantes. Finalmente, calcularán las operaciones oportunas:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{CE}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{BE} \cdot \overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{17 \cdot 3}{2} = 25{,}5\ m$$

Luego Claudia sabe que el río tiene un ancho aproximado de 25,5 metros.

No nos podemos olvidar que el cálculo de distancias inaccesibles no son sólo alturas o distancias, también pueden ser profundidades como la de un pozo. En este caso, plantearemos un problema más próximo a su entorno, la profundidad de una piscina.

Problema 6.5: Una piscina tiene 2,3 m de ancho; situándonos a 116 cm del borde, desde una altura de 1,74 m, observamos que la visual une el borde de la piscina con la línea del fondo. ¿Qué profundidad tiene la piscina?



Sea *x* la profundidad de la piscina.

Los triángulos ABC y CDE son semejantes (sus ángulos son iguales).

$$\frac{2{,}3}{1{,}16} = \frac{x}{1{,}74} \rightarrow x = \frac{2{,}3 \cdot 1{,}74}{1{,}16} = 3{,}45\ m$$

La profundidad de la piscina es de 3,45 metros.

G. Secuencia didáctica

En este apartado, indicaremos la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores, estableciéndoles una duración temporal aproximada. Cada sesión durará 55 minutos.

Sesión	Actividades	Técnicas	Tecnología
1	– Prueba inicial diagnóstica.	– Clasificación y propiedades de los triángulos. – Formula áreas de polígonos. – Propiedad fundamental de las proporciones.	– Definición de área. – Definición de segmento secante y perpendicular
2	– Problema 1: Razón de ser (Semejanza de figuras). – CP1: 1 – Institucionalización de los conceptos semejanza y razón de semejanza. – CP1: 2 y 3	– Criterios de semejanza de polígonos – Cálculo de razón de semejanza mediante el cociente correspondiente	– Definición de semejanza y razón de ser.
3	– CP1: 4 y 7		
4	– CP1: 8 – Formalización criterios de semejanza de triángulos. – CP1: 9 y 11	– Criterios de semejanza de triángulos	– Definición de semejanza y razón de ser.
5	– CP2: 1 – Formalización de la relación entre razón de semejanza, de perímetros y de áreas. – CP2: 2, 4 y 6	– Proporción formada por el cociente de los perímetros, áreas y volúmenes de dos cuerpos semejantes. – Relación entre razón de semejanza, de perímetros, de áreas y de volúmenes	– Definición de razón de semejanza, de perímetros, de áreas y de volúmenes.
6	– Problema 2.1: Razón de ser (Razón de semejanza. Escalas). – Institucionalización de escala. – CP3: 1, 5, 3 y 7	– Proporcionalidad numérica que relaciona dos magnitudes – Notación e interpretación de escalas – Relación entre la escala de longitudes y la de áreas	– Definición de escala. – Clasificación de escalas (ampliación, reducción y natural). – Diferencia entre escala numérica y

			gráfica.
7	– Problema 3: Razón de ser histórica del Teorema de Thales. – Breve explicación sobre Historia de las Matemáticas. – CP4: 1 – Formalización del Teorema de Thales.	– Teorema de Thales. – Triángulos en posición de Thales.	– Demostración del teorema de Thales. – Definición de semejanza. – Criterios de semejanza de triángulos.
8	– Demostración Teorema de Thales con GeoGebra. – CP4: 2, 4, 5		
9	– Explicación de división de segmentos. – CP5: 1 y 2 – Explicación de construcción de polígonos por Homotecia. – CP6: 1 y 4 – Diferenciación de Homotecia y semejanza.	– Procedimiento para la división de un segmento en partes iguales y proporcionales. – Construcción de polígonos por Homotecia.	– Teorema de Thales. – Visualización de los segmentos iguales y/o proporcionales. – Definición de Homotecia.
10	– Tarea a entregar realizada con GeoGebra. – Corrección de la tarea.		
11	– CP6: 1, 2, 3 y 4	– Teorema de Thales – Triángulos en posición de Thales. – Métodos para medir distancias inaccesibles.	– Definición de semejanza.
12	– Repaso general de la unidad didáctica: • CP1: 6 • CP2: 3 • CP3: 6 y 9 • CP4: 3 • CP6: 5	– Repaso general de las técnicas vistas anteriormente.	– Repaso general de las tecnologías vistas anteriormente
13	– Examen de evaluación del aprendizaje.		
14	– Entrega de los exámenes. – Corrección del examen.		

H. Evaluación

La prueba escrita constará de 5 preguntas y en cada una de ellas especificaremos:

- Los campos de problemas, las técnicas y las tecnologías que se evalúa.
- Las tareas principales, las tareas auxiliares específicas y generales.
- Los estándares de aprendizaje de la LOMCE con los que se podría relacionar cada pregunta de la prueba.
- Las diferentes posibles respuestas correctas que podría emplear un alumno.
- Los posibles errores que pueden cometer los alumnos.
- Los criterios de calificación que se van a emplear.

Por último, explicaremos de qué manera se comunicará y gestionará en clase los resultados y las calificaciones obtenidas por los alumnos en la prueba.

Debido a que la prueba escrita no engloba todos los campos de problemas vistos, se propondrá a los estudiantes realizar 2 tareas de forma individual en la sala de informática para poder hacer uso del software de GeoGebra. Al finalizar dicha sesión, los alumnos enviarán sus respuestas al correo del profesor.

La nota de la evaluación final sumativa de la presente unidad didáctica se obtendrá realizando la siguiente media ponderada:

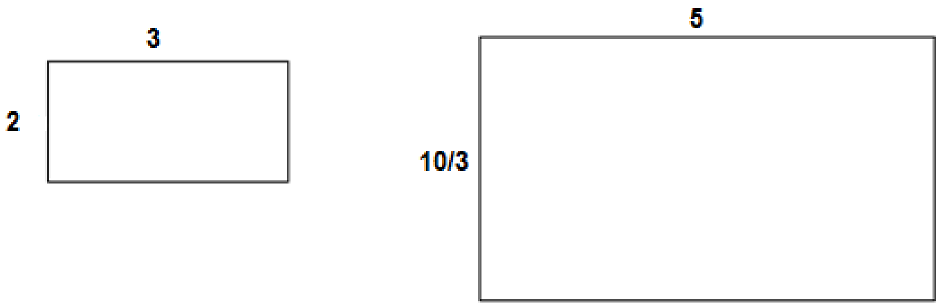
- Prueba escrita: 70%
- Tarea con GeoGebra: 15%
- Actitud y cuaderno de clase: 15%

En el último apartado se tendrá especial atención a la realización de diversos problemas voluntarios que se irán mandando como deberes a causa de la falta de tiempo en verlos en el aula. Algunos de estos problemas podrían ser: CP1: 12, CP2: 7, etc. Si observamos que los alumnos han tenido grandes dificultades con respecto a dichos problemas se intentará buscar algún hueco para realizar una corrección formal en el aula.

H.1 Prueba escrita

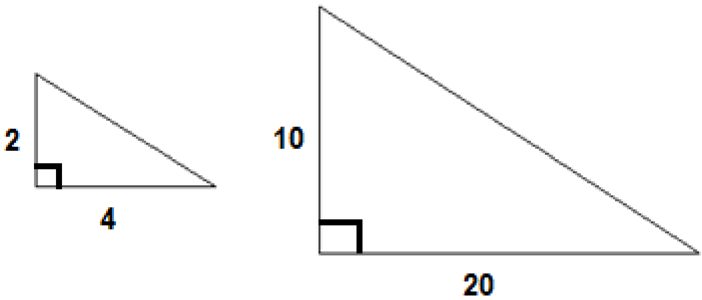
1. Razona si las siguientes figuras son semejantes. ***(2 puntos)***

a)



(1 punto)

b)



(1 punto)

Campo de problemas	8) Semejanza. Propiedades de las figuras semejantes
Técnicas	• Criterio de semejanza de polígonos: dos polígonos son semejantes si tienen los ángulos homólogos iguales y los lados correspondientes son proporcionales. • Criterios de semejanza de triángulos. • Definición de razón de semejanza. Por ejemplo, sean dos rectángulos ABCD y A'B'C'D' semejantes, entonces su razón de semejanza será *k*: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} = k$
Tecnologías	• Definición de proporcionalidad. • Definición de semejanza. • Visualización de figuras semejantes.
Tareas principales y auxiliares	<u>Tareas principales</u>: • Saber los criterios de polígonos semejantes. Particularmente, los criterios de triángulos semejantes. • Entender el concepto de semejanza.

