



**Universidad**  
Zaragoza

## Trabajo Fin de Grado

Un modelo teórico para el estudio dinámico del  
duopolio

A theoretical model for the dynamic study of  
duopoly

Autor:

Jorge Casinos Buj

Directores:

Joaquín Andaluz Funcia & Gloria Jarne Jarne

Facultad de Economía y Empresa  
2017



---

# Un modelo teórico para el estudio dinámico del duopolio

---

Autor: Jorge Casinos Buj

Directores: Joaquín Andaluz Funcia y Gloria Jarne Jarne

Grado en Economía

## Resumen

Tradicionalmente el estudio del oligopolio se ha abordado desde una perspectiva estática, pero en los últimos años ha surgido un interés creciente acerca de las dinámicas que pueden aparecer en este tipo de mercados. Se considera que la dinámica está justificada debido a la racionalidad limitada de los agentes. Los trabajos que han seguido este enfoque han tendido a plantear unas especificaciones de costes y demandas concretas y analizar las dinámicas particulares del modelo. Sin embargo, este trabajo será de naturaleza teórica y planteará un modelo que sirva de marco general para algunos de los modelos concretos que han surgido en el estudio del duopolio dinámico.

## Abstract

Generally, oligopolies have been studied from a static perspective. However, in recent years there has been among the academia a thriving interest in oligopoly dynamics. In this thesis, I consider that dynamics are justified due to the existence of bounded rationality of the firms. Generally, the research carried out following this approach has set out specific demand and cost functions so as to analyze the concrete dynamics of the model. Nevertheless, this work is a theoretical one which will develop a model that could be used as a general framework for some of the specific models of duopoly that have been studied in the literature.



# Índice

<b>1. Presentación</b>	<b>3</b>
<b>2. Punto de partida</b>	<b>4</b>
2.1. Los pilares de la teoría oligopolista . . . . .	4
2.2. Perspectiva dinámica del oligopolio . . . . .	9
<b>3. Introducción de las expectativas</b>	<b>12</b>
3.1. El modelo estático básico . . . . .	12
3.2. Los esquemas de formulación de expectativas . . . . .	14
<b>4. Estudio de la estabilidad en duopolios</b>	<b>17</b>
4.1. Condiciones de estabilidad en un duopolio de Cournot estático . . . . .	18
4.2. Condiciones de estabilidad en duopolios dinámicos . . . . .	20
4.2.1. Modelo dinámico con expectativas ingenuas . . . . .	21
4.2.2. Modelo dinámico con expectativas adaptativas . . . . .	23
4.2.3. Modelo dinámico con regla del gradiente . . . . .	24
<b>5. Ejemplos de duopolios dinámicos</b>	<b>30</b>
5.1. Demanda lineal y costes marginales constantes . . . . .	30
5.2. Demanda isoelástica y costes marginales constantes . . . . .	34
<b>6. Conclusiones</b>	<b>37</b>
<b>Anexos</b>	<b>40</b>
<b>A. Simulación demanda lineal y costes marginales constante</b>	<b>40</b>

B. Simulación demanda isoelastica y costes marginales constantes	43
Referencias	45

# 1. Presentación

Tradicionalmente la teoría microeconómica se ha centrado en los modelos de carácter estático ya que se consideraba que eran una aproximación suficientemente buena para comprender el comportamiento de los agentes económicos. La economía industrial no ha sido una excepción, no obstante recientemente ha surgido en la disciplina un gran interés acerca de los modelos dinámicos de oligopolio, o bien porque se estudian casos en los que las industrias no son estacionarias o desde un punto de vista más "heterodoxo" porque se considera que la información en estos mercados es incompleta o los agentes presentan racionalidad limitada.

La racionalidad limitada es un supuesto que en muchos casos no resulta descabellado y que desde áreas como la economía del comportamiento y la economía experimental parece tener su fundamento. Este trabajo va a seguir dicho enfoque. La mayoría de los trabajos académicos que plantean modelos dinámicos de racionalidad limitada proponen especificaciones concretas de las funciones de demanda y costes para analizar la dinámica particular que seguiría el modelo. Sin embargo, aquí se va a presentar un trabajo de naturaleza puramente teórica cuyo objetivo será construir un modelo que sirva de marco general para algunos de los modelos concretos que han surgido en el estudio del oligopolio dinámico.

Por lo tanto en este trabajo se pretende contribuir a la literatura de los oligopolios dinámicos avanzando en una dirección apenas explorada: el establecimiento de un marco formal general. Algo que resulta fundamental para ser capaces de introducir este tipo de competencia en modelos dinámicos más amplios.

Para ello se aplicarán los conocimientos obtenidos en diversas asignaturas del grado como puedan ser Matemáticas I y II, Decisión y Juegos o Microeconomía II y IV. Así mismo de cara a realizar simulaciones de los modelos se han elaborado algoritmos en el lenguaje de programación *Python*.

La estructura del TFG será la siguiente ; primero y a modo de introducción se hará una breve repaso de la evolución de la teoría oligopolista para después justificar la introducción de la dinámica en este tipo de competencia. Seguidamente se plantearán

distintos esquemas de formulación de expectativas que juegan un papel fundamental cuando los agentes son racionalmente limitados. A continuación se estudiará la estabilidad local del equilibrio de Nash en un duopolio de Cournot estático y en un duopolio dinámico con diferentes esquemas de expectativas. Después se aplicarán las condiciones formales de estabilidad obtenidas a modelos concretos. Y por último se presentará la interpretación económica de los resultados y las conclusiones.

## **2. Punto de partida**

### **2.1. Los pilares de la teoría oligopolista**

El estudio del funcionamiento de los mercados es un concepto central en la microeconomía. Tradicionalmente se ha prestado mucha atención a las situaciones de competencia perfecta en las cuales las distintas empresas no poseen poder de mercado, lo que ha dado lugar a modelos tan extensamente desarrollados como el paradigma competitivo de Arrow y Debreu. Sin embargo, la competencia en mercados oligopolistas también ha sido un tema recurrente en la teoría económica. La búsqueda de una explicación acerca de cómo se forman los precios en un mercado de este tipo ha atravesado distintas fases pero nunca ha abandonado la escena académica, tal y como muestra la evolución de la teoría de la organización industrial desde las posiciones eclécticas del paradigma estructura, conducta y resultados y la escuela de Chicago hasta los modelos actuales de la nueva organización industrial.

Cournot, Bertrand y Edgeworth establecieron las bases de la actual teoría del oligopolio. De hecho con su estudio sobre la formación de los precios en un mercado en el que hay pocos competidores, fueron los predecesores del paradigma estructura, conducta y resultados. Estos autores ya plantearon algunas de las preguntas que siguen siendo centrales en este campo de estudio tales como: el concepto apropiado de solución, las propiedades del equilibrio (existencia, unicidad y estabilidad) así como sus propiedades dinámicas. Más adelante autores como Chamberlin, Hotelling y Robinson enfatizaron la importancia de la diferenciación de los productos.



Cournot realizó su gran contribución a la teoría económica en su obra *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838) en la cual fue un pionero en introducir las técnicas matemáticas al análisis económico y formalizó conceptos como la función de demanda o la competencia bajo distintas estructuras de mercado. Sin embargo, es recordado principalmente por su célebre modelo de competencia oligopolista.

Imaginó a las empresas compitiendo en cantidades y llevando al mercado su producción lo que daría lugar a un precio como resultado de la interacción entre la oferta y la demanda. Por lo tanto, consideraba que los precios podían ser determinados bajo este tipo de competencia. El equilibrio tenía lugar cuando la producción de cada firma era su mejor respuesta a la de los demás. Esto ocurría cuando cada empresa maximizaba sus beneficios dada la producción de sus competidores. Más adelante esto sería conocido como un equilibrio de Nash cuando la variable estratégica es la cantidad producida. Este equilibrio como es bien conocido supone un precio por encima del coste marginal lo que lleva a una pérdida de bienestar en términos de eficiencia para el conjunto de la sociedad.

Cournot consideraba que su equilibrio era estable ya que una desviación del mismo sería corregida por una reacción en cadena de las distintas empresas. Las dinámicas de desequilibrio estarían guiadas por las funciones de mejor respuesta de las empresas, es decir aquellas que indican el nivel de producción óptimo dada la producción de los demás. Esto es lo que se ha conocido como el *Tatônnement de Cournot*, que consiste en una serie de reacciones “miópicas” ya que las empresas no tienen en cuenta el efecto que sus acciones tendrán sobre el comportamiento de sus rivales, lo que conduce a que las expectativas de los agentes diverjan sistemáticamente de los resultados reales. Este argumento de Cournot ha sido extensamente criticado ya que las empresas consideran que sus rivales mantendrán el nivel de output constante cuando de hecho están cambiando continuamente. Sin embargo, este proceso ha sido estudiado en profundidad y es en la actualidad visto, desde una perspectiva evolutiva, como una forma rudimentaria de modelizar el comportamiento de agentes cuya racionalidad es limitada. Más adelante abordaremos este tipo de procesos. A pesar de todo, ciento setenta y nueve años

después el modelo de Cournot sigue siendo el punto de referencia para el estudio de mercados oligopolistas.

Las contribuciones de Cournot pasaron desapercibidas hasta la revisión de su libro por Bertrand en 1883. Bertrand que en un principio consideró que la opción obvia para los oligopolistas era coludir, acusó a Cournot de estar equivocado ya que pensaba que en un mercado de productos homogéneos la variable relevante para fijar las estrategias de las empresas era el precio y no la cantidad. Esta hipótesis bajo coste marginales constantes e iguales para todas las firmas daba lugar a una competencia ruinosa que llevaba a que el precio fuese igual al coste marginal, es decir, la solución competitiva. Este hecho es conocido popularmente como la *Paradoja de Bertrand*.

Edgeworth desafió con insistencia las ideas de Cournot y su principal conjetura era que en un mercado en el que el número de empresas era escaso, el equilibrio era indeterminado, a diferencia de los casos de competencia perfecta y monopolio. Consideraba que en el caso de bienes sustitutivos los precios oscilarían de manera continua y que la indeterminación se iría reduciendo conforme la diferenciación de los productos se incrementase. Un punto interesante del análisis de Edgeworth es que consideró la posibilidad de que las empresas se impusiesen “voluntariamente” restricciones a la producción que en la práctica se plasman en límites de capacidad. En consecuencia el equilibrio competitivo al que se llega con la competencia en precios podría ser desestabilizado y sería posible establecer un precio por encima del coste marginal. La explicación es que una de las empresas podría aumentar su beneficio subiendo el precio mientras que su rival no podría o querría satisfacer toda la demanda. Hoy en día este planteamiento se conoce como la competencia en precios Bertrand-Edgeworth en la cual se compite en precios pero ninguna de las empresas está obligada a satisfacer toda la demanda al precio dado. En el caso de bienes complementarios Edgeworth también consideró como muy probable que el equilibrio no existiese.

Las condiciones estructurales del mercado determinan la variable estratégica relevante para las empresas. Por ejemplo si imaginamos un mercado como la minería es lógico pensar que las empresas primero toman la decisión del nivel de producción deseado y el precio se formará a partir de la interacción con la demanda en el

mercado. Sin embargo mercados que funcionan por encargo, que es el caso de muchos servicios, se ajustarán mejor al modelo de Bertrand. En la realidad las empresas necesitan tomar decisiones sobre los dos tipos de variables por lo que los modelos de Cournot y Bertrand podrían ser vistos como formas reducidas de un proceso dinámico en el cual se deben decidir las estrategias para precios y cantidades. Generalmente se ha considerado que la variable estratégica dominante es aquella que resulta más difícil de ajustar. Así la competencia de Cournot podría resultar adecuada para estudiar la competencia a medio y largo plazo.

Hotelling (1929), Chamberlin (1933) y Robinson (1933) prestaron especial atención al papel que juega la diferenciación de los productos en los mercados oligopolistas. El famoso modelo de Hotelling sentó las bases para la teoría de la competencia espacial mientras que Chamberlin y Robinson estudiaron extensamente la competencia oligopolista con productos diferenciados. Estos últimos autores modelizaron a las empresas compitiendo en precios y consideraron las situaciones de oligopolio, pero también el caso de la competencia monopolística. En este último caso el número de empresas en el mercado es elevado y su tamaño pequeño respecto al del mercado, pero retienen cierto poder de monopolio. Partieron de un esquema de demanda para los productos diferenciados que en el caso más simple puede ser un consumidor representativo con preferencia por la variedad. A partir de este supuesto establecen que la competencia en precios se realizará al estilo Bertrand. La diferenciación de productos como es bien conocido permite escapar de la paradoja de Bertrand.

Otro tema que ha acaparado la atención de la organización industrial ha sido la posibilidad de existencia de acuerdos colusivos tácitos. Cournot se planteó la pregunta de por qué las empresas no se ponían de acuerdo y compartían el mercado al precio de monopolio. Concluyó que desde el punto de vista de la empresa si sus rivales respetaban el trato, esta podía aumentar sus beneficios desviándose del acuerdo. Por lo tanto en palabras de Cournot el acuerdo solo podrá ser mantenido “por medio de un acuerdo legal”. Chamberlin por su parte tenía una visión diferente y consideraba que en el caso de que el número de empresas competidoras fuese reducido estas se darían cuenta de su interdependencia estratégica y actuarían de manera tácita maximizando sus beneficios conjuntos, estableciendo algún mecanismo

de castigo para los infractores del acuerdo.

Von Neumann y Morgenstern con la publicación en 1944 de su conocida obra *Theory of Games and Economic Behaviour* y Nash con sus artículos de juegos no cooperativos en 1950 y 1951 dieron lugar a la moderna Teoría de Juegos y revolucionaron la forma de entender las interacciones estratégicas entre agentes. Sin embargo, su influencia en el análisis de la competencia en mercados oligopolistas se haría esperar hasta los años setenta, momento en el que se desarrolla la nueva organización industrial como alternativa a la escuela de Chicago y al paradigma estructura, conducta y resultados

La aplicación de la teoría de juegos al estudio del oligopolio es lo que ha hecho posible formalizar importantes ideas como el concepto apropiado de solución y sus propiedades: existencia, unicidad y estabilidad. El concepto más conocido y utilizado en la teoría del oligopolio es el famoso Equilibrio de Nash que coincide en el caso de la competencia en cantidades con la solución propuesta por Cournot en 1838 y en el de precios con la solución propuesta por Bertrand en 1883. Las contribuciones de esta rama de las matemáticas no terminan aquí y han ayudado a estudiar formalmente situaciones como los acuerdos colusivos, las interacciones dinámicas o las situaciones de información imperfecta. Para el estudio de juegos dinámicos de información perfecta la definición de Equilibrio Perfecto en Subjuegos propuesto por Selten (1975) ha sido crucial. Para analizar las situaciones estáticas de información imperfecta, Harsanyi (1967) formuló el concepto de Equilibrio Bayesiano de Nash y para el caso de juegos dinámicos de información imperfecta desarrolló el Equilibrio Perfecto Bayesiano que combina ideas de los dos conceptos anteriores. Un claro ejemplo de la aplicación de estos desarrollos es la formalización del modelo de líder-seguidor propuesto por Stackelberg mediante el uso de un equilibrio perfecto en subjuegos en el cual las amenazas no creíbles son desechadas. La teoría de los juegos repetidos desarrollada por Friedman (1971) entre otros, ha demostrado ser un instrumento útil para analizar los acuerdos colusivos tácitos y el diseño de mecanismos que permiten realizar amenazas creíbles.

La interacción entre la teoría de juegos y la organización industrial ha sido una de las más fructíferas en la historia del análisis económico y los desarrollos en ambas

se han retroalimentado. Así la teoría de juegos ha permitido formalizar importantes conceptos de la teoría oligopolista y las necesidades de esta última han motivado la aparición de nuevos conceptos en esta rama de las matemáticas.

## 2.2. Perspectiva dinámica del oligopolio

En muchos casos los modelos estáticos son una aproximación suficientemente buena a la realidad que nos permite comprender el funcionamiento de los mercados o realizar análisis de estática comparativa. Sin embargo, hay ocasiones en las que estos modelos son incompletos, puesto que no consideran los ajustes dinámicos del proceso y por ello es necesario recurrir a modelos dinámicos.

Como ponen de manifiesto Tirole y Fundenberg en [8] existen dos motivos fundamentales que justifican la inclusión de la dinámica en los modelos de oligopolio. El primero de ellos es la existencia de industrias no estacionarias. En este caso la literatura ha solido identificar una variable “estado” tangible y se hace depender los pagos de las empresas de la misma. Por lo tanto se analiza la competencia teniendo en cuenta que las estrategias se definen a partir de la variable elegida. El ejemplo más típico de estas variables estado es el stock de capital que establece una conexión “física” entre los periodos. Este tipo de modelos ha dado lugar en el marco de los juegos diferenciales en tiempo continuo al concepto de estrategias Markovianas, las cuales dependen exclusivamente de la variable “estado”. Los equilibrios analizados en este marco serán los Equilibrios Perfectos de Markov que será aquel conjunto de estrategias óptimas para cualquier empresa y para cualquier estado del sistema, dadas las estrategias de los rivales. Estos modelos han suscitado un importante interés en la literatura durante las últimas dos décadas, sin embargo suponen situaciones en las que la información es completa y los agentes son totalmente racionales. El objetivo de este trabajo será precisamente estudiar qué ocurre cuando estos supuestos se relajan.

El otro gran motivo para estar interesado en los modelos dinámicos es que en el marco de industrias maduras el comportamiento de las empresas así como los resultados del mercado dependen de la historia de la industria. El enfoque que más se ha

utilizado para aproximarse a esta dependencia histórica ha sido el de los juegos repetidos. Uno de los ejemplos más conocidos de la aplicación de este enfoque es la explicación que se da a los acuerdos colusivos tácitos autosostenibles. La idea básica ya se remonta a Chamberlin, los oligopolistas se dan cuenta de su interdependencia y por lo tanto no deciden sus estrategias pensando que estas no modificarán el comportamiento de los demás competidores. Las empresas se percatan de que una bajada de precios puede provocar un castigo por parte del resto de los agentes lo que les induce a comportarse de una manera más cooperativa. Sin embargo este enfoque tiene una importante restricción ya que estos equilibrios solo son alcanzables cuando el horizonte temporal es infinito.

El uso de juegos repetidos tiene sus limitaciones. Aunque uno esperaría que en este tipo de juegos dinámicos los resultados acontecidos en periodos anteriores fuesen los que determinasen las estrategias de los agentes, esto no es así. De hecho la historia de la industria no juega un papel directo en los juegos repetidos, no hay una conexión física entre los periodos, sino que el juego sólo es dinámico en el sentido de que las estrategias se definen para todo el horizonte temporal. Esto lleva a que cada etapa del juego sea eminentemente estática y que cuando el horizonte temporal es finito los acuerdos colusivos se desvanezcan. Otro problema de los juegos repetidos al analizar situaciones dinámicas es que el número de equilibrios suele ser muy numeroso por lo que en ocasiones es muy difícil llegar a una conclusión acerca de los resultados que se obtendrían en la industria. Para predecir cuál será el equilibrio es necesario recurrir a teorías como los puntos focales de Schelling.

En la literatura de la información incompleta o de la racionalidad limitada la historia de la industria es importante, no porque haya una conexión física entre los periodos, sino porque provee información a los agentes sobre alguna característica desconocida del mercado o de sus competidores. Este será el enfoque que seguiremos en este trabajo. La principal hipótesis metodológica de esta corriente es que el pasado es importante porque contribuye a señalar las intenciones futuras. Una crítica que

se ha realizado a esta corriente es que “cualquier” cosa <sup>1</sup> se puede explicar con información incompleta lo que restaría poder predictivo a este tipo de modelos. Por eso es importante fundamentar y razonar la estructura de información incompleta que se va asumir.

En las subsiguientes secciones se analizarán procesos de ajuste dinámicos similares a los que utilizan Bischi et al. en [1]. Estos procesos de ajuste dinámico son los que esperaríamos que ocurriesen en un contexto de agentes con racionalidad limitada. A continuación se explica brevemente cómo funcionan intuitivamente y más adelante serán representados formalmente.

Si todos los participantes en el mercado seleccionan simultáneamente los niveles de equilibrio, ninguno de los agentes tendrá incentivos a desviarse de este ya que sus beneficios se reducirían. Sin embargo, si los resultados no se corresponden con el equilibrio se desencadenará un proceso de ajuste, ya que al menos una de las firmas puede aumentar sus beneficios modificando su estrategia de forma unilateral. Como se asume una cierta racionalidad de las empresas, todas modificarán sus estrategias. Por lo tanto el cambio se producirá de manera simultánea y en función de la información disponible, que se corresponde a periodos anteriores. Esto probablemente ocasionará que no se alcancen los niveles de equilibrio, por lo tanto volverá a ocurrir un cambio en los resultados lo que hará que el proceso dinámico se desarrolle. El modelo que resulte de este proceso dinámico será dependiente de la escala de tiempo seleccionada (continua o discreta) así como de la manera en que las empresas ajustan precios o cantidades. Dicho ajuste depende de la formación de las expectativas. En la literatura se ha trabajado con una gran variedad de expectativas como puedan ser las ingenuas, adaptativas o la regla del gradiente basada en el beneficio marginal, tanto en un contexto de expectativas homogéneas como heterogéneas. Estas reglas de ajuste permiten estudiar de manera exhaustiva las dinámicas locales y globales del modelo.

---

<sup>1</sup>En el sentido de que la estructura de la información condiciona en gran medida los resultados. Los resultados de este tipo de juegos pueden ser muy sensibles a modificaciones en la estructura de la información. El lector interesado en esta discusión puede consultar [8, p.76]

Por lo tanto este trabajo pretende contribuir a la literatura existente que ha trabajado con procesos de ajuste dinámicos como el anterior, originados por la racionalidad limitada de las empresas o la falta de información. En la siguiente sección procederemos a introducir formalmente algunos esquemas de formación de expectativas que jugarán un papel fundamental en nuestros modelos.

### 3. Introducción de las expectativas

#### 3.1. El modelo estático básico

De cara a ilustrar los distintos tipos de expectativas y los procesos de ajuste dinámicos a los que dan lugar, presentaremos el modelo estático básico a la Cournot. Consideramos una industria formada por  $N$  competidores produciendo un producto homogéneo, en la cual  $q_k$  denotará el nivel de producción de cada empresa con  $k = 1, 2, \dots, N$ . Asumimos como es habitual que la función inversa de demanda define el precio a partir de la cantidad total de output de la industria,

$$p = f \left( \sum_{k=1}^N q_k \right) \quad (3.1.1)$$

La forma particular de la función inversa de demanda puede ser derivada de la teoría microeconómica y la literatura ha trabajado con una multitud de alternativas. Como es habitual el único tramo relevante de la función será aquel en el que las cantidades estén comprendidas entre  $[0, L_k]$ , siendo  $L_k$  el punto de saturación, es decir, el nivel de output total que hace que los precios sean no negativos.

Si denotamos para cada empresa  $k$  el output del resto de la industria como  $Q_{-k} = \sum_{l \neq k} q_l$  se puede definir la función de beneficios de las empresas como,

$$\Pi_k(q_1, \dots, q_N) = q_k f(q_k + Q_{-k}) - C_k(q_k, Q_{-k}) \quad (3.1.2)$$

En general, la función de costes  $C_k(q_k, Q_{-k})$  puede depender del output de las demás empresas, ya que es lógico pensar que todas las empresas de una misma industria compiten en los mercados secundarios para adquirir inputs como materias primas o el trabajo. Del mismo modo también se podría considerar la existencia de otro tipo



de externalidades que produce la competencia entre empresas. No obstante, si se desea realizar un análisis más sencillo se puede introducir en el modelo una función de costes de la forma  $C_k(q_k)$ .

Por lo tanto hemos planteado un juego estático en el que las  $N$  empresas serán los jugadores,  $(q_1, \dots, q_N)$  sus estrategias y sus pagos vendrán dados por la función de beneficios (3.1.2). Si las empresas tienen toda la información relevante y son completamente racionales sus decisiones de producción vendrán dadas por la función de mejor respuesta:

$$R_k(Q_{-k}) = q_k \quad \text{siendo} \quad q_k = \underset{0 \leq q_k \leq L_k}{\text{arg max}} \{q_k f(q_k + Q_{-k}) - C_k(q_k, Q_{-k})\} \quad (3.1.3)$$

La función de mejor respuesta indicará a la empresa cuál es la cantidad que debe de producir para maximizar sus beneficios dado el nivel de output del resto de la industria.

El equilibrio de Nash de esta competencia a la Cournot será el vector de producción  $(q_1^*, \dots, q_N^*)$  tal que la cantidad producida por cada empresa sea su mejor respuesta, dada las estrategias de sus rivales, de modo que ninguna empresa tendrá incentivos a desviarse del equilibrio. Formalmente esto queda representado para las  $N$  empresas de la siguiente manera,

$$q_k^* \in R_k(Q_{-k}^*) \quad \forall \quad k = 1, \dots, N \quad \text{con} \quad Q_{-k}^* = \sum_{l \neq k} q_l^* \quad (3.1.4)$$

En un principio, este equilibrio sería estable en el sentido de que ninguna empresa puede aumentar sus beneficios desviándose unilateralmente del mismo.

Las funciones de mejor respuesta pueden adoptar una multitud de formas y no es raro encontrar ejemplos en los que el equilibrio no existe. Y en el caso de existir puede ser múltiple, pudiendo ser el número de ellos finito o infinito. En estos casos se presentará el problema de selección de equilibrios y deberemos decidir cuáles de ellos resultan razonables económicamente.

## 3.2. Los esquemas de formulación de expectativas

Podríamos preguntarnos qué ocurriría si los agentes no fuesen tan racionales como presuponemos en el modelo anterior. Parafraseando a Reinhard Selten en [6] “*El agente económico racional es un héroe mitológico que conoce la solución a todos los problemas matemáticos y que es capaz de realizar cualquier cálculo por complicado que este sea*”. Sin embargo, los agentes económicos reales son muy diferentes. Tradicionalmente muchos economistas han defendido con tenacidad el concepto ortodoxo de racionalidad apoyándose en el hecho de que aunque no sea un axioma muy realista puede explicar aproximadamente el comportamiento humano. Sin embargo, cada vez hay más evidencia empírica de que los agentes no obedecen las “leyes” impuestas desde la teoría económica. Por lo tanto cabría preguntarnos qué ocurriría si relajáramos el supuesto de racionalidad y las empresas no alcanzasen el equilibrio propuesto en (3.1.4). Esto no significa que los agentes sean irracionales ya que su comportamiento no se basa en la confianza en el destino o en pautas inexplicables, sino que se verán inmersos en un proceso de ajuste dinámico basado en las mejores respuestas como el que se ha explicado intuitivamente con anterioridad. Para poder trabajar con estos procesos es necesario definir los esquemas de formación de expectativas.

Utilizando una escala de tiempo discreta en la que  $t = 0, 1, 2, \dots$  denota los periodos, esperamos que si en un periodo no se alcanza el equilibrio las empresas ajusten la cantidad producida de acuerdo con su función de mejor respuesta, basada en el nivel de producción total esperado para el siguiente periodo. Por lo tanto en un oligopolio con  $N$  participantes podemos definir ese proceso de la siguiente manera:

$$q_k(t+1) = R_k(Q_{-k}^E(t+1)) \quad (3.2.1)$$

donde  $q_k(t+1)$  será la cantidad de output óptima que vendrá dada por la función de mejor respuesta  $R_k(Q_{-k}^E(t+1))$  la cual depende de  $Q_{-k}^E(t+1)$  que es el nivel total de output producido por los rivales que la empresa  $k$  espera para el periodo  $t+1$ . Para predecir cuál será la producción total en el periodo siguiente el agente deberá formular algún tipo de expectativa. Las expectativas no tendrán un sentido probabilístico sino el de un valor concreto predicho.

El esquema más simple de formulación de expectativas se da cuando la empresa espera que la cantidad producida en el siguiente periodo coincida con el output observable en el periodo de la toma de decisión:

$$Q_{-k}^E(t+1) = Q_{-k}(t) = \sum_{l \neq k} q_l(t) \quad (3.2.2)$$

Esto es lo que se conoce como las **expectativas ingenuas o de Cournot** ya que el matemático ya las introdujo en su proceso de ajuste hacia el equilibrio comúnmente conocido como *Tatônnement*.

Sin embargo, es de esperar que las empresas aprendan algo de los resultados del mercado en los periodos anteriores y que incluyan estos procesos de aprendizaje en las expectativas. El esquema más conocido de este tipo de expectativas es el que se conocen como esquema de expectativas **adaptativas**

$$Q_{-k}^E(t+1) = Q_{-k}^E(t) + \beta_k \left( \sum_{l \neq k} q_l - Q_{-k}^E(t) \right) = \beta_k \sum_{l \neq k} q_l + (1 - \beta_k) Q_{-k}^E(t) \quad (3.2.3)$$

El parámetro  $\beta_k$  es la velocidad de ajuste de la empresa  $k$ . Normalmente se asume que adopta unos valores  $0 < \beta_k \leq 1$  y jugará un papel destacado en el proceso de ajuste dinámico. Este esquema de expectativas es asimilable a un proceso de aprendizaje dinámico. Si la empresa  $k$  sobreestima (infraestima) el nivel de output de sus competidores en el periodo anterior, en el siguiente periodo reducirá (aumentará) su producción esperada. La velocidad de ajuste  $\beta_k$  nos indicará la parte del error cometido en el periodo anterior que incorporará a su nueva expectativa. Hay que tener en cuenta que si  $\alpha_k = 1$  estaríamos ante el caso de unas expectativas ingenuas.

Si introducimos las expectativas ingenuas (3.2.2) en la función de mejor respuesta (3.2.1) tendríamos un sistema dinámico de  $N$  dimensiones:

$$q_k(t+1) = R_k \left( \sum_{l \neq k} q_l(t) \right) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.4)$$

Se podrían utilizar de manera análoga las expectativas adaptativas (3.2.3) dando lugar al sistema dinámico:

$$q_k(t+1) = R_k \left( \beta_k \sum_{l \neq k} q_l + (1 - \beta_k) Q_{-k}^E(t) \right) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.2.5)$$

Sin embargo cuando las empresas modifican su nivel de output no lo hacen de manera automática, muchas veces es necesario atravesar largos procesos de decisión internos, contratar nuevos trabajadores o adquirir nueva maquinaria. Para dotar al modelo de un mayor grado de realismo podemos suponer que los cambios se realizan de manera gradual. Así por ejemplo en el proceso de ajuste dinámico como el tratado anteriormente (3.2.4), la empresa en lugar de seleccionar el nivel de producción óptimo dado por su función de mejor respuesta elige uno que está a medio camino entre este y la producción realizada en el periodo anterior. Esto asegura que el cambio del output se produce en la dirección adecuada pero da a la empresa cierto tiempo para adaptarse a las nuevas circunstancias. Si las funciones de reacción  $R_k$  son lineales y teniendo en cuenta la ecuación (3.2.1) la ecuación (3.2.5) se puede expresar como:

$$q_k(t+1) = \beta_k R_k \left( \sum_{l \neq k} q_l(t) \right) + (1 - \beta_k) q_k(t) \quad (3.2.6)$$

El parámetro  $\beta_k$  será la velocidad de ajuste, que podemos interpretar en este caso como cuán reticente es la empresa a modificar su nivel de output. Adoptará valores  $0 < \beta_k \leq 1$ , excluyendo el valor  $\beta_k = 0$  ya que supondría que la empresa nunca modifica su nivel de producción.

Otro esquema de ajuste muy utilizado por la literatura es el que se conoce como **proceso de ajuste por gradiente**. Este proceso se basa en el hecho de que si las empresas observan que pueden aumentar su beneficio aumentando la cantidad,  $\partial \Pi_k / \partial q_k > 0$ , lo harán por su propio interés. Así del mismo modo si contrariamente  $\partial \Pi_k / \partial q_k < 0$  la empresa querrá reducir su nivel de producción. Si observasen  $\partial \Pi_k / \partial q_k = 0$  el agente consideraría que ya está en el máximo punto de sus beneficios y no querrá modificar su nivel de producción. Esta idea queda plasmada en,

$$q_k(t+1) = q_k(t) + \alpha_k(q_k) \frac{\partial \Pi_k(q_1(t), \dots, q_N(t))}{\partial q_k} \quad (3.2.7)$$

Este proceso de ajuste dinámico tiene un funcionamiento ligeramente diferente a los vistos anteriormente. Como se observa en su formulación este no depende de la función de mejor respuesta. Esto nos ahorra resolver el problema de maximización necesario para obtener las funciones de mejor respuesta y solo necesitamos información acerca de la función de beneficios. El concepto de equilibrio

también adoptará un significado distinto ya que tendrá lugar si y sólo si todas las derivadas parciales son iguales a cero.  $\alpha_k(q_k)$  es la función que representa la velocidad de ajuste.

Como se pone de relieve en [1, p.26] y hemos dicho anteriormente, este enfoque para modelizar el comportamiento de empresas racionalmente limitadas en modelos de oligopolio dinámicos ha recibido ciertas críticas por parte de la profesión. Estas críticas radican en el hecho de que las empresas ignoran que sus acciones tendrán un efecto en el comportamiento de sus competidores. Se ha propuesto que sería más razonable que las empresas que compiten repetidamente en un mercado se comporten maximizando la corriente actualizada de beneficios futuros producida en un horizonte temporal finito o infinito, teniendo en cuenta el comportamiento de sus rivales. Sin embargo este enfoque presupone la racionalidad completa de los agentes y un alto grado de información. Aunque los procesos de ajuste aquí presentados pueden tener sus limitaciones tienen una gran riqueza interpretativa y pueden ayudar a comprender mejor cómo se comportan los agentes racionalmente limitados.

## 4. Estudio de la estabilidad en duopolios

El papel central que el concepto de equilibrio juega en la teoría económica justifica el interés que los economistas han mostrado por su estabilidad. Cournot no fue una excepción y al plantear su célebre modelo de oligopolio también se preocupó por esta problemática y el mecanismo de ajuste que guiaba las dinámicas de desequilibrio. Esta preocupación ha llevado a los economistas a establecer las condiciones necesarias y/o suficientes que aseguran la estabilidad del equilibrio.

A continuación se va a analizar la estabilidad del equilibrio de Nash en un duopolio de Cournot estático, para más adelante estudiar las condiciones que deben cumplir las funciones de beneficios o algunos parámetros para asegurar la estabilidad asintótica local del equilibrio en modelos de oligopolio dinámico con distintos esquemas de expectativas.

## 4.1. Condiciones de estabilidad en un duopolio de Cournot estático

Se considera un duopolio de Cournot en el que la demanda queda definida como  $P = P(Q)$  con  $Q = q_1 + q_2$  (producto homogéneo), siendo dicha demanda decreciente y cóncava. Las empresas tendrán unos costes  $C(q_i)$  iguales y se supondrán convexos como es habitual en la literatura. Estas condiciones quedarán plasmadas en:

$$\begin{cases} P'(Q) < 0 \\ P''(Q) \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C'(q_i) > 0 \\ C''(q_i) \geq 0 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Por tanto las funciones de beneficios de las empresas quedarán definidas como:

$$\begin{cases} \Pi_1(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2)q_1 - C_1(q_1) \\ \Pi_2(q_1, q_2) = P(q_1 + q_2)q_2 - C_2(q_2) \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Las empresas producirán aquella cantidad que maximice sus beneficios. La condición necesaria será producir aquella cantidad que iguale la primera derivada del beneficio a cero.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0 &\rightarrow P(q_1 + q_2) + P'(q_1 + q_2)q_1 - C'_1(q_1) = 0 \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 0 &\rightarrow P(q_1 + q_2) + P'(q_1 + q_2)q_2 - C'_2(q_2) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

La condición suficiente de dicho problema de maximización vendrá asegurada por el signo negativo de la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial q_i^2} = 2P'(q_i + q_j) + P''(q_i + q_j)q_i - C''_i(q_i) < 0 \quad (4.1.4)$$

cuyo cumplimiento queda asegurado por las condiciones impuestas a la función de demanda y de costes (4.1.1).

Las ecuaciones (4.1.3) que definen el equilibrio de Nash  $(q_1^*, q_2^*)$  satisfacen en un entorno de dicho punto el *Teorema de la función implícita*:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_i(q_1^*, q_2^*)}{\partial q_i} = 0 \\ \frac{\partial \Pi_i(q_i, q_j)}{\partial q_i} \text{ es } C^1 \\ \frac{\partial^2 \Pi_i(q_i, q_j)}{\partial q_i^2} = P'(q_1 + q_2) + P''(q_1 + q_2)q_i \neq 0 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

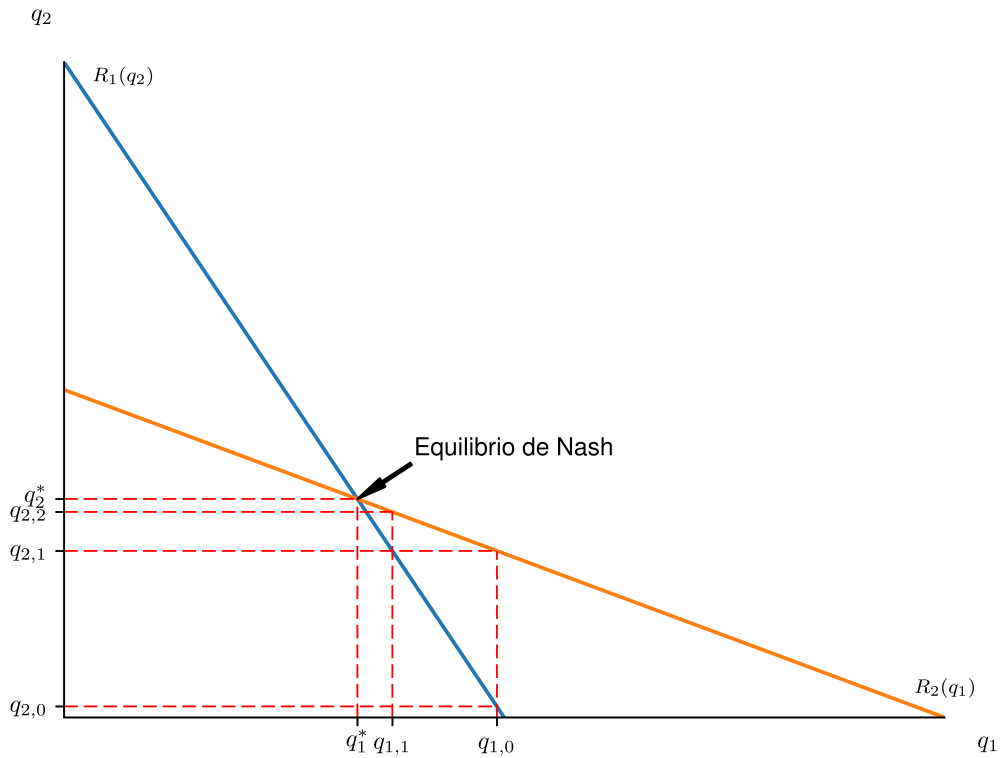
El cumplimiento de este teorema garantiza la existencia de las *funciones de mejor respuesta o curvas de reacción*:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0 &\rightarrow q_1 = R_1(q_2) \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 0 &\rightarrow q_2 = R_2(q_1) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

El equilibrio de Cournot-Nash  $(q_1^*, q_2^*)$  vendrá dado por la intersección entre ambas curvas.

Cournot supuso que el equilibrio era estable ya que una desviación del mismo sería corregida de forma automática mediante un reacción en cadena de las distintas empresas a través de las curvas de reacción. Este mecanismo puede ser visto como una forma primitiva de modelizar el comportamiento de las empresas cuando presentan racionalidad limitada. De hecho este proceso de *tâtonnement* es equivalente a plantear un modelo dinámico con expectativas ingenuas. Se va a ilustrar este proceso de ajuste con la ayuda de la representación gráfica de las curvas de reacción.

Figura 4.1: Proceso de ajuste en el modelo de Cournot



La Figura 4.1 muestra el proceso de ajuste basado en el *tâtonnement*. Si la empresa 2 comienza lanzando al mercado una cantidad  $q_{2,0}$  la empresa 1 decidirá producir según su curva de reacción una cantidad  $q_{1,0}$  que será el nivel de output que maximiza sus beneficios dada la producción del rival. Esta cantidad producida por la primera empresa inducirá una respuesta de la segunda empresa, ya que ahora la cantidad que maximiza sus beneficios es  $q_{2,1}$ . De nuevo ante esta modificación del output la empresa 1 decidirá cambiar su producción y de acuerdo con su curva de reacción la cantidad que lanza al mercado será  $q_{1,1}$ . Vemos cómo este proceso de ajuste está guiado en todo momento por las curvas de reacción de las empresas y se terminará una vez que ambas empresas alcancen el punto de equilibrio  $(q_1^*, q_2^*)$  ya que en él ninguna de las dos tendrá incentivos a desviarse.

Para que este proceso de ajuste sea posible y el equilibrio sea estable, es condición necesaria y suficiente que el producto de las primeras derivadas de las curvas de reacción sea inferior a la unidad, es decir,  $|R'_1||R'_2| < 1$ . Aplicando el teorema de la función implícita podemos obtener que:

$$R'_1(q_2) = -\frac{\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1 \partial q_2}}{\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2}}, \quad R'_2(q_1) = -\frac{\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2 \partial q_1}}{\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2^2}}$$

pudiendo enunciar el siguiente Teorema:

**Teorema 1** *El equilibrio de Nash en un duopolio de Cournot estático será estable si:*

$$\left| \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2^2} \right| > \left| \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2 \partial q_1} \right| \quad (4.1.7)$$

Esta condición se conoce como la **Condición de Schwarz**

## 4.2. Condiciones de estabilidad en duopolios dinámicos

El estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio en los sistemas dinámicos puede abordarse desde dos enfoques: el *cualitativo* y el *cuantitativo*. El enfoque cualitativo consiste en el análisis de las propiedades de la solución de un sistema



dinámico sin necesidad de conocer la forma de la solución o intentar aproximarla. Por otro lado, el enfoque cuantitativo consiste en obtener la forma explícita de la solución o tratar de aproximarla. Una vez hecho esto es sencillo estudiar cuál es la senda que sigue la solución.

Los métodos cualitativos son muy útiles en el estudio de las dinámicas económicas ya que en muchos casos no conocemos la forma de las funciones con las que trabajamos sino simplemente algunas de sus propiedades cualitativas o conociéndolas no es posible encontrar las trayectorias solución del modelo dinámico. En este trabajo se va a utilizar la linealización del modelo dinámico en un entorno del punto de equilibrio que se ha convertido en el estándar en el análisis económico para estudiar la estabilidad local. Ello implica considerar el desarrollo de Taylor de las funciones que definen el modelo dinámico en un entorno del punto de equilibrio y desechar los términos de orden superior a uno. El estudio de las propiedades de estabilidad del sistema lineal resultante bajo el cumplimiento de determinadas condiciones se puede trasladar al análisis de la estabilidad del sistema no lineal original. Para más información se puede consultar [3] o [4]

A continuación se aplicará dicho método a un modelo de duopolio dinámico con tres esquemas de expectativas diferentes y se establecerán las condiciones que se deben cumplir para que los puntos de equilibrio sean localmente estables.

#### 4.2.1. Modelo dinámico con expectativas ingenuas

Si suponemos que las empresas siguen un esquema de expectativas ingenuas el duopolio dinámico quedará planteado como:

$$\begin{aligned}q_{1,t+1} &= R_1(q_{2,t}) \\q_{2,t+1} &= R_2(q_{1,t})\end{aligned}\tag{4.2.1}$$

**Punto de equilibrio:** El punto de equilibrio o punto fijo del sistema será aquel en el que las cantidades producidas por ambas empresas permanezcan constantes, es decir,  $q_{i,t+1} = q_{i,t} = q_i$

Tendremos por lo tanto:

$$q_1 = R_1(q_2)$$

$$q_2 = R_2(q_1)$$

En consecuencia el equilibrio  $(q_1^*, q_2^*)$  será el mismo que en el caso del juego estático.

Es decir, el punto de intersección entre las dos curvas de reacción.

**Estudio estabilidad:** Siguiendo el método de la linealización obtenemos la matriz Jacobiana del sistema (4.2.1) y la evaluamos en el punto de equilibrio:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & R'_1(q_2^*) \\ R'_2(q_1^*) & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora aplicaremos las condiciones de estabilidad local de Schur, ver [4, p.385]:

$$1 - D > 0$$

$$1 + T + D > 0$$

$$1 - T + D > 0$$

Siendo T y D la traza y el determinante de la matriz Jacobiana respectivamente, en este caso:

$$T = 0$$

$$D = -R'_1(q_2^*)R'_2(q_1^*)$$

Por lo tanto las condiciones quedarán expresadas como:

$$1 - D > 0$$

$$1 + D > 0$$

Sustituyendo

$$1 + R'_1(q_2^*)R'_2(q_1^*) > 0$$

$$1 - R'_1(q_2^*)R'_2(q_1^*) > 0$$

Que podemos resumir en:

$$-1 < R'_1(q_2^*)R'_2(q_1^*) < 1$$

Es decir la condición de estabilidad coincidirá con la del modelo estático:

$$|R'_1(q_2^*)R'_2(q_1^*)| < 1 \tag{4.2.2}$$

**Teorema 2** *En un duopolio dinámico en el que las empresas siguen un esquema de expectativas ingenuas, una condición suficiente para la estabilidad local será la condición de Schwarz.<sup>2</sup>*

$$\left| \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right| > \left| \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} \right|$$

#### 4.2.2. Modelo dinámico con expectativas adaptativas

Si las empresas se comportan de acuerdo con un esquema de expectativas adaptativas, un esquema que ha gozado de gran popularidad en la teoría económica, el duopolio dinámico vendrá definido como:

$$\begin{aligned} q_{1,t+1} &= \beta_1 q_{1,t} + (1 - \beta_1) R_1(q_{2,t}) \\ q_{2,t+1} &= \beta_2 q_{2,t} + (1 - \beta_2) R_2(q_{1,t}) \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

**Punto de equilibrio:** De acuerdo con la definición de punto de equilibrio en un sistema dinámico en tiempo discreto este tendrá lugar cuando las cantidades producidas permanezcan constantes  $q_{i,t+1} = q_{i,t} = q_i$

$$\begin{aligned} (1 - \beta_1) q_1 &= (1 - \beta_1) R_1(q_2) \rightarrow q_1 = R_1(q_2) \\ (1 - \beta_2) q_2 &= (1 - \beta_2) R_2(q_1) \rightarrow q_2 = R_2(q_1) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Por lo tanto estaremos ante el mismo equilibrio de Nash que en los casos anteriores,  $(q_1^*, q_2^*)$  que coincidirá con el punto de intersección de las curvas de reacción.

**Estudio estabilidad:** Consideraremos para el estudio de la estabilidad el caso particular  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ , que por la construcción de las expectativas adoptará unos valores comprendidos entre:  $0 < \beta < 1$ .

Calculamos la matriz Jacobiana del sistema (4.2.3) y la evaluamos en el punto de equilibrio:

$$J = \begin{pmatrix} \beta & (1 - \beta) R_1'(q_2^*) \\ (1 - \beta) R_2'(q_1^*) & \beta \end{pmatrix}$$

$$T = 2\beta$$

---

<sup>2</sup>Notación: Las funciones que aparezcan acompañadas de \* están evaluadas en el punto de equilibrio.

$$D = \beta^2 - (1 - \beta)^2 R'_1(q_2^*) R'_2(q_1^*)$$

Aplicando las condiciones de Schur y operando sobre ellas:

$$1. \quad 1 - T + D > 0$$

$$1 - 2\beta + \beta^2 - (1 - \beta)^2 R'_1(q_2^*) R'_2(q_1^*) > 0$$

$$(1 - \beta)^2 > (1 - \beta)^2 R'_1(q_2^*) R'_2(q_1^*)$$

$$R'_1(q_2^*) R'_2(q_1^*) < 1 \rightarrow \text{Condición de Schwarz}$$

$$2. \quad 1 - D > 0$$

$$1 - \beta^2 + (1 - \beta)^2 R'_1(q_2^*) R'_2(q_1^*) > 0$$

Con  $0 < \beta < 1$ , si imponemos la condición de Schwarz, esto se cumplirá siempre.

$$3. \quad 1 + T + D > 0$$

$$1 + 2\beta + \beta^2 - (1 - \beta)^2 R'_1(q_2^*) R'_2(q_1^*) > 0$$

$$(1 + \beta)^2 - (1 - \beta)^2 R'_1(q_2^*) R'_2(q_1^*) > 0$$

Con  $0 < \beta < 1$  e imponiendo  $R'_1(q_2^*) R'_2(q_1^*) < 1$  se cumplirá siempre.

**Teorema 3** *Suponiendo que las empresas siguen un esquema de expectativas adaptativas con iguales parámetros de velocidad de ajuste  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ , la condición suficiente para la estabilidad local será la condición de Schwarz:*

$$\left| \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right| > \left| \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} \right|$$

#### 4.2.3. Modelo dinámico con regla del gradiente

Por último vamos a suponer que las empresas siguen el esquema de expectativas de la regla del gradiente. Supondremos que  $\alpha_i(q_i) = \alpha_i q_i$  con  $\alpha_i > 0$ :

$$\begin{aligned} q_{1,t+1} &= q_{1,t} + \alpha_1 q_{1,t} \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} \\ q_{2,t+1} &= q_{2,t} + \alpha_2 q_{2,t} \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

**Punto de equilibrio:** El punto fijo del sistema será aquel en el que se cumpla

$$q_{i,t+1} = q_{i,t} = q_i$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0 &\rightarrow q_1 = R_1(q_2) \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 0 &\rightarrow q_2 = R_2(q_1) \end{aligned}$$

Por lo tanto estaremos ante el mismo punto de equilibrio  $(q_1^*, q_2^*)$  que en los casos anteriores, la intersección de las curvas de reacción.

**Estudio estabilidad:** Consideraremos para el estudio de la estabilidad el caso particular  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$  con  $\alpha > 0$ .

Primero calculamos la matriz Jacobiana del sistema (4.2.5) :

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} + \alpha q_1 \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2} & \alpha q_1 \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \alpha q_2 \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2 \partial q_1} & 1 + \alpha \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} + \alpha q_2 \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2^2} \end{pmatrix}$$

y la evaluamos en el punto de equilibrio  $(q_1^*, q_2^*)$  obteniendo :

$$J = \begin{pmatrix} 1 + \alpha q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} & \alpha q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \\ \alpha q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} & 1 + \alpha q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \end{pmatrix}$$

Calculamos la traza y el determinante de dicha matriz:

$$T = 2 + \alpha q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + \alpha q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2}$$

$$D = 1 + \alpha q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + \alpha q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} + \alpha^2 q_1^* q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} - \alpha^2 q_1^* q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1}$$

Si denotamos:

$$Z = \alpha^2 q_1^* q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} - \alpha^2 q_1^* q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} = \alpha^2 q_1^* q_2^* \left( \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} \right)$$

podemos expresar el determinante como:

$$D = T - 1 + Z$$

y por lo tanto al aplicar las condiciones de Schur tendremos:

$$\begin{aligned} 1 - D > 0 &\rightarrow 2 - T - Z > 0 \\ 1 + T + D > 0 &\rightarrow 2T + Z > 0 \\ 1 - T + D > 0 &\rightarrow Z > 0 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Sustituyendo y operando sobre la tercera condición es inmediato obtener la condición de Schwarz:

$$\begin{aligned} \alpha^2 q_1^* q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} - \alpha^2 q_1^* q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} &> 0 \\ \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} &> \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} \\ R'_1(q_2^*) R'_2(q_1^*) &< 1 \end{aligned}$$

Suponiendo que se cumple lo anterior, denotaremos:

$$C.s = \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} > 0$$

Sustituyendo y operando sobre la primera condición:  $1 - D > 0$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha^2 q_1^* q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} - \alpha^2 q_1^* q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} - \alpha q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} - \alpha q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} &> 0 \\ \alpha q_1^* q_2^* \left( \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} - \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right) &> q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \\ -\alpha q_1^* q_2^* C.s &> q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \\ \alpha &< - \frac{\left( q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right)}{q_1^* q_2^* C.s} \end{aligned}$$

Denotamos:

$$\alpha_1 = - \frac{\left( q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right)}{q_1^* q_2^* C.s} > 0 \quad (4.2.7)$$

Por tanto, la primera condición de Schur se cumplirá siempre que:

$$\alpha < \alpha_1$$

Sustituyendo y operando sobre la segunda condición:  $1 + T + D > 0$  se deduce:

$$4 + 2\alpha q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + 2\alpha q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} + \alpha^2 q_1^* q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} - \alpha^2 q_1^* q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} > 0$$

Podemos reordenar como:

$$\alpha^2 q_1^* q_2^* C.s + 2\alpha \left[ q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right] + 4 > 0 \quad (4.2.8)$$

Consideramos la parábola:  $y = a\alpha^2 + b\alpha + c$ , donde:

$$\begin{cases} a = q_1^* q_2^* C.s \\ b = 2 \left[ q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right] \\ c = 4 \end{cases}$$

La segunda condición de Schur se cumplirá para los valores de  $\alpha$  tales que las ordenadas de los puntos de la parábola sean positivas ( $y > 0$ ). Como en nuestro caso  $a > 0$  tendremos una parábola en forma de  $U$ . Para calcular la abscisa del vértice de dicha parábola tendremos:

$$\alpha_v \rightarrow y' = 0 \rightarrow 2a\alpha + b = 0 \rightarrow \alpha_v = \frac{-b}{2a}$$

Se observa que **la abscisa del vértice de la parábola coincide con el umbral de estabilidad que requiere la primera condición de Schur:**

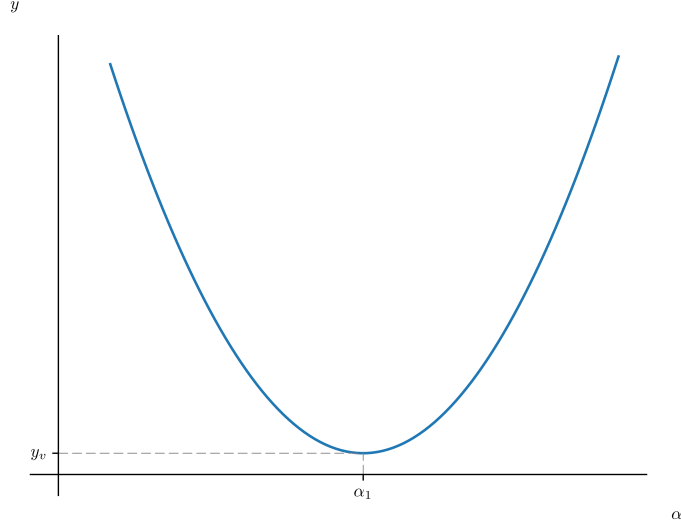
$$\alpha_v = -\frac{\left( q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right)}{q_1^* q_2^* C.s} = \alpha_1 \quad (4.2.9)$$

Para obtener la ordenada del vértice, sustituimos  $\alpha_v$  en la expresión de la parábola:

$$y_v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

Como  $a > 0$  cuando  $\Delta < 0$  se cumplirá para todo  $\alpha$  que  $y_v > 0$ , lo que implicará que se satisfará la segunda condición de Schur y por lo tanto el umbral de estabilidad vendrá dado por  $\alpha_1$  (4.2.7). Ver *Figura 4.2*

Figura 4.2: Forma de la parábola  $y = a\alpha^2 + b\alpha + c$  cuando  $\Delta < 0$ ,



Si se diese el caso de que  $\Delta = 0$ <sup>3</sup> la ordenada del vértice sería  $y_v = 0$ . Esto implicaría que la segunda condición de Schur se cumplirá para  $\alpha < \alpha_1 < \alpha$ , lo que supondrá que el umbral de estabilidad seguirá siendo  $\alpha_1$ .

La ordenada del vértice ( $y_v$ ) será mayor o igual que cero si y solo si  $b^2 - 4ac \leq 0$  es decir:

$$4 \left[ q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right]^2 - 16q_1^* q_2^* C.s \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4q_1^* q_2^* C.s \geq \left[ q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right]^2$$

Por otro lado cuando  $\Delta > 0$  ver *Figura 4.3*, es decir

$$4q_1^* q_2^* C.s < \left[ q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right]^2$$

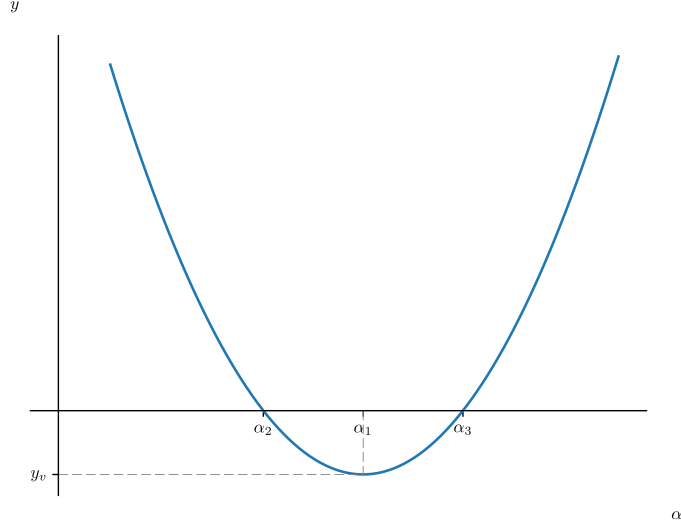
tendremos que  $y_v < 0$ , por lo que existirán  $\alpha_2$  y  $\alpha_3$  verificando  $\alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_3$  tal que:

$$1 - T + D > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \alpha_2 \\ \alpha > \alpha_3 \end{cases}$$

<sup>3</sup>Este caso particular aparecerá cuando las empresas sean simétricas ( $q_1^* = q_2^* = q^*$ ) y las segundas derivadas cruzadas se anulen,  $\frac{\partial \Pi_i^*}{\partial q_i \partial q_j} = 0$



Figura 4.3: Forma de la parábola  $y = a\alpha^2 + b\alpha + c$  cuando  $\Delta > 0$ ,



La segunda condición de Schur se cumplirá para los valores positivos de la parábola. Como el cumplimiento de la primera condición de Schur impone que para que exista estabilidad local  $\alpha < \alpha_1$  (4.2.7) y  $\alpha_2 < \alpha_1$  el umbral que asegura la estabilidad será  $\alpha_2$ , siempre que  $\alpha_2 > 0$ . Por lo tanto tendremos que asegurarnos que  $\alpha_2$  es positivo:

$$\alpha_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Como  $a > 0$  tendremos que  $\alpha_2 > 0 \Leftrightarrow -b > \sqrt{\Delta}$ . Sabemos por lo que hemos impuesto que  $-b, \Delta > 0$ , por lo que podemos elevar al cuadrado la inecuación:

$$b^2 > b^2 - 4ac$$

Como  $ac > 0$  esto se cumplirá siempre.

Por lo tanto el umbral de estabilidad será:

$$\alpha_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha_1 - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Tendremos que el  $\alpha_2$  que nos marcará el umbral de estabilidad será:

$$\alpha_2 = -\frac{\left(q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} - q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2}\right)}{q_1^* q_2^* C.s} - \frac{\sqrt{\left(q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2}\right)^2 - 4q_1^* q_2^* C.s}}{q_1^* q_2^* C.s} \quad (4.2.10)$$

En conclusión se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 4** Dado un duopolio dinámico en el que las empresas siguen la regla de ajuste del gradiente con iguales velocidades de ajuste, si se cumple la condición de Schwarz (4.1.7) el umbral de  $\alpha$  que asegura la estabilidad del equilibrio de Nash será:

- Si

$$4q_1^*q_2^*C.s \geq \left[ q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right]^2$$

el umbral de estabilidad será  $\alpha_1$  dado en (4.2.7)

- Si

$$4q_1^*q_2^*C.s < \left[ q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right]^2$$

el umbral de estabilidad será  $\alpha_2$  dado en (4.2.10)

## 5. Ejemplos de duopolios dinámicos

La literatura que estudia los modelos de oligopolio dinámico ha tendido a plantear especificaciones de demanda y costes concretas y a analizar las dinámica que sigue el modelo particular, siendo buenos ejemplo de ello [1] o [9]. A continuación se va aplicar el modelo teórico general que hemos planteado para obtener de manera inmediata las condiciones de estabilidad en dos modelos concretos y así ver su aplicación práctica.

### 5.1. Demanda lineal y costes marginales constantes

Dada una demanda lineal,

$$P(Q) = a - bQ \quad \text{con} \quad Q = q_1 + q_2, \quad a > 0, \quad b > 0$$

y unas funciones de costes con costes marginales constantes e iguales,

$$C(q_i) = cq_i \quad i = 1, 2$$

las funciones de beneficio quedarán definidas como:

$$\Pi_i = q_i (a - b(q_i + q_j)) - cq_i \quad \text{con} \quad c > 0, \quad a > c$$

**Modelo dinámico:** Si las empresas siguen la regla del gradiente el modelo que define la dinámica de las cantidades será:

$$\begin{aligned} q_{1,t+1} &= q_{1,t} + \alpha q_{1,t} \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} \\ q_{2,t+1} &= q_{2,t} + \alpha q_{2,t} \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Que con la especificación de las funciones de demanda y de costes adoptará la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q_{1,t+1} &= q_{1,t} + \alpha q_{1,t} [(a - c) - 2bq_{1,t} - bq_{2,t}] \\ q_{2,t+1} &= q_{2,t} + \alpha q_{2,t} [(a - c) - 2bq_{2,t} - bq_{1,t}] \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

El equilibrio de dicho sistema se dará cuando las empresas mantengan su producción constante  $q_{i,t} = q_{i,t+1} = q_i$ :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a - c}{2b} - \frac{q_2}{2} \\ q_2 &= \frac{a - c}{2b} - \frac{q_1}{2} \end{aligned}$$

Por simetría, la solución de dicho duopolio vendrá dada por:

$$q_1^* = q_2^* = q^* = \frac{a - c}{3b} \quad (5.1.3)$$

**Condiciones de estabilidad** Aplicando el *Teorema 4* podemos estudiar la estabilidad local y los umbrales de estabilidad a partir de las funciones de beneficios. Para ello necesitaremos calcular las sucesivas derivadas de dichas funciones evaluadas en el punto de equilibrio (5.1.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_i^*}{\partial q_i^2} &= -2b \\ \frac{\partial^2 \Pi_i^*}{\partial q_i \partial q_j} &= -b \end{aligned}$$

- Deberemos asegurar el cumplimiento de la condición de Schwarz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} &> \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2 \partial q_1} \\ 4b^2 &> b^2 \end{aligned}$$

La condición de Schwarz se cumplirá siempre. A partir de ahora denotaremos  $C.s = 3b^2$

- Como se verifica:

$$4q_1^*q_2^*C.s < \left[ q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right]^2$$

$$12q^{*2}b^2 < (-2q^*b - 2q^*b)^2$$

$$12q^{*2}b^2 < 16q^{*2}b^2$$

El umbral de estabilidad será  $\alpha_2$  y el equilibrio será asintóticamente estable si::

$$\alpha < \alpha_2$$

**Umbral de estabilidad:** A partir de la expresión de  $\alpha_2$  que hemos derivado podremos obtener el umbral de estabilidad que requiere el parámetro  $\alpha$ :

$$\alpha_2 = -\frac{\left( q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} - q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right)}{q_1^*q_2^*C.s} - \frac{\sqrt{4 \left( q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right)^2 - 16q_1^*q_2^*C.s}}{2q_1^*q_2^*C.s}$$

$$\alpha_2 = \frac{4q^*b}{3q^{*2}b^2} - \frac{\sqrt{64q^{*2}b^2 - 48q^{*2}b^2}}{6q^{*2}b^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{4}{3q^*b} - \frac{4}{6q^*b}$$

El umbral de estabilidad será:

$$\alpha_2 = \frac{2}{3q^*b} = \frac{2}{a-c} \quad (5.1.4)$$

**Simulación y diagrama de bifurcación** Si damos los siguientes valores a los parámetros que definen el modelo:

$$a = 4, \quad c = 1 \quad b = 1 \quad \text{por lo que} \quad q^* = 1$$

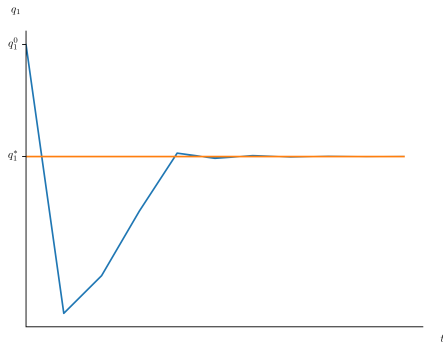
A partir de la expresión (5.1.4) podemos obtener analíticamente el siguiente umbral de estabilidad del parámetro de la velocidad de ajuste de las empresas:

$$\alpha < \alpha_2 = \frac{2}{3} \quad (5.1.5)$$

Si simulamos el sistema dinámico (5.1.2) apreciamos cómo el equilibrio de Nash deja de ser localmente estable cuando  $\alpha > \alpha_2$ . Se puede consultar el código de Python utilizado para estas simulaciones en el *Anexo A*.

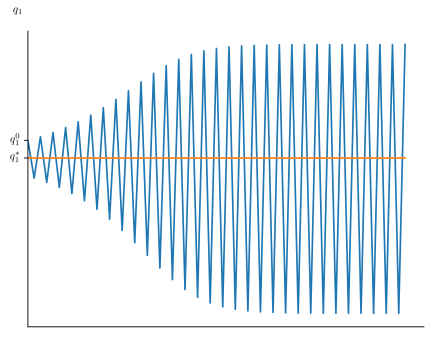
Figura 5.1: Diagramas de Fases del sistema (5.1.2)

(a) Equilibrio estable



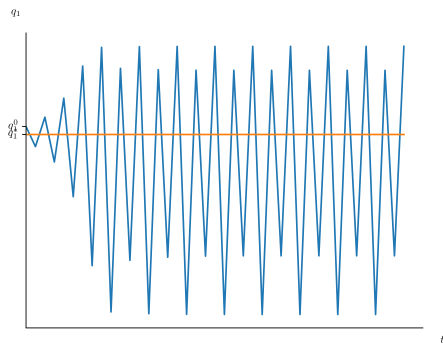
$$q_{1,0} = q_{2,0} = 1,6 \quad \alpha = 0,5 < \alpha_2$$

(b) Dos ciclo



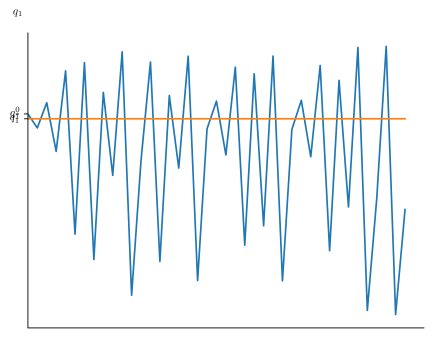
$$q_{1,0} = q_{2,0} = 1,06 \quad \alpha = 0,7 > \alpha_2$$

(c) Cuatro ciclo



$$q_{1,0} = q_{2,0} = 1,02 \quad \alpha = 0,83 > \alpha_2$$

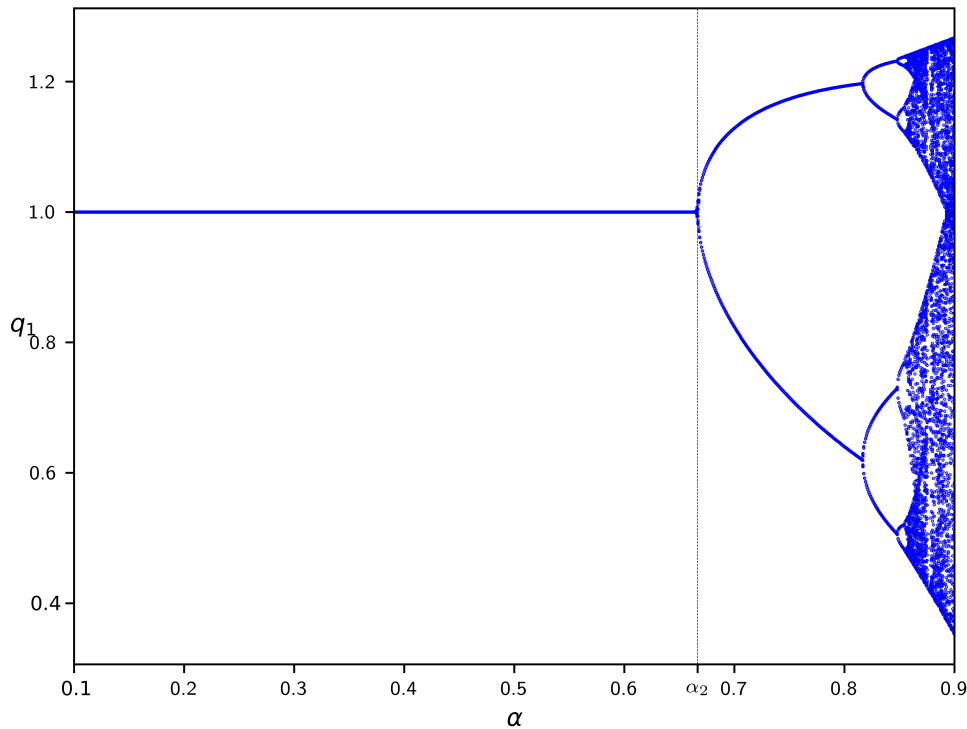
(d) Caos



$$q_{1,0} = q_{2,0} = 1,02 \quad \alpha = 0,95 > \alpha_2$$

Cuando un sistema dinámico como (5.1.2) incluye un parámetro es posible que el paso del parámetro por un valor crítico dé lugar a un cambio cualitativo en las trayectorias del sistema. El valor del parámetro en el que este hecho tiene lugar se conoce como *bifurcación* ver [4, C.24]. En nuestro caso el valor de  $\alpha$  (5.1.4) que hemos denominado umbral de estabilidad será un punto de bifurcación.

Figura 5.2: Diagrama de bifurcación del sistema (5.1.2)



En el diagrama de bifurcación presentado en la *Figura 5.2* se ha permitido variar el parámetro  $\alpha$  desde 0,1 hasta 0,9 obteniendo así un conjunto de valores de  $\alpha$  para los que el sistema dinámico (5.1.2) presenta comportamientos cualitativos diferentes. Vemos cómo el umbral de estabilidad  $\alpha_2$  que hemos obtenido a partir del modelo teórico es efectivamente un punto de bifurcación. A partir de dicho valor podemos observar como el equilibrio de Nash pierde su estabilidad; hasta valores cercanos a 0,8 se comporta a largo plazo como un dos ciclo, conforme aumenta el valor de  $\alpha$  pasar a ser un cuatro ciclo para finalmente adoptar un comportamiento caótico.

## 5.2. Demanda isoelástica y costes marginales constantes

Suponemos ahora una demanda isoelástica que se deriva de una función de utilidad de los agentes de tipo Cobb - Douglas:

$$P = D(Q) = \frac{k}{Q} \quad \text{con} \quad Q = q_1 + q_2, \quad k > 0$$

Definimos unas funciones de costes con costes marginales constantes iguales para ambas empresas:

$$C_i(q_i) = cq_i \quad i = 1, 2 \quad \text{con} \quad c > 0$$

Las funciones de beneficios quedarán definidas como:

$$\Pi_i = q_i \frac{k}{q_i + q_j} - cq_i$$

**Modelo dinámico con regla del gradiente:**

$$\begin{aligned} q_{1,t+1} &= q_{1,t} + \alpha q_{1,t} \frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} \\ q_{2,t+1} &= q_{2,t} + \alpha q_{2,t} \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Que en este caso concreto adoptará la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q_{1,t+1} &= q_{1,t} + \alpha q_{1,t} \left[ \frac{kq_{2,t}}{(q_{1,t} + q_{2,t})^2} - c \right] \\ q_{2,t+1} &= q_{2,t} + \alpha q_{2,t} \left[ \frac{kq_{1,t}}{(q_{1,t} + q_{2,t})^2} - c \right] \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

El punto de equilibrio será aquel para el cual las cantidades producidas permanezcan constantes  $q_{i,t+1} = q_{i,t} = q_i$ , esto implicará que :

$$\begin{cases} \frac{kq_2}{(q_1 + q_2)^2} - c = 0 \\ \frac{kq_1}{(q_1 + q_2)^2} - c = 0 \end{cases}$$

Las empresas son simétricas por lo que  $q_1^* = q_2^* = q^*$ , por lo tanto la producción de equilibrio para ambas empresas será:

$$q^* = \frac{k}{4c} \quad (5.2.3)$$

**Estudio de la estabilidad local:** Vamos a aplicar ahora el *Teorema 4* al modelo (5.2.2). Para ello necesitaremos calcular las segundas derivadas de las funciones de beneficios y evaluarlas en el punto de equilibrio (5.2.3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i^2} &= \frac{-2kq_j}{(q_i + q_j)^3} \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial q_i^2} = -\frac{k}{4q^{*2}} \\ \frac{\partial^2 \Pi^2}{\partial q_i \partial q_j} &= \frac{k(q_i - q_j)}{(q_i + q_j)^3} \rightarrow \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial q_i \partial q_j} = 0 \end{aligned}$$

1. Comprobaremos que se cumple la condición de Schwarz (4.1.7)

$$C.s = \frac{k^2}{16q^{*4}} > 0$$

2. Estudiamos cuál es el umbral de estabilidad:

$$4q_1^*q_2^*C.s = \frac{k^2}{4q^2}$$

$$\left[ q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right]^2 = \frac{k^2}{4q^2}$$

Como ambos términos son iguales el umbral de estabilidad será  $\alpha_1$  (4.2.7)

3. Calculamos el umbral de estabilidad:

$$\alpha_1 = -\frac{\left( q_1^* \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial q_1^2} + q_2^* \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial q_2^2} \right)}{q_1^*q_2^*C.s} = \frac{8q^*}{k} = \frac{2}{c}$$

**Simulaciones:** Podemos dar valores concretos a los parámetros del modelo, para ver cual es el comportamiento dinámico del oligopolio. Por ejemplo:

$$k = 32 \quad c = 4$$

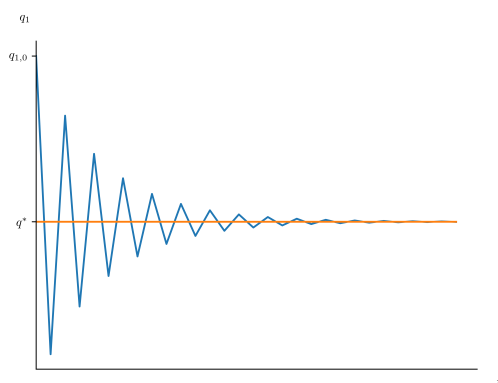
Lo que hará que el punto de equilibrio sea  $q_1^* = q_2^* = q^* = 2$ . Y nuestro umbral de estabilidad será:

$$\alpha_1 = \frac{2}{c} = 0,5$$

Podemos comprobar como cuando el parámetro de velocidad de ajuste ( $\alpha$ ) supera dicho umbral el equilibrio de Nash pierde la estabilidad local:

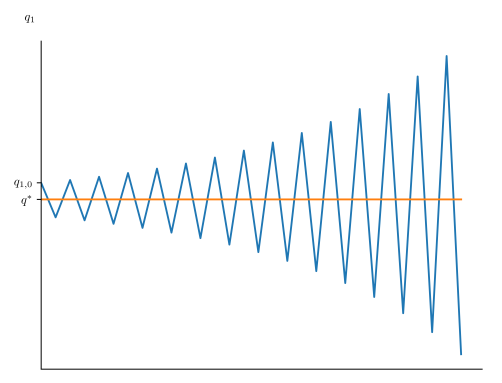
Figura 5.3: Diagramas de fases del sistema (5.2.2)

(a) Equilibrio estable



$$\alpha = 0,45 < \alpha_1$$

(b) Equilibrio inestable



$$\alpha = 0,52 > \alpha_1$$



El código de Python utilizado para elaborar estas simulaciones se puede consultar en el *Anexo B*

## 6. Conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido plantear un modelo teórico que sirva de marco general para algunos de los modelos concretos que han surgido en el estudio de las dinámicas oligopolistas. Como se ha reiterado en varias ocasiones este tipo de enfoque no ha sido habitual y los ejemplos de este tipo de trabajos no abundan en la literatura, un enfoque similar pero limitado puede observarse en [5]. Se ha conseguido formular dicho modelo y establecer bajo ciertos supuestos las condiciones formales para la estabilidad asintótica y se han comprobado sus aplicaciones a modelos concretos.

De los resultados teóricos obtenidos podemos extraer algunas conclusiones con claras implicaciones económicas. La condición de Schwarz (4.1.7) resulta crucial para la estabilidad de los oligopolios tanto estáticos como dinámicos. Se trata de una condición suficiente para la estabilidad de los oligopolios estáticos y también será una condición suficiente para la estabilidad asintótica de los modelos de oligopolio dinámicos con expectativas ingenuas y adaptativas. Por otro lado si las empresas siguen un esquema de formulación de expectativas más complejo como es la regla del gradiente se tratará de una condición necesaria y habrá que establecer restricciones sobre otros parámetros del modelo. Esta condición que adopta la forma:

$$\left| \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1^2} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2^2} \right| > \left| \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial q_1 \partial q_2} \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial q_2 \partial q_1} \right|$$

tiene una interpretación económica inmediata. Para que los modelos de duopolio aquí presentados sean estables es necesario que el beneficio marginal de las empresas varíe más ante cambios en su propia producción que ante cambios en la producción de sus rivales. Esto parece una condición razonable que se debe imponer a los modelos de duopolio independientemente de la industria en la que estemos pensando, ya que implica que las empresas no sobrerreaccionan ante cambios en la producción de los rivales.

Por otro lado, si las empresas siguen la norma de expectativas del gradiente, además de cumplirse la condición de Schwarz el parámetro  $\alpha$  no deberá superar ciertos umbrales para que se verifique la estabilidad asintótica del equilibrios de Nash. Hemos establecido dos expresiones para dicho umbral (4.2.7) y (4.2.10). El umbral de estabilidad vendrá determinado por las propiedades de la función de beneficios las que a su vez vienen determinadas por la estructura concreta de la demanda y los costes. Una continuación lógica de este trabajo sería estudiar dichas condiciones e intentar entender los factores económicos que están determinando que el umbral de estabilidad sea  $\alpha_1$  o  $\alpha_2$ .

El modelo dinámico con la regla del gradiente (4.2.5) tiene implícito un mecanismo de aprendizaje de las empresas ya que estas modificarán su producción en función del signo de su beneficio marginal. Así si la producción es inferior a la del equilibrio, las empresas observarán que su beneficio marginal es positivo lo que les inducirá a aumentar su producción, por lo tanto están “aprendiendo” de las señales que les envía el mercado. Por otro lado si las empresas se encuentran en el equilibrio su beneficio marginal será nulo y no tendrán incentivos a modificar su producción. Que este proceso de aprendizaje induzca a la estabilidad asintótica del modelo dependerá del parámetro  $\alpha$ , que se puede interpretar como la velocidad de ajuste ante los estímulos del mercado. Así si  $\alpha$  supera al umbral de estabilidad se estará produciendo una sobrerreacción por parte de las empresas que impide que el proceso de aprendizaje se complete e induce a la inestabilidad del sistema.

Un mecanismo de aprendizaje similar tienen lugar en el caso del modelo con expectativas adaptativas (4.2.3). Sin embargo en este caso no es necesario establecer ningún umbral de estabilidad sobre el parámetro  $\beta$  que representa la velocidad de ajuste. Si se cumple la condición de Schwarz el proceso de aprendizaje se completará y el equilibrio será asintóticamente estable.

A pesar de que el marco teórico que aquí se ha planteado permite deducir de manera inmediata las condiciones de estabilidad en ciertos modelos concretos no está libre de limitaciones. Los modelos a partir de los cuales hemos deducido las condiciones teóricas de estabilidad son de expectativas homogéneas aunque en los últimos años se han popularizado los modelos de expectativas heterogeneas como pone de

manifiesto [9]. Por otro lado en los modelos con expectativas adaptativas y con la regla del gradiente hemos supuesto que la velocidad de ajuste es igual para ambas empresas . Esta asunción no es muy restrictiva ya que en un duopolio es de esperar que ambas empresas tengan una estructura simétrica y sigan un comportamiento similar. Podríamos replicar lo que se ha expuesto en este trabajo para modelos de expectativas heterogéneas y con velocidades de ajuste diferentes aunque esto complicaría mucho el análisis y podría ser difícil llegar a alguna conclusión analítica.

La competencia perfecta a pesar de ser un marco que ayuda a comprender el funcionamiento de los mercados se trata de una abstracción muy alejada de la realidad. Si observamos nuestro entorno casi todas las empresas poseen cierto poder de mercado. La teoría económica no puede olvidarse de la importancia de la competencia oligopolista que está cobrando cada vez más relevancia en la economía debido a industrias como las telecomunicaciones, la informática y el software o la farmacéutica. Por ello es necesario ser capaces de introducir este tipo de competencia en los modelos económicos. Dada la importancia de la dinámica en la teoría económica moderna el tipo de trabajo formal que aquí se ha presentado resulta más relevante que nunca.

# Anexos

*Python* es un lenguaje de programación de uso general que ha logrado un gran popularidad entre la comunidad científica gracias a el uso de módulos como *Numpy* o *Matplotlib*. En el Anexo se van a presentar los algoritmos que he creado para simular los modelos de oligopolio dinámico que se han presentado en la *Sección 5*.

## A. Simulación demanda lineal y costes marginales constante

```
1 import numpy as np #modulo para trabajar con matrices y vectores
2 import matplotlib.pyplot as plt #modulo para realizar gráficos
3 from my_graphs import clean, portatil, save_data, open_data #modulo de
4 # creación propia para editar gráficos
5
6 # algoritmo que simula el modelo para los parametros deseados
7 def simulation(a, b, c, alpha, q10, q20, T, bifur):
8     index_set = range(T + 1)
9
10    q1 = np.zeros(len(index_set))
11    q2 = np.zeros(len(index_set))
12
13    q1[0] = q10
14    q2[0] = q20
15
16    for t in index_set[1:]:
17        q1[t] = q1[t-1] * (1+alpha*(a-c-2*b*q1[t-1]-b*q2[t-1]))
18        q2[t] = q2[t-1] * (1 + alpha*(a-c-2*b*q2[t-1]-b*q1[t-1]))
19    if bifur == 1:
20        return q1[-1]
21    if bifur == 0:
22        return q1
23    else:
24        return q1,q2
25
```

```

26
27 # DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN
28
29 #algoritmo que computa el diagrama de bifurcación
30 def bifurcation(a,b,c,q20,n,z):
31     alphas = np.linspace(0.1,0.9, n)
32     q0s = np.linspace(0.1,1.5,z)
33     valor = list()
34     parameter = list()
35
36     for alpha in alphas:
37         for x in q0s:
38             print(alpha)
39             q1 = simulation(a, b, c, alpha, x, q20, 700,1)
40             valor.append(q1)
41             parameter.append(alpha)
42
43     valor = np.array(valor)
44     parameter = np.array(parameter)
45
46     return parameter, valor
47
48 # representación gráfica del diagrama de bifurcación
49 a, b= bifurcation(4,1,1,1.1,1000,100)
50 a,b = my_data[0],my_data[1]
51 plt.plot(a, b, 'b.', ms=0.6)
52 clean(r"\alpha", r"q_1", 0, 0)
53 axes = plt.gca()
54 axes.axvline(2/3, linestyle ="—",color="k",linewidth = 0.25)
55 ax = plt.gca()
56 ax.set_xticks([2/3],[r'$\alpha_1$'])
57 plt.show()
58 plt.clf()
59
60 #DIAGRAMAS DE FASES
61
62 #valores iniciales
63 q1_0 =1.6
64 q1_0_2 = 1.02

```

```

65
66 #simulaciones para diferentes condiciones iniviales
67 x = simulation(4,1,1,0.5,q1_0,1.6,10,0)
68 x2 = simulation(4,1,1,0.7,1.06,1.06,30,0)
69 x3 = simulation(4,1,1,0.83,q1_0_2,1.02,30,0)
70 x4 = simulation(4,1,1,0.95,q1_0_2,1.02,30,0)
71 f = np.zeros_like(x)
72 w = np.zeros_like(x2)
73 f.fill(1) #valor de equilibrio
74 w.fill(1)
75
76 #representación gráfica equilibrio estable
77 plt.plot(x)
78 plt.plot(f)
79 clean(r't',r'q-1',1,1)
80 plt.gca().set_xlim(left=0)
81 plt.yticks([1,q1_0],[r'$q-1^*$',r'$q-1^0$'])
82 plt.clf()
83
84 #representación gráfica dos ciclo
85 plt.plot(x2)
86 plt.plot(w)
87 clean(r't',r'q-1',1,1)
88 plt.gca().set_xlim(left=0)
89 plt.yticks([1,q1_0_2],[r'$q-1^*$',r'$q-1^0$'])
90 plt.clf()
91
92 #representación gráfica cuatro ciclo
93 plt.plot(x3)
94 plt.plot(w)
95 clean(r't',r'q-1',1,1)
96 plt.gca().set_xlim(left=0)
97 plt.yticks([1,q1_0_2],[r'$q-1^*$',r'$q-1^0$'])
98 plt.clf()
99
100 #representación gráfica caos
101 plt.plot(x4)
102 plt.plot(w)
103 clean(r't',r'q-1',1,1)

```

```

104 plt.gca().set_xlim(left=0)
105 plt.yticks([1,q1_0_2],[r'$q_1^*$',r'$q_1^0$'])
106 plt.clf()

```

## B. Simulación demanda isoelastica y costes marginales constantes

```

1 import numpy as np #modulo que permite trabajar con matrices y vectores
2 import matplotlib.pyplot as plt #modulo para realizar gráficos
3 from my_graphs import clean, portatil #modulo de creación propia
4                                     #para editar gráficos
5
6 #simulación del modelo para los parámetros deseados
7 def simulation(k,c,q10,q20,alpha,T,bifur):
8
9     index_set = range(T)
10
11     q1 = np.zeros(len(index_set))
12     q2 = np.zeros(len(index_set))
13
14     q1[0],q2[0] = q10,q20
15
16     for t in index_set[1:]:
17         q1[t] = q1[t-1]+alpha*q1[t-1]*((q2[t-1]*k/(q1[t-1]
18                                     +q2[t-1])**2)-c)
19         q2[t] = q2[t-1]+alpha*q2[t-1]*((q1[t-1]*k/(q1[t-1]
20                                     +q2[t-1])**2)-c)
21
22     if bifur == 1:
23         return q1[-1],q2[-1]
24
25     if bifur == 0:
26         return q1,q2
27
28 #DIAGRAMAS DE FASES
29 # Equilibrio estable
30 q10 = 2.2
31 x = simulation(32,4,q10,q10,0.45,30,0)
32 q1 = x[0]

```

```

31 eq = np.zeros_like(q1)
32 eq.fill(2) #para poder representar el equilibrio
33
34 plt.plot(q1)
35 plt.plot(eq)
36 clean(r't', r'$q-1$', 1, 1)
37 plt.gca().set_xlim(left=0)
38 plt.yticks([2, q10], [r'$q^*$', r'$q_{1,0}$'])
39 plt.clf()
40
41 #Equilibrio inestable
42 q10_2 = 2.1
43 y = simulation(32, 4, q10_2, q10_2, 0.52, 30, 0)
44
45 plt.plot(y[0])
46 plt.plot(eq)
47 clean(r't', r'$q-1$', 1, 1)
48 plt.gca().set_xlim(left=0)
49 plt.yticks([2, q10_2], [r'$q^*$', r'$q_{1,0}$'])
50 plt.clf()

```



## Referencias

- [1] BISCHI, GI et al. (2010), *Nonlinear Oligopolies*, Springer.
- [2] CABRAL, L. (2012), “Oligopoly Dynamics”, *International Journal of Industrial Organization*, Vol. 30, No. 3, pp 278 - 282
- [3] FERNÁNDEZ, C (2003), *Ecuaciones diferenciales y en diferencias*, Thomson
- [4] GANDOLFO, G (1996), *Economic Dynamics*, Springer
- [5] HINLOOPEN, J (2015), *Stability, strategic substitutes, strategic complements*, Journal of Economics, Volume 116, Issue 2, pp 129–135
- [6] SELTEN, R. (1999), *What is Bounded Rationality?*, SFB Discussion Paper B-454
- [7] TIROLE, J. (1988), *The theory of Industrial Organization*, The MIT Press.
- [8] TIROLE, J & FUDENBERG, D. (2001), *Dynamic Models of Oligopoly*, Routledge.
- [9] TRAMONTANA, F (2010), ‘Heterogeneous duopoly with isoelastic demand function’, *Economic Modelling*, Volume 27, Issue 1, pp 350–357
- [10] VIVES, X. (1989), “Cournot and the oligopoly problem”, *European Economic Review*, Volume 33, Issues 2–3, pp 503-514
- [11] VIVES, X. (2001), *Oligopoly Pricing: old ideas and new tools*, The MIT Press