



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Enseñanza de la suma y resta en segundo curso de
Educación Primaria

Teaching of addition and subtraction in second year
of Primary Education

Autor

CAROLINA CATALÁN GAIMÓN

Director

RAFAEL ESCOLANO VIZCARRA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2016-2017

ÍNDICE

RESUMEN	5
SUMMARY	6
INTRODUCCIÓN	7
I. MARCO TEÓRICO	8
1. La resolución de problemas aritméticos y su relación con la metodología de resolución de problemas	8
1.1 Diferentes interpretaciones de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas	9
1.2 Resolución de problemas aritméticos	10
1.3 Clasificación de problemas aritméticos aditivos de una etapa	11
2. Dificultades en la resolución de problemas aritméticos	16
3. Características de la enseñanza de la suma y resta en Educación Primaria.	23
3.1 La Resolución de problemas en el currículo actual de Educación Primaria.	23
3.2 Análisis de un libro de texto	25
II. MARCO EXPERIMENTAL	33
4. Prueba indagatoria inicial	33
4.1 Contexto de la experimentación	33
4.2 Diseño de una prueba para estudiar la comprensión	33
4.3 Desarrollo de la prueba y primeros resultados	36
4.4. Conclusiones a partir de los resultados obtenidos en la prueba indagatoria	45
5. Diseño, desarrollo y evaluación de una propuesta parcial de enseñanza	47
5.1 Diseño de la intervención	47
5.2 Problemas propuestos en la primera sesión	51
5.3 Problemas propuestos en la segunda sesión	54
5.4 Problemas propuestos en la tercera sesión	55
5.5. Desarrollo y resultados de la intervención	55
5.6 Conclusiones de la intervención	65
III. CONCLUSIONES	69
REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍCAS	75
ANEXOS	77
ANEXO I. PRUEBA INDAGATORIA	77
ANEXO II. RÚBRICA DE EVALUACIÓN INDAGATORIA	81
ANEXO III. EVALUACIONES DE LA PRUEBA INDAGATORIA	82

ANEXO IV. FICHAS DE LA INTERVENCIÓN	101
ANEXO V. RÚBRICA DE EVALUACIÓN DE LA INTERVENCIÓN	107
ANEXO VI. EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS DE INTERVENCIÓN	108

RESUMEN

Este trabajo está compuesto por un marco teórico y experimental. En el primero se profundizará sobre la resolución de problemas focalizando nuestra atención en dos aspectos: la clasificación de los problemas aditivos de una etapa y las dificultades que pueden tener los alumnos a la hora de resolver los problemas aditivos. También, partiendo del currículo vigente y del análisis del libro de texto, utilizado en el colegio donde se ha desarrollado la fase experimental, caracterizamos la enseñanza habitual de la suma y la resta en las aulas del primer ciclo de Educación Primaria.

Por otro lado, partiendo del marco teórico, se ha realizado una situación experimental en la que se ha hecho una prueba diagnóstica enfrentando a los alumnos de un grupo de 2º curso de Educación Primaria a ocho problemas que cubren los tres tipos más elementales de la clasificación de problemas aditivos. Posteriormente los alumnos de este grupo clase han recibido enseñanza de problemas aditivos de comparación. Se han analizado los resultados de intervención y, finalmente, se presentan las conclusiones de este trabajo.

PALABRAS CLAVE: Suma y resta de números naturales, significado de una operación, Resolución de problemas, Dificultades de aprendizaje, Currículo, Matemáticas, Educación Primaria.

SUMMARY

This academic work is composed of a theoretical and an experimental framework. In the theoretical framework, we are going to delve into resolution of problems. We are paying attention to two facets: the classifications of addition and subtraction problems of a stage and the difficulty which pupils have when they resolve different problems, to addition or to subtraction. Also, we consult the official curriculum and the textbook used by school, where we did the experimental framework, to know the education of the addition and subtraction in the classes in the first stage of Primary Education.

On the other hand, as for theoretical framework, we have created an experimental situation which we did a diagnostic test to a group of 2º in Primary. Pupils had to have resolved eight problems according to the first sort of problems of the classification. Afterwards, pupils had received a teaching of addition and subtractions to comparison problems. Finally, the results of the intervention are analysed and the conclusions of this work are presented.

KEYS WORDS: addition and subtractions of whole number, meaning of the operation, resolution of problems, difficult of learning, curriculum, Mathematics, Primary Education.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo proponemos la enseñanza de la suma y resta a través de la resolución de problemas y con este medio poder acceder al significado de cada operación según el tipo de problema que se presente. Para poder llevarlo a cabo necesitamos saber las variables que afectan al problema, las posibles dificultades del alumnado y el entorno educativo en el que están situados. Los objetivos que se han marcado en este trabajo son:

- 1) Realizar una búsqueda bibliográfica dentro de la Didáctica de las Matemáticas sobre la enseñanza del significado de la suma y resta de números naturales a partir del planteamiento y resolución de problemas aditivos de una etapa.
- 2) Completar la búsqueda bibliográfica sobre el estudio con las dificultades en la resolución de problemas aritméticos a partir de las clasificaciones de suma y resta de números naturales que están validadas desde la Didáctica de las matemáticas.
- 3) Caracterizar la enseñanza actual de la suma y resta en 2º curso de Educación Primaria desde el currículo oficial, LOMCE, y el análisis del libro de texto que trabajan en el colegio donde se va a llevar a cabo la fase experimental del trabajo.
- 4) Diseñar, desarrollar y evaluar una prueba indagatoria para detectar las dificultades de comprensión de los alumnos de un grupo clase de 2º curso de Educación Primaria cuando estos resuelvan ocho problemas aditivos de la clasificación de problemas aditivos de una etapa.
- 5) Diseñar, desarrollar y evaluar una propuesta parcial de enseñanza en el grupo de 2º de Educación Primaria sobre los problemas aditivos de suma y resta con el significado de la comparación, ya que después de analizar la prueba indagatoria los peores resultados fueron los de esta tipología.

I. MARCO TEÓRICO

1 La resolución de problemas aritméticos y su relación con la metodología de resolución de problemas

En la introducción de la asignatura Matemáticas que realiza el currículum aragonés de Educación Primaria se establecen indicaciones didácticas muy claras a favor de la resolución de problemas como metodología de enseñanza. Así lo indica la ORDEN de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA de 20/06/2014, p. 19543): “La resolución de problemas constituye el eje principal de la actividad matemática”.

La importancia que concede el currículo actual a la resolución de problemas se concreta en la inclusión de un bloque específico de contenido, denominado “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”, que presenta previamente a los bloques de números, medida, geometría, y estadística y probabilidad.

El objetivo del “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” es que los alumnos adquieran estrategias de resolución de problemas, que desarrollen su capacidad de razonamiento, intentando a la vez activar capacidades personales y el sentido de la apreciación y el agrado por las matemáticas.

Ahora bien, dado que el objeto de estudio de este trabajo es estudiar las dificultades de comprensión de la suma y la resta de números naturales y aportar indicaciones docentes para la enseñanza de la suma y resta a partir de la resolución de problemas aditivos en el segundo curso de Educación Primaria cabe entender que los problemas que propongamos a los alumnos con este objetivo no necesariamente deben ser los mismos que los que se propongan a esos mismos escolares para que aprendan las estrategias de resolución de problemas que se indican en el bloque “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”.

En estas condiciones cabe intuir que los docentes interpretan, del mismo modo que habrán hecho en otras reformas curriculares anteriores, la resolución de problemas con diferentes significados. Por lo que empezaremos comentando los diferentes usos de la resolución de problemas en las aulas de matemáticas.

1.1 Diferentes interpretaciones de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas

A lo largo de los años se han podido constatar diferentes perspectivas sobre la Resolución de Problemas en las aulas de Matemáticas. Luceño (1999) identifica tres usos de la resolución de problemas en las aulas de matemáticas:

1. **Enseñanza ‘para’ resolución de problemas** consiste en que la enseñanza de las matemáticas tiene como objetivo el enseñar a los alumnos su utilidad. Se trata de la interpretación más tradicional de esta metodología. En este caso el problema no es un medio didáctico para generar conocimiento. Los problemas aparecen al final de cada unidad y se supone que los alumnos han recibido la enseñanza suficiente de los conceptos para resolver con garantía de éxito. En muchas clases de matemáticas los problemas se presentan como meros ejercicios y a la hora de su realización los alumnos cuenta con un tiempo limitado y sin poder reflexionar sobre ellos.

2. **Enseñanza ‘sobre’ resolución de problemas** hace referencia al uso de los problemas para aprender estrategias y recursos que le favorecerá a resolver las diferentes situaciones que se le planten. De esta forma, el alumno reflexionará y analizará los procesos y/o fases que ha empleado. Desde el punto de vista de esta metodología interesa más el proceso que el resultado. El objetivo que se pretende al plantear un problema no radica en la enseñanza de un determinado contenido. El interés didáctico está en las estrategias que los alumnos deben poner en juego durante el proceso de resolución. Esta interpretación es la que plantea el currículo oficial en el bloque “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas.

3. **Enseñanza ‘vía’ resolución de problemas** utiliza la resolución de problema como el medio para enseñar los contenidos matemáticos. La resolución de problemas es un método de trabajo con entidad propia en el aula, que precede y justifica la aparición de los contenidos matemáticos.

Estas tres perspectivas están presentes en las aulas de Matemáticas en Educación Primaria. Ahora bien, entendemos que la enseñanza ‘para’ la resolución de problemas plantea una metodología obsoleta porque aunque haya que proponer ejercicios para consolidar técnicas y destrezas algorítmicas el foco de atención debería estar antes en los contenidos conceptuales que en los procedimentales. Admitiendo en determinados momentos esta última interpretación consideramos que habría que potencia la enseñanza *sobre* la Resolución de Problemas y la enseñanza ‘vía’ la Resolución de Problemas en las aulas de Educación Primaria.

En este trabajo nos vamos a centrar en la interpretación de *enseñanza ‘vía’ resolución de problemas* con el objetivo de detectar las dificultades en la comprensión de la suma y la resta de los alumnos en un grupo de 2º curso de Educación Primaria. Se realizará una prueba inicial y a partir de ella se diseñará y se llevará a la práctica una intervención para mejorar la comprensión de los alumnos al proponerles la resolución de diferentes tipos de problemas de suma y resta. En conclusión, vamos a emplear la resolución de problemas aritméticos como *vía* para la enseñanza de la suma y resta de números naturales a los alumnos de segundo curso.

1.2 Resolución de problemas aritméticos

Antes de todo tenemos que definir el término problema como aquella actividad o situación que plantea al alumno un reto a la hora de resolverlo (Luceño, 1999). Para Puig y Cerdán (1998) la resolución de problemas aritméticos es ‘*una actividad mental desplegada por el resolutor desde el momento en que, siéndole presentando un problema, asume que lo tiene delante es un problema y quiere resolverlo, hasta que se dé acabada la tarea*’.

En los problemas que son presentados al alumno encontraremos datos numéricos que pueden ser conocidos y desconocidos y que a través de la pregunta se pretenda buscar una o varias cantidades y/o las relaciones que hay entre ellas. Para alcanzar ese fin deberá de resolverlos a través de los procesos que él mismo ha creado, que se le ha proporcionado, etc. hasta llegar a la realización de una o varias operaciones aritméticos. (Puig y Cerdán 1998).

En nuestro caso, el objetivo es dotar de significado a las operaciones de suma y resta proponiendo a los alumnos de situaciones aditivas de una etapa, es decir, situaciones que se resuelven mediante una suma o una resta. En nuestro trabajo vamos a ceñir nuestro estudio a los problemas aditivos de una etapa consta de tres cantidades:

- Dos datos numéricos
- Una incógnita (la solución) que se obtiene sumando o restando los dos datos.

1.3 Clasificación de problemas aritméticos aditivos de una etapa

Según Cid y otros (2013) la comprensión que posee un individuo sobre el significado de las operaciones suma y resta depende de los diferentes problemas aditivos de una etapa que sabe resolver, cuantos más problemas sepa resolver mayor será su grado de comprensión. Como encontramos una gran variedad de problemas, estos se clasifican según las características que van a resolver el problema según la operación aritmética. De esta manera, tenemos un instrumento, la clasificación, que nos permite describir el tipo de problemas que dan significado a las operaciones de suma y resta.

El primer criterio que vamos a tener presente en la clasificación es el **tipo de acciones** que suceden en la situación: añadir o quitar, reunir o separar, o emparejar. Estas afectan a cada una de las cantidades que participan en el problema (los dos datos y solución) y pueden tener el siguiente valor:

- **Transformación:** cuando la cantidad indica una variación (aumento o disminución) que sufre una cantidad inicial en un intervalo de tiempo.
- **Comparación:** cuando la cantidad indica la diferencia (mayor o menor que) que existe en dos cantidades que se comparan entre sí.
- **Estado:** cuando la cantidad no se transforma ni compara otras cantidades.

Los valores que toman las tres cantidades que intervienen en la situación nos define la “**estructura semántica de la situación**”. Basándonos en esto, las situaciones aditivas atendiendo a la estructura semántica de la situación se clasifican en las siguientes categorías:

- **Categoría I. Estado-Estado-Estado (EEE).** Dos estado parciales (E_{p1} y E_{p2}), forman un estado total (E_t).
- **Categoría II. Estado-Transformación-Estado (ETE).** Un estado inicial (E_i) sufre una transformación (T) y pasa a ser un estado final (E_f)
- **Categoría III. Estado-Comparación-Estado (ECE).** Dos estados (E_1 y E_2) que se comparan (C).
- **Categoría IV. Transformación-Transformación-Transformación (TTT).** Una primera transformación (T_{p1}) seguida de otra transformación (T_{p2}) que equivalen a una transformación total (T_t).
- **Categoría V. Comparación-Transformación-Comparación (CTC).** Una comparación inicial (C_i) entre dos estados y una comparación final (C_f) después de que el primer estado sufre una transformación (T).
- **Categoría VI. Comparación-Comparación-Comparación (CCC).** Una comparación entre un estado 1 y un estado 2 (C_{12}), una comparación entre el estado 2 y un estado 3 (C_{23}) y otra comparación entre los estados 1 y 3 (C_{13}).

No obstante, en este trabajo nos vamos centrar en los problemas que se deberían de trabajar en un segundo curso de Educación Primaria: estos son los tres primeros tipos de problemas. Dado que dentro de cada categoría hay casos en los que la solución se obtiene sumando los datos y otros casos restando, se comprueba que la elección de la operación que resuelve no depende sólo de la categoría a la que pertenece la situación, sino que interviene otro criterio que es la **posición de la incógnita**, de modo que esta puede estar en cada uno de los tres valores que toman las cantidades de cada categoría. Teniendo en cuenta la posición de la incógnita vamos a considerar en nuestro estudio ocho tipos de problemas diferentes:

1. **Problemas de Estado-Estado-Estado (EEE):** En los problemas de este tipo se establece una relación estática entre el estado final y los estados parciales porque no añadimos un conjunto al otro, ambos asumen un papel equivalente en el problema. Normalmente en estos problemas vamos a ver las acciones de unir o agregar para la suma, o separar para la resta.

En estos problemas de EEE con la incógnita en el estado total la sentencia numérica, es decir, la representación formal de la operación que resuelve el

problema es: $a + b = I$ *En una clase hay 10 chicos y 9 chicas. ¿Cuántos alumnos hay en la clase?*

Cuando la incógnita se encuentra en un estado parcial la sentencia numérica es: $a + I = b$ o $I + a = b$.

En la plaza de mi casa hay 30 plantas. Si 18 son árboles y lo demás son flores. ¿Cuántas flores hay?

2. **Problemas de Estado-Transformación-Estado (ETE):** En estas situaciones se realizan acciones de añadir, quitar o completar.

Si el problema ETE tiene la incógnita en el estado final las sentencias numéricas pueden ser: $a + b = I$ cuando el sentido de la transformación es de aumento, o $a - b = I$ cuando el sentido de la transformación es de disminución.

Ayer tenía 20 cromos y mi madre me regala 10. ¿Cuántos cromos tengo ahora? (aumento)

Ayer compré 10 cromos pero perdí 5. ¿Cuántos cromos tengo ahora? (disminución)

Sin embargo, si la posición de la incógnita se encuentra en la transformación las sentencias numéricas son: $a + I = b$ cuando el sentido de la transformación es de aumento, o $a - I = b$ cuando el sentido de la transformación es de disminución.

Tenía ahorrados 20 euros y por mi cumpleaños me dan dinero. Ahora tengo 50 euros. ¿Cuánto dinero he recibido? (de aumento)

Salí de compras con 50 euros y compré una camiseta y un pantalón. Ahora tengo 15 euros. ¿Cuánto dinero he gastado? (de disminución)

Por último, dentro de este tipo de problemas si la incógnita está en el estado inicial las sentencias numéricas son: $I + a = b$ cuando el sentido de la transformación es de aumento, o $I - a = b$ cuando el sentido de la transformación es de disminución.

En las fiestas de mi pueblo me tocó el bingo. El bingo era de 300 euros. Ahora tengo 500 euros. ¿Cuánto dinero tenía antes de que me tocará el bingo? (de aumento)

Nos comimos 10 bombones entre los primos y ahora en la caja quedan 15. ¿Cuántos bombones había antes de invitar a los primos? (de disminución)

- 3. Problemas de Estado-Comparación- Estado (ECE):** La cantidad C indica la diferencia entre las dos cantidades y en este tipo de problemas se lleva a cabo la acción de comparar.

En los problemas de ECE con la incógnita en la comparación la sentencia numérica es: $a - b = I$ tanto si la comparación es “más que” o “menos que”.

Andrés tiene 34 canicas y Víctor 19. ¿Cuántas canicas tiene Andrés más que Víctor?

En cambio, si la incógnita está en el estado comparado la sentencia numérica es: $a + b = I$, si la comparación es “más que”, o $a - b = I$, si la comparación es “menos que”.

Alex tiene 15 euros más que Juan. Si Juan tiene 16. ¿Cuántos cromos tiene Alex? (“más que”)

Juan tiene 15 cromos menos que su hermano Alex. Si Alex tiene 31 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Juan? (“menos que”)

Si en el problema ECE tiene la incógnita en el estado de referencia la sentencia numérica es: $a + b = I$, si la comparación es “menos que”, o $a - b = I$, si la comparación es “más que”.

Un pantalón cuesta 35 euros más que una camiseta. Si el pantalón cuesta 60 euros. ¿cuánto cuesta la camiseta? (más que)

Una camiseta cuesta 35 euros menos que un pantalón. Si la camiseta cuesta 25 euros, ¿cuánto cuesta el pantalón? (“menos que”)

Normalmente los alumnos van a tener más dificultades en los problemas que se resuelven con una sentencia no canónica ($I - a=b$ / $a - I=b$) que una que sea canónica ($a + b = I$).

Aunque hemos descrito las sentencias numéricas correspondientes a los ocho tipos de problemas por un interés teórico para completar la información de la clasificación. En este trabajo no nos proponemos enseñar a los escolares estas sentencias numéricas porque nuestro objetivo es que los alumnos resuelvan los problemas mediante procedimientos informales aunque no sepan identificar la operación. No renunciamos en absoluto al objetivo final de que identifiquen la operación. Sin embargo, somos conscientes que en los momentos iniciales de enseñanza los alumnos deben resolver los problemas mediante procedimientos informales para que entiendan el enunciado del problema, comprendan las acciones que se sugieren en el enunciado y lo resuelvan aunque no lleguen a identificar la operación aritmética que lo resuelve.

Por último, dentro de las tipologías de problemas, podemos encontrar diferencias entre problemas entre estereotipados y no estereotipados. Los primeros se caracterizan por ser problemas más sencillos para los alumnos porque suelen ser más trabajados en las aulas de Educación Primaria y porque la sentencia numérica es conocida por ellos, por lo que no les supone ningún reto resolverlos. Estos tipos de problemas suelen enseñar más que los demás y son:

- Estado-Estado-Estado con la incógnita en el estado total y cuya sentencia numérica es: $a + b = I$.
- Estado-Transformación-Estado con la incógnita en el estado final y cuyas sentencias numéricas son: $a + b = I$ si es de aumento, y $a - b = I$ en el caso de disminución.
- Estado-Comparado-Estado con la incógnita en el estado comparado y cuya sentencia numérica es: $a - b = I$

Consideramos que los demás problemas son no estereotipados porque normalmente apenas se proponen en los libros de texto de las editoriales educativas. En estas condiciones es fácil presuponer que los alumnos van a resolver con mayor dificultad los problemas no estereotipados.

2. Dificultades en la resolución de problemas aritméticos

Para resolver un problema es muy importante tener en cuenta los procesos que vamos desarrollando a la hora de enfrentarnos a un problema (desde en el momento que lo leemos, lo procesamos hasta que lo resolvemos): la *construcción de una representación del problema* y los *procesos realizados en la resolución*. La mayoría de las veces vamos a encontrar más dificultades en la construcción de la representación del problema que en los procesos implicados en la resolución, que básicamente consisten en la realización de las operaciones aritméticas. Esto nos indica que las dificultades se centran en la identificación del problema más que en la realización de los cálculos aritméticos (Jimeno, 2006).