	• Comprender los conceptos de ampliación y reducción. • Usar un método adecuado para afirmar si dos figuras son semejantes o no. <u>Tareas auxiliares específicas</u>: • Calcular correctamente la razón de semejanza entre dos figuras semejantes. <u>Tareas auxiliares generales</u>: • Operaciones aritméticas y algebraicas.
Estándares de aprendizaje	**Est.MA.3.4.1.** Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.
Posibles respuestas correctas	**1. a)** Sí, son figuras semejantes puesto que los ángulos correspondientes entre ambos son iguales (90º) y los lados correspondientes son proporcionales: $\frac{3}{2}=\frac{5}{10/3}$ **1. b)** Sí, son figuras semejantes puesto que se cumple el tercer criterio de los triángulos semejantes: Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual (el de 90º) y los dos lados que lo forman son proporcionales: $\frac{2}{10}=\frac{4}{20}$ A la hora de verificar que, en ambos casos, los lados de las dos figuras son proporcionales han podido realizar diversas estrategias como: – Construcción progresiva (*Build up*): a veces los alumnos evitan multiplicar fracciones y tienden a realizar una construcción progresiva a partir de una relación que establecen entre los elementos de la problemática. Por ejemplo, en el caso de los triángulos establecerían una relación de 4 a 2 y luego 8 a 4, 12 a 6, 16 a 8, y 20 a 10. – Regla de tres directa. Por ejemplo para el apartado b) $2 \rightarrow 10$ $4 \rightarrow x$ Como $x=\frac{4 \cdot 10}{2}=20$, entonces ambas figuras son semejantes.
Posibles	– Si los alumnos utilizan la estrategia de "Construcción progresiva" (*Build up*), seguramente afirmarán que los rectángulos del apartado a) no son semejantes puesto

errores	establecerán la siguiente relación: 3 a 2, 6 a 4, 9 a 6, 12 a 8, y así sucesivamente... – Método ingenuos (Naive): los alumnos hagan referencia a la más sencilla e ingenua repuesta encontrada. Por ejemplo, no utilizar los datos dados y afirmar que son semejantes por que las figuras se parecen mucho. – Sobre todo en el apartado b), realizar incorrectamente la razón de semejanza. En otras palabras, en vez de hacer el cociente entre el lado de la primera figura por el correspondiente de la otra, hacer dicho cociente entre las medidas de la misma figura: $\frac{2}{4} \neq \frac{10}{20}$. Posiblemente, puede aparecer este error a causa de que el cociente entre los lados de la misma figura da un número natural "bonito".
Criterios de Calificación	La pregunta valdrá 2 puntos repartidos de la siguiente manera en los diferentes apartados propuestos: **a)** 1 punto **b)** 1 punto • Por fallos en las tareas principales podremos quitar hasta un 100% de la puntuación. • Por fallos en las tareas auxiliares podremos quitar hasta un 67% de la puntuación. • Por fallos en las tareas auxiliares generales podremos quitar hasta un 33% de la puntuación. **Nota**: No será suficiente con que los alumnos afirmen que las figuras son semejantes, tendrán que justificarlo de alguna manera (con teoría, cálculos, etc.). Si no se razona correctamente, se podrá quitar hasta el 100% de la puntuación.

2. Sean dos cuadrados semejantes, donde el lado del primero es el triple del lado del segundo. Si el área del cuadrado pequeño es 1cm^2 ¿cuál es el área del cuadrado grande? ¿y el perímetro? *(1 punto)*

<table>
<tr><td>Campo de problemas</td><td>9) Semejanza. Propiedades de las figuras semejantes
10) Razón de longitudes y áreas</td></tr>
<tr><td>Técnicas</td><td>• Criterio de semejanza de polígonos: dos polígonos son semejantes si tienen los ángulos homólogos iguales y los lados correspondientes son proporcionales.
• Definición de razón de semejanza. Por ejemplo, sean dos rectángulos ABCD y A'B'C'D' semejantes, entonces su razón de semejanza será k:
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{D'A'}} = k$$
• La relación que existe entre la razón de semejanza (k), la razón de perímetros (k) y la razón de áreas (k^2).</td></tr>
<tr><td>Tecnologías</td><td>• Definición de proporcionalidad.
• Definición de semejanza.
• Visualización de figuras semejantes.
• Definición de razón de perímetros.
• Definición de razón de áreas.</td></tr>
<tr><td>Tareas principales y auxiliares</td><td><u>Tareas principales</u>:
• Saber los criterios de polígonos semejantes.
• Entender el concepto de semejanza.
• Comprender los conceptos de ampliación y reducción.
• Calcular correctamente la razón de semejanza entre dos figuras semejantes.

<u>Tareas auxiliares específicas</u>:
• Saber la relación existente entre la razón de semejanza, la razón de perímetros y la razón de áreas.
• Conocer la fórmula del área y el perímetro de un cuadrado.

<u>Tareas auxiliares generales</u>:
• Operaciones aritméticas y algebraicas.</td></tr>
<tr><td>Estándares de aprendizaje</td><td>Est.MA.3.4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.</td></tr>
</table>

Posibles respuestas correctas	El área del cuadrado grande es 9 cm^2 y su perímetro es 12 cm. Los posibles caminos a seguir han sido: – Si el área del cuadrado pequeño es $1cm^2$, entonces cada uno de sus lados mide 1 cm. Puesto que el lado del segundo cuadrado se amplía el triple (razón de semejanza 3), entonces cada uno de sus lados medirá 3 cm. Luego el área de cuadrado grande será $3^2cm^2 = 9\ cm^2$ y su perímetro $3 \cdot 4 = 12\ cm$ – Puesto que la razón de semejanza (k) es igual a la razón de perímetros y la razón de áreas es el cuadrado de la razón de semejanzas (k^2), calcularemos los datos pedidos a partir del área y el perímetro del cuadrado pequeño Área del cuadrado grande: $1 \cdot 3^2 = 9\ cm^2$ Perímetro del cuadrado grande: $(1 \cdot 4) \cdot 3 = 12cm$
Posibles errores	– Establecer incorrectamente la relación existente entre la razón de semejanza, la razón de perímetros y la razón de áreas. Por ejemplo, que todas sean igual a *k.* Efectivamente, es probable que si afirmamos que el lado del primer cuadrado es el triple del lado del segundo, el alumnado piense que el área del segundo también se triplica. – No acordarse de las fórmulas del perímetro y el área de un cuadrado.
Criterios de Calificación	La pregunta valdrá 2 puntos. Vamos a explicar los criterios de calificación que se van a seguir, dependiendo del procedimiento que hayan escogido los alumnos. **<u>1ª Manera:</u>** • Si por medio del área del cuadrado pequeño, los alumnos calculan la medida de los lados del cuadrado pequeño y seguidamente multiplican dicha medida por la razón de semejanza correspondiente (en este caso 3) para hallar la medida del lado del cuadrado grande semejante, obtendrán 1 punto. • Teniendo las longitudes del cuadrado grande semejante: – Si calculan correctamente su perímetro tendrán: 0,5 puntos – Si calculan correctamente su área tendrán: 0,5 puntos

	2ª Manera: • Si exponen correctamente la relación existente entre la razón de semejanza (k), la razón de perímetros y la razón de áreas (k^2), obtendrán 1,25 puntos. • Si calcula correctamente el área del cuadrado grande a partir del área dada del cuadrado pequeño tendrá 0,25 puntos. • Si calcula correctamente el perímetro del cuadrado grande a partir del perímetro del pequeño, el cual se tiene que hallar previamente, tendrá 0,5 puntos. Si el problema se resuelve de alguna forma diferente a las propuestas, se calificará siguiendo los siguientes criterios: • Por fallos en las tareas principales podremos quitar hasta un 100% de la puntuación. • Por fallos en las tareas auxiliares podremos quitar hasta un 67% de la puntuación. • Por fallos en las tareas auxiliares generales podremos quitar hasta un 33% de la puntuación. **Nota:** Para cualquier procedimiento escogido por el alumnado, por errores en operaciones aritméticas y algebraicas se podrá quitar hasta un 33%.

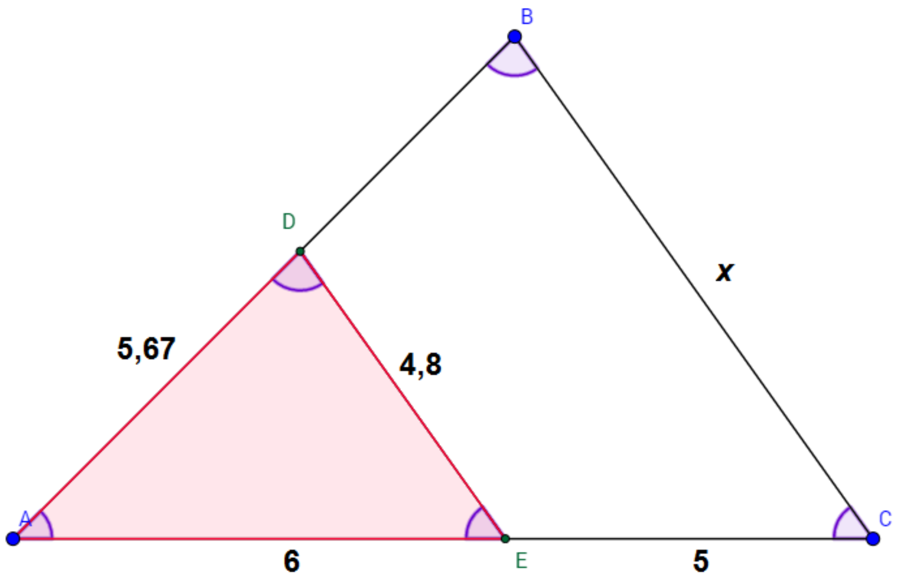
3. Responde a las siguientes cuestiones sabiendo que los lados BC y DE de los siguientes triángulos son paralelos. Justifica todas tus repuestas. ***(2 puntos)***

a) **¿Los triángulos ADE y ABC están en posición de Thales?** ***(0,5 puntos)***

b) **Calcula la medida del segmento BC.** ***(0,75 puntos)***

c) **Halla la medida de los ángulos $\widehat{D}$ y $\widehat{E}$ sabiendo que $\widehat{A} = 45°$, $\widehat{B} = 80,5°$ y $\widehat{C} = 54,5°$.** ***(0,25 puntos)***

d) **Halla la razón de semejanza de los triángulos ADE y ABC.** ***(0,75 puntos)***



Campo de problemas	1) Semejanza. Propiedades de las figuras semejantes. 2) Razón de longitudes y áreas. 4) Teorema de Thales.
Técnicas	• Criterios de semejanza de triángulos. Dos triángulos, ABC y A'B'C', son semejantes si: • Razón de semejanza: cociente entre la longitud de un lado de un polígono y la longitud del lado correspondiente del otro polígono. Si dos triángulos, ABC y A'B'C', son semejantes entonces diremos que su razón de semejanza es: $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k$ • Aplicación del Teorema de Thales. Triángulos en posición de Thales.

<table>
<tr><td>Tecnologías</td><td>

Propiedades de los triángulos.
Definición de semejanza.
Teorema de Thales.
Definición de "triángulos en posición de Thales".

</td></tr>
<tr><td>Tareas principales y auxiliares</td><td>
<u>Tareas principales</u>:

Saber cuando dos triángulos están en posición de Thales.
Entender el concepto de semejanza y de razón de semejanza.
Conocer las características que se tienen que cumplir para poder usar el Teorema de Thales.
Conocer la fórmula del Teorema de Thales.
Comprender para qué se usa el Teorema de Thales.

<u>Tareas auxiliares específicas</u>:

Saber que cuando dos triángulos están en posición de Thales, estos son semejantes.
Aplicar correctamente la fórmula del Teorema de Thales.
Aplicar correctamente la fórmula de la razón de semejanza.

<u>Tareas auxiliares generales</u>:

Operaciones aritméticas y algebraicas.

</td></tr>
<tr><td>Estándares de aprendizaje</td><td>
Est.MA.3.4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.

Est.MAAC.3.2.3. Reconoce triángulos semejantes y, en situaciones de semejanza, utiliza el teorema de Tales para el cálculo indirecto de longitudes en contextos diversos.
</td></tr>
<tr><td>Posibles respuestas correctas</td><td>
a) Sí, los triángulos ADE y ABC están en posición de Thales porque ambos tienen un ángulo común, $\hat{A}$, y los lados opuestos a este ángulo, BC y DE, son paralelos.

b) Para calcular el lado BC, los alumnos podrían realizar algunos de los siguientes procedimientos:

Utilizando el Teorema de Thales:
$\frac{6}{4,8} = \frac{5+6}{x} \rightarrow x = \frac{4,8 \cdot 11}{6} = 8,8$
Como los triángulos están en posición de Thales, entonces ambos son semejantes. Observamos que la razón de semejanza de los triángulos ADE y ABC es $\frac{6}{11}$.Por lo tanto,

</td></tr>
</table>

	$\frac{4,8}{x}$=$\frac{6}{11}$ $\rightarrow x = \frac{11 \cdot 4,8}{6}$ = 8,8 • Primero, hallar el lado BD: 5,67·$\frac{11}{6}$= 10,395. Después, utilizar este dato para realizar la misma operación que anteriormente: $\frac{4,8}{x}$=$\frac{5,67}{10,395}$ $\rightarrow x = \frac{4,8 \cdot 10,395}{5,67}$ = 8,8. Aunque esta solución es correcta, observamos que el camino escogido para la resolución del problema no es óptima ya que no aprovecha toda la información dada en el enunciado. **c)** Afirmar que $\widehat{D} = \widehat{B} = 80,5°$ y $\widehat{E} = \widehat{C} = 54,5°$ porque los dos triángulos están en posición de Thales, o bien, porque han comprobado numéricamente que son semejantes. **d)** La razón de semejanza de los triángulos ADE y ABC es: $$\frac{6}{11} = \frac{4,8}{8,8} \approx 0,545$$
Posibles errores	**a)** Afirmar que no se puede saber si dos triángulos están en posición de Thales hasta que se calcule el valor de x y de esta manera verifiquemos que los triángulos son semejantes. **b)** No aplicar correctamente el Teorema de Thales. Por ejemplo, un error frecuente sería la siguiente generalización: $\frac{6}{4,8} = \frac{5}{x} \rightarrow x = \frac{4,8 \cdot 5}{6}$= 4 – Posiblemente, los alumnos también tengan dificultades con las operaciones aritméticas y algebraicas. – Asimismo, es probable que no seleccionen correctamente los datos necesarios para resolver el problema y/o utilizar datos innecesarios. **c)** Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, entonces $\widehat{D}$=$\widehat{E}$=$\frac{180°-\widehat{A}}{2}$. – Además, es probable que al intentar calcular los ángulos desconocidos acaben con que la suma de los ángulos interiores del triángulo sea mayor o menor que 180°. **d)** Calcular la razón de semejanza de ABC y ADE en vez de la ADE y ABC:

	$$\frac{11}{6}=\frac{8{,}8}{4{,}8}\approx 1{,}833$$ - Si los alumnos deciden dar una respuesta aproximada, redondear mal o incluso redondear a las unidades: $$\frac{6}{11}=\frac{4{,}8}{8{,}8}\approx (0{,}545)\approx 1$$
Criterios de Calificación	La pregunta valdrá 2 puntos repartidos de la siguiente manera en los diferentes apartados propuestos: **a)** 0,5 **b)** 0,75 **c)** 0,25 **d)** 0,75 • Por fallos en las tareas principales podremos quitar hasta un 100% de la puntuación. • Por fallos en las tareas auxiliares podremos quitar hasta un 67% de la puntuación. • Por fallos en las tareas auxiliares generales podremos quitar hasta un 33% de la puntuación. **Nota**: Si las respuestas no están justificadas de alguna manera, ya sea de manera teórica o con las correspondientes operaciones, podremos quitar hasta el 100% de la puntuación de dicho apartado.

4. Responde y justifica las siguientes cuestiones. ***(2 puntos)***

a) Una habitación está representada a escala 1:50 en centímetros. Si la cama mide de largo 30 mm en el plano, ¿cuánto medirá en la realidad? ***(0,60 puntos)***

b) Si hay una estantería que mide 2 metros de largo, ¿cuánto medirá en el plano? ***(0,60 puntos)***

c) Si la puerta de la habitación mide 81 cm en la realidad. ¿Cuál sería la escala del plano si en él midiera 1,5 cm? ¿Es una escala de reducción o de ampliación? ***(0,80 puntos)***

Campo de problemas	3) Escalas
Técnicas	• Definición de escala como: razón de semejanza entre la figura representada y la figura original. $$E = \frac{Distancia\ en\ la\ representación}{Distancia\ en\ la\ realidad}$$ • La notación de la escala numérica dependiendo de si es una escala de ampliación, reducción o natural.
Tecnologías	• Definición de razón de semejanza. • Clasificación de escalas: escala de reducción, ampliación y natural.
Tareas principales y auxiliares	<u>Tareas principales</u>: • Entender el concepto de escala como el cociente de las medidas de un objeto representado en, este caso, un plano por las medidas de dicho objeto en la realidad. • Conocer la fórmula de razón de semejanza. • Interpretar correctamente la notación numérica de la escala. • Saber que hay que poner todos los datos del enunciado a una misma unidad de medida. <u>Tareas auxiliares específicas</u>: • Calcular correctamente los cambios de unidad necesarios. • Calcular correctamente la escala. • Calcular correctamente la razón de semejanza. <u>Tareas auxiliares generales</u>: • Operaciones aritméticas y algebraicas

<table>
<tr><td>Estándares de aprendizaje</td><td>Est.MA.3.4.2. Utiliza la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.</td></tr>
<tr><td>Posibles respuestas correctas</td><td>
a) En el plano, la cama mide 30 mm = 3 cm. Por lo tanto, en la realidad, la cama medirá $3 \cdot 50 = 150\ cm$
b) En la realidad, la estantería mide 2 m = 200 cm. Por lo tanto, en el plano, la estantería medirá 200/50 = 4 cm
Ambos apartados lo pueden realizar de diversas maneras:
Utilizando el propio concepto de escala. En este caso, 1 cm en el plano corresponde a 50 centímetros en la realidad. Así pues, por ejemplo en el apartado a), si en el plano la cama mide 3 cm, tendremos que multiplicar por 50 para hallar cuantos centímetros mide en la realidad. De la misma manera, dividiremos por 50 si la medida que nos dan es la real y nos pide la del plano.
Por regla de tres (directa): Distancia plano → Distancia realidad
<table>
<tr><td>1→ 50
3 → x</td><td>$x = \frac{50 \cdot 3}{1} = 150$</td><td>1→ 50
x → 200</td><td>$x = \frac{200 \cdot 1}{50} = 4$</td></tr>
</table>
c) La puerta, en la realidad mide 81 cm de largo y en el plano 1,5 cm. Calculemos la razón de semejanza: $\frac{81}{1,5} = 54$. Por lo tanto, la escala de dicho plano estará a 1:54 en cm. Es una escala de reducción.
Del mismo modo que anteriormente, los alumnos puede realizar una regla de tres directa:
<table>
<tr><td>1,5 → 81
1 → x</td><td>$x = \frac{1 \cdot 81}{1,5} = 54$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Posibles errores</td><td>
Confusión con la notación de la escala numérica dependiendo de si es una escala de ampliación o reducción. En este caso, que asocien la escala 1:50 a que 1 centímetro en la realidad corresponden a 50 centímetros en la el plano.
Errores con los cambios de unidad.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

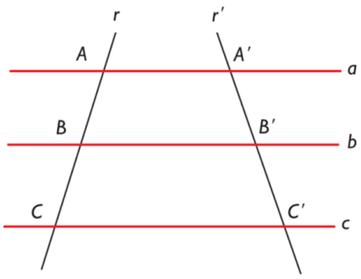
No realizar ningún cambio de unidad por no tenerlas en cuenta.
Vincular la escala a una única unidad de medida.

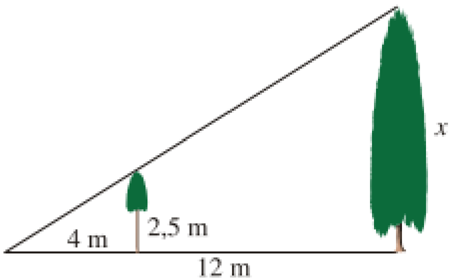
</td></tr>
<tr><td>Criterios de Calificación</td><td>
La pregunta valdrá 2 puntos repartidos de la siguiente manera en los diferentes apartados:
a) 0,60 puntos
b) 0,60 puntos
c) 0,80 puntos (la primera pregunta 0,5 y la segunda 0,3)

Por fallos en las tareas principales podremos quitar hasta un 100% de la puntuación.
Por fallos en las tareas auxiliares podremos quitar hasta un 67% de la puntuación.
Por fallos en las tareas auxiliares generales podremos quitar hasta un 33% de la puntuación.

</td></tr>
</table>

5. Calcula la altura de un árbol que proyecta una sombra de 12 metros en el momento en que otro árbol que mide 2,5 m proyecta una sombra de 4 metros. Dibuja una representación del problema. ***(2 puntos)***

Campo de problemas	7) Distancias inaccesibles
Técnicas	• Fórmula del teorema de Thales:  $\begin{cases} \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \\ \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \end{cases} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ • Triángulos en posición de Thales: • Definición de escala como: razón de semejanza entre la figura representada y la figura original. $E = \frac{Distancia\ en\ la\ representación}{Distancia\ en\ la\ realidad}$
Tecnologías	• Definición de semejanza. • Definición de razón de semejanza. • Teorema de Thales.
Tareas principales y auxiliares	Debido a que existen varias maneras de resolver este problema, pondremos todas las tareas principales y auxiliares de los diferentes caminos en el mismo bloque. No obstante, si procedimiento elegido por el alumno no abarca algunas de las tareas mencionadas, simplemente no se tendrán en cuenta. <u>Tareas principales</u>: • Reconocer que los triángulos que se proponen en el problema son semejantes. • Comprender el concepto de posición de Thales. • Utilizar un método idóneo para la resolución del problema. • Comprender el concepto de razón de semejanza • Conocer la fórmula de razón de semejanza entre dos figuras semejantes. • Entender el concepto de escala • Conocer las características que se tienen que cumplir para

	poder usar el Teorema de Thales. • Conocer la fórmula del Teorema de Thales. • Comprender para qué se usa el Teorema de Thales. Tareas auxiliares específicas: • Aplicar correctamente la fórmula del Teorema de Thales. • Aplicar correctamente la fórmula de la razón de semejanza. • Aplicar correctamente la fórmula del Teorema de Pitágoras. • Conocer las características que se tienen que cumplir para poder usar el Teorema de Pitágoras. Tareas auxiliares generales: • Operaciones aritméticas y algebraicas
Estándares de aprendizaje	**Est.MAAP.3.2.2**. Reconoce triángulos semejantes, y en situaciones de semejanza utiliza el teorema de Thales para el cálculo indirecto de longitudes. **Est.MA.1.2.1.** Analiza y comprende el enunciado de los problemas (datos, relaciones entre los datos, contexto del problema). **Est.MA.1.6.3.** Usa, elabora o construye modelos matemáticos sencillos que permitan la resolución de un problema o problemas dentro del campo de las matemáticas.
Posibles respuestas correctas	La respuesta correcta al problema es el siguiente  $\frac{4}{2,5} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{30}{4} = 7,5\,m$ Los alumnos pueden realizarlo de varias maneras: – Con ayuda del Teorema de Thales y el concepto de la posición de Tales. – Hallando la razón de semejanza de ambos árboles para finalmente calcular la altura del segundo. Para este caso, los alumnos deberían comprender que los triángulos que se forman con la altura de los árboles y la proyección de sus sombras son semejantes. En este caso, la razón de semejanza sería: $\frac{12}{4} = 3$. Por lo tanto, la altura de árbol grande será: $2,5 \cdot 3 = 7,5\,m$

	– Haciendo uso del Teorema de Pitágoras. Este procedimiento muy poco probable que los alumnos lo realicen. al mismo tiempo, es poco óptimo ya que se pierde más tiempo de lo normal y es más fácil que surjan errores de cálculos. En primer lugar, se hallaría la hipotenusa del triángulo rectángulo pequeño: $p^2 = 4^2 + 2{,}5^2 = 22{,}25 \quad \rightarrow p = \sqrt{22{,}25}$. Como la razón de semejanza entre ambos triángulos era 3, entonces la hipotenusa del triángulo rectángulo grande será: $3\sqrt{22{,}25}$. Después volvemos a aplicar el Teorema de Pitágoras pero esta vez al triangulo grande: $(3\sqrt{22{,}25})^2 = x^2 + 12^2 \quad \rightarrow \quad x = 7{,}5\ m$
Posibles errores	– Uso incorrecto del Teorema de Thales. En este caso, que lo generalicen y afirmen que: $$\frac{4}{2{,}5} = \frac{(12-4)}{x}$$ – Dibujar incorrectamente la representación del enunciado del problema y por tanto realizar erróneamente el problema. – No reconocer que los triángulos formados por los árboles y la proyección de sus sombras son triángulos semejantes (posición de Thales) y por tanto no realizar ninguno de los métodos vistos anteriormente. – Equivocarse en los cálculos, sobre todo si se toma el camino del Teorema de Pitágoras.
Criterios de Calificación	La pregunta valdrá 2 puntos. Daremos 0,5 puntos por realizar correctamente la representación del enunciado y 1,5 por la realización del resto del problema. • Por fallos en las tareas principales podremos quitar hasta un 100% de la puntuación. • Por fallos en las tareas auxiliares podremos quitar hasta un 67% de la puntuación. • Por fallos en las tareas auxiliares generales podremos quitar hasta un 33% de la puntuación. **Nota**: Se valorará muy positivamente que los alumnos justifiquen que los triángulos son semejantes ayudándose de "la posición de Thales" para justificarlo. Puesto que esto no se pide explícitamente en el problema, se premiará subiendo hasta un 10% de la puntuación.

H.2 Comunicación y gestión en clase de los resultados obtenidos en la prueba

Rochera, Colomina y Barberá (2001) analizan cuatro situaciones de evaluación en el área de Matemáticas que abarcan pruebas escritas junto con sus correspondientes actividades de explotación posterior para "optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de evaluación en Matemáticas" (p. 33). Nosotros nos guiaremos por la segunda situación expuesta en el artículo.

A mi parecer, es necesario proponer actividades y tareas de evaluación, la cuales en su conjunto podemos identificarlas como *situación de evaluación*, "que proporcionen a los alumnos participar de una manera más activa haciéndoles cada vez más responsables de su propio aprendizaje" (Rochera, Colomina y Barberá, 2001, p. 34). Por este motivo, la comunicación y gestión en clase de los resultados obtenidos en la prueba escrita se desarrollará de la siguiente:

- Primero, el docente propondrá *actividades preparatorias* previas a la prueba escrita. Dichas actividades se expondrán en el T.F.M.
- Posteriormente, el alumnado realizará la prueba escrita propuesta en el apartado anterior. Dicha prueba se desarrollará al final del tema y durará 50 minutos, es decir, la sesión de clase entera.
- Después, el profesor realizará, fuera del aula, una *actividad de corrección* de dicha prueba escrita.
- Por último, se realizará una *actividad de comunicación* (10 minutos) y una *actividad de aprovechamiento* (40 minutos) que se efectuarán en la misma sesión de clase.

En la *actividad de corrección*, el profesor corregirá la prueba escrita aplicando los criterios cuantitativos que considere oportunos. Es importante mencionar que estos criterios, aunque se encuentren escritos en la propia prueba escrita, se comentarán rápidamente al inicio de la misma.

En la *actividad de comunicación*, el profesor repartirá la prueba corregida a cada alumno, para que estos puedan revisarla. Luego, en la *actividad de aprovechamiento*, el profesor explicará y comentará en la pizarra tanto la resolución de los diferentes problemas propuestos en la prueba como de las principales respuestas y errores cometidos por los alumnos.

A lo largo de este proceso, los estudiantes seguirán las explicación, preguntando en algunos momentos sobre el contenido de los problemas. Evidentemente, el profesor responderá a todas estas cuestiones. En consecuencia, probablemente algunos alumnos reclamarán una revisión de su nota. En estos casos, el profesor les atenderá individualmente y decidirá si se deben modificar dichas calificaciones.

El foco de la actividad son los problemas que conforman la prueba escrita. El cierre de la *situación de evaluación* se efectuará cuando el profesor conteste al último estudiante.

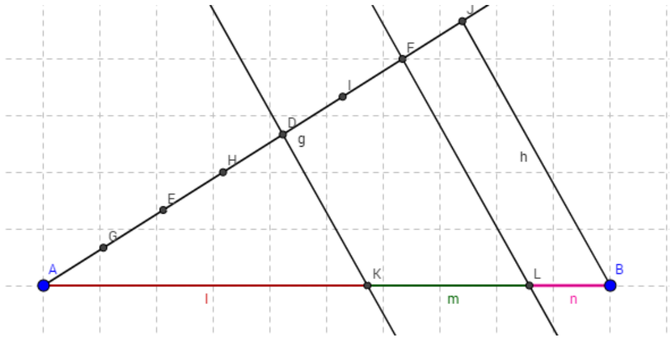
En conclusión, según Rochera, Colomina y Barberá (2001):

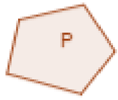
> el desarrollo de actividades posteriores a la realización de la prueba escrita constituye una de las posibles vías para mejorar pedagógicamente el uso de la evaluación pasando de una perspectiva puntual, cuantitativa y estática a otra más amplia, dinámica y cualitativa sobre las prácticas de evaluación, dirigida a regular y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. (p. 43)

H.3 Tarea a entregar: GeoGebra.

1. Divide un segmento de 10 centímetros en tres partes. La primera parte tiene que ser el doble que la segunda, y la segunda el doble de la tercera. ***(5 puntos)***

Campo de problemas	5) División de segmentos
Técnica	• División de un segmento en partes proporcionales: – Trazamos un segmento AB. – Trazamos una semirrecta de origen A y que forme con el segmento AB un ángulo menor de 90º. – Sobre esta semirrecta dibujamos los segmentos proporcionales consecutivos que queremos obtener del segmento AB. – Unimos el extremos final del último segmento con el punto B, y trazamos paralelas a esta recta por los extremos de los otros segmentos que hemos marcado en la semirrecta.
Tecnologías	• Teorema de Thales • Visualización de los propios segmentos proporcionales junto a su medición.
Tareas principales y auxiliares	Tareas principales: • Usar el método idóneo para la división de segmentos Tareas auxiliares específicas: • Manejar adecuadamente GeoGebra (saber representar segmentos, semirrectas, paralelas, etc.)
Estándares de aprendizaje	**Est.MAAP.3.2.1.** Divide un segmento en partes proporcionales a otros dados. Establece relaciones de proporcionalidad entre los elementos homólogos de dos polígonos semejantes. **Est.MA.1.11.3.** Diseña representaciones gráficas para explicar el proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.
Posibles respuestas correctas	Usando la técnica de división de un segmentos en partes proporcionales acaben dibujando la siguiente representación:

	 Usando la técnica de división de un segmento en partes iguales. No obstante, tendrán que saber que necesitan en la semirrecta 7 segmentos iguales para posteriormente representar que la primera parte del segmento original tiene que ser el doble de la segunda, y la segunda el doble de la tercera.
Posibles errores	– No saber cuál es el procedimiento para dividir un segmento en partes proporcionales e intentar hacerlo directamente con la regla. – Utilizar el procedimiento de división de un segmento en partes iguales pero finalmente dividir dicho segmento en partes iguales sin tener en cuenta la última condición del enunciado. – No saber manejar correctamente GeoGebra.
Criterios de Calificación	La pregunta valdrá 5 puntos. • Conseguirán un 20% si dibujan correctamente el segmento de 10 cm y otro segmento AX que forme menos de 90º con respecto al primero. • Conseguirán un 40% si dividen correctamente el segmento AX en 7 partes iguales • Conseguirán un 10% si escogen correctamente la medida de cada segmento sobre el segmento AX, es decir, el primero tiene que medir el doble que el segundo, y el segundo el doble que el tercero. • Conseguirán un 50% si directamente dividen el segmento AX en las partes proporcionales correspondientes. • Conseguirán un 15% si unen correctamente los extremos del último segmento representado en el segmento AX con el extremo del segmento original AB, es decir, con el punto B. • Conseguirán un 15% si dibujan correctamente las paralelas.

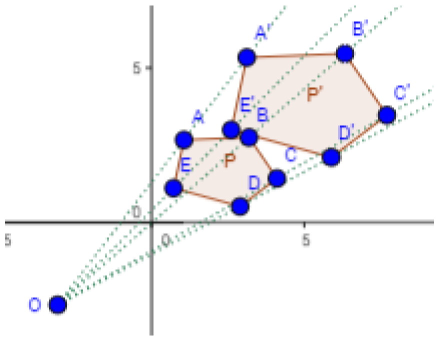
<table>
<tr><td colspan="2">2. Construye mediante el método de construcción de polígonos semejantes por homotecia, un polígono semejante al siguiente, con razón de semejanza$k = \frac{3}{2}$.

</td></tr>
<tr><td>Campo de problemas</td><td>6) Construcción de polígonos semejantes</td></tr>
<tr><td>Técnica</td><td>• Construir de un polígono semejante por homotecia.</td></tr>
<tr><td>Tecnologías</td><td>• Definición de polígonos semejantes
• Definición de semejanza
• Definición de homotecia
• Posición de Thales
• Visualización de polígonos semejantes</td></tr>
<tr><td>Tareas principales y auxiliares</td><td><u>Tareas principales</u>:
• Utilizar el método idóneo
• Identificar un punto, por ejemplo O, como centro de la homotecia.
• Según la razón de semejanza, multiplicar el segmento de la unión del punto O con cada vértice del polígono de manera que: que $OA' = k \cdot OA, OB' = k \cdot OB$, $OC' = k \cdot OC$, $OD' = k \cdot OD$ y $OE' = k \cdot OE$

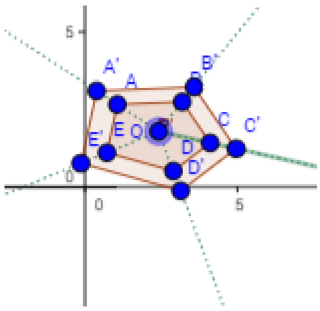
<u>Tareas auxiliares específicas</u>:
• Unir el punto O con los vértices del polígono original.
• Unir los vértices del polígono construido teniendo en cuenta que el lado AB tiene que ser paralelo con el lado A'B', el lado BC con el B'C, y así sucesivamente.

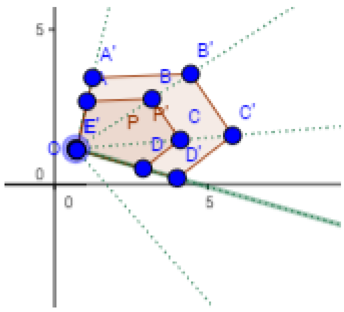
<u>Tareas auxiliares generales</u>:
• Usar correctamente la regla, es decir, líneas rectas.</td></tr>
<tr><td>Estándares de aprendizaje</td><td>Est.MAAC.3.4.2. Genera creaciones propias mediante la composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario.

Est.MA.1.11.3. Diseña representaciones gráficas para explicar el</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>proceso seguido en la solución de problemas, mediante la utilización de medios tecnológicos.</td></tr>
<tr><td>Posibles respuestas correctas</td><td>Únicamente hemos enseñando en el aula un método de construcción de polígonos semejantes. Puesto que pedimos explícitamente que lo utilicen, no hay más posibles maneras de que lo puedan realizar. No obstante, las diferentes respuestas de los alumnos residirán en el punto que hayan escogido como centro de homotecia O.

<u>Si O es un punto exterior al polígono:</u>


<u>Si O es un punto interior al polígono:</u>


<u>Si O es uno de los vértices del polígono:</u>

</td></tr>
</table>

Posibles errores	• No emplear correctamente la homotecia. • Equivocarse con la razón de semejanza dada (*k=3/2*). • El polígono construido no sea semejante al original. • No utilizar el método de construcción de polígonos semejantes por homotecia e intentar dibujar una réplica a "mano alzada" en GeoGebra.
Criterios de Calificación	La pregunta valdrá 5 puntos. • Conseguirán un 25% de la puntuación representan el centro de la homotecia y unen dicho punto con los vértices del polígono original. • Conseguirán un 50% si calculan correctamente la razón de semejanza multiplicando de esta manera los segmentos para conseguir el primer vértice del nuevo polígono. • Conseguirán un 15% si manifiestan los otros cuatro vértices, ya sea por medio de segmentos paralelos o realizando las mismas cuentas que para conseguir el primer vértice. • Conseguirán un 10% si unen todos los vértices del nuevo polígono semejante. **Nota**: se quitará el 100% de la puntuación si no ha realizado el método de construcción por homotecia demandado.

I. Bibliografía

Álvarez, F., Garrido, L. M. y Ruiz, A. (1997). *Fractal Matemáticas 2º Secundaria.* Barcelona: Vicens Vives.

Beatriz (2015). *Demostración Tales*. Consultado el 10 de junio de 2017 en: https://www.geogebra.org/m/dJAmszjQ

Bernardis, S. y Moriena, S. (2013). Thales dynamic in the spiral of the curriculum. *Épsilon*, vol. 30(1), nº 83, pp. 67-84.

Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Universidad.

Byrne, O. (1847). The first six books of the elements of Euclid. Consultado el 10 de abril de 2017 en: https://www.math.ubc.ca/~cass/euclid/byrne.html

Cardenas, D. P. (2013). *Las relaciones de semejanza y congruencia en geometría plana, una propuesta didáctica para la educación básica*. (Trabajo Final de Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2006). *Matemáticas 2º Secundaria. Serie En tus manos.* Madrid: Anaya.

Comino, A. (2016). Medición de alturas con espejos. Consultado el 30 de mayo de 2017 en: https://www.geogebra.org/m/EBmggRRr

Enciclopedia Libre Universal en Español. (2002). *Semejanza (matemáticas)*. Consultado el 10 de marzo de 2017 en: http://enciclopedia.us.es/index.php/Semejanza_(matem%C3%A1ticas)

Escudero, I. (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, *23 (3)*, pp. 379-392.

Ferrer, M., Fortuny, J. M. y Morera, L. (2014). Efectos de la actuación docente en la generación de oportunidades de aprendizaje matemático. *Enseñanza de las Ciencias, 32 (3)*, pp. 385-405.

González, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 45, pp. 17-28.

Grupo Beta, (1990). *Proporcionalidad geométrica y semejanza.* Madrid: Síntesis.

Gualdrón, E. y Gutiérrez, A. (2006). *Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza*. SEIEM. Consultado el 13 de marzo de 2017 en: http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/GualdronGut06.pdf

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *Boletín Oficial del Estado,* 4 de mayo de 2006, núm. 106, pp. 17158-17207.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. *Boletín Oficial del Estado, 10* de diciembre de 2013, núm. 295, pp. 97858-97921.

Matemáticas 2º ESO. Serie Resuelve. Proyecto Saber Hacer. (2016). Madrid: Santillana.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología.* Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, España.

NCTM (2014). *Isometric Drawing Tool*. Consultado el 15 de junio de 2017 en: http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=4182

NCTM (2015). *Investigating Geometry Concepts on GeoBoards*. Consultado el 15 de junio de 2017 en: https://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=6385

Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial del Aragón, 1 de junio de 2007*, núm. 65, pp. 8871-9024.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial del Aragón, 2 de junio de 2016*, núm. 105, pp. 12640-13458.

Pueyo, M. A. (1989). Teorema de Thales. Aplicaciones. *Suma, 4*, pp. 27-37.

Real Decreto 1345/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado, 13 de septiembre de 1991*, núm. 220, pp. 39-94.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado, 3 de enero de 2015*, núm. 3, pp. 169-546.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado, 1 de marzo de 2014*, núm. 52, pp. 19349-19420.

Rochera, M.J. , Colomina, R. y Barberá, E. (2001). Optimizar los aprendizajes de los alumnos a partir de los resultados de la evaluación en Matemáticas. Investigación en la Escuela, 45, pp. 33-44.

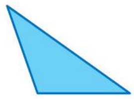
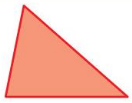
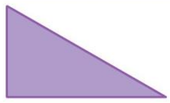
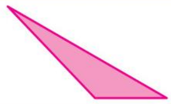
Ruiz, J. (2015). Teorema de Tales. Consultado 20 de mayo de 2017 en: https://www.geogebra.org/m/s4WWyWng

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variable influencing the problems difficulty level and one's use of problem solving strategies. En Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N. (eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 169-176. Prague: PME.

J. Anexos

- **Anexo I: Soluciones de la prueba inicial diagnóstica**

Problema 1

		SEGÚN SUS ÁNGULOS		
		ACUTÁNGULOS Tres ángulos agudos.	**RECTÁNGULOS** Un ángulo recto.	**OBTUSÁNGULOS** Un ángulo obtuso.
SEGÚN SUS LADOS	**EQUILÁTEROS** Tres lados iguales.		No existe.	No existe.
	ISÓSCELES Dos lados iguales.			
	ESCALENOS Tres lados desiguales.			

Problema 2

El ángulo que se forma al unir los tres vértices de cualquier triángulo siempre es 180º.

Problema 3

a) Secantes b) Secantes c) Paralelas d) Perpendiculares e) Paralelas

- Dos rectas son secantes cuando se cortan en un punto.
- Dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman cuatro ángulos iguales de 90º.

Problema 4

a) A= b·h= (0,7m)(0,4m)= 0,28 m^2	b) A= L^2= (0,15 $m)^2$ = 0,0225 m^2
c) A= $\frac{b \cdot h}{2}$= $\frac{(350m)(250m)}{2}$= 43750 m^2	d) A= $\frac{(B+b)\cdot h}{2}$= $\frac{(16m+8m)(10m)}{2}$= 120 m^2

Problema 5

i. x= 20	**ii.** x= 26
iii. x= -9	**iv.** x=25

$\boxed{\frac{3}{5}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{6}{10}$	$\boxed{\frac{5}{8}}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{21}{12}$	$\frac{7}{4}$	$\boxed{\frac{3}{10}}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\boxed{\frac{8}{4}}$

Problema 6

a) 8272 € **b)** 128,57 litros

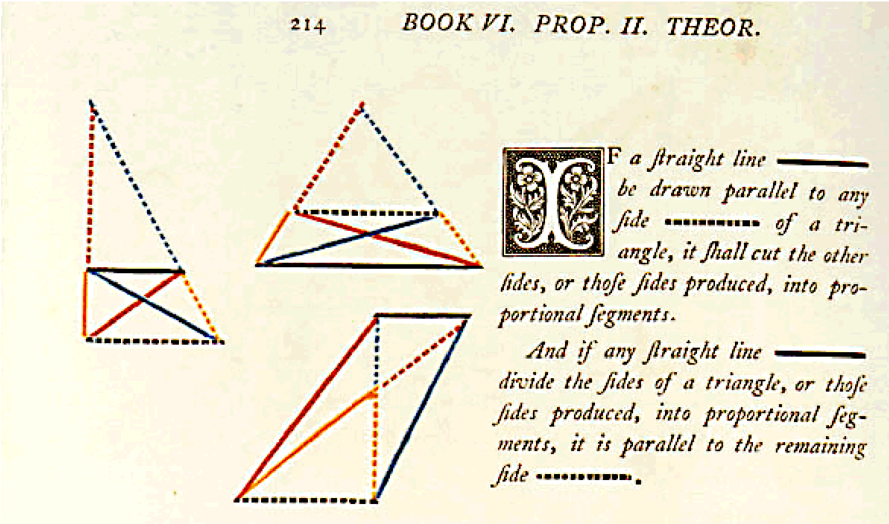
▪ Anexo II: Elementos de Euclides, Libro VI

En el libro VI de *Los Elementos,* se establecen:

1. Los teoremas fundamentales de los triángulos semejantes
2. Los teoremas fundamentales de las construcciones de la tercera, la cuarta y la media proporcional
3. Una solución geométrica a las ecuaciones cuadráticas
4. La proposición concerniente a que la bisectriz interna del ángulo de un triángulo divide el lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los otros dos lados

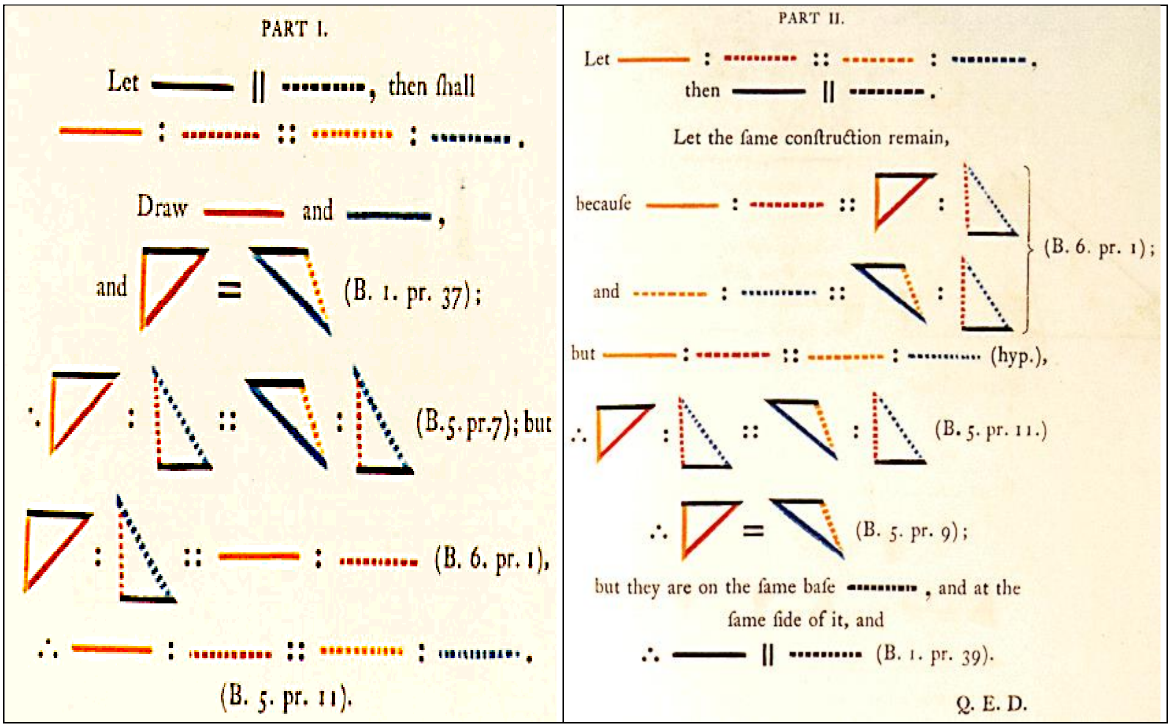
Nosotros nos centraremos en las proposiciones relacionadas con el teorema de Thales y los criterios de semejanza de triángulos. Para ello, haremos uso de la edición de 1847, realizada por el matemático Oliver Byrne, del tratado matemático y geométrico de Euclides, Elementos. Este libro, llamado "Los primeros seis libros de los Elementos de Euclides", lo caracterizan por ser una obra del arte y de la ciencia a causa su belleza tanto en la audacia de sus figuras y diagramas rojos, amarillos y azules como a la precisión matemática de sus teorías. Efectivamente, el autor no se contenta con confiar sólo en la estructura "lógica" supuestamente intuitiva de los axiomas y teoremas, sino que los traduce a diagramas y símbolos coloridos.

Proposición 2. Si se dibuja una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado que queda del triángulo.



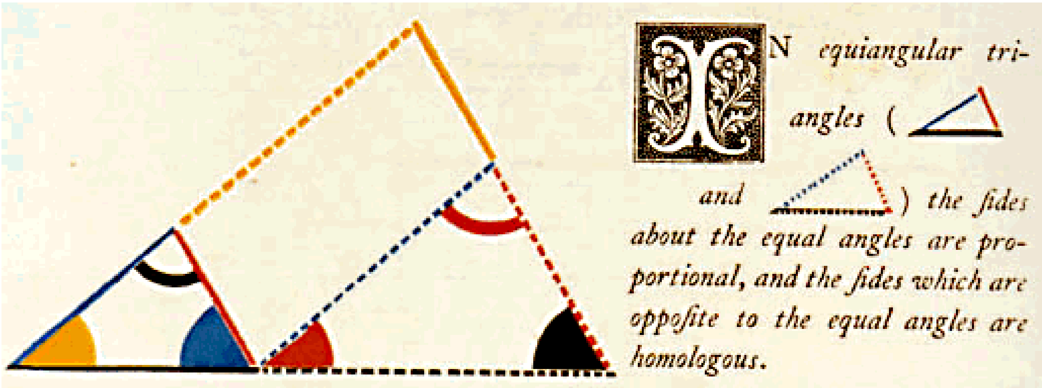
(Byrne, 1847, p. 214)

Demostración.



(Byrne, 1847, pp. 124-125)

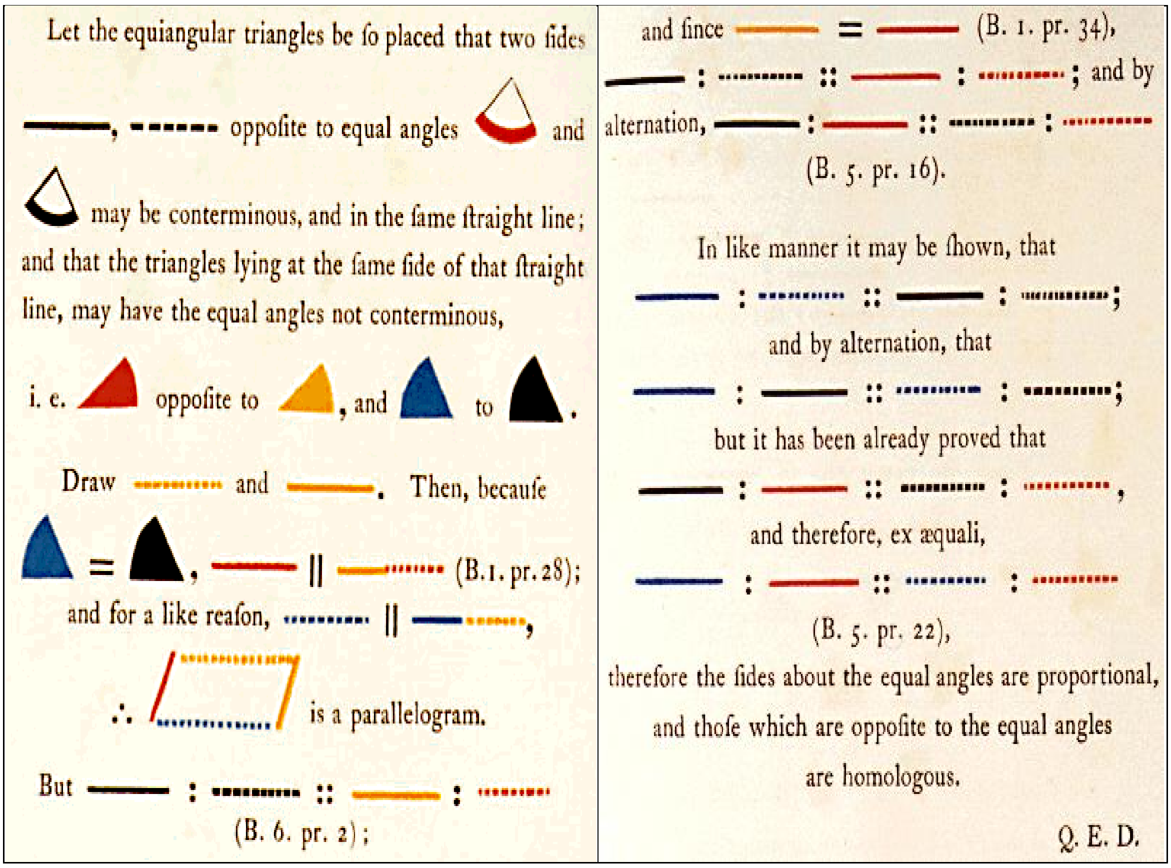
Proposición 4. En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden a los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden a los ángulos iguales son correspondientes.



IN equiangular triangles (and) the ſides about the equal angles are proportional, and the ſides which are oppoſite to the equal angles are homologous.

(Byrne, 1847, p. 218)

Demostración.



Let the equiangular triangles be ſo placed that two ſides , oppoſite to equal angles and may be conterminous, and in the ſame ſtraight line; and that the triangles lying at the ſame ſide of that ſtraight line, may have the equal angles not conterminous,

i. e. oppoſite to , and to .

Draw and . Then, becauſe = , || (B.1. pr.28); and for a like reaſon, || ,

∴ is a parallelogram.

But : :: : (B. 6. pr. 2);

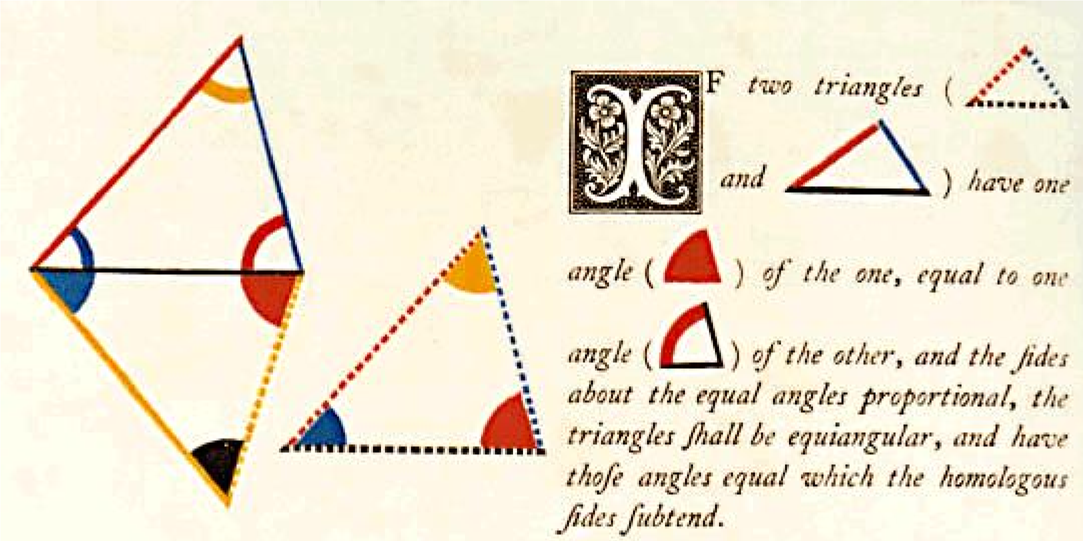
and ſince = (B. 1. pr. 34), : :: : ; and by alternation, : :: : (B. 5. pr. 16).

In like manner it may be ſhown, that : :: : ; and by alternation, that : :: : ; but it has been already proved that : :: : , and therefore, ex æquali, : :: : (B. 5. pr. 22), therefore the ſides about the equal angles are proportional, and thoſe which are oppoſite to the equal angles are homologous.

Q. E. D.

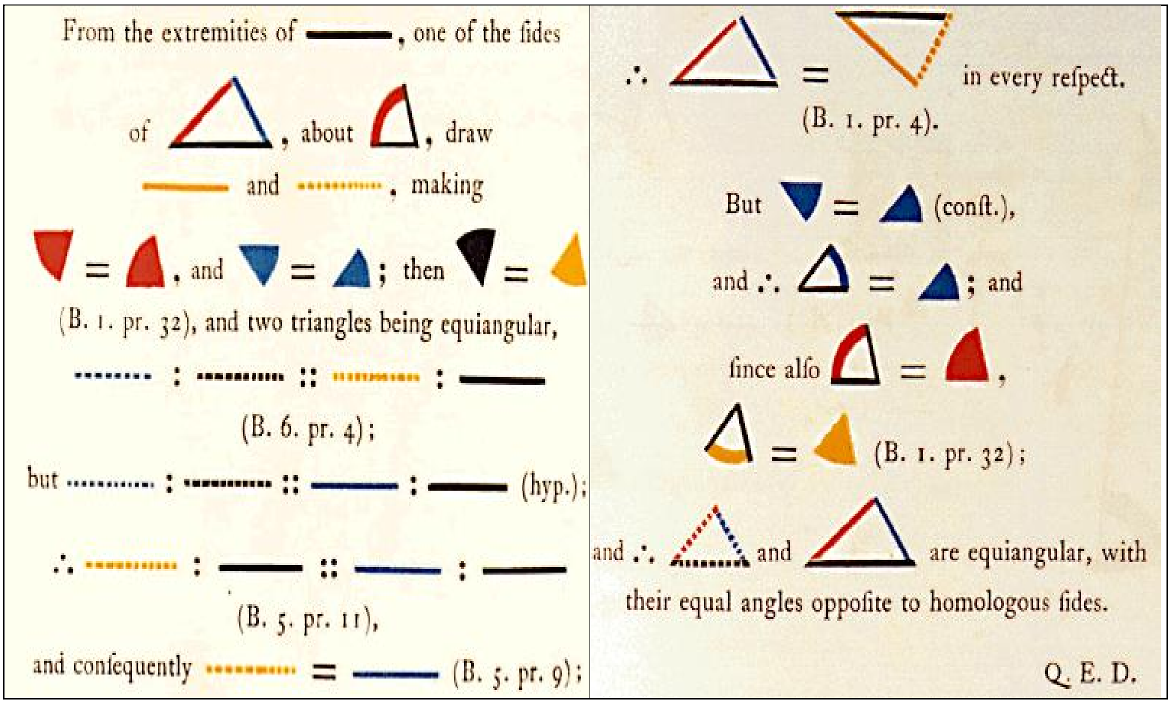
(Byrne, 1847, pp. 128-129)

Proposición 6. Si dos triángulos tienen un ángulo igual el uno del otro, y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.



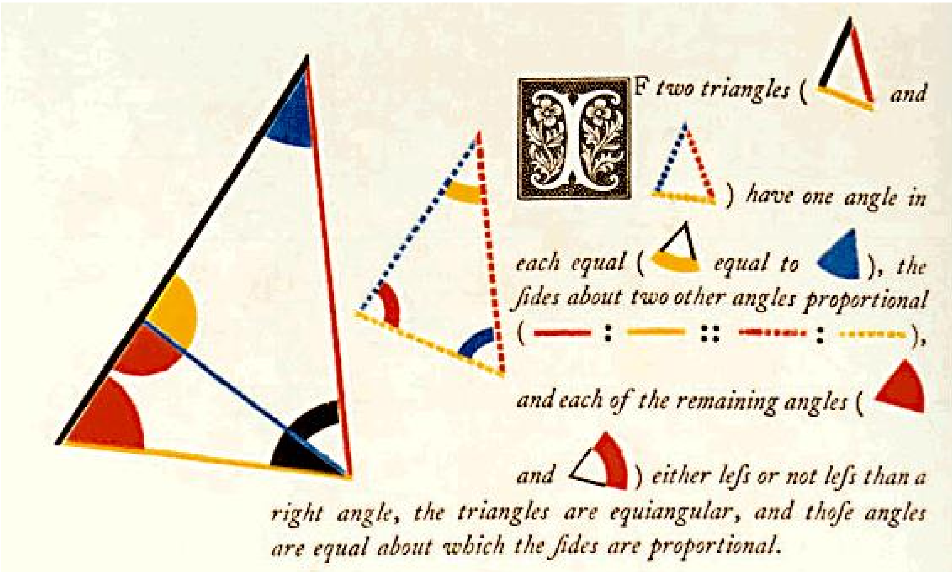
(Byrne, 1847, p. 222)

Demostración.



(Byrne, 1847, pp. 222-223)

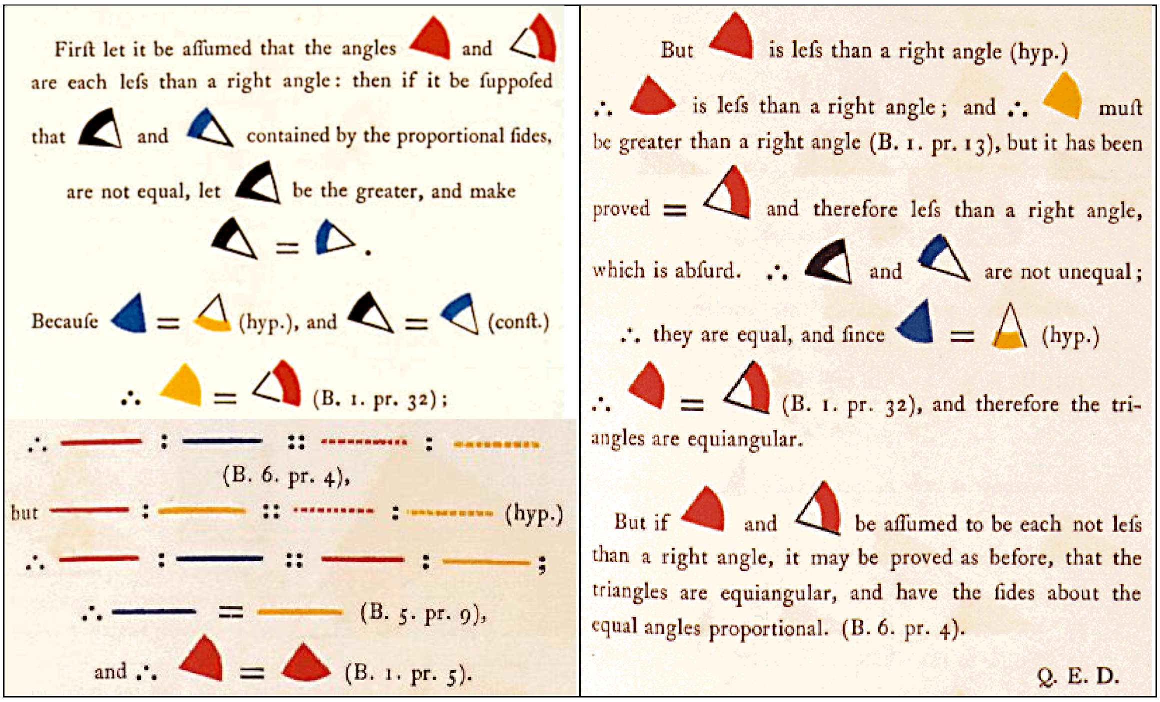
Proposición 7. Si dos triángulos tienen un ángulo igual el uno del otro y tienen proporcionales los lados que comprenden a los otros ángulos, y tienen los ángulos que quedan de manera aparejada menores o no menores a un ángulo recto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales.



IF *two triangles* (*and*) *have one angle in each equal* (*equal to*), *the ſides about two other angles proportional* (: :: :), *and each of the remaining angles* (*and*) *either leſs or not leſs than a right angle, the triangles are equiangular, and thoſe angles are equal about which the ſides are proportional.*

(Byrne, 1847, p. 224)

Demostración.



Firſt let it be aſſumed that the angles and are each leſs than a right angle: then if it be ſuppoſed that and contained by the proportional ſides, are not equal, let be the greater, and make = .

Becauſe = (hyp.), and = (conſt.)

∴ = (B. 1. pr. 32);

∴ : :: : (B. 6. pr. 4),

but : :: : (hyp.)

∴ : :: : ;

∴ = (B. 5. pr. 9),

and ∴ = (B. 1. pr. 5).

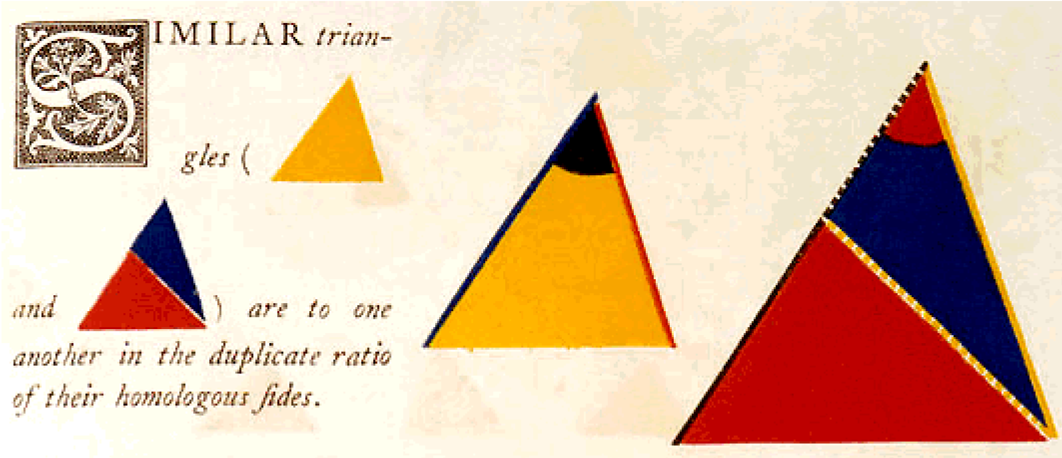
But is leſs than a right angle (hyp.) ∴ is leſs than a right angle; and ∴ muſt be greater than a right angle (B. 1. pr. 13), but it has been proved = and therefore leſs than a right angle, which is abſurd. ∴ and are not unequal; ∴ they are equal, and ſince = (hyp.) ∴ = (B. 1. pr. 32), and therefore the triangles are equiangular.

But if and be aſſumed to be each not leſs than a right angle, it may be proved as before, that the triangles are equiangular, and have the ſides about the equal angles proportional. (B. 6. pr. 4).

Q. E. D.

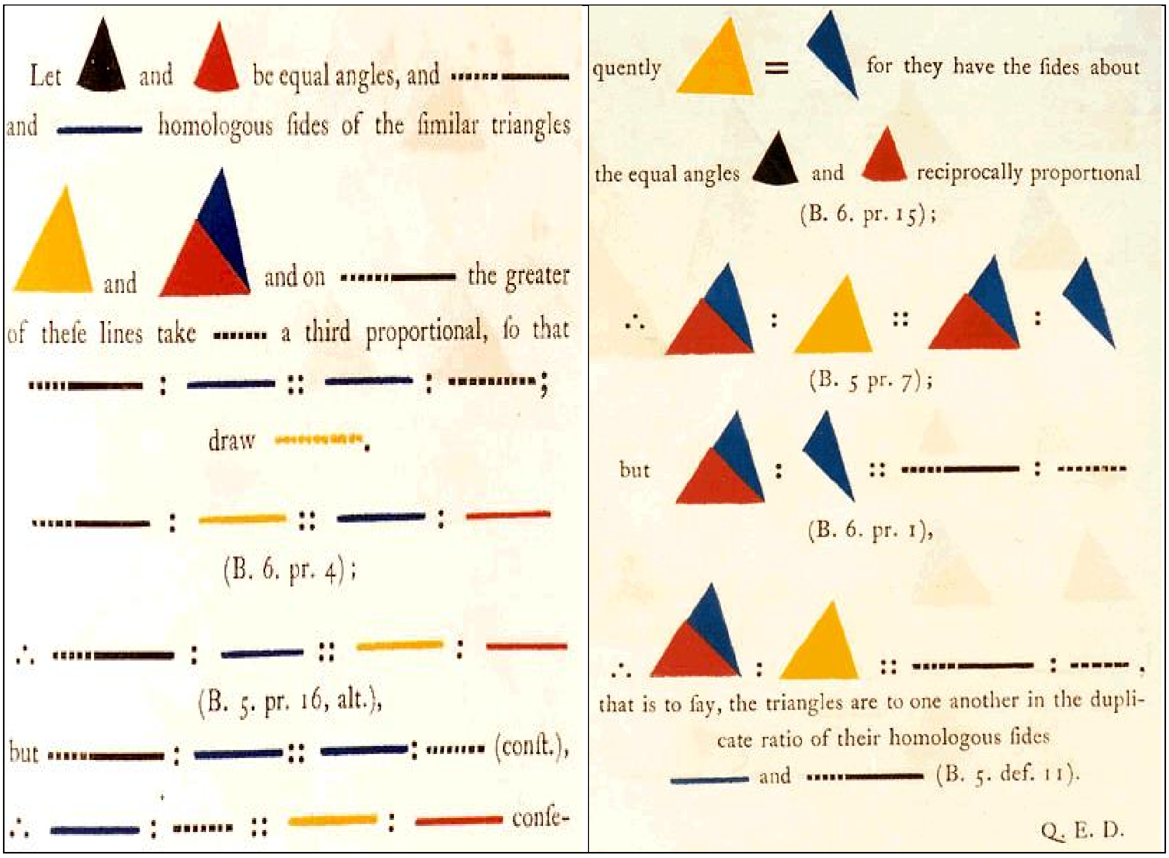
(Byrne, 1847, pp. 224-225)

Proposición 19. Los triángulos semejantes guardan entre sí la razón duplicada de sus lados correspondientes.


SIMILAR trian-gles (and) are to one another in the duplicate ratio of their homologous ſides.

(Byrne, 1847, p. 241)

Demostración.


Let and be equal angles, and and homologous ſides of the ſimilar triangles and and on the greater of theſe lines take a third proportional, ſo that

: :: : ;

draw ,

: :: : (B. 6. pr. 4);

∴ : :: : (B. 5. pr. 16, alt.),

but : :: : (conſt.),

∴ : :: : conſe-

quently = for they have the ſides about the equal angles and reciprocally proportional (B. 6. pr. 15);

∴ : :: : (B. 5 pr. 7);

but : :: : (B. 6. pr. 1),

∴ : :: : ,

that is to ſay, the triangles are to one another in the duplicate ratio of their homologous ſides and (B. 5. def. 11).

Q. E. D.

(Byrne, 1847, pp. 241-242)