Encontramos más dificultades en la construcción de la representación por el esquema mental que posee el niño, es decir, si el alumno posee un buen esquema (construido a través de experiencias) cuando vaya a enfrentarse a un problema podrá ver las características y estructura del problema, permitiéndole crear las relaciones de la información que le proporciona. De esta forma, el alumno podrá crear la representación del problema (Jimeno, 2006). Por ejemplo, un alumno puede no comprender el enunciado de un problema por lo que ya el resultado que vaya a proporcionar la final en la solución va ser incorrecto porque no ha creado una representación de la situación. Sin embargo, aunque no haya identificado la representación ni la operación puede resolver bien el problema utilizando procedimientos informales con la ayuda del conteo. La comprensión del enunciado del problema y el establecimiento de las relaciones entre los datos del problema es un aspecto imprescindible para su correcta resolución.

El alumnado antes de entrar en la escuela, tanto en infantil como en primaria y sin conocer el mundo matemático, ya se enfrentan con situaciones de estas características pero no las resuelven de forma aritmética (Rico, 1998). Muchas veces los maestros no somos conscientes de que los alumnos pueden resolver problemas desde una perspectiva más original y diferente a la nuestra y por lo tanto deberíamos adaptarnos a ella si vemos que funciona y ayuda al alumno. Si analizamos la etapa de infantil, los alumnos modelan los problemas a través de diferentes técnicas, sobre todo representando con diferentes materiales los datos y las acciones necesarias para el problema. Esto se va

perdiendo poco a poco durante la etapa de Educación Primaria ya que los problemas se van volviendo más complejos y abstractos, y a los alumnos se les pide resolverlos a través de operaciones aritméticas (Carpenter, 1999). La práctica docente tiende a solicitar al alumno dar una respuesta rápida en el momento e identificar la operación. De esta forma, los alumnos en vez de pensar y reflexionar sobre el problema intentan resolverlo de forma precipitada diciendo la primera operación que les viene a la cabeza. Consideramos que esta no es una buena práctica docente y que sería deseable dejar más tiempo a los alumnos para resolver el problema, modelizando la situación que se plantea en el enunciado del mismo.

Nos consta que los alumnos que intentan resolver problemas aritméticos tienen dificultades para “*construir la representación del problema*”, es decir, tienen dificultades a la hora de representar situaciones concretas mediante una simbolización. Muchos niños utilizan procedimientos informales, como apoyo, para poder realizar esta transferencia como por ejemplo los dedos, materiales o representaciones gráficas pero cuando se les retira o no cuentan con él encontramos dificultades porque la representación se torna muy compleja (Jimeno, 2006). Los docentes deberían tener presente que el paso de modelización con objetos tangibles a la representación simbólica de la operación o sentencia numérica que resuelve el problema no es inmediata.

Otro aspecto metodológico a tener en cuenta es permitir que los alumnos utilicen diferentes estrategias y que las expliquen a pesar de que el resultado no sea el correcto. Cuando nos encontramos en una clase de Educación Primaria y vemos que lo ha resuelto de forma diferente los maestros están en alerta, sobre todo en los casos que dan un resultado incorrecto (Rico, 1998). De esta forma, si a los alumnos no se les da la opción de verbalizar el procedimiento utilizado para la resolución es difícil que creen estrategias propias que puedan ser útiles para el alumno.

En algunos casos los profesores no deberían de insistir tanto en que el alumnado intente resolver los problemas a través de una metodología tradicional sino buscar otras alternativas para ayudar a los alumnos y así minimizar sus dificultades. Por lo tanto, a la hora de enseñar a resolver problemas debemos concienciar a los niños que estas situaciones no se van a resolver de una forma mecánica ni al azar sino que deben de

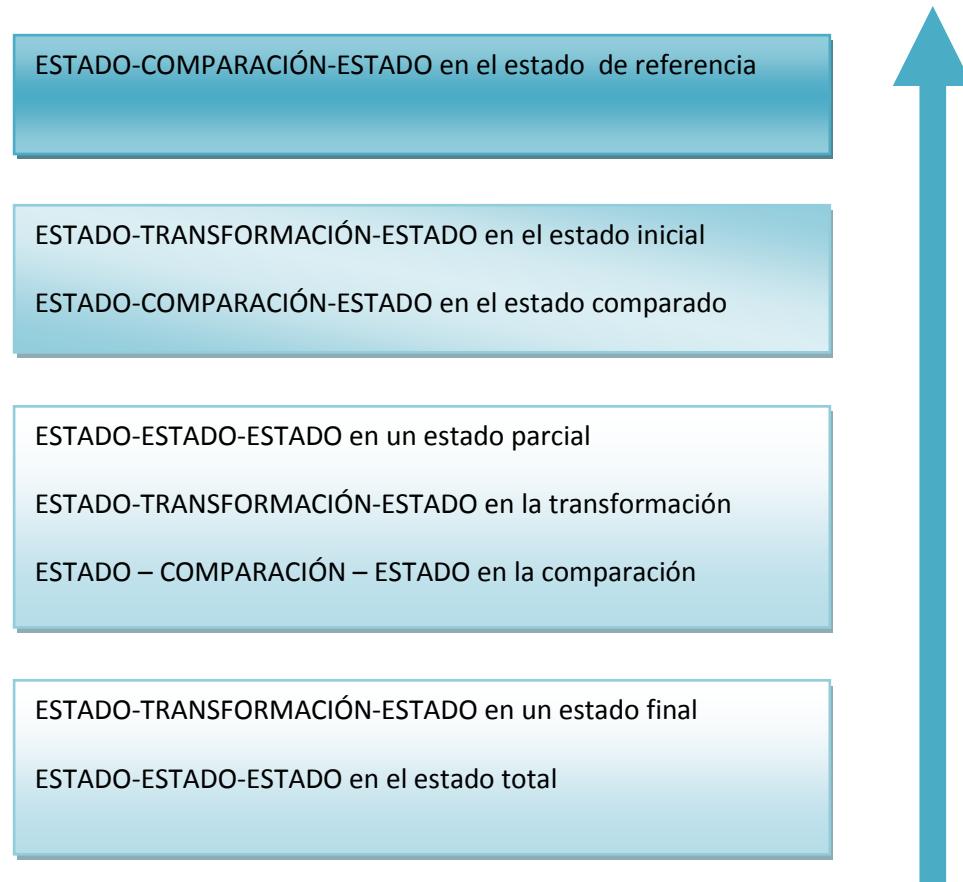
comprender bien el problema y buscar estrategias para mejorar su compresión como modelizar el problema con objetos tangibles, realizar un dibujo que represente el problema, etc. Hay que tener en cuenta, que la comprensión de una situación y el desarrollo de operaciones aritméticas no se llevan a cabo al mismo tiempo sino que va uno detrás de otro.

Por esto es muy importante que en el proceso de enseñanza aprendizaje haya comunicación entre el maestro y el alumnado. De esta forma tendrá un carácter recíproco, es decir, el alumno aprenderá nuevos conocimientos y hábitos a través de las indicaciones y guía de su maestro pero a la vez éste podrá encaminar la enseñanza por una vía u otra a través de los conocimientos previos, motivación y forma de trabajar de su alumnado (Rico, 1998). El alumno es el agente principal en este proceso, tanto en la resolución de problemas como en su aprendizaje y debemos de ser consciente de que el alumno está inmerso en un sistema educativo, por lo tanto su aprendizaje va a ser guiado por el maestro, su entorno social, familiar, y escolar, y que todas estas variables van a estar en interacción, y en muy pocas ocasiones se va a producir un aprendizaje natural. Por lo tanto, es muy importante tener en cuenta las características del alumno porque todo nuestro trabajo se va a centrar en él y su aprendizaje.

Antes de describir algunas de las dificultades a la hora de resolver problemas debemos de indicar que nos vamos a centrar en los problemas aditivos de una etapa y que nuestro ámbito de actuación va a ser 2º curso de Educación Primaria. Ahora vamos a explicar otras variables que consideramos que influyen en el grado de dificultad de los problemas.

Teniendo en cuenta las variables de la **estructura semántica y posición de la incógnita** aparecen ocho tipos de problemas con diferencias sustanciales en el grado de complejidad a la hora de resolverlos. Diferentes investigaciones sitúan como problemas más sencillos los problemas de EEE con incógnita en el estado total y los de ETE con la incógnita en estado final. En un nivel de mayor dificultad se sitúan los problemas de EEE en uno de los estados parciales, de ETE con la incógnita en la transformación y de ECE en la incógnita en la comparación. En un nivel de mayor dificultad encontramos a los problemas de ETE con la incógnita en el estado inicial y de ECE con la incógnita en

el estado comparado. Y, finalmente, en el de grado mayor de dificultad, los problemas de ECE con la incógnita en el estado de referencia.



Por otro lado, según Cid y otros (2013) debemos de tener en cuenta el nivel de **contextualización** del problema ya que cuanto más cercano sea a los alumnos mayor comprensión tendrá del enunciado del problema. Considerando esta variable podemos encontrar cuatro tipos de situaciones o problemas:

- *Situación contextualizada con el alumno como sujeto o actor principal de la situación.* El niño es el agente principal y con materiales presentes en el aula. Por ejemplo, en la mesa de clase tenemos 10 fichas y la maestra le dice al niño: *Quita 4 fichas de la mesa. ¿Cuántas fichas tienes ahora en la mesa?*
- *Situación hipotética y contextualizada para el alumno.* Son situaciones en las que el material didáctico nos ayuda a crear una representación simbólica. Ejemplo: Tenemos 6 fichas y la maestra dice: *Si tienes 6 euros y ahora te doy 4 euros más. ¿Cuánto dinero tienes ahora?* En estas situaciones el alumno tiene

que crear una representación, en este caso utilizar las fichas para representar el dinero.

- *Situación hipotética contextualizada para el alumno pero sin uso de material.* Cuando a los alumnos no se les facilita material didáctico, en una primera fase, los alumnos recurren a los dedos o al dibujo de palotes para efectuar los conteos necesarios. Posteriormente, en una segunda fase recurren a técnicas de cálculo orales o escritas. Un posible ejemplo de esta situación sería: *Lucía tiene 6 euros y su tío le da 4 más. ¿Cuántos euros tiene ahora?*
- *Situación hipotética contextualizada no familiar para el alumno.* Cuando la situación no tiene ninguna relación con la realidad del niño. *Una librería está haciendo una oferta en la compra de sus libros. El primer día venden 40 libros y el segundo 60. ¿Cuántos libros ha vendido entre los dos días?*

Otra variable que puede influir en la dificultad del problema es el **tamaño de los datos**. Cid y otros (2013) indican que a los alumnos les resulta más difícil interpretar correctamente una situación aditiva cuando mayor es el tamaño de los números que intervienen en ella.

Por último, otro de los factores que podemos tener en cuenta son las **características lingüísticas** (Ayala y otros, 2008):

- Número de caracteres del enunciado del problema.
- La complejidad gramatical que contiene.
- La presentación de los datos (si sobra alguno, palabras, gráficas, están en un dibujo, tabla, etc.)

A continuación vamos a explicar algunas dificultades que tienen los alumnos a la hora de resolver un problema. En esta graduación de dificultades vamos a tener presente la estructura semántica, la posición de la incógnita, la contextualización del problema, el tamaño de los números y las características lingüísticas del enunciado. Estas características estarán presentes al elegir los problemas que van a formar parte de la prueba indagatoria y en la intervención de enseñanza.

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987, citado por Rico, 1998) han realizado un estudio de los errores cometidos por los alumnos cuando resuelven problemas aritméticos y destacan los siguientes tipos de errores:

- **Mal uso de los datos (tanto numéricos como sintácticos).** En el primer caso, en el numérico, son las situaciones en la que los alumnos no han focalizado bien la atención en los datos del problema y a la hora de operar sí que han identificado bien la operación pero al equivocarse en uno de los datos el resultado ya es incorrecto. Por ejemplo, el alumno tiene que resolver el problema '*En la granja de mi tío hay doce gallinas y ocho patos. ¿Cuántas aves hay en total?*'. Esta se resuelve a través de la suma $12+8$, pero el alumno suma $12+7$.

En el caso sintáctico, sucede cuando el alumno no tiene familiaridad con los términos matemáticos por lo que le costará más establecer las relaciones entre los datos e incógnita y el contexto global del texto. Uno de los aspectos importantes son las palabras claves que encontramos en los problemas como por ejemplo '*más*', '*menos*', etc. El alumno al leerlas piensa que esa palabra corresponde con la operación aritmética que resuelve el problema entonces no termina de leer el problema completo. Por esta razón, al no llegar a leer bien el enunciado, esto provocará que no comprenda el problema ya que no habrá establecido las relaciones entre los datos y no podrá crear la representación. Por ejemplo, *si la camiseta vale 10 euros menos que el pantalón. Si la camiseta cuesta 15 euros. ¿Cuánto cuesta el pantalón?* En el caso que el alumno no tenga experiencia con este tipo de problemas cuando lea la palabra '*menos*' creerá que la resta resuelve el problema, siendo la operación incorrecta.

- **Dificultades a la hora de asimilar la información y a partir de ella crear una representación mental.** En este aspecto influye la comprensión, si el alumno no es capaz de establecer relaciones entre los datos e incógnita (causa y consecuencia), no llegará a comprender el problema y esto dificultará también a la creación de la representación. Este error está conectado con muchos aspectos, como la lectoescritura, la atención, términos matemáticos conocidos, etc.

- **Dificultades en el uso de distintas estrategias.** Si el alumno no posee diferentes estrategias esto le dificultará a la hora de enfrentarse a un problema porque no sabrá cómo resolverlo. En estas condiciones el alumno no sabrá modelizar el problema con representaciones gráficas o con materiales didácticos. Por esta razón, es necesario de que el alumno disponga de materiales manipulativo para modelizar el problema, que utilice dibujos o esquemas gráficos para representar los datos y la incógnita, y que utilice las sentencias numéricas ya sean canónicas o no canónica para representar la operación simbólica que resuelve el problema.
- **Conocimientos previos.** A través de la experiencia el alumno irá adquiriendo conocimientos nuevos que irán almacenando en su esquema mental y que posteriormente le ayudarán a identificar la estructura, tipología, etc. Si al alumno le falta estas variables tendrá dificultades a la hora de comprender el tipo de problema que se le presente porque no tendrá una experiencia anterior. Por ejemplo, en la prueba inicial (que se verá más tarde en este trabajo) los problemas que más errores hubo son los que eran menos conocidos para los alumnos.
- **Dificultades en los procesos metacognitivos.** El alumno debe ser capaz de reconocer si las estrategias que ha empleado a la hora de resolver un problema o la operación aritmética aplicada son correctos y rectificar si ve que ha fallado. Esto le permitirá juzgar su propio trabajo y corregir el error. Si el alumno no tiene desarrollados estos procesos, la manera en la que resolverá los problemas será diciendo ‘es suma o resta’ sin pensar lo que le pide el problema, y tampoco llegará a comprender su error.

3. Características de la enseñanza de la suma y resta en Educación Primaria.

3.1 La Resolución de problemas en el currículo actual de Educación Primaria.

Actualmente, la LOMCE presenta las Matemáticas como un área que ‘’permiten analizar fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, obtener informaciones y conclusiones que no estaban explícitas, identificar relaciones y estructuras, encontrar patrones, regularidades, leyes... y finalmente, actuar’’ (LOMCE, 2016 p.1). De esta forma permitirá al alumno hacer frente a situaciones en su vida que tienen una solución abierta, es decir, su realidad y las experiencias que van viviendo. Además, las Matemáticas las podemos encontrar en muchos ámbitos de nuestra vida como por ejemplo en la tecnología, música, etc.

El objetivo que busca las Matemáticas en la LOMCE es la alfabetización numérica, ‘’capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan números y sus relaciones’’ (LOMCE, 2016, pp.1) y para alcanzarla toma los procesos de resolución de problemas como ‘’eje principal de la actividad matemática’’ (LOMCE, 2016 pp.1). A través de esta resolución el alumno tendrá que alcanzar y resolver una serie de retos matemáticos. En estos procesos van a estar presentes una gran cantidad de capacidades, como por ejemplo planificar, crear estrategias y buscar recursos, reflexionar, entre otras.

Como el objetivo de este trabajo es detectar las dificultades en la comprensión de la suma y la resta a través de una perspectiva de *enseñanza vía la resolución de problemas* nos vamos a centrar en el segundo bloque que trata de los números en el 2º curso de Educación Primaria del currículo.

Respecto a los contenidos podemos observar que los números que trabajan son desde las unidades hasta el millar y las operaciones serán sumas o restas. A continuación, indicamos el criterio de evaluación junto a sus estándares que está relacionado con el contenido de la suma y resta:

- Crit.MAT 2.9 Resolver problemas relacionados con situaciones del entorno escolar y familiar que suponen la lectura, escritura, interpretación y

ordenación de números naturales hasta el millar aplicando operaciones de suma y resta explicando el proceso aplicado.

Este criterio se concreta en los dos estándares siguientes:

• Est.MAT.2.9.1. Resuelve problemas relacionados con situaciones del entorno escolar y familiar que suponen la lectura, escritura, interpretación y ordenación de números naturales hasta el millar aplicando operaciones de suma y resta.

• Est.MAT.2.9.2. Explica el proceso llevado en la resolución de problemas relacionados con situaciones del entorno escolar y familiar revisando las operaciones y las unidades de los resultados y comprobando e interpretando en el contexto la coherencia de las soluciones.

Valoramos positivamente que el currículo proponga que el significado de las operaciones suma y resta debe alcanzarse a través del planteamiento y resolución de problemas. No obstante, resulta preocupante que el currículo no nombre las acciones básicas asociadas a la suma y resta de números naturales, es decir, que no indique los significados asociados a las operaciones aditivas.

Además, de esta omisión consideramos que el currículo es poco orientador para el docente. En efecto, a pesar de que en la introducción de la asignatura Matemáticas del currículo aragonés de Educación Primaria realiza indicaciones didácticas genéricas sobre la resolución de problemas y que reproducimos en el siguiente párrafo consideramos que éstas son insuficientes para orientar la acción docente del profesorado.

En efecto, el documento oficial indica que: “*Todo problema plantea desafíos intelectuales, preguntas que resolver asociadas a situaciones reales, recreadas o simuladas. El alumno, inicialmente debe querer y poder entender el problema que debe estar en el marco de su lógica vital, ser atractivo, constituir en sí mismo un reto que mereza la pena superar. Su planteamiento puede incluir diversas tipologías textuales, asimilables y comprensibles para el alumno, y el contexto de la situación pertenecer al campo de sus intereses e inquietudes. Inicialmente el alumno no sabe cómo resolverlo y pone en marcha procesos como leer comprensivamente; reflexionar; debatir en equipo; establecer un plan de trabajo, revisarlo y modificarlo si es necesario; llevarlo a cabo y finalmente, utilizar mecanismos de autocorrección para comprobar la solución o su*

ausencia y comunicar los resultados como metodología de enseñanza” (BOA de 20/06/2014, p. 19543). Sin embargo, las “tipologías textuales, asimilables y comprensibles para el alumno” que menciona el documento oficial nada tienen que ver con las que se proponen desde la didáctica de las matemáticas y que se han mostrado eficaces para plantear una enseñanza progresiva y adecuada del significado de la suma y resta de números naturales vía la resolución de problemas.

3.2 Análisis de un libro de texto

Actualmente uno de los instrumentos que utilizan los colegios para impartir las matemáticas es el libro de texto. Éste es una herramienta que nos permite reforzar con ejercicios las explicaciones dadas. Habitualmente los docentes proponen a sus alumnos la resolución de problemas que están enunciados en los libros de texto. Por esta razón, vamos a analizar los tipos de problemas que propone la editorial Edelvives, libro que usan en el colegio donde se va a desarrollar la fase experimental.

El libro de 2º curso de esta editorial estructura cada tema en diferentes apartados: *números, operaciones, medidas, geometría, estadística y probabilidad, y resolución de problema*. El texto trabaja aspectos generales de la resolución de problemas en el apartado “*;Sin problemas!*”. En este apartado se pretende enseñar técnicas generales de resolución a través de la “*enseñanza sobre la resolución de problemas*”. A pesar de que en estas páginas no trabajan necesariamente problemas aritméticos vamos a analizarlas porque en bastantes ocasiones propone la resolución de problemas aritméticos. Aunque el currículo de las Matemáticas tiene como eje principal los procesos de la resolución de problemas estos casi no aparecen a lo largo de las unidades, en algunas como mucho encontramos dos o tres problemas.

Entrando en el análisis de la propuesta de enseñanza que realiza esta editorial sobre la resolución de problemas aditivos observamos que en todas las unidades los temas, excepto en el 3, 5 y 9, se plantean trabajar problemas aritméticos de suma y resta. Ahora vamos a analizar los diferentes tipos de problemas que encontramos en el libro según la *estructura semántica* y la *posición de la incógnita*:

1) Problema de Estado- Estado-Estado:

Con la incógnita en el estado total: *A Yang le ha gustado tanto el juego de las latas que lanza de nuevo y obtiene 21 puntos. ¿Cuántos puntos ha obtenido en total entre las dos tiradas?* (p.20)



Con la incógnita en un estado parcial: *Al final de la primera parte había 149 espectadores en el polideportivo. ¿Cuántas personas podrán entrar todavía a ver el partido?* (p. 77)



De esta tipología encontramos algún problema no estereotipado pero a lo largo del libro predominan los problemas con la incógnita en el estado total.

2) Estado -Transformación -Estado

Con la incógnita en estado final: *En una competición hay 368 caballos. Si los 95 que se lesionaron en la primera prueba son los que no participan en la siguiente, ¿cuántos caballos llegan a la segunda prueba?* (p.71).

Con la incógnita en la transformación: *Yin quiere conseguir de premio un peluche que cuesta 58 puntos. ¿Cuántos puntos le faltan?* (p.20)



Respecto a los problemas con la incógnita en el estado inicial no encontramos ninguno de ellos a lo largo del libro.

- 3) De los problemas de ECE solamente encontramos problemas con la incógnita en la comparación, omitiendo los problemas que tienen la incógnita en el estado comparado y en el de referencia.

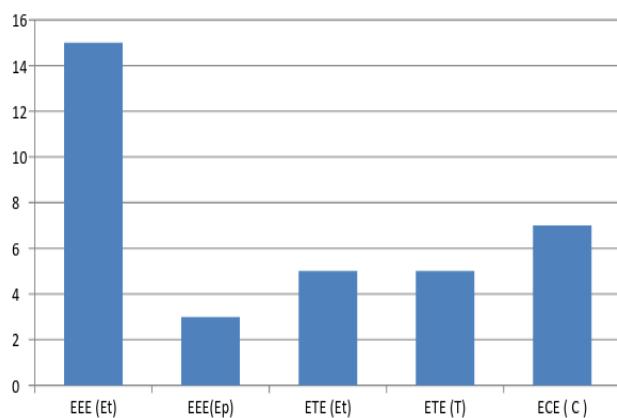
Rubén tiene 128 canicas y Raúl, 182. ¿Cuál de los dos tiene más canicas?. (p.34)

En el libro de texto encontramos los tres tipos de estructura semántica indicadas anteriormente: EEE, ETE y ECE, pero no se trabajan los ocho tipo de problemas según la colocación de la incógnita.

Como podemos observar en los ejemplos y en la gráfica, la mayor parte de los problemas son estereotipados, dejando a un lado los no estereotipados. Los que más predominan son los de EEE con la incógnita en el total, es decir, los problemas más sencillos. Despues de estos le siguen los problemas de comparación, transformación (los dos tipos que presenta el libro) y por último EEE en un parcial.

EEE (E_t)	EEE (E_p)	ETE (E_f)	ETE (T)	ECE (C)
15	3	5	5	7

TIPOLOGÍA DE PROBLEMAS

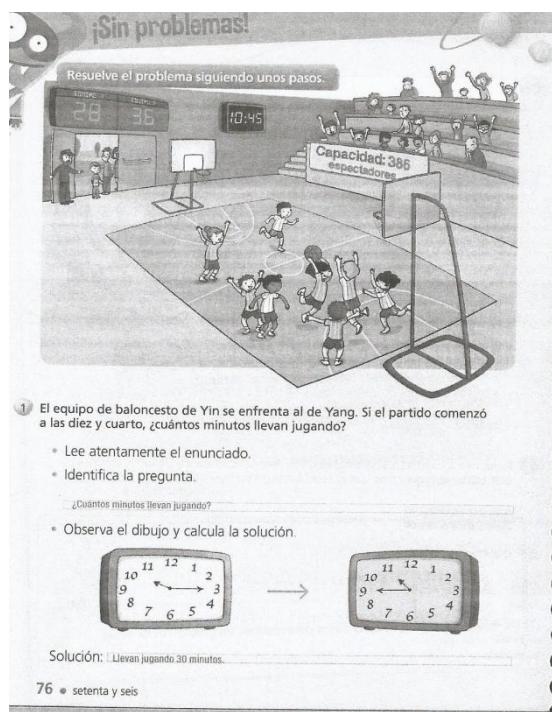


Otra característica que podemos examinar de estos problemas es su grado de contextualización. En el actual currículo indica que los problemas presentados a los escolares deben de situarse en un contexto familiar del alumno, es decir, un entorno conocido para ellos. Si tenemos en cuenta la contextualización vamos a observar que

todos los problemas que plantea el libro están alejados de los intereses de los alumnos. Aunque estos intenten acercarse, por ejemplo a través de sus gustos o preferencias, nunca llegarán a conocer su realidad concreta. Uno de los ejemplos que podemos confirmar esta afirmación es: *Cristina tenía 328 rosas en su jardín. Si esta semana ha recogido 139 rosas marchitas, ¿cuántas rosas tiene ahora en su jardín?* (p.93).

También, podemos analizar en este apartado de resolución de problemas es el referido al trabajo autónomo, uso de estrategias, recursos y diferentes formas de presentar de los datos a los alumnos.

Primero, podemos observar que el libro de texto ofrece diferentes recursos y herramientas para desarrollar los pasos que debe de seguir a la hora de resolver un problema.

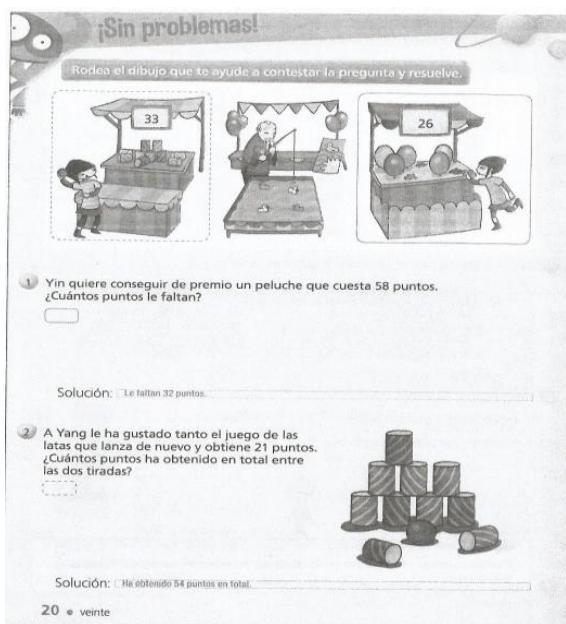


En este ejemplo podemos observar que indica al alumno que lea atentamente el enunciado y después de ello que piense la pregunta según lo leído anteriormente. Además el alumno puede ver los datos de dos formas representadas: una en el enunciado (diez y cuarto) y en el dibujo de arriba, y por otro lado en los dos relojes que indica el libro que observe. Por último, tiene que escribir la solución.

Dado que este trabajo es muy guiado y pautado, una de las dificultades que podemos encontrar posteriormente es que el alumno sólo siga estos pasos y no sea

autónomo y capaz de buscar otras estrategias para diferentes situaciones a las planteadas al libro.

Por otro lado, encontramos que el libro presenta diferentes formas de comunicar los datos del problema. Por lo que el alumno no tiene que estar pendiente solamente del enunciado sino que tiene que completarlo con la información que le proporciona unas imágenes que representan una historia, pictogramas, gráficos de barras, etc. Por ejemplo, en los temas 1 y 9 los datos están representados a través de ilustraciones. En el tema 7 los problemas se trabajan a través de las tablas de gráficos y pictogramas. A pesar de que esta forma de presentar el enunciado es novedosa, conviene poner en cuestión su idoneidad didáctica porque a veces la comprensión del problema se ve dificultada por introducir códigos extraños para el alumno. Éste es el caso del problema 1 de la página 20:



En esta página podemos observar lo difícil que resulta resolver el primer problema porque no hay ningún dato que nos ayude a hallar cuál de los dibujos de arriba corresponde con el enunciado. Al ser el libro del maestro podemos identificar que es el tercero pero si no lo tuviéramos tendríamos que pasar al siguiente problema y ya podríamos identificar cuál de ellos corresponde (ya que en el segundo problema hace referencia a que la niña tira latas).

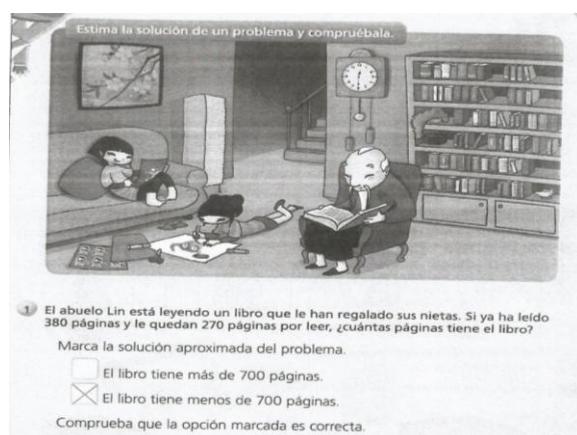
Por otro lado, el libro de texto anima al alumno a reflexionar sobre los procesos o pasos que ha utilizado para resolver el problema. Para desarrollar este aspecto siempre encontramos al final del apartado pequeñas indicaciones como:

Reflexiona qué te ha resultado más sencillo, estimar la solución del problema o calcularla. (pp.193)

¿Qué has tenido en cuenta para escribir las preguntas a partir de los enunciados? Comparte con tu compañero la respuesta. (pp.221)

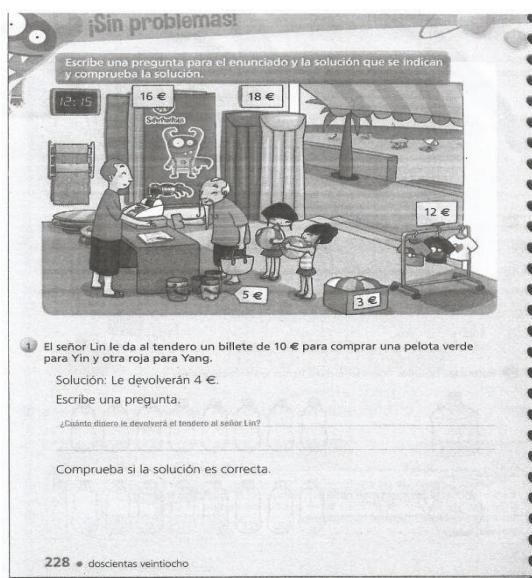
Esto es un recurso tanto para el propio alumno como para el maestro. Respecto al alumno le ayudará a reflexionar sobre los pasos y procesos que ha hecho durante la realización y de esta forma podemos trabajar la metacognición. Si lo indican oralmente les ayudará a observar si lo que han hecho está bien o mal y así en situaciones posteriores sabrán rectificar si tienen alguna duda de cómo lo han hecho. Para el profesor le ayudará a descubrir las estrategias que realizan sus alumnos y esto le será útil a la hora de hacer frente a las dificultades aritméticas.

Además, encontramos otras propuestas a la hora de enfrentarse a la resolución de problemas. Una de ellas es la posibilidad de que los alumnos realicen una estimación del resultado de la operación y a través de ella nos ayudará observar que la acción que ha necesitado para estimar es la correcta o no, ya que se verá posteriormente en la operación aritmética. También ayudará al alumno porque si el resultado obtenido no encaja con lo que había pensado al principio, esto será una señal para el alumno y lo revisará.



En la unidad 12 encontramos que la incógnita cambia de posición transformando problemas estereotipados a no estereotipados. El alumno conoce la solución del

problema (la incógnita) y al conocer todos los datos tiene que plantear la pregunta. De esta forma, el alumno tiene que pensar y analizar toda la estructura del problema y las acciones que se llevan a cabo para resolverlo.



Otro recurso que utiliza mucho este libro es que el alumno identifique la pregunta del problema, como vemos en el problema anterior, de esta forma establecerá relaciones entre los datos proporcionados, buscará la incógnita que necesite para resolver el problema y así hallar la pregunta.

Por último, en el tema 8 propone al alumno que reescriba el problema de forma más breve y sencilla. De esta manera, el alumno primero tendrá que comprender la pregunta, así luego podrá identificar los datos importantes y plasmar un nuevo enunciado el problema anterior. Además, es una manera de que el niño trabaje las estructuras semánticas de los problemas

Este es el tercer año que las fiestas se celebran con una carrera popular. Entre niños y adultos, el primer año se apuntaron 78 personas, el segundo año participaron 188 y a esta última carrera se han apuntado 276 personas. ¿Cuántos corredores en total han participado los dos últimos años?

Escribe el enunciado de forma más sencilla y resuelve.
Reseña libre.

Solución: Los dos últimos años han participado 464 corredores en total.

Este también es el tercer año que el señor Lin colabora en la organización de la carrera. Todos los años, se reparten 6 premios para los primeros clasificados. ¿Cuántos premios llevan entregados en total durante todos estos años?

Escribe el enunciado de forma más sencilla y resuelve.
Reseña libre.

Solución: Llevan entregados 18 premios en total durante los tres años.

¿Para qué te ha servido escribir los enunciados de los problemas de forma más sencilla? Expícalo a tus compañeros.
Reseña libre.

ciento cincuenta y tres • 153

Como conclusión, los problemas que plantea el libro de texto son de carácter estereotipado, dejando a un lado los problemas no estereotipados. De esta forma, la idea que tienen los alumnos de las matemáticas es la de repetir mecánicamente ciertas acciones para conseguir una solución (Carpenter, 1999). En ocasiones la práctica educativa está influenciada por el libro de texto, y los conocimientos aritméticos impartidos en clase se limitan a lo que indica el libro (Ayala y otros, 2008).

Por ello, se debería de trabajar todos los tipos de problemas, siempre respetando el nivel del alumnado, porque así los alumnos tendrán diferentes retos y no estarán resolviendo constantemente el mismo tipo de problema. También, se tendría que presentar la incógnita en diferentes posiciones y así el alumno observará que el resultado no solamente está al final de la acción sino en el medio (transformación, comparación, etc.) o al inicio. Por otro lado, establecer una conexión con su realidad y así puede que estén más motivados e interesados en resolver los problemas porque se verán involucrados. De esta manera, los alumnos cambiarán la concepción que tienen de las matemáticas y verán su utilidad en su día a día.

Por último, podemos observar que sigue la creencia, y un concepto tradicional, de que la enseñanza de resolución de problemas se debe de tratar al finalizar el tema en vez de utilizar como medio para enseñar nuevos conceptos aritméticos (Gaulin, 2001).

II. MARCO EXPERIMENTAL

4. Prueba indagatoria inicial

4.1 Contexto de la experimentación

La experimentación se llevó a cabo en el colegio *La Purísima y San Antonio* de Zaragoza. Se realizó la prueba inicial y la intervención al grupo de 2º de Educación Primaria. Esta clase está formada por 28 alumnos, 18 chicos y 10 chicas. El ambiente que hay en el grupo es bueno y agradable ya que se trabajan muchas dinámicas para favorecerlo como la enseñanza entre iguales. En cambio, encontramos un alumno que siempre intenta ser el centro de atención y no siempre tiene buena relación con sus compañeros por sus acciones, por ejemplo molesta, no hace la tarea demandada, etc. Respecto al área de matemática hay dos alumnos que trabajan con la profesora de pedagogía terapéutica: uno de ellos es ACNEAE y el otro tiene un plan de refuerzo, con ambos se refuerza la asignatura. También hay cuatro alumnos que tienen dificultades en el pensamiento lógico, es decir, a la hora de establecer relaciones. Uno de ellos es hiperactivo y otra alumna es TDAH. También encontramos varios repetidores, cinco en total, entre ellos los dos últimos alumnos nombrados y el ACNEAE.

4.2 Diseño de una prueba para estudiar la comprensión

Se ha diseñado una prueba inicial con problemas de las ocho tipologías presentadas anteriormente con el objetivo de observar y analizar la comprensión, procesos y estrategias que utilizan los alumnos a la hora de resolver un problema aritmético.

De esta forma nos permitirá analizar diferentes aspectos del alumnado en el momento en el que se enfrentan a un problema aritmético, por ejemplo la comprensión del enunciado, si han creado la representación de la situación, si se equivocan de datos, la realización de la operación, etc.

Por otro lado, se busca observar si el alumno utiliza diferentes técnicas antes de decidir la operación aritmética como tal, es decir, si utilizas representaciones o dibujos, entre otras más estrategias que normalmente no se dan en la escuela.

En esta prueba encontraremos problemas tanto estereotipados como no estereotipados para ver cómo se desenvuelven los alumnos. En este trabajo vamos a considerar los problemas estereotipados los siguientes subtipos: EEE con la incógnita en el estado total, ETE con la incógnita en el estado final, y ECE en la comparación. También se han introducido todos estos tipos de problemas para comparar la resolución de problemas que ven en su día a día y que predominan en la escuela con las situaciones que no se trabajan tanto. Por lo que nos permitirá contrastar los resultados entre estas dos categorías de problemas, los estereotipados y los no estereotipados. Los problemas presentados en la prueba son:

- 1) El problema de EEE con la incógnita en un parcial, un problema no estereotipado. Este tipo de problema se ve en la escuela pero no con la frecuencia con la que se presenta los problemas de EEE con la incógnita en el estado total.

Tienes 37 caramelos de dos sabores, de naranja y de limón. Si 18 caramelos son de limón, ¿cuántos son de naranja?

- 2) Es un problema de ETE y uno de los tipos que se suelen proponer en las aulas porque la incógnita la encontramos en el estado final. Al ser un problema más sencillo se han utilizado cantidades más altas, en este caso de tres cifras.

Para el recreo han preparado 340 bocadillos. Si han bajado 156 alumnos al patio y todos ellos han comido un bocadillo. ¿Cuántos bocadillos se han quedado sin comer?

- 3) Problema de ECE con la incógnita en el estado de referencia, es un problema que normalmente no encontramos en las clases de matemáticas. Al no ser trabajado, será uno de los problemas que puede que tengan dificultades a la hora de resolverlo o más dudas tengan.

Una camiseta cuesta 35 euros menos que un pantalón. Si la camiseta cuesta 19 euros, ¿cuánto cuesta el pantalón?

- 4) Problema de ETE con la incógnita en el estado inicial, un problema no estereotipado.

Sales de casa con dinero y te compras una mochila que cuesta 35 euros. Si ahora te quedan 55 euros, ¿con cuánto dinero saliste de casa?

- 5) Problema de ECE con la incógnita en la comparación. Es uno de los problemas estereotipados ya que en esta etapa todos los problemas de esta tipología plantean la incógnita está situada en la comparación.

Juan tiene 46 pinturas de colores y Samuel tiene 19. ¿Cuántas pinturas tiene Juan más que Samuel?

- 6) Problema de EEE con la incógnita en el estado total, es un problema estereotipado. Al ser un problema conocido los datos planteados son más altos.

Hoy en una competición de ajedrez han asistido 184 chicos y 191 chicas. ¿Cuántas personas han ido a la competición?

- 7) Problema de ETE con la incógnita en la transformación, al no trabajarse tanto en el aula nos encontramos ante un problema no estereotipado.

Tienes 35 cromos y tu mejor amigo te regala algunos. Si ahora tienes 60 cromos. ¿Cuántos cromos te ha regalado tu amigo?

- 8) Problema de ECE con la incógnita en el estado comparado y es un problema no estereotipado. Es otro de los posibles problemas que pueden tener dificultades a la hora de resolverlo.

Una camiseta cuesta 35 euros menos que un pantalón. Si el pantalón cuesta 60 euros, ¿cuánto cuesta la camiseta?

Se presentará esta prueba como un experimento en el cual tienen que ayudarme a realizar un trabajo para que no piensen que se trate de un examen y así evitar que se sientan presionado por una eventual calificación.

Aunque a los alumnos no se les va a calificar mediante esta prueba indagatoria hemos fijado con precisión los criterios de evaluación con el objetivo de analizar la comprensión de los escolares sobre la suma y la resta de números naturales a partir de la resolución de problemas aditivos en el nivel de segundo de primaria. Estos criterios son:

- Identifica la operación aritmética para resolver la operación

A través de este criterio, evaluaremos si el alumno ha comprendido el problema, por lo tanto habrá creado una representación y habrá identificado la acción que nos lleva a resolver el problema (sumar o restar).

- No identifica la operación aritmética pero resuelve el problema a través de una estrategia informal como recurrir a un conteo o bien pensar en la operación recíproca a la canónica.

Aunque no haya utilizado la opción de resolver el problema a través de la operación aritmética y haya usado otra estrategia, esto nos quiere decir que el alumno ha comprendido el problema y ha sido capaz de representarlo pero de una forma diferente a la tradicional.

- Aplica correctamente la operación aritmética

Independientemente si el alumno ha identificado o no la operación correcta, este criterio nos ayudará a observar si el alumno tiene alguna dificultad a la hora de aplicar el algoritmo de la suma o la resta.

4.3 Desarrollo de la prueba y primeros resultados

La prueba se realizó el día 20 de Marzo a los veintiocho alumnos del grupo de segundo de primaria. El tiempo que tuvieron para realizar esta prueba fue de 100 minutos aprovechando dos sesiones consecutivas de clase de matemáticas. Los alumnos estaban sentados en parejas o en tríos, excepto la primera fila que estaban cinco alumnos juntos. No obstante, la profesora estuvo al tanto para que los alumnos resolvieran los problemas de modo individual.

En la siguiente tabla indicamos el número de alumnos que identificaron correctamente la operación de cada uno de los ocho problemas:

EEE (E _p)	ETE (E _f)	ECE (E _r)	ETE (E _i)	ECE (C)	EEE (E _t)	ETE (T)	ECE (E _c)
37-18	340-156	35+19	35 + 55	46 -19	184+191	60 – 35	60 – 35
21	28	10 ¹	21	19	26	16	23

En la siguiente tabla indicamos el número de alumnos que resuelven correctamente cada uno de los ocho problemas de propuestas:

¹ 5 de los 10 alumnos sin ayuda de preguntas. Los otros 5 fueron guiados por preguntas por la maestra para que los alumnos comprendieran el enunciado.

EEE (E _p)	ETE (E _f)	ECE (E _r)	ETE (E _i)	ECE (C)	EEE (E _t)	ETE (T)	ECE (E _c)
37-18	340-156	35+19	35 + 55	46 -19	184+191	60 – 35	60 – 35
15	14	9	21	14	21	18	14

Como podemos observar en los resultados globales respecto a la identificación de la operación aritmética los problemas que están más habituados a resolver, los problemas EEE con la incógnita en el estado total y ETE con la incógnita en el estado final, son los que mejor resultados han obtenido. Aunque, podemos observar que hay problemas que no trabajan habitualmente que han tenido resultados positivos como en ECE con el estado comparado o ETE en el estado inicial. Sin embargo, si ahora analizamos los problemas que han obtenido buenos resultados, muchos alumnos han identificado la operación pero han tenido dificultades a la hora de aplicar el algoritmo, sobre todo en la resta con llevadas. Estos resultados son coherentes respecto al nivel en el que nos movemos y confirman las diferentes investigaciones que se han hecho a lo largo de los años. En los casos que hay más alumnos que han resuelto correctamente el problema es porque en ETE en la transformación hay alumnos que lo han resuelto a través de la sentencia no canónica, y el otro caso, ECE en el estado de referencia hubo algunos alumnos que supieron resolverlo con ayuda.

A continuación se va analizar los problemas y van ser presentados en orden decreciente del indicador ““identifica la operación”. Comenzaremos por el problema que ha tenido más éxito y concluiremos con el problema cuya operación ha resultado más difícil de identificar a los escolares.

- El problema **ETE** con la incógnita en el estado final es el problema que todos los alumnos han identificado la operación aritmética (340 – 156) pero no todos la han resuelto correctamente. Catorce de los veintiocho alumnos han cometido errores y podemos observar que ha sido porque han tenido dificultades en la resta. Esto nos indica que aún no tienen interiorizada la resta con llevadas y siguen teniendo dificultad. Por ejemplo algunos de ellos se olvidan la llevada por lo tanto arrastran el error, si es en las unidades o decenas, otros invierten la posición del minuendo y sustraendo, y algunos también hacen una mezcla entre

la suma y la resta por ejemplo pueden sumar las unidades y restar las decenas. Un ejemplo de esta última técnica errónea lo aporta el siguiente alumno:

2. Para el recreo han preparado 340 bocadillos. Si han bajado 156 alumnos al patio y todos ellos han comido un bocadillo. ¿Cuántos bocadillos se han quedado sin comer?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

$$\begin{array}{r} 340 \\ - 156 \\ \hline 296 \end{array}$$

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

lo han quedado sin come
296

- En el problema **EEE** con la incógnita en el estado total, excepto dos alumnos, todos han sabido identificar la operación para resolver el problema pero unos pocos alumnos se han equivocado en la realización de la suma ($184 + 191$). Algunos se han equivocado en la suma de las decenas o centenas, lo que provoca que este error condicione lo que falte de aplicar de operación, otros se han equivocado al escribir algún dato del problema, como por ejemplo en vez de 191 escribe 194.

En el caso de los dos alumnos que no han identificado la operación y lo han resuelto a través de una resta, esto nos indica que no han establecido las relaciones para comprender el problema y no han sido capaces de representarlo mentalmente. También nos permite observar los procesos metacognitivos ya que si hubieran comprendido el problema hubieran visto que si van menos competidores que niños y niñas hubieran rectificado al darse que la solución que indica carece de sentido.

2. Hoy en una competición de ajedrez han asistido 184 chicos y 191 chicas. ¿Cuántas personas han ido a la competición?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

$$\begin{array}{r} 84 \\ - 191 \\ \hline 007 \end{array}$$

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

han ido a la competición 7 personas

• En el problema **ECE** con la incógnita en el estado comparado observamos los mismos errores respecto al algoritmo de la resta, es decir, 23 alumnos identifican la operación (60-35) pero tan sólo 14 lo han resuelto correctamente ya los demás alumnos han tenido algún error en las restas con las llevadas o han cambiado la posición del minuendo y sustraendo.

De los problemas de ECE es el que más resultados positivos se han obtenido. Esto ha podido ser así porque en el enunciado indicaba que ‘Una camiseta cuesta 35 euros *menos que* un pantalón’ por lo que al leer menos lo han relacionado con la operación aritmética de la resta. Comprobamos que los alumnos utilizan palabras claves para identificar la operación. En este caso, esta estrategia inadecuada les ha servido para acertar en la resta.

• En el problema **ETE** con la incógnita en el estado inicial, 21 identificaron la operación (uno con ayuda) y todos lo resolvieron correctamente. Aunque estos alumnos no hayan resuelto el problema adecuadamente sí que saben que la respuesta es ‘el dinero con el que salí de casa’. Sin embargo, encontramos dos casos que no son así:

Uno de ellos en la respuesta indica que ‘20 euros es lo ha gastado’. Durante la prueba el alumno pidió ayuda e indicó que lo había entendido pero al ver lo escrito en el papel no comprendió el enunciado y opta por cambiar el enunciado del problema a uno estereotipado de ETE con la incógnita en el estado final. Veamos la solución que aporta:

4. Sales de casa con dinero y te compras una mochila que cuesta 35 euros. Si ahora te quedan 55 euros, ¿con cuánto dinero saliste de casa?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

$$\begin{array}{r} 55 \\ - 35 \\ \hline 20 \end{array}$$

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

Se ha gastado 20 euros.

Otro alumno ha utilizado como estrategia alternativa la operación recíproca para resolver este problema, la sentencia no canónica $X - 35 = 55$, pero no la resuelve correctamente porque yerra en la llevada. Este alumno ya ha realizado este tipo de estrategia en otros problemas pero siempre sin éxito porque tiene dificultades en la resta con llevadas. Aunque este alumno tendría que mejorar este aspecto, es un

ejemplo de que los problemas se pueden resolver de una forma diferente, utilizando una sentencia no canónica como la que propone el alumno y que mostramos a continuación:

4. Sales de casa con dinero y te compras una mochila que cuesta 35 euros. Si ahora te quedan 55 euros, ¿con cuánto dinero saliste de casa?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

$$\begin{array}{r} 80 \\ - 35 \\ \hline 55 \end{array}$$

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

Salgos de casa con 80 euros

• En el problema de **EEE** con la incógnita en un parcial encontramos que 21 alumnos han reconocido la operación aritmética (37-18) y alguno de ellos ha utilizado una estrategia diferente, en este caso, hacer un dibujo. Si observamos las dificultades y errores observamos que algunos alumnos han identificado la operación pero que no la han resuelto correctamente, esto se debe a que cometen errores al aplicar el algoritmo de la resta, como se han comentado anteriormente. Por ejemplo, este alumno invierte la posición del sustraendo y minuendo, y además se equivoca en un dato al escribirlo ya que en vez de 37 escribe 38.

1. Tienes 37 caramelos de dos sabores, de naranja y de limón.
Si 18 caramelos son de limón, ¿cuántos son de naranja?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

$$\begin{array}{r} 18 \\ - 38 \\ \hline 20 \end{array}$$

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

hay 20 caramelos de naranja

Por otro lado, están los alumnos que no han identificado la operación aritmética y han resuelto con una suma. Esto nos indica que el alumno no ha construido correctamente la representación del problema que narra el enunciado,

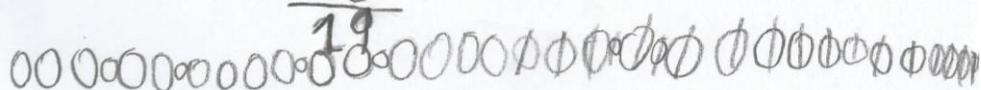
por lo que no ha comprendido el texto. Además, en los casos que han resuelto con una suma podemos observar que la realización de esta es correcta, lo que nos señala que con el algoritmo de la suma no tienen tantas dificultades como en el de la resta.

Por último, hay tres alumnos que han empleado la técnica de dibujar y les ha ayudado a comprender el problema. Ha habido un alumno que ha dibujado los datos del problema, que le han ayudado a representar y construir lo que pedía el problema. De esta forma, ha podido confirmar si lo ha resuelto correctamente.

- ✓ 1. Tienes 37 caramelos de dos sabores, de naranja y de limón.

Si 18 caramelos son de limón, ¿cuántos son de naranja?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

$$\begin{array}{r} 23716 \\ -18 \\ \hline 19 \end{array}$$


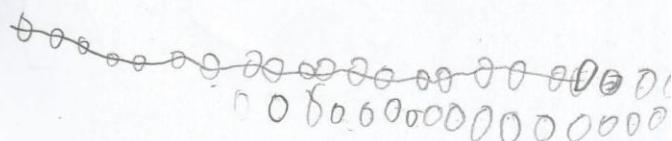
RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

Hay 19 de naranja.

- ✓ 1. Tienes 37 caramelos de dos sabores, de naranja y de limón.

Si 18 caramelos son de limón, ¿cuántos son de naranja?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):



RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

Hay 19 caramelos.

Este alumno no identifica la operación resta pero comprende el problema y sabe resolverlo mediante la modelización y el conteo, ya que va tachando caramelos. Consideramos importante que la enseñanza propicie que los alumnos

puedan poner en juego estas estrategias con el objetivo de que vayan avanzando hacia una estrategia más evolucionada como es la identificación de la operación.

• El problema **ECE** con la incógnita en la comparación que se resuelve con la resta (46-19) en el cual la pregunta del enunciado aparece el cuantificador ‘más qué’, encontramos nueve alumnos que se guían por la palabra clave ‘más que’ y optan erróneamente por la operación suma.

En este caso, la alumna está utilizando la palabra clave ‘más que’ para decidir, erróneamente, que es un problema de suma. También, el escribir en la respuesta ‘en total’ posiblemente sea consecuencia de que la mayoría de los problemas que resuelven los alumnos son de tipo EEE con la incógnita en el estado total.

1. Juan tiene 46 pinturas de colores y Samuel tiene 19. ¿Cuántas pinturas tiene Juan más que Samuel?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 46 \\ \hline 19 \\ \hline 65 \end{array}$$

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

En total Juan tiene 65 pinturas.

También, mostramos la respuesta de un alumno que identifica la operación aunque yerra al aplicar el algoritmo de la resta pero el alumno identifica que Samuel necesita la diferencia para tener lo mismo que Juan. Por lo tanto, esto nos indica que el alumno sabe que Juan es el que más pinturas tiene y Samuel el que menos.

1. Juan tiene 46 pinturas de colores y Samuel tiene 19. ¿Cuántas pinturas tiene Juan más que Samuel?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

$$\begin{array}{r} 46 \\ - 19 \\ \hline 33 \end{array}$$

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

A Samuel le quedan 33 para tenerlo
mismo

• En el problema **ETE** con la incógnita en la transformación que se resuelve con una resta ($60 - 35$), encontramos varios alumnos que han resuelto el problema con una suma por lo que nos indica que los alumnos no han sido capaces de crear la modelización del problema. De los 16 que identifican la operación, todos la resuelven correctamente el problema, solamente uno comete errores al realizar la resta. Es decir, hay 8 alumnos que no modelizan correctamente el problema, dado que hay tres que son capaces de interpretar mediante una suma.

Estos tres alumnos que utilizaron para resolver el problema la sentencia no canónica, $35 + X = 60$, dos de ellos lo resolvieron con éxito. Esto nos indica que crearon una representación del problema en la que los cromos que tenía y los cromos regalaron daban a los que tenía ahora.

✓ 3. Tienes 35 cromos y tu mejor amigo te regala algunos. Si ahora tienes 60 cromos. ¿Cuántos cromos te ha regalado tu amigo?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

$$\begin{array}{r}
 35 \\
 + 25 \\
 \hline
 60
 \end{array}$$

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

Mi mejor amigo me regaló 25 cromos

• En el problema **ECE** con la incógnita en el estado de referencia. Es el problema que más ayuda necesitaron y en el que menos alumnos identificaron la operación aritmética, tan sólo 10 de los 28 alumnos identificaron la suma ($35 + 19$). El principal problema que han tenido los alumnos a la hora de comprender este enunciado ha sido la comparación “menos que” que induce a los alumnos a optar por la operación resta como solución del problema. Los alumnos que pidieron ayuda pensaban que la camiseta valía 35 euros, olvidándose el ‘menos que’ y cuando lo volvían a leer les costaba comprender este término. Pero a través de volverlo a leer, preguntándoles ¿cuál costaba menos?, o ¿cuál de los dos objetos era más caro? lo comprendían. El uso de palabras clave, en este caso “menos que”, provoca que el alumno no siga prestando atención a lo que indica el enunciado porque irá a restar las dos cantidades sin saber si es lo que pide el problema o no.

Este tipo de problemas no se da habitualmente en la escuela, y por eso la tasa de éxito es muy inferior a la del problema de ECE con la incógnita en la comparación. En estos últimos los resultados han sido más positivos porque son los más conocidos dentro de esta tipología. Por otro lado, los problemas con la incógnita en el estado comparado también han tenido mejores resultados seguramente porque los alumnos se han apoyado en la palabra clave de la comparación y que en ese caso induce al éxito de los alumnos que utilizan las palabras clave para identificar la operación a pesar de que no comprendan la estructura semántica del problema.

Todos los alumnos que han identificado la operación resuelven correctamente la suma salvo el alumno que mostramos a continuación que se confunde en uno de los datos del problema:

3. Una camiseta cuesta 35 euros menos que un pantalón. Si la camiseta cuesta 19 euros, ¿cuánto cuesta el pantalón?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

$$\begin{array}{r} 1 \\ 35 \\ + 16 \\ \hline 51 \end{array}$$

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):
El pantalón cuesta 51€.

Por último, dentro del grupo que ha identificado la operación encontramos un alumno que dibuja los datos del problema y entre ellos indica con el símbolo mayor cual es que más cuesta. Al principio solamente iba dejar esa respuesta pero después con la ayuda del dibujo vio la operación aritmética.

✓ 3. Una camiseta cuesta 35 euros menos que un pantalón. Si la camiseta cuesta 19 euros, ¿cuánto cuesta el pantalón?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):


$$\begin{array}{r} 35 \\ - 19 \\ \hline 59 \end{array}$$

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):
El pantalón cuesta 59€.

4.4. Conclusiones a partir de los resultados obtenidos en la prueba indagatoria

Los resultados de esta prueba nos llevan a unas ideas sobre la comprensión de la suma y resta de números naturales que poseen los alumnos de 2º curso de Educación Primaria vía de la resolución de problemas aritméticos:

1º) Los resultados obtenidos en esta prueba diagnóstica son coherentes con los indicados por investigadores de Didáctica de las Matemáticas sobre la clasificaciones semánticas de problemas aditivos de una etapa y sobre la graduación de las dificultades de comprensión en función de la estructura semántica y de la posición de la incógnita. En efecto, los problemas de ECE han resultado más complejos que los de EEE y ETE. La posición de la incógnita ha jugado un papel importante en el rendimiento de los escolares. Así, en los problemas de EEE el rendimiento baja cuando la incógnita está en el estado parcial. En los problemas de ETE el éxito en la identificación baja cuando la incógnita está en la transformación o en el estado inicial; y en los problemas de ECE baja de modo muy considerable cuando la incógnita está en el estado de referencia.

2º) Otra variable importante que determina del problema es la magnitud de los datos. Los problemas con datos superiores a la centena son de difícil representación por parte de los alumnos de modo que estos evitan modelizar el problema con objetos discretos o con dibujos. Por otra parte, el algoritmo de la suma o de la resta se torna más complejo cuando los datos son números de tres cifras.

3º) Algunos alumnos identifican la operación aritmética pero a la hora de aplicar el algoritmo se equivocan y no la resuelven correctamente. Esto se ha observado sobre todo en los problemas que contenían una resta con llevadas. Sin embargo, apenas se perciben dificultades en el algoritmo de la suma.

4º) En esta prueba se ha podido observar que muchos alumnos se dejan guiar por las palabras claves que encuentran en el enunciado, lo que hace que después no piensen el problema y crean que al poner ‘más’ o ‘menos’ en el enunciado la situación se resuelve con esa operación. Esto nos indica que los alumnos en las matemáticas buscan reglas inadecuadas como la de presuponer que si el enunciado aparece la palabra ‘más’ el problema se resuelve con una suma y si aparece la palabra ‘menos’ el problema se resuelve con una resta.

5º) Los alumnos apenas utilizan estrategias como realizar gráficos, recurrir al conteo o pensar en la operación recíproca para resolver los problemas. Muchos alumnos no conocen otro recurso que intentan acertar la operación que resuelve el problema utilizando palabras claves.

6º) Los resultados de la prueba nos confirman que es necesario un cambio en la enseñanza de las operaciones de suma y resta desde el primer curso de Educación Primaria. Modificando la metodología de aula en el sentido de dar más tiempo a los alumnos para que entiendan el enunciado del problema, solicitarles que verbalicen los datos del enunciado y lo que se pregunta en el problema, darles la posibilidad de modelizar el problema utilizando, según sea su estado de comprensión, materiales manipulativo o representaciones gráficas adecuadas con el objetivo de que consigan representar simbólicamente la operación en horizontal (sentencia numérica) y, finalmente, identificar la operación canónica que resuelve el problema.

El proceso de enseñanza debería comprender todas estas fases que acabamos de indicar. De otro modo, los alumnos no tienen recursos adecuados para realizar los problemas y optan por una solución inmediata que es decir el nombre de una operación y mirar la reacción de aprobación o rechazo del docente.

5. Diseño, desarrollo y evaluación de una propuesta parcial de enseñanza

5.1 Diseño de la intervención

Después de analizar los resultados se ha podido observar que donde más dificultades han tenido los alumnos han sido en los problemas no estereotipados, del tipo Estado–Comparación–Estado y Estado–Transformación–Estado con la incógnita en el estado inicial o transformación.

Dado que el objetivo de esta intervención es mejorar la comprensión de los alumnos a la hora de resolver problemas y al disponer únicamente de tres sesiones para llevarla a cabo, vamos a centrar la intervención didáctica en los problemas de ECE que son donde los alumnos han tenidos menores tasas de éxito, sobre todo cuando la incógnita está el estado de referencia.

Estas tres sesiones son de 45 minutos y las dos últimas se realizarán seguidas por el horario del grupo. Se hará una pequeña pausa de una sesión a otra para que los alumnos descansen y perciban que van a resolver problemas de diferente tipología.

Las características de los problemas que se van a plantear en las distintas sesiones son las siguientes:

- La progresión del nivel en los problemas será de los más sencillos a los más complejos. Por ello empezamos con problemas de ECE con la incógnita en la comparación, después con la incógnita en el estado comparado y finalmente los problemas de ECE con la incógnita en el estado de referencia.
- Las cifras que se emplearán en los problemas serán menores de 100 porque de esta forma les será más sencillo modelizar el problema.
- Se usarán diferentes tipos de estrategias para que los alumnos sepan resolver los problemas de la forma que más le ayude. En este caso será la representación del problema a través de una modelización: diagrama, policubos o ambas.
- Todos los problemas tendrán los mismos protagonistas: Alex y Juan. De esta forma, los problemas tendrán un mayor grado de contextualización.

Respecto a la metodología que se va llevar a cabo dentro del aula consiste en que los alumnos en diferentes fases modelen y resuelvan los seis problemas de ECE con

ayuda de material didáctico, policubos, o con diagramas. Los problemas propuestos a los alumnos son:

- ECE con la incógnita en la comparación: *Es el cumpleaños de Alex y Juan. A Alex le han regalado 22 euros y a Juan 16 euros. ¿Cuántos euros tiene Alex más que Juan?*
- ECE con la incógnita en la comparación: *Alex tiene 12 cromos y Juan tiene 21. ¿Cuántos cromos tiene Juan más que Alex?*
- ECE con la incógnita en la comparación: *Alex tiene 12 caramelos y Juan tiene 30. ¿Cuántos caramelos tiene Alex menos que Juan?*
- ECE con la incógnita en el estado comparado: *Juan tiene 12 cromos menos que su hermano Alex. Si Alex tiene 20. ¿Cuántos cromos tiene Juan? ECE con la incógnita en el estado comparado.*
- ECE con la incógnita en el estado comparado: *Alex compró una camiseta y un pantalón. La camiseta vale 15 euros más que el pantalón. Si el pantalón vale 35 euros. ¿Cuánto vale la camiseta?*
- ECE con la incógnita en el estado de referencia. *Juan tiene 15 euros más que su hermano Alex. Si Juan tiene 40 euros. ¿Cuántos euros tiene Alex?*
- ECE con la incógnita en el estado de referencia. *Juan tiene 15 cromos menos que su hermano Alex. Si Juan tiene 16 cromos, ¿cuántos cromos tiene Alex?*

Los problemas se presentarán a los alumnos en diferentes sesiones y cada una de ellas tratará de un tipo diferente, es decir, en la primera sesión se realizarán los problemas ECE con la incógnita en la comparación. En la segunda los problemas de ECE con la incógnita en el estado comparado. Y en la última sesión los problemas ECE con la incógnita en el estado de referencia.

Las fases que se le van a proponer a los escolares que lleven a cabo en cada uno de los problemas son las siguientes:

Enunciado del problema: *Alex tiene 12 cromos y Juan tiene 21. ¿Cuántos cromos tiene más Juan que Alex?*

1^a fase: Asegurar que el alumno comprenda el enunciado del problema.

Para ello se sugiere realizar una **representación lingüística del problema**. Los alumnos con la ayuda de la profesora comentarán el enunciado del problema.

Es importante que los alumnos identifiquen los datos del problema y aquello que deben obtener (la incógnita). Se les puede pedir a los alumnos que subrayen los datos que consideren más importantes (números, expresiones, etc.) y que verbalicen qué es lo que pregunta el problema y si entienden lo que pregunta el problema. No es obligatorio que el alumno subraye estos elementos pero se le da opción de realizar esta acción en el caso que les ayude a comprender el problema.

Los comentarios que se pueden surgir con los alumnos en la interacción son:

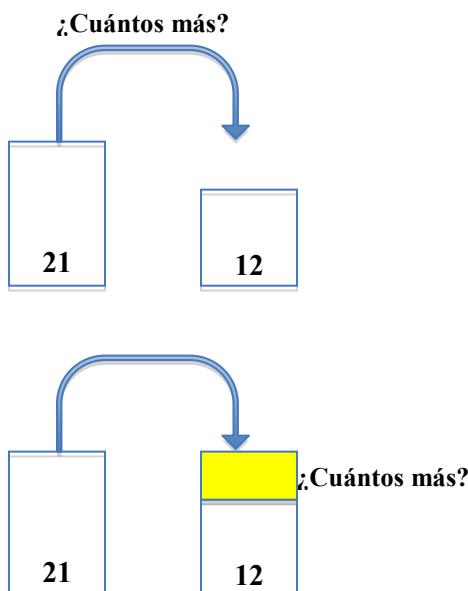
- ¿Quién tiene más dinero? Juan
- ¿Quién tiene menos dinero? Alex
- ¿Cuánto tienen igual? 12 euros
- ¿Cómo se llama lo que le falta a Juan para tener menos? Diferencia
- ¿Qué tenemos que hallar? La diferencia.

2^a fase: Modelización del problema

Podemos encontrar diferentes formas de modelización del problema y esta puede variar según el trabajo individual de cada alumno:

- Alumnos que *identifiquen directamente la operación* que resuelve el problema. Se espera que haya pocos alumnos que realicen esta fase ya que esto nos indicaría que el alumno realiza la modelización mentalmente e identifica directamente la operación.
- La mayoría de los alumnos necesitará *modelizar el problema utilizando materiales manipulativos*. Los alumnos deben disponer de policubos (u otro material equivalente) para representar los datos del problema e interpretar la incógnita.
- Convendría que todos los alumnos, incluso los que identifican la operación, realicen una *modelización del problema utilizando gráficos*. Una vez que los alumnos comprenden la “estructura más que y menos que”, inducida por

la proposición “tiene más que o menos que” están en condiciones de realizar una representación gráfica, rellenando los datos conocidos (lo que sé) y la categoría vacía con una interrogación, que corresponde a la pregunta (lo que no sé). En este caso la representación gráfica es:



3^a fase: Representación del problema mediante una sentencia numérica

En esta fase también hay diferentes niveles de comprensión. Esta representación puede ser del tipo $21 - 12$ si el alumno identifica la operación resta como aquella que resuelve el problema, es decir, utilizando la sentencia canónica. Sin embargo, a pesar de que ésta sea la representación óptima del problema, una posible representación de este problema es:

$$12 + \boxed{} = 21$$

4^a fase: Encontrar e interpretar la solución del problema

En este caso la interpretación del problema exige que el alumno comprenda que la diferencia de euros entre ambos es de 9 euros. Conviene que los alumnos expliquen el resultado del problema y que de forma verbal expresan diferentes formas el resultado obtenido.

5.2 Problemas propuestos en la primera sesión

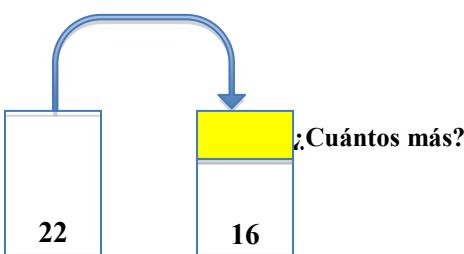
En la primera sesión habrá una explicación sobre diferentes estrategias para resolver un problema y el formato de la ficha.

Para explicar estas estrategias se utilizará un problema de ECE con la incógnita en la comparación para que los alumnos vean el cómo resolverlo.

Es el cumpleaños de Alex y Juan. A Alex le han regalado 22 euros y a Juan 16 euros. ¿Cuántos euros tiene Alex más que Juan?

En esta intervención van a detallarse dos estrategias de resolución del problema:

1. Modelización del problema con policubos. Los policubos naranjas serán los que tiene Alex y verdes lo de Juan, o viceversa. Al emparejarlos veremos que Alex tiene 22 y Juan tiene 16 y que lo que sobra de Alex es la diferencia entre ambos.
2. Modelización del problema utilizando gráficos. De esta forma el alumno podrá deducir cuál de los personajes tiene más dinero y a partir de este dato obtener la diferencia.



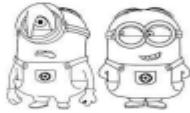
Después de explicar estas estrategias también se resolverá a partir de la operación aritmética, la forma de resolución más conocida por ellos. De esta manera, con la explicación, se pretende que alumno observe que los problemas no solamente pueden resolverse con operaciones y que en ocasiones estas estrategias son de gran ayuda porque podemos comprender mejor el problema y así crear su representación al verlo más visual.

Por último, antes de empezar a pasar la ficha se les explicará el formato de esta. En ella encontramos el nombre y la fecha para así poder identificar el problema de cada alumno. Luego el enunciado y debajo de éste hay una tabla. La ficha está dividida en

dos apartados: “*dibujo y solución*” y “*corrección*”. En el apartado de *dibujo y solución* es el lugar donde el alumno tendrá que escribir la operación aritmética o estrategia usada, es decir, donde resuelve el problema. En el otro apartado solamente se utilizará en el caso que el alumno no haya identificado la operación o no haya usado una estrategia correcta. En él escribirá la corrección que más le ayude a comprender el problema, operación o estrategia, y de esta forma podrá reflexionar y observar los errores que ha cometido a la hora de resolver el problema. Por último, abajo de todo se encuentra la solución donde el alumno deberá de escribir la cantidad junto a su unidad.

NOMBRE: _____ FECHA: _____

1. Alex tiene 12 cromos y Juan tiene 21. ¿Cuántos cromos tiene más Juan que Alex?



DIBUJOS Y SOLUCIÓN	CORRECCIÓN
RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD):	RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD):

Después de resolver el primer problema se les propondrá otro de ECE con la incógnita en la comparación con el que se empezará la intervención. Se comienza de esta manera porque es el único problema de comparación que conocen los alumnos ya que es la tipología que trabaja el libro de texto, es decir, un problema estereotipado. El problema planteado será:

Alex tiene 22 cromos y Juan tiene 36. ¿Cuántos cromos tiene Juan más que Alex?

La maestra observará el trabajo individual de los alumnos y cuando todos hayan acabado invitará a algunos de ellos a que expongan en la pizarra la estrategia que hayan empleado. Esto tiene el propósito de que los alumnos muestren diferentes maneras y

estrategias de resolución de problemas para que estas enriquezcan al grupo para que posteriormente tengan una mejor comprensión del problema.

Cuando hayan acabado el problema se les pedirá a los escolares que reformulen la pregunta del problema y la cual tiene que tener el mismo significado que la pregunta planteada. Con esta pequeña tarea podemos observar si el alumno ha comprendido en su totalidad el problema. Alguna de las nuevas preguntas que esperamos que los alumnos escriban son:

- ¿Cuántos cromos tiene Alex menos que Juan?
- ¿Cuánto le falta a Alex para tener lo mismo que Juan?

A los escolares que acaben antes que sus compañeros se les entregará otra ficha con el segundo problema con la incógnita en la comparación: *Alex tiene 12 caramelos y Juan tiene 30. ¿Cuántos caramelos tiene Alex menos que Juan?* Para que así todos tengan tiempo en acabar la tarea.

Durante la corrección del problema se les irá haciendo preguntas para ver que han comprendido el problema. Por ejemplo, *¿Quién tiene más cromos Alex o Juan? ¿Y quién tiene menos?* Se espera que la mayoría de los alumnos sepan decir quién tiene más o menos. Sin embargo, es previsible que tengan dificultades para cuantificar la cantidad de más o menos que tiene uno con respecto al otro protagonista que aparece en el enunciado del problema.

Los criterios de evaluación que se van a tener presentes en esta sesión serán:

- Identifica la operación aritmética que resuelve el problema.
- No identifica la operación aritmética pero sabe resolver el problema mediante una estrategia de modelización con policubos o realizando un gráfico.

Tanto el primer criterio de evaluación como el segundo pretende evaluar si el alumno es capaz de comprender el significado del problema.

- Realiza correctamente la operación aritmética.

Con este criterio se quiere observar si han aplicado correctamente la operación porque es un factor determinante a la hora de indicar el resultado final aunque

nuestro foco de enseñanza no sea en este momento la mecanización de los algoritmos. La rúbrica de evaluación se muestra en el Anexo V.

- Comprende la estructura del problema a la hora de enunciar un problema igual que el que ha resuelto pero formulado con otras palabras.

Este criterio no pretende que el alumno conozca la tipología de los problemas, es decir, el alumno no va comprender que es un problema ECE en la comparación pero sí que reconozca su estructura e identifique dónde se encuentra la incógnita. De esta manera, observaremos que el alumno comprende las expresiones como ‘más que’, su opuesto ‘menos que’ y relación de este significado dentro de este enunciado.

5.3 Problemas propuestos en la segunda sesión

En la segunda sesión se trabajarán los problemas ECE con la incógnita en el estado comparado. Por lo que se vio en la prueba inicial, los resultados fueron positivos y una gran cantidad de alumnos identificaron la operación sin ser un problema estereotipado. Esto se debe a que algunos alumnos utilizaron la palabra clave que les inducía al acierto.

También, se les recordará el formato de la ficha y las cuatro fases de resolución de problemas empezando por la necesidad de que lean bien el problema, que subrayen los datos y las comparaciones (si es necesario), el uso de policubos o gráficos para representar el problema y que escriban la sentencia numérica u operación que lo resuelve.

En esta sesión se trabaja dos problemas con la incógnita en el estado comparado.

Juan tiene 12 cromos más que su hermano Alex. Si Alex tiene 29. ¿Cuántos cromos tiene Juan?

Alex compró una falda que valía 15 euros menos que la camiseta. Si la camiseta vale 35. ¿Cuánto vale la falda?

Mientras los alumnos estén resolviendo el problema, el maestro irá pasando por las mesas a observar las estrategias que usan los alumnos para que posteriormente sacar a la pizarra las más interesantes y las que ayuden a comprender el problema. Se dará finalizada la sesión después de esta corrección y se recogerán las fichas.

Los criterios de evaluación que se van a tener en cuenta en esta segunda sesión serán:

- Identifica la operación aritmética que resuelve el problema.
- No identifica la operación aritmética pero sabe resolver el problema mediante una estrategia de modelización o realizando un gráfico.
- Realiza correctamente la operación aritmética.

5.4 Problemas propuestos en la tercera sesión

En la última sesión se trabajarán los problemas ECE con la incógnita en el estado de referencia que es el más complejo de ellos. Se trabajarán dos problemas de esta tipología y antes de pasar la ficha se volverá a repasar las cuatro fases de resolución de los problemas. Los problemas a trabajar serán:

Juan tiene 15 euros más que su hermano Alex. Si Juan tiene 40 euros. ¿Cuántos euros tiene Alex?

Juan tiene 15 cromos menos que su hermano Alex. Si Juan tiene 16 cromos, ¿cuántos cromos tiene Alex?

Se seguirá la misma dinámica que en las sesiones anteriores, es decir, se observará el trabajo individual del alumno y las estrategias que más ayuden a comprender el problema se compartirán en la pizarra. Los criterios de evaluación serán los mismos que en la segunda sesión.

5.5. Desarrollo y resultados de la intervención

Los alumnos estuvieron sentados de forma diferente en las dos sesiones. En la primera de ellas estaban sentados en U excepto 10 alumnos que estaban sentados en pequeñas filas (cinco, dos y tres). Pero en la segunda y tercera sesiones se les sentó en grupos de 4 para que pudieran compartir el material y así llegaría a todos porque en la primera sesión todos querían el material a la vez y no había suficiente. En la primera sesión, el 5 de mayo, faltó una alumna y en las demás realizadas el 8 de mayo faltaron dos. De la primera sesión a las dos siguientes pasó un fin de semana de por medio.

En las tablas se muestran a continuación podemos observar que los resultados en este tipo de problemas han sido satisfactorios pero necesitaríamos más sesiones para

favorecer esta enseñanza. Además, vamos a poder observar que la tasa de éxito decrece según avanza la propuesta de enseñanza en la que ha influido la estructura semántica del problema y la posición de la incógnita.

Respecto al problema 2 solamente lo realizaron los cuatro alumnos que acabaron primero el problema ECE con la incógnita en la comparación. Todos lo resolvieron bien y al ser tan pocos escolares por este motivo no se analizará posteriormente.

PROBLEMA 1: ECE con la incógnita en la comparación			
Material	Diagrama	Operan 21-12	Resuelven bien
27	26	7	23

PROBLEMA 3: ECE con la incógnita en el estado comparado			
Material	Diagrama	Operan 21-12	Resuelven bien
7	7	22	26

PROBLEMA 4: ECE con la incógnita en el estado comparado			
Material	Diagrama	Operan 21-12	Resuelven bien
4	6	26	26

PROBLEMA 5: ECE con la incógnita en el estado comparado			
Material	Diagrama	Operan 21-12	Resuelven bien
0	0	21	21^2

PROBLEMA 6: ECE con la incógnita en el estado comparado			
Material	Diagrama	Operan 21-12	Resuelven bien
3	6	18	19^3

² 11 alumnos con la ayuda de la profesora

³ 6 alumnos con la ayuda de la profesora

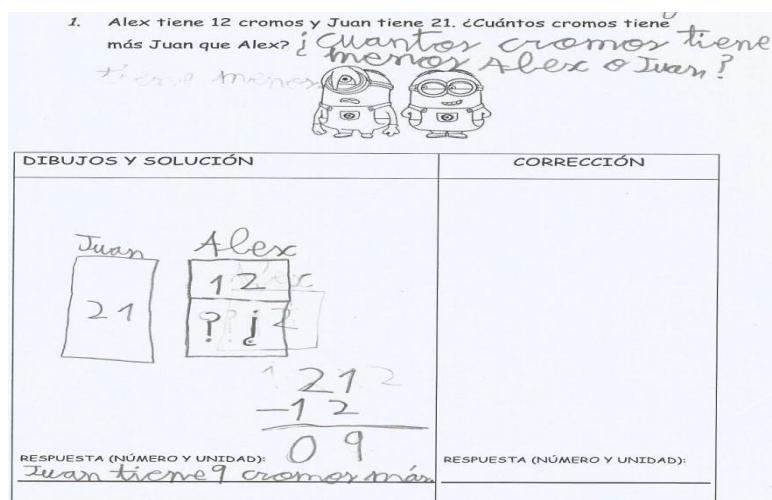
En rasgos generales podemos observar que los problemas que mayor tasa de éxito han tenido son los problemas que habitualmente trabajan, ECE con la incógnita en la comparación, y los problemas que coincide la palabras clave con la operación que resuelve el enunciado, ECE con la incógnita en el estado comparado. Es decir, los resultados son similares a los de la prueba indagatoria ya que en los problemas ECE con la incógnita en el estado de referencia siguen teniendo dificultades. Además, como podemos constatar el uso de material y diagramas disminuye cada vez que aumenta la complejidad del problema. Eso también puede ser producido porque a partir del problema 3 algunos alumnos no sabían utilizar correctamente los policubos o no estaban seguros de la realización del diagrama por lo que prefirieron hacer directamente la operación. También, en el caso de los policubos, muchos alumnos en vez de utilizarlos para modelizar el problema jugaban con ellos.

A continuación vamos a analizar cada uno de los problemas y estos se van a presentar en el mismo orden que se realizaron en la clase. Además en esta secuencia se ve la diferencia entre los resultados de unos problemas a otros, y la disminución en el uso de materiales y diagrama.

- **Problema 1: ECE con la incógnita en la comparación**

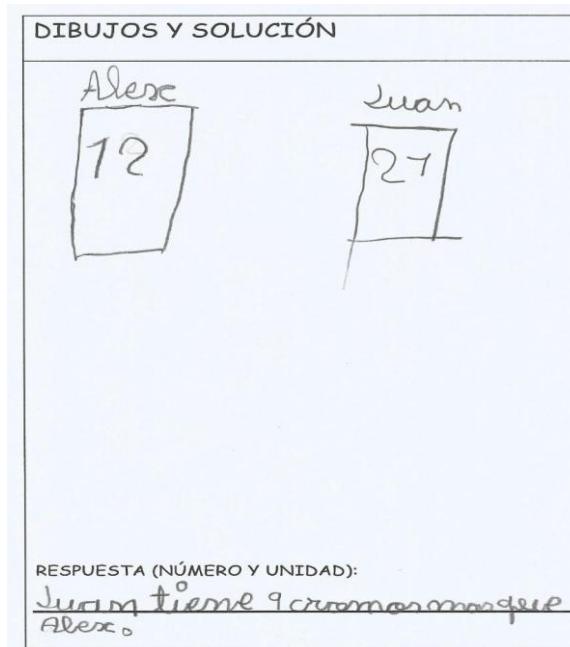
(Alex tiene 12 cromos y Juan tiene 21. ¿Cuántos cromos tiene más Juan que Alex?)

En el problema ECE con la incógnita en la comparación todos los alumnos han sabido modelizar el problema a través del material manipulativo y diagramas, exceptuando tres alumnos.

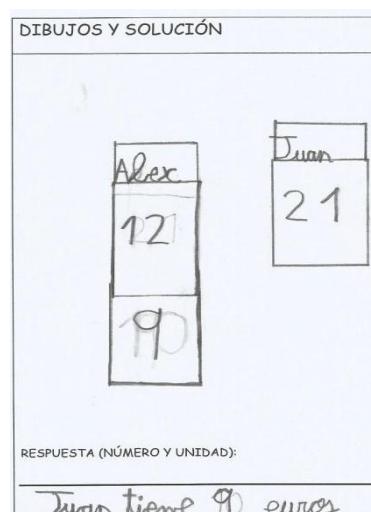


Hubo 3 alumnos ayudados por su tutora, dos salen con la profesional de pedagogía terapéutica y la otra alumna es TDAH. Con los tres se trabajó con el material ya que tienen dificultades a la hora de comprender los problemas.

Cómo utilizaron ambas estrategias, algunos escolares a la hora de realizar el diagrama de la situación no lo representaron correctamente.



Este alumno no ha sabido representar correctamente que Juan tenía más que Alex ni la cantidad que falta para tener lo mismo, es decir, la diferencia. Este alumno lo resolvió bien porque uso policubos.



En este caso sí que te representa la diferencia en el diagrama pero para que fuera correcto ambos, Alex y Juan, tendrían que tener el mismo tamaño. De esa forma se vería que Juan tiene más, lo que tiene Alex y la diferencia.

DIBUJOS Y SOLUCIÓN	CORRE
RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD):	RESPUESTA (NÚM)
Juan tiene 6€ menos que Alex	

En este diagrama podemos observar como la representación de Alex y Juan parece que tienen la misma cantidad sin tener en cuenta que hay una diferencia entre ellos.

Respecto a la actividad de volver a enunciar el problema con otras palabras sin que cambien los datos y el resultado, 10 de los alumnos de los 27 supieron formular la pregunta correctamente, y sobre todo con la expresión '*'menos que'*'. Esto nos indica que estos escolares comprendieron el problema en su totalidad y que comprenden el significado de ambas expresiones ('*'más que'*' y '*'menos que'*'). Algunas de las preguntas fueron:

- ¿Cuántos cromos tiene Alex menos que Juan?
- ¿Cuántos cromos le faltaba Alex para tener los mismos cromos que Juan?
- ¿Cuántos cromos le faltan a Alex para tener los de Juan?
- ¿Cuánto se tendría que restar Juan para tener lo mismo?

En cambio, hay otros alumnos que se quedaron a medio camino y no llegan a enunciar un problema “igual” al que han resuelto previamente pero si tienen presente quien tiene menos o más:

- ¿Juan tiene más que Alex?
- ¿Cuántos cromos más tiene Juan?

Hay dos alumnos que enuncian un nuevo problema, uno de EEE con la incógnita en el estado total y otro de ECE en la comparación pero con otros datos.

- Alex tiene 12 cromos y Juan 21. ¿cuántos tiene entre los dos Juan y Alex? Este alumno hace referencia a un problema que trabajan habitualmente.
- Juan tiene 20 caramelos y Alex 30. ¿cuántos caramelos tiene menos Juan que Alex? En cambio, este alumno crea un problema similar al propuesto en el aula y formulando en la pregunta ‘’menos que’’.

- **Problema 3: ECE con la incógnita en el estado comparado**

(*Juan tiene 12 cromos menos que su hermano Alex. Si Alex tiene 20. ¿Cuántos cromos tiene Juan?*)

Este problema se resuelve con una resta ($20-12$) la cual todos los alumnos la resolvieron correctamente. Esto fue porque la palabra *menos* que indicaba el enunciado coincidía con la operación. Este caso es un ejemplo de que los alumnos se guían por las palabras claves y puede que después no sigan dándole importancia al contenido del enunciado porque ya considera que hay que restar.

Por otro lado, podemos observar que el uso de los materiales y diagrama disminuye y aunque sigue habiendo alumnos que las utilizan. Pero si lo comparamos con el problema anterior hay una gran diferencia (en el primer problema 27 utilizaron policubos y en ésta solamente 7, o de los 26 del diagrama a 7 en éste), es decir, solamente 14 escolares modelizaron el problema.

DIBUJOS Y SOLUCIÓN	CORRECCIÓN
<p>RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): 8</p> <p>Juan tiene 8 cromos.</p>	<p>RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD):</p>

En el siguiente diagrama observamos que el alumno sí que ve que uno tiene más que otro pero la diferencia (12) que es mayor lo representa más pequeño de lo que tiene Juan (8).

DIBUJOS Y SOLUCIÓN
<p>RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD):</p> <p>Tiene 8 cromos Juan.</p>

Respecto al uso de material, los alumnos que lo utilizaron lo hicieron correctamente ya que a los policubos que representaban Alex le quitaban la diferencia quedándose con los cromos que tenía Juan, es decir, 8.

- **Problema 4: ECE con la incógnita en el estado comparado**

(*Alex compró una camiseta y un pantalón. La camiseta vale 15 euros más que el pantalón. Si el pantalón vale 35 euros. ¿Cuánto vale la camiseta?*)

En el otro problema ECE con la incógnita en el estado comparado podemos observar que ocurre lo mismo que en el anterior pero en vez de resolverse con una resta

es una suma ($15 + 35$). Los alumnos siguen guiándose por las palabras claves que encuentran en el enunciado, en este problema la palabra *más*.

De los pocos alumnos que siguen empleando los diagramas observamos que algunos de ellos siguen realizándolo incorrectamente como el alumno siguiente:



Aunque lo resuelve correctamente con la operación e indica bien el resultado, el esquema que realiza para apoyar es incorrecto porque los tamaños de los gráficos no corresponden con la cantidad y una de ellas en vez de indicar las unidades del problema, camiseta y pantalón, escribe Alex y Juan, y en lugar de la respuesta indica la diferencia.



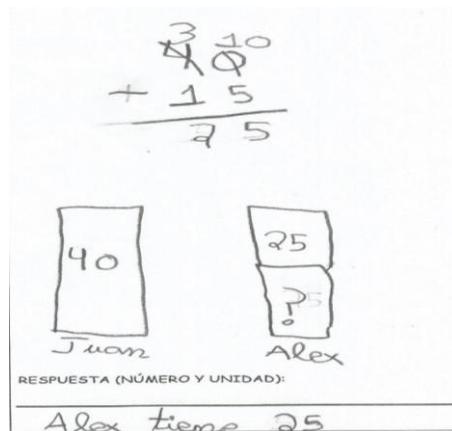
Por último, en este caso podemos observar que tanto el diagrama como la operación tienen una relación.

Respecto al trabajo con policubos, la alumna que salió a explicarlo tuvo dificultades a la hora de comentárselo a sus compañeros, la acción de añadir. Esto nos indica que al no estar habituados a trabajar con ellos les cuesta aún verbalizar el proceso que han utilizado.

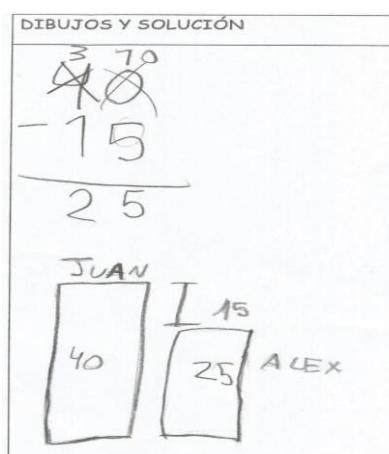
- **Problema 5: ECE con la incógnita en el estado de referencia**

(Juan tiene 15 euros más que su hermano Alex. Si Juan tiene 40 euros. ¿Cuántos euros tiene Alex?)

En el primer problema ECE con la incógnita en el estado de referencia podemos observar que tanto el uso de estas técnicas como la resolución correcta disminuyen. Solamente 3 alumnos emplean la modelización, y en este caso sólo usan el diagrama, y 10 alumnos son los que lo resuelven sin ninguna ayuda. Durante la clase hubo 11 alumnos que se guiaron por las palabras claves, es decir, sumaron. Pero se les dijo que revisarán el problema y se les guió con de preguntas como *¿Quién tiene más?* *¿Si Juan tiene más?* *¿Si Alex tiene menos?*. Los alumnos supieron comprender el problema y rectificar su respuesta como podemos ver en esta alumna:



Al principio también muchos decían que no lo entendían pero a través de la guía con preguntas lo comprendieron. A continuación se muestra uno de los alumnos que lo supo resolver sin ayuda y además de resolverlo con la operación también se ayuda de un diagrama.



Por último, encontramos a un alumno que lo resuelve solamente con la operación aritmética que indica que aplica una suma pero en realidad realiza una resta (siendo ésta la correcta).

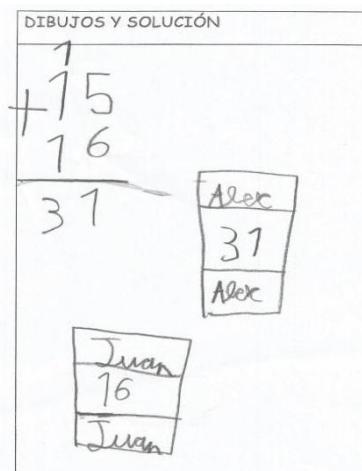


- **Problema 6: ECE con la incógnita en el estado de referencia**

(Juan tiene 15 cromos menos que su hermano Alex. Si Juan tiene 16 cromos, ¿cuántos cromos tiene Alex?)

En el último problema, pasa lo mismo que en el problema anterior. Hubo seis escolares que se guiaron por la palabra *menos* y aplicaron una resta, pero lo modificaron. Algunos de ellos al haber fallado en el anterior problema, éste lo leyeron más atentos y ya no se les guió con las preguntas. De los que lo resolvieron correctamente sin necesidad de ayuda fueron 13 de los 19 que lo supieron resolver.

Seguimos encontrando casos de diagramas mal dibujados, como el que me muestra a continuación:



Respecto al trabajo con policubos, solamente lo llevaron 3 alumnos conjuntamente y estos modelizaron la operación aritmética y no la acción de añadir.

Como pudimos ver en la prueba inicial fue el que peor resultados hubo y el que más ayuda necesitaron los alumnos para comprenderlo. Y en la intervención fueron los problemas que más dificultad tuvieron a la hora de resolverlos.

En el problema 5 fueron 10 alumnos los que resolvieron correctamente sin necesitar la ayuda de las preguntas. En cambio, en el problema 6 hubo 13 fueron los que supieron resolverlo sin la guía de las preguntas, es decir, tres más que en el anterior pero esto no indica que haya una gran diferencia.

También hay que tener en cuenta que en el último problema hubo 5 alumnos que no lo hicieron porque estaban distraídos y son de los alumnos que más ‘enredan’ a la hora de realizar la tarea en comparación al problema cinco que sólo hubo 2 que no lo resolvieron. Éste es otro de los factores que ha influido que la tasa de alumnos baje de un problema a otro. Aunque en realidad hubo más alumnos que supieron resolver el sexto problema porque ya habían sido guiados en el anterior problema y estuvieron más atentos a la lectura del problema.

La principal dificultad de ambos problemas son las expresiones ‘más que’ o ‘menos que’ porque los alumnos se guían por palabras claves de ellas, es decir, más o menos. Al no leerlas adecuadamente, la comprensión del problema es incorrecta porque piensan que el problema se resuelve con la operación que corresponde con la palabra. También, algunos alumnos al leer una cantidad ya pensaban que eso era lo que tenía Juan o Alex, según el problema, y no tenían en cuenta la expresión que venía a continuación por lo que no entendían lo que pedía la pregunta. Por esta razón, muchos alumnos decían que no lo comprendían y se les indicó que lo volvieran a leer las veces que necesitaran.

5.6 Conclusiones de la intervención

Después de analizar las producciones de los alumnos durante la breve secuencia de enseñanza obtenemos las siguientes conclusiones:

1º) Los porcentajes de éxito han sido elevados, cercanos al 100% en los problemas de ECE con la incógnita en la comparación y en el estado comparado.

Sin embargo, la tasa de éxito se reduce al 50% cuando resuelven problemas de ECE con la incógnita en el estado de referencia.

2º) Los alumnos se muestran reticentes a utilizar las estrategias de modelización del problema. Suponemos que esto ocurre porque no están habituados a utilizarlas en las clases de matemáticas. En efecto, los alumnos utilizan muy poco los diagramas para modelizar el problema y aunque algunos lo resuelven correctamente es porque han identificado la operación que lo resuelve, han contado con el apoyo del material, o han acertado de modo casual al identificar la operación.

Respecto al material también se ha visto que tienen dificultades a la hora de utilizarlos ya que no suelen trabajar habitualmente con él, sobre todo en la resolución de problemas. La práctica docente cotidiana lleva a los alumnos a resolver problemas sobre el supuesto que deben acertar con la operación aritmética que lo resuelve, sin tener en cuenta materiales u otras estrategias de modelización.

3º) Los alumnos se guían mucho por las palabras claves que encuentran en el enunciado. Esto puede ser porque los problemas que habitualmente trabajan las palabras clave corresponden con la operación y las situaciones tienen la misma estructura semántica y posición en la incógnita. Entonces, cuando se les presenta problemas con una estructura semántica e incógnita diferente al no tener una experiencia anterior se fijarán en estas palabras en vez de leer el enunciado e intentar comprenderlo.

4º) A parte de las palabras claves también hay términos que los escolares aún no han trabajado lo suficiente y no conocen del todo su significado como es el caso de *más que* o *menos que*. Al no leerlo de forma correcta hace que el alumno se equivoque y piense que un dato signifique algo diferente. Entonces cuando vaya a resolver el problema lo hará incorrectamente. Por lo tanto, este tipo de expresiones se deberían de trabajar más dentro de clase de matemáticas. Para ello se tendría que presentar otros tipos de problemas a los alumnos en vez de solamente unas tipologías concretas como son los problemas estereotipados.

5º) La metodología ha sido satisfactoria pero si se volviera a realizar se harían algunas modificaciones. La parte positiva es que la explicación de las fases ayudan al alumno a comprender mejor el problema y las acciones que llevan a cabo para resolver el enunciado, es decir, leerlo atentamente y hacer preguntas guías, el uso de materiales y diagramas, y la corrección entre todos. Pero, como se ha comentado anteriormente el uso de material y diagrama disminuye cada vez que los problemas se vuelven más complejos y esto puede ser porque no están acostumbrados a ellos y tampoco saben muy bien cómo usarlos. Sin embargo, para que los alumnos se fueran familiarizando con estas nuevas estrategias se necesitaría más tiempo de intervención ya que se trabajaría más con ellas.

También, si volviera hacer la intervención reformularía el apartado corrección de las fichas de trabajo. Se suprimiría y se dejaría más espacio para los alumnos escribieran los dibujos y la solución, y a partir de ahí que modificarán si se hubieran equivocado con algún color, por ejemplo rojo.

Como pude ver en la intervención, y sobre todo en las dos últimas, el trabajo en grupo y el exponerlo son beneficiosos para los alumnos ya que tanto en grupo pequeño como en grande pueden obtener diferentes formas de resolver un problema. Además, puede que les ayuda a comprender el problema que lo han hecho incorrectamente. Muchas veces ellos se entienden mejor que cuando se lo explican los docentes. También haría más hincapié en la reformulación y planteamiento de preguntas ya que estas les ayudan a comprender el enunciado como se ha visto en los problemas de ECE con el estado en el estado de referencia.

6º) Las dificultades que detectamos en los alumnos al aplicar el algoritmo de la resta en la prueba indagatoria no han aparecido en la intervención de aula. Esto ha podido estar influido por el tamaño de las cantidades de los problemas eran menores que 100.

7º) Aunque la mitad de los alumnos siguen teniendo dificultades para resolver problemas de ECE con la incógnita en el estado de referencia hemos

observado un mejoría en los problemas ECE con la incógnita en la comparación y en el estado comparado. Además, hemos podido facilitar a los escolares un nuevo procedimiento para resolver los problemas aritméticos que consiste en comprender el enunciado, utilizar diversas estrategias para modelizar el problema y representarlo; sin tener que identificar la operación canónica que lo resuelve.

III. CONCLUSIONES

Consideramos que hemos alcanzado los objetivos descritos en el apartado *Introducción* de esta memoria de trabajo fin de grado, lo que nos permite establecer las siguientes conclusiones:

1^{a)}) En relación con el primer objetivo de este trabajo “*realizar una búsqueda bibliográfica dentro de la Didáctica de las Matemáticas sobre la enseñanza del significado de la suma y resta de números naturales a partir del planteamiento y resolución de problemas aditivos de una etapa.*” Las lecturas realizadas aconsejan organizar la enseñanza del significado de la suma y de la resta de números naturales planteando a los alumnos la resolución de problemas que les permita poner en juego las acciones de juntar, añadir, separar, quitar, completar y comparar que son básicas para comprender estas operaciones. Para la elección de estos problemas aritméticos nos hemos guiado por las clasificaciones de problemas aditivos que están validadas desde la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Tras el estudio realizado sobre las clasificaciones de problemas aditivos concluimos que las variables didácticas como la estructura semántica, la posición de la incógnita y el sentido de las transformaciones o/y comparaciones del problema son importantes para la enseñanza de las operaciones suma y resta. Muchas de las dificultades de comprensión que muestran los escolares están relacionadas con la presencia y ausencia de estas variables en los problemas aditivos que resuelven los alumnos en las aulas de Educación Primaria.

2^{a)}) En cuanto al segundo objetivo “*completar la búsqueda bibliográfica sobre el estudio con las dificultades en la resolución de problemas aritméticos a partir de las clasificaciones de suma y resta de números naturales que están validadas desde la Didáctica de las matemáticas*”, después de comprobar la importancia de las variables de clasificación de los problemas aditivos hemos considerado otras variables que pueden facilitar o dificultar la comprensión del enunciado como son el nivel de complejidad del problema, la contextualización, el tamaño de las cantidades, y las características lingüísticas. Por ejemplo, en estas últimas durante la prueba diagnóstica e intervención pudimos observar el gran peso que tienen las palabras claves como *más*,

menos, más que, menos que, que utilizan de modo erróneo muchos alumnos a la hora de identificar la operación que resuelve el problema.

Diversas investigaciones indican que los alumnos de Educación Primaria tienen muchas más dificultades para entender el enunciado y para modelizar el problema que para realizar los cálculos aritméticos una vez que han identificado la operación que lo resuelve. Consideramos que muchas de estas dificultades tienen su origen en las prácticas docentes inadecuadas que consisten en proponer a los alumnos problemas estereotipados para ejercitarse en el cálculo de una determinada operación. Desde esta metodología de aula se espera de los alumnos que identifiquen de modo inmediato la operación sin darles tiempo para reflexionar sobre el problema, entenderlo, modelizarlo y resolverlo utilizando, en ocasiones, procedimientos informales. Además, esta práctica docente tiende a dudar de los procedimientos de resolución propios y a veces muy valiosos que ponen en juego los alumnos cuando se implican en la resolución de problema.

3º) Respecto al tercer objetivo “*caracterizar la enseñanza actual de la suma y resta en 2º curso de Educación Primaria desde el currículo oficial, LOMCE, y el análisis del libro de texto que trabajan en el colegio donde se va a llevar a cabo la fase experimental del trabajo.*” después de haber analizado el currículo aragonés de la LOMCE y el libro de texto de la editorial Edelvives, confirmamos que el documento oficial hace hincapié en una perspectiva *sobre* la resolución de problemas dándole importancia a los procesos y procedimientos para resolver el problema aritmético. Aunque también hace referencia a la *vía* la resolución de problemas para dotar de significado a las operaciones de suma y resta, esta es muy escasa y muy poco informativa. Por lo que, el currículo no orienta la labor profesional del docente que quiera enseñar el significado de la suma y resta de números naturales a sus alumnos de 2º curso de Educación Primaria.

En cuanto al análisis del libro de texto observamos que propone una enseñanza tradicional porque plantea la resolución de problemas al final de cada unidad sin tenerlos en cuenta en el proceso de enseñanza de la suma y resta. Además, los problemas que propone el libro de texto son de carácter estereotipado, olvidando otras tipologías de problemas que los alumnos deberían resolver para aprender todos los significados de la suma y resta de números naturales. Concluimos que el libro de texto

no tiene en cuenta las clasificaciones validadas por la Didáctica de las Matemáticas porque no propone la enseñanza de todos los tipos de problemas de la clasificación de problemas aritméticos de una etapa. En efecto, no profundiza en la resolución de problemas aritméticos para enseñar la suma y la resta de números naturales y opta por utilizar la resolución de problemas para atender los contenidos curriculares del bloque de “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas”. En este caso la preocupación se centra en proponer técnicas generales como que los alumnos verbalicen los procedimientos que ha utilizado para resolver un problema o que busquen los datos relacionados con una situación problemática que se les presenta. Sin embargo, en ocasiones, los enunciados de los problemas son tan complejos que hay que recurrir al libro del profesor para entender la tarea a realizar o que opción elegir.

Finalmente, concluimos que el currículo no orienta la labor profesional del docente que quiere enseñar el significado de la suma y resta de números naturales a sus alumnos de 2º curso de Educación Primaria y que la enseñanza que plantea el libro de texto es insuficiente porque tan sólo propone la resolución de problemas aritméticos estereotipados.

4º) Para alcanzar el cuarto objetivo “*Diseñar, desarrollar y evaluar una prueba indagatoria para detectar las dificultades de comprensión de los alumnos de un grupo clase de 2º curso de Educación Primaria cuando estos resuelvan ocho problemas aditivos de la clasificación de problemas aditivos de una etapa.*” se diseñó una prueba con ocho problemas aditivos de una etapa para que lo resolvieran los alumnos de segundo de Educación Primaria. Se tuvieron en cuenta todas las variables y factores que pueden afectar a resolverlo, comentadas anteriormente.

Los resultados de la prueba indican que los problemas con más tasa de éxito fueron aquellos que ya habían trabajado, problemas estereotipados, o los que las palabras claves coincidían con la operación como en el problema ECE con la incógnita en el estado comparado. Por lo tanto, los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica son coherentes con los niveles de dificultad estudiados desde la investigación en didáctica y con las prácticas de enseñanza de la suma y la resta. En cambio, en los problemas que más dificultades tuvieron fueron los que no trabajan habitualmente, como por ejemplo el problema ETE con la incógnita en la transformación, o los que

contenían expresiones que no han trabajado tanto como son los de ECE con la incógnita en el estado de referencia.

Además, constatamos que los estudiantes utilizan muy pocas estrategias para modelizar el problema. Creemos que esto es debido al aumento del valor numérico de los datos, ya que cuando los números son de tres cifras es más complicado representarlo, o porque al no estar acostumbrados a utilizarlas prefieren resolverlo a través de la operación aritmética como se les pide en clase de Matemáticas.

En relación a la aplicación de la operación y la magnitud de los datos, muchos alumnos han identificado la operación correspondiente pero han fallado a la hora de aplicarlo, sobre todo cuando se resolvía a través de una resta con llevadas.

Por último, uno de los factores que ha influido mucho en esta prueba (y posteriormente en la intervención) es el uso inapropiado de “*palabras claves*” que suelen utilizar los alumnos cuando deciden la operación a aplicar en función de que lean la palabra “*más*” o “*menos*” en el enunciado del problema. De esta forma, los alumnos dejarán de prestar atención a lo que pide el problema y harán automáticamente la operación que corresponde si pone más, una suma, y en el caso del menos, una resta.

5º) En relación con el objetivo de “*diseñar, desarrollar y evaluar una propuesta parcial de enseñanza*” cabe indicar que la propuesta se centró en la tipología de problemas de comparación porque sólo disponíamos de tres sesiones y en la prueba de diagnóstico detectamos que los alumnos tenían más dificultades al resolver estos problemas. Aunque los alumnos siguen teniendo dificultades en los problemas ECE con la incógnita en el estado de referente (la mitad del grupo), en los demás de esta tipología se acerca al 100%. Por lo tanto, hemos observado una mejoría en estos problemas y además les hemos planteado a un grupo de 2º una forma diferente de poder resolver los problemas aritméticos sin tener que identificar la operación.

Sin embargo, siguen teniendo dificultades con los problemas con la incógnita en el estado de referencia causado por las expresiones “*más que*” o “*menos que*” porque se guían por las palabras “*más*” o “*menos*” pensando que les llevará a la operación aritmética correcta. Esto nos indica dos cuestiones:

1º) Algunos alumnos no comprenden las comparaciones ‘más que’ o ‘menos que’. Al comparar dos colecciones de objetos de diferente cardinal saben decir dónde hay más o menos cantidad pero no saben expresar cuánto hay de más o de menos entre las dos colecciones.

2º) El uso inadecuado que los alumnos hacen de las “*palabras claves*” al leer el enunciado de los problemas. Cuando se les plantea problemas de ECE con la incógnita en el estado de referencia que tiene una estructura más compleja que los otros problemas de comparación hemos detectado que han utilizado “*palabras claves*” porque no han sabido modelizar el problema a pesar de haber recibido enseñanza de las fases de resolución de un problema durante nuestra intervención de aula.

También, se ha podido ver que cuando los alumnos modelizan el problema lo comprenden mejor porque lo pueden visualizar y crear la representación, aunque su uso disminuye en la intervención porque creemos que no están acostumbrados a trabajar con ellos. Por esta falta de hábito, aunque haya alumnos que intenten resolverlo a través del material o un gráfico, y no lo representan correctamente, resuelven bien el problema porque tienen otro apoyo que les ayuda a comprender la situación, como puede ser los policubos o la operación aritmética.

Los alumnos han mejorado su rendimiento, en el breve tiempo de intervención, porque han seguido las fases: leer con calma el enunciado, verbalizar el enunciado y lo que se pregunta, la modelización del problema utilizando diferentes estrategias (materiales o diagrama) y así identificar la operación canónica. Es evidente que todos los alumnos no han seguido estas fases pero al menos ahora saben que esas fases del proceso de resolución de un problema aritmético pueden utilizarlas para resolverlo correctamente, en lugar de intentar adivinar la operación utilizando palabras claves.

Finalmente, y a modo de reflexión personal, con la realización de este trabajo he podido conocer una nueva perspectiva de la enseñanza de la suma y resta que antes no había valorado y también la importancia de la modelización del problema. Consideramos que esta enseñanza permite al alumno crear la representación de problema y así llevar a cabo las acciones necesarias para resolverlo. De esta forma se le da el significado a la suma y/o resta, facilitando al alumno la comprensión del problema

y de la operación aritmética que en ocasiones se convierte algo complejo sin el apoyo de materiales o esquemas.

Por último, agradecer la colaboración y disposición de la tutora del grupo de segundo. Siempre ha estado interesada por los resultados e involucrada en la intervención de aula que ha realizado este trabajo de fin de grado.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍCAS

- Ayala, C.L.; Galve, J.L.; Mozas, L.; Trallero, M. (2008). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas elementales. Madrid. CEPE, pp. 63-71.
- Carpenter, T.P.; Fennema,E; Franke, M.L; Levi, L; Empson, S.B (1999). Children's Mathematics. Cognitively Guided Instruction. Portsmouth, NH: Heinemann. Traducción de Carlos Castro Hernández y Marta Linares Alonso.
- Cid y otros (2013). Apuntes de la asignatura Didáctica de la Aritmética I del grado en Magisterio en Educación Primaria. Universidad de Zaragoza. Documento no publicado.
- Gaulin, C (2001) "Tendencias actuales de la resolución de problemas". Sigma, nº 19, pp. 51-63
- Jimeno Pérez, M. (2006) ¿Por qué las niñas y niños no aprenden matemáticas?. Barcelona. Octaedro, pp. 101-108.
- Jimeno Pérez, M. (s.f) Las dificultades en el aprendizaje matemático de los niños y niñas de Primaria: causas, dificultades, casos concretos.
- Juidías Barroso, J., Rodríguez Ortiz, I.R (2007) "Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos". N° 342, pp. 257-286.
- Luceño Campos, J.L., (1999). "La resolución de problemas aritméticos en el aula". Ediciones Aljibe. Archidona (Málaga).
- Maza Gómez, C. (1989). "Sumar y restar. El proceso de enseñanza/aprendizaje de la suma y de la resta.". Editorial Dónde.
- ORDEN de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA de 20/06/2014).
- Puig Espinosa, L.; Cerdán Pérez, F. (1998) Problema aritméticos escolares. Madrid. Síntesis, D.L.

Rico, L. (1998). “Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas”. En Kilpatrick, J y otros (eds.).Educación Matemática. Una empresa docente, Universidad de los Andes, Bogotá, pp. 82-108

ANEXOS

ANEXO I. PRUEBA INDAGATORIA

NOMBRE _____

FECHA _____

Problema 1.-

Tienes 37 caramelos de dos sabores, de naranja y de limón. Si 18 caramelos son de limón, ¿cuántos son de naranja?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

Problema 2.-

Para el recreo han preparado 340 bocadillos. Si han bajado 156 alumnos al patio y todos ellos han comido un bocadillo. ¿Cuántos bocadillos se han quedado sin comer?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

Problema 3.-

Una camiseta cuesta 35 euros menos que un pantalón. Si la camiseta cuesta 19 euros, ¿cuánto cuesta el pantalón?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

Problema 4.-

Sales de casa con dinero y te compras una mochila que cuesta 35 euros. Si ahora te quedan 55 euros, ¿con cuánto dinero saliste de casa?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

NOMBRE _____ FECHA _____

Problema 1.-

Juan tiene 46 pinturas de colores y Samuel tiene 19. ¿Cuántas pinturas tiene Juan más que Samuel?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

Problema 2.-

Hoy en una competición de ajedrez han asistido 184 chicos y 191 chicas. ¿Cuántas personas han ido a la competición?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

Problema 3.-

Tienes 35 cromos y tu mejor amigo te regala algunos. Si ahora tienes 60 cromos. ¿Cuántos cromos te ha regalado tu amigo?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas)

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

Problema 4.-

Una camiseta cuesta 35 euros menos que un pantalón. Si el pantalón cuesta 60 euros, ¿cuánto cuesta la camiseta?

SOLUCIÓN (Si necesitas hacer dibujos hazlos aquí. Recuerda escribir las operaciones que hagas):

RESPUESTA (escribe la respuesta, el número y la unidad):

ANEXO II. RÚBRICA DE EVALUACIÓN INDAGATORIA

Alumno/a	PROBLEMA							
	Identifica la operación		Estrategia que utiliza			Opera correctamente		Observaciones
	SI	NO	Dibuja	Otra	Desconocida	SI	NO	
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								

ANEXO III. EVALUACIONES DE LA PRUEBA INDAGATORIA

PROBLEMA 1 (EEE con la incógnita en el estado parcial)								
Alumno/a	Identifica la operación		Estrategia que utilize			Opera correctamente		Observaciones
	SI	NO	Dibuja	Otra	Desconocida	SI	NO	
1	X					SI		
2		X						Suma las dos cantidades (E_t más E_{p1}) y en el resultado en vez de poner 'hay X de naranja' escribe 'en total...'
3	X					SI		
4	X					NO		Se equivoca a la hora de restar con la llevada.
5	X					NO		Se olvida de la llevada. Y en la respuesta escribe 39 en vez de lo que le sale en la operación 29.
6	X					SI		
7	X		X			SI		Primero realiza los dibujos, aunque los borra, y después identifica la operación aritmética.
8	X					SI		
9	X					NO		Calcula mal la resta.
10	X					SI		
11	X					SI		
12	X					SI		
13		X						Realiza una suma, que le da 55, pero en la respuesta escribe 19, es decir, la solución.
14		X						Suma las dos cantidades (E_t más E_{p1})
15		X						Suma las dos cantidades (E_t más E_{p1})
16	X					SI		
17			X					Representa los datos con círculos y después tacha los de limón, hallando así el problema.
18	X					NO		Se equivoca en la resta entre las unidades, dando 13 pero después en el resultado escribe 17 caramelos.
19		X						Suma las dos cantidades (E_t más E_{p1})
20	X		X			SI		Primero realiza la operación y debajo de esta dibuja círculos como si fueran caramelos.
21	X					NO		Cambia el minuendo y sustraendo de posición, y se equivoca al escribir un dato (en vez de 37 escribe 38).
22	X					NO		Calcula mal la resta desde las unidades.
23	X					NO		Se equivoca en la resta por las unidades.
24	X					SI		Resuelve bien la operación pero en la respuesta indica '55 caramelos'.

25		X					Suma las dos cantidades (E_t más E_{p1})
26	X		X			SI	Realiza dibujos de los caramelos pero en ambos dibuja 37.
27	X					SI	
28	X		X			SI	Dibuja dos caramelos y en cada uno escribe los datos.

PROBLEMA 2 (ETE con la incógnita en el estado final)								
Alumno/a	Identifica la operación		Estrategia que utilice			Opera correctamente		Observaciones
	SI	NO	Dibuja	Otra	Desconocida	SI	NO	
1	X					SI		
2	X					NO		Se equivoca ya en el inicio de la resta, en las unidades, y en la respuesta escribe 'en total...'
3	X					SI		
4	X					SI		
5	X					NO		Se olvida las llevadas.
6	X					NO		Se equivoca en el inicio de la resta, en las unidades.
7	X					SI		
8	X					SI		
9	X					NO		Se equivoca en las decenas afectando esto también en las llevadas.
10	X					NO		Se equivoca en la resta y no tiene en cuenta las llevadas.
11	X					SI		
12	X					SI		
13	X					SI		
14	X					NO		Mezcla la suma (las decenas y unidades) y la resta. (centenas).
15	X					NO		Mezcla la suma y la resta.
16	X					SI		
17	X					SI		
18	X					SI		
19	X					NO		Se equivoca en el inicio de la resta ya que mezcla entre la suma y la resta.
20	X					SI		
21	X					NO		Cambia el minuendo y sustraendo de posición.
22	X					NO		Se equivoca en la resta y no tiene en cuenta las llevadas.
23	X					SI		
24	X					NO		Se equivoca en las decenas ya que se olvida la llevada.

25	X					NO	Se equivoca desde el inicio de la resta.
26	X					SI	
27	X					NO	Se equivoca en las decenas.
28	X		X			NO	Se equivoca desde el inicio (unidades). El dibujo que realiza es una representación del problema.

PROBLEMA 3 (ECE con la incógnita en el estado de referencia)								
Alumno/a	Identifica la operación		Estrategia que utilice			Opera correctamente		Observaciones
	SI	NO	Dibuja	Otra	Desconocida	SI	NO	
1	X					SI		
2		X						Resuelve con una resta y contesta en la respuesta ‘en total cuesta el pantalón 16 euros’.
3		X						Resuelve a través de una resta. Pero en la respuesta indica que vale 35 euros.
4								Resuelve a través de una resta.
5		X				SI		Es capaz de comprender el problema a través de una pequeña explicación.
6		X						Resuelve a través de una resta.
7	X					SI		
8	X					SI		
9		X						Realiza una resta y esta la opera incorrectamente.
10		X						Resuelve a través de una resta.
11		X						Resuelve a través de una resta.
12		X						Resuelve a través de una resta y en la respuesta indica que ‘en total cuesta 16 euros’.
13		X				SI		Supo comprender y resolver el problema con una pequeña explicación de éste.
14		X						Resuelve a través de una resta, olvida la llevada, y en la respuesta se olvida la solución que le ha dado la operación.
15	X					SI		
16		X				SI		Supo comprender y resolver el problema con una pequeña explicación de éste.
17	X		X			SI		Supo comprender y resolver el problema con una pequeña explicación de éste. También se ayuda haciendo los dibujos de los datos e indica cual era mayor (<).
18		X						Realiza una resta y esta la opera incorrectamente.

19		X					Indica que es una multiplicación pero suma las cantidades. Arrastra el error desde las unidades, ya que no las suma bien.
20		X					Realiza una resta.
21							No realiza ninguna operación. Si que contesta que el pantalón cuesta más porque anteriormente con una pequeña explicación entendió que era más caro.
22							
23		X					Realiza una resta.
24		X				SI	Supo comprender y resolver el problema con una pequeña explicación de éste.
25	X					NO	Se equivoca en los datos, ya que en vez de 19 escribe 16.
26		X					Resuelve problema con una resta.
27		X					Resuelve el problema a través de una resta.
28		X					Resuelve el problema a través de una resta.

Los alumnos que están marcados de color verde son los que no comprendían el problema y con preguntas se les guiaron para comprender el problema.

PROBLEMA 4 (ETE con la incógnita en el estado inicial)								
Alumno/a	Identifica la operación		Estrategia que utilice			Opera correctamente		Observaciones
	SI	NO	Dibuja	Otra	Desconocida	SI	NO	
1	X					SI		
2	X					SI		En la solución escribe 'en total has salido de casa con 90 euros'.
3		X						Lo resuelve a través de una resta. Además piensa que el problema le pide lo que ha gastado ya que en la respuesta escribe 'ha gastado 20 euros'. Aunque previamente se le explicó ya que no lo entendía.
4	X					SI		
5	X					SI		
6	X					SI		
7	X					SI		
8	X					SI	.	
9	X					SI		

10		X					Cambia el minuendo y sustraendo de posición y realiza la resta como una suma, las unidades, y las decenas las restas.
11	X					SI	
12	X					SI	
13		X					Realiza una resta.
14		X					Realiza una resta y en la respuesta escribe 'le han quedado 20 euros', por lo considera que es lo que tiene ahora y no antes.
15	X					SI	
16		X					Realiza una resta.
17	X					SI	
18	X					SI	
19		X					Realiza una resta.
20	X					SI	
21	X					SI	
22		X		X			Resta 80 menos 35, porque ha intentado hacer la operación inversa ($90-35= 55$) pero lo hace incorrectamente porque falla en la llevada.
23	X					SI	En la respuesta indica 'en total tienen 90 euros'.
24		X					Fue ayudado ya que no lo entendía y la respuesta la indica 'en total sales de cada con 90 euros'
25		X					Lo hizo mentalmente pero a la hora de que lo escribiera necesito ayuda.
26	X		X			SI	
27	X					SI	
28	X					SI	

PROBLEMA 5 (ECE con la incógnita en la comparación)								
Alumno/a	Identifica la operación		Estrategia que utilize			Opera correctamente		Observaciones
	SI	NO	Dibuja	Otra	Desconocida	SI	NO	
1		X						Resuelve el problema con una suma.
2		X						Resuelve el problema con una suma e indica en la respuesta 'en total Juan tiene 65 pinturas'.
3	X					SI		En la respuesta escrita se le olvida 'más'. Escribe 'Juan tiene 27 pinturas que Samuel'
4	X					SI		En la respuesta cambia caramelos por cromos.

5	X					NO	En las unidades realiza bien la operación pero después en las decenas suma y se olvida la llevada.
6		X					Resuelve el problema con una suma y se equivoca en un dato, 19 por 16.
7	X					SI	
8	X					SI	
9	X					NO	Se equivoca en las unidades, arrastrando el error, y en la respuesta indica que 'A Samuel le quedan 33 para tener lo mismo'.
10	X					NO	Invierte la posición del minuendo y sustraendo.
11	X					SI	
12	X					SI	Indica que 'en total tienen 27 pinturas de colores'.
13	X					SI	
14		X					Resuelve el problema con una suma y en la respuesta escrita indica que 'Juan tiene 65 pinturas en total'.
15		X					Resuelve el problema con una suma.
16	X					SI	
17	X					SI	
18	X					SI	
19		X					Resuelve el problema con una suma.
20	X					SI	
21	X					SI	
22	X					NO	Se equivoca en uno de los datos, en vez de 46 escribe 49, a la hora de realizar la operación.
23	X					NO	Se equivoca en uno de los datos, en vez de 19 escribe 16, a la hora de realizar la operación.
24		X					Resuelve el problema con una suma.
25							Supuestamente realiza cálculo mental pero es incorrecto ya que indica que 'Juan tiene 10 más que Samuel'.
26	X					SI	En la respuesta escrita indica 'en total tiene 27 más'.
27	X					SI	En la respuesta en vez de 'pinturas' escribe 'cromos'.
28	X					SI	

PROBLEMA 6 (EEE con la incógnita en el estado total)								
Alumno/a	Identifica la operación		Estrategia que utiliza			Opera correctamente		Observaciones
	SI	NO	Dibuja	Otra	Desconocida	SI	NO	
1	X					SI		
2	X					SI		
3	X					NO		Se olvida de la llevada al sumar en las centenas.
4	X					SI		
5	X					SI		
6	X					SI		
7	X					SI		
8	X					SI		
9	X					NO		Se equivoca en la suma de las decenas.
10	X					NO		Se equivoca en la suma de las decenas.
11	X					SI		
12	X					SI		
13		X						Resuelve el problema con una resta.
14	X					SI		
15	X					SI		
16	X					SI		
17	X					SI		
18	X					SI		
19	X					NO		Se equivoca en la suma de las decenas.
20	X					NO		Se equivoca en un dato, en vez de 191 escribe 194.
21	X					SI		
22	X					SI		
23	X					SI		
24	X					SI		
25	X					SI		
26	X					SI		
27	X					SI		
28		X						Resuelve el problema con una resta e invierte la posición del minuendo y sustraendo.

PROBLEMA 7 (ETE con la incógnita en la transformación)								
Alumno/a	Identifica la operación		Estrategia que utiliza			Opera correctamente		Observaciones
	SI	NO	Dibuja	Otra	Desconocida	SI	NO	
1	X					SI		
2		X						Resuelve con una suma y escribe como respuesta ‘en total tiene 95 cromos tu mejor amigo’.
3	X					SI		
4	X					SI		
5	X					SI		
6		X		X				La operación la plantea como una suma pero la realiza como una resta aunque se equivoca en las llevadas.
7	X					SI		
8	X					SI		
9		X						Resuelve el problema con una suma.
10				X				Lo resuelve a través de la inversa ($35+25=60$)
11	X					SI		
12	X					SI		En la respuesta indica ‘en total hay 25 cromos’.
13	X					SI		
14		X						Resuelve el problema con una suma.
15		X						Resuelve el problema con una suma.
16	X					SI		
17				X				Lo resuelve a través de la inversa ($35+25=60$).
18		X				SI		Necesito ayuda una explicación porque no lo llegaba a entender.
19	X					NO		Se olvida de la llevada.
20	X					SI		
21	X					SI		Necesito ayuda una explicación porque no lo llegaba a entender.
22		X		X				Lo resuelve con la operación inversa aunque su respuesta es incorrecta porque no tiene en cuenta la llevada.
23	X					SI		
24		X						Resuelve el problema con una suma.
25		X				NO		La operación que indica que es una resta pero la realiza como una suma. Además cambia la posición del minuendo y sustraendo.
26	X					SI		
27		X				SI		Necesitó ayuda para resolverlo.

28							No lo realizó.
----	--	--	--	--	--	--	----------------

PROBLEMA 8 (ECE con la incógnita en el estado comparado)							
Alumno/a	Identifica la operación		Estrategia que utiliza			Opera correctamente	Observaciones
	SI	NO	Dibuja	Otra	Desconocida		
1	X					SI	
2	X					NO	Comienza la resta equivocándose en las unidades y en la respuesta indica 'en total le cuesta el pantalón en total'.
3	X					SI	
4	X					SI	
5	X					SI	En la respuesta indica que 'cuesta 25 euros más'.
6	X					NO	Comienza la resta equivocándose en las unidades.
7	X					SI	
8	X					SI	
9	X					SI	
10							La posición de los datos en la resta y el resultado indica que es una resta pero no coloca el signo de menos. Además, olvida la llevada.
11	X					NO	Invierte la posición del minuendo y sustraendo.
12	X					SI	Aunque resuelve el problema bien en la respuesta escribe que 'la camiseta cuesta treinta y cinco euros'.
13	X					SI	En la respuesta se olvida de poner la unidad, euros.
14	X					NO	Se equivoca a partir de las unidades.
15		X					Resuelve a través de una suma.
16	X					SI	
17	X					SI	
18	X					SI	
19		X					Resuelve a través de una suma.
20		X					Resuelve a través de una suma.
21	X					SI	
22	X					NO	Invierte la posición del minuendo y sustraendo.
23	X					NO	Invierte la posición del minuendo y sustraendo y al escribir indica 'en total cuesta 64 euros'.
24		X					Resuelve a través de una suma.
25		X					Supuestamente ha hecho cálculo mental pero en la respuesta escribe 35 euros.

26	X					SI	Representa los datos en dibujos.
27	X					NO	Se olvida de la llevada en las decenas.
28							No lo realizó.

PRUEBA INICIAL

Alumno	Prob 2 (ETE en E final)			
	Identifica	Estrategia	Opera	B/M
A. 1	1	0	1	1
A. 2	1	0	0	0
A. 3	1	0	1	1
A. 4	1	0	1	1
A. 5	1	0	0	0
A. 6	1	0	0	0
A. 7	1	0	1	1
A. 8	1	0	1	1
A. 9	1	0	0	0
A. 10	1	0	0	0
A. 11	1	0	1	1
A. 12	1	0	1	1
A. 13	1	0	1	1
A. 14	1	0	0	0
A. 15	1	0	0	0
A. 16	1	0	1	1
A. 17	1	0	1	1
A. 18	1	0	1	1
A. 19	1	0	0	0
A. 20	1	0	1	1
A. 21	1	0	0	0
A. 22	1	0	0	0
A. 23	1	0	1	1
A. 24	1	0	0	0
A. 25	1	0	0	0
A. 26	1	0	1	1
A. 27	1	0	0	0
A. 28	1	0	0	0

28 0 14 14

PRUEBA INICIAL

Alumno	Prob 6 (EEE en E total)			
	Identifica	Estrategia	Opera	B/M
A. 1	1	0	1	1
A. 2	1	0	1	1
A. 3	1	0	0	0
A. 4	1	0	1	1
A. 5	1	0	1	1
A. 6	1	0	1	1
A. 7	1	0	1	1
A. 8	1	0	1	1
A. 9	1	0	0	0
A. 10	1	0	0	0
A. 11	1	0	0	0
A. 12	1	0	1	1
A. 13	0	0	1	1
A. 14	1	0	1	1
A. 15	1	0	1	1
A. 16	1	0	1	1
A. 17	1	0	1	1
A. 18	1	0	1	1
A. 19	1	0	0	0
A. 20	1	0	0	0
A. 21	1	0	1	1
A. 22	1	0	1	1
A. 23	1	0	1	1
A. 24	1	0	1	1
A. 25	1	0	1	1
A. 26	1	0	1	1
A. 27	1	0	1	1
A. 28	0	0	0	0

26 0 21 21

PRUEBA INICIAL

Alumno	Prob 8 (ECE en E comparado)			
	Identifica	Estrategia	Opera	B/M
A. 1	1	0	1	1
A. 2	1	0	0	0
A. 3	1	0	1	1
A. 4	1	0	1	1
A. 5	1	0	1	1
A. 6	1	0	0	0
A. 7	1	0	1	1
A. 8	1	0	1	1
A. 9	1	0	1	1
A. 10	1	0	0	0
A. 11	1	0	0	0
A. 12	1	0	1	1
A. 13	1	0	1	1
A. 14	1	0	0	0
A. 15	0	0	1	0
A. 16	1	0	1	1
A. 17	1	0	1	1
A. 18	1	0	1	1
A. 19	0	0	1	0
A. 20	0	0	1	0
A. 21	1	0	1	1
A. 22	1	0	0	0
A. 23	1	0	0	0
A. 24	0	0	1	0
A. 25	1	0	0	0
A. 26	1	0	1	1
A. 27	1	0	0	0
A. 28				

23 0 18 14

PRUEBA INICIAL

Alumno	Prob 4 (ETE en E inicial)			
	Identifica	Estrategia	Opera	B/M
A. 1	1	0	1	1
A. 2	1	0	1	1
A. 3	0	0	1	0
A. 4	1	0	1	1
A. 5	1	0	1	1
A. 6	1	0	1	1
A. 7	1	0	1	1
A. 8	1	0	1	1
A. 9	1	0	1	1
A. 10	0	0	0	0
A. 11	1	0	1	1
A. 12	1	0	1	1
A. 13	0	0	1	0
A. 14	0	0	1	0
A. 15	1	0	1	1
A. 16	0	0	1	0
A. 17	1	0	1	1
A. 18	1	0	1	1
A. 19	0	0	1	0
A. 20	1	0	1	1
A. 21	1	0	1	1
A. 22	0	1	0	0
A. 23	1	0	1	1
A. 24	1	0	1	1
A. 25	1	0	1	1
A. 26	1	0	1	1
A. 27	1	0	1	1
A. 28	1	0	1	1
	21	1	26	21

1 Propone realizar la operación inversa

PRUEBA INICIAL

Alumno	Prob 1 (EEE en E parcial)			
	Identifica	Estrategia	Opera	B/M
A. 1	1	0	1	1
A. 2	0	0	1	0
A. 3	1	0	1	1
A. 4	1	0	0	0
A. 5	1	0	0	0
A. 6	1	0	1	1
A. 7	1	1	1	1
A. 8	1	0	1	1
A. 9	1	0	0	0
A. 10	1	0	1	1
A. 11	1	0	1	1
A. 12	1	0	1	1
A. 13	0	0	1	0
A. 14	0	0	1	0
A. 15	0	0	1	0
A. 16	1	0	1	1
A. 17	0	1	0	1
A. 18	1	0	0	0
A. 19	0	0	1	0
A. 20	1	1	1	1
A. 21	1	0	0	0
A. 22	1	0	0	0
A. 23	1	0	0	0
A. 24	1	0	1	1
A. 25	0	0	1	0
A. 26	1	0	1	1
A. 27	1	0	1	1
A. 28	1	0	1	1

21 3 20 15

1 Se ayuda de un dibujo

PRUEBA INICIAL

Alumno	Prob 5 (ECE en comparación)			
	Identifica	Estrategia	Opera	B/M
A. 1	0	0	1	0
A. 2	0	0	1	0
A. 3	1	0	1	1
A. 4	1	0	1	1
A. 5	1	0	0	0
A. 6	0	0	1	0
A. 7	1	0	1	1
A. 8	1	0	1	1
A. 9	1	0	0	0
A. 10	1	0	0	0
A. 11	1	0	1	1
A. 12	1	0	1	1
A. 13	1	0	1	1
A. 14	0	0	1	0
A. 15	0	0	1	0
A. 16	1	0	1	1
A. 17	1	0	1	1
A. 18	1	0	1	1
A. 19	0	0	0	0
A. 20	1	0	1	1
A. 21	1	0	1	1
A. 22	1	0	0	0
A. 23	1	0	1	0
A. 24	0	0	0	0
A. 25	0	0	0	0
A. 26	1	0	1	0
A. 27	0	0	1	1
A. 28	1	0	1	1

19 0 21 14

PRUEBA INICIAL

Alumno	Prob 7 (ETE en transformación)			
	Identifica	Estrategia	Opera	B/M
A. 1	1	0	1	1
A. 2	0	0	1	0
A. 3	1	0	1	1
A. 4	1	0	1	1
A. 5	1	0	1	1
A. 6	0	0	0	0
A. 7	1	0	1	1
A. 8	1	0	1	1
A. 9	0	0	1	0
A. 10	0	1	1	1
A. 11	1	0	1	1
A. 12	1	0	1	1
A. 13	1	0	1	1
A. 14	0	0	1	0
A. 15	0	0	1	0
A. 16	1	0	1	1
A. 17	0	1	1	1
A. 18	0	0	1	1
A. 19	1	0	0	0
A. 20	1	0	1	1
A. 21	1	0	1	1
A. 22	0	1	0	0
A. 23	1	0	1	1
A. 24	0	0	1	0
A. 25	0	0	1	0
A. 26	1	0	1	1
A. 27	1	0	1	1
A. 28				
	16	3	24	18

1 Propone realizar la operación inversa

PRUEBA INICIAL

Alumno	Prob 3 (ECE en E referencia)			
	Identifica	Estrategia	Opera	B/M
A. 1	1	0	1	1
A. 2	0	0	1	0
A. 3	0	0	1	0
A. 4	0	0	1	0
A. 5	1	0	1	1
A. 6	0	0	1	0
A. 7	1	0	1	1
A. 8	1	0	1	1
A. 9	0	0	0	0
A. 10	0	0	1	0
A. 11	0	0	1	0
A. 12	0	0	1	0
A. 13	1	0	1	1
A. 14	0	0	0	0
A. 15	1	0	1	1
A. 16	1	0	1	1
A. 17	1	1	1	1
A. 18	0	0	0	0
A. 19	0	0	0	0
A. 20	0	0	1	0
A. 21				
A. 22				
A. 23	0	0	1	0
A. 24	1	0	1	1
A. 25	1	0	0	0
A. 26	0	0	1	0
A. 27	0	0	1	0
A. 28	0	0	1	0

10 1 21 9

1 Se ayuda de un dibujo

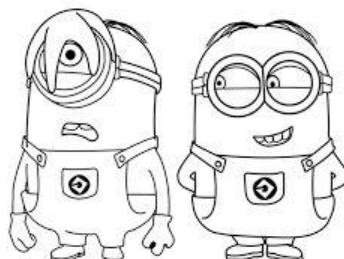
RESULTADOS GENERALES

Alumno	Total que identifican	Total estrategias	Total que operan bien	Total con éxito
A. 1	7	0	8	7
A. 2	4	0	6	2
A. 3	6	0	7	5
A. 4	7	0	7	6
A. 5	8	0	5	5
A. 6	5	0	5	3
A. 7	8	1	8	8
A. 8	8	0	8	8
A. 9	6	0	3	2
A. 10	5	1	3	2
A. 11	7	0	6	5
A. 12	7	0	8	7
A. 13	5	0	8	6
A. 14	3	0	5	1
A. 15	4	0	7	3
A. 16	7	0	8	7
A. 17	6	3	7	8
A. 18	6	0	6	6
A. 19	3	0	3	0
A. 20	6	1	7	5
A. 21	7	0	5	5
A. 22	5	2	1	1
A. 23	7	0	6	4
A. 24	5	0	6	4
A. 25	5	0	4	2
A. 26	7	0	8	6
A. 27	6	0	6	5
A. 28	4	0	4	3

ANEXO IV. FICHAS DE LA INTERVENCIÓN

NOMBRE: _____ FECHA: _____

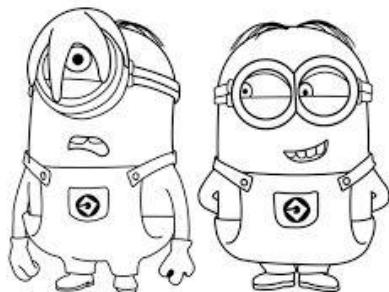
1. Alex tiene 12 cromos y Juan tiene 21. ¿Cuántos cromos tiene más Juan que Alex?



DIBUJOS Y SOLUCIÓN	CORRECCIÓN
RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): _____ _____ _____	RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): _____ _____ _____

NOMBRE: _____ FECHA: _____

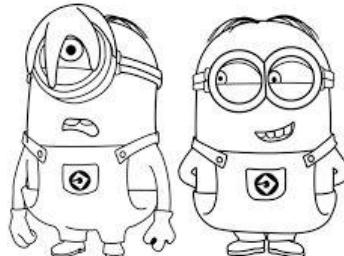
2. Alex tiene 12 caramelos y Juan tiene 30. ¿Cuántos caramelos tiene Alex menos que Juan?



DIBUJOS Y SOLUCIÓN	CORRECCIÓN
RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): <hr/> <hr/> <hr/>	RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): <hr/> <hr/> <hr/>

NOMBRE: _____ FECHA: _____

3. Juan tiene 12 cromos menos que su hermano Alex. Si Alex tiene 20. ¿Cuántos cromos tiene Juan?



DIBUJOS Y SOLUCIÓN	CORRECCIÓN
RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): _____	RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): _____

NOMBRE: _____ FECHA: _____

4. Alex compró una camiseta y un pantalón. La camiseta vale 15 euros más que el pantalón. Si el pantalón vale 35 euros.
¿Cuánto vale la camiseta?

DIBUJOS Y SOLUCIÓN	CORRECCIÓN
RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): _____	RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): _____

NOMBRE: _____ FECHA: _____

5. Juan tiene 15 euros más que su hermano Alex. Si Juan tiene 40 euros. ¿Cuántos euros tiene Alex?

DIBUJOS Y SOLUCIÓN	CORRECCIÓN
RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): _____ _____ _____	RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): _____ _____ _____

NOMBRE: _____ FECHA: _____

6. Juan tiene 15 cromos menos que su hermano Alex. Si Juan tiene 16 cromos, ¿cuántos cromos tiene Alex?

DIBUJOS Y SOLUCIÓN	CORRECCIÓN
RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): _____ _____ _____	RESPUESTA (NÚMERO Y UNIDAD): _____ _____ _____

ANEXO V. RÚBRICA DE EVALUACIÓN DE LA INTERVENCIÓN

Alumno/a	Modelización		Sentencia numérica			Resuelve correctamente		Observaciones
	Material	Diagrama	Canónica	No canónica	No la escribe	SI	NO	
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								
15								
16								
17								
18								
19								
20								
21								
22								
23								
24								
25								
26								
27								
28								

ANEXO VI. EVALUACIÓN DE LOS RESULTADOS DE INTERVENCIÓN

PROBLEMA 1. *Alex tiene 12 cromos y Juan tiene 21. ¿Cuántos cromos tiene más Juan que Alex?*

Alumno/a	Modelización		Sentencia numérica			Resuelve correctamente		Observaciones
	Material	Diagrama	Canónica	No canónica	No la escribe	SI	NO	
1	X	X			X	X		
2	X	X			X	X		En la respuesta escribe: Juan tiene 9 euros.
3	X	X	X			X		Se equivoca al escribir el número en la solución y en el diagrama.
4								
5	X	X			X	X		Diagrama incorrecto
6	X	X			X		X	Diagrama incorrecto
7	X	X			X	X		Diagrama incorrecto
8	X	X	X			X		
9	X	X	X			X		No escribe la solución pero sabe el significado de la pregunta porque fue uno de los dos alumnos que salió a la explicar como lo habían hecho.
10	X	X			X	X		Diagrama incorrecto
11	X	X	X			X		
12	X	X			X	X		
13	X	X			X	X		
14	X	X			X	X		Fue ayudado por la profesora.
15	X	X	X				X	No indica que operación que hace ya que no colca signo y pone de resultado 12.
16	X	X			X	X		
17	X	X			X	X		
18	X	X			X	X		Diagrama incorrecto
19	X	X			X	X		
20	X	X	X			X		
21	X	X			X		X	Diagrama y resultado incorrecto.
22	X	X			X	X		Diagrama incorrecto
23	X	X			X	X		

24	X	X			X	X		Realizó el diagrama mal pero contó con el material mientras la profesora ayudaba a una compañera.
25	X	X			X	X		Fue ayudado por la profesora.
26	X	X	X			X		
27	X				X	X		
28	X	X			X	X		Fue ayudada por la profesora.

PREGUNTAS DE LA REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA ECE CON LA INCÓGNITA EN LA COMPARACIÓN.

Las preguntas marcadas son las respuestas correctas de los alumnos en la actividad de formular de nuevo la pregunta del enunciado: *Alex tiene 12 cromos y Juan tiene 21. ¿Cuántos cromos tiene más Juan que Alex?*

1. No hizo pregunta.
2. Escribe la misma pregunta del enunciado.
3. No hizo pregunta.
4. No vino a clase
- 5. ¿Cuántos cromos le faltan a Alex para tener los de Juan?**
- 6. ¿Cuántos cromos tiene Alex menos que Juan?**
- 7. ¿Cuántos se tendría que restar Juan para tener lo mismo?**
- 8. ¿Quién tiene menos cromos?**
9. No hizo pregunta.
- 10. ¿Cuántos falta Alex para tener igual como Juan?**
11. No hizo pregunta.
12. ¿Juan tiene más euros que Alex?
- 13. ¿Cuántos se tendría que restar Juan para tener lo mismo?**
14. Alex tiene 12 cromos y Juan 21. ¿cuántos tiene entre los dos Juan y Alex?
15. ¿Cuántos cromos tienen en común?
16. No hizo pregunta.
17. Juan tiene 20 caramelos y Alex 30. ¿cuántos caramelos tiene menos Juan que Alex? (invierte la pregunta pero con un problema creado por él)
18. No hizo pregunta.
- 19. ¿Cuántos cromos tiene menos Alex que Juan?**
20. No hizo pregunta.
21. No hizo pregunta.
- 22. ¿Cuántos cromos le faltaba Alex para tener los mismos cromos que Juan?**
23. No hizo pregunta.
- 24. ¿Cuántos cromos tiene Alex menos que Juan?**
25. No hizo pregunta.
- 26. ¿Cuántos cromos tiene Alex menos que Juan?**
27. ¿Cuántos cromos tiene más que Juan?
- 28. ¿Cuántos cromos tiene Alex menos que Juan?**

PROBLEMA 2. Alex tiene 12 caramelos y Juan tiene 30. ¿Cuántos caramelos tiene Alex menos que Juan?

Alumno/a	Modelización		Sentencia numérica			Resuelve correctamente		Observaciones
	Material	Diagrama	Canónica	No canónica	No la escribe	SI	NO	
3		X	X			X		
8		X	X			X		
10		X			X	X		
19		X			X	X		

PROBLEMA 3. Juan tiene 12 cromos menos que su hermano Alex. Si Alex tiene 20. ¿Cuántos cromos tiene Juan?

Alumno/a	Modelización		Sentencia numérica			Resuelve correctamente		Observaciones
	Material	Diagrama	Canónica	No canónica	No la escribe	SI	NO	
1	X		X			X		En la respuesta escrita indica que 'Juan tiene 8 cromos menos que Alex'
2		X	X			X		Corrección del diagrama.
3								
4	X		X			X		Respuesta escrita: 'Juan tiene 8 cromos más'
5	X				X	X		Respuesta escrita: 'Alex tiene 8 cromos más'
6			X			X		En la respuesta escrita indica que 'Juan tiene 8 cromos menos que Alex'
7			X			X		
8			X			X		
9			X			X		En la respuesta escrita indica que 'Alex tiene 8 cromos más que Juan'
10	X	X				X		Diagrama incorrecto
11			X			X		
12		X	X			X		Diagrama incorrecto
13		X	X			X		

14	X		X			X		
15	X		X			X		No escribe respuesta escrita. Fue ayudado con el material.
16			X			X		
17			X			X		
18			X			X		Respuesta escrita: "Alex tiene 8 cromos más que Juan".
19		X	X			X		
20			X			X		Respuesta escrita: "Tiene 8 cromos más"
21								
22	X		X			X		Respuesta escrita: "Juan tiene 8 cromos menos"
23			X			X		
24		X	X			X		Diagrama incorrecto
25	X				X	X		Respuesta escrita: "Juan tiene 8 cromos menos que Alex"
26		X	X			X		
27			X			X		No escribe respuesta escrita.
28			X			X		

Problema 4. *Alex compró una camiseta y un pantalón. La camiseta vale 15 euros más que el pantalón. Si el pantalón vale 35 euros. ¿Cuánto vale la camiseta?*

Alumno/a	Modelización		Sentencia numérica			Resuelve correctamente		Observaciones
	Material	Diagrama	Canónica	No canónica	No la escribe	SI	NO	
1	X		X			X		
2	X	X	X			X		
3								
4	X		X			X		
5			X			X		Respuesta escrita: "La camiseta cuesta 15 euros más".
6			X			X		
7			X			X		

8			X			X		
9			X			X		
10			X			X		
11			X			X		
12		X	X			X		Diagrama incorrecto.
13		X	X			X		Diagrama incorrecto y respuesta escrita: "vale 50 más que el pantalón".
14		X	X			X		
15		X	X			X		
16			X			X		
17			X			X		Respuesta escrita: "50 euros en total"
18			X			X		
19		X	X			X		No escribe la respuesta larga.
20			X			X		No escribe la respuesta.
21								
22			X			X		
23			X			X		
24			X			X		No escribe la respuesta larga.
25			X			X		No escribe la respuesta larga.
26			X			X		
27			X			X		
28	X		X			X		

Problema 5. Juan tiene 15 euros más que su hermano Alex. Si Juan tiene 40 euros.

¿Cuántos euros tiene Alex?

Alumno/a	Modelización		Sentencia numérica			Resuelve correctamente		Observaciones
	Material	Diagrama	Canónica	No canónica	No la escribe	SI	NO	
1			X			X		Escribe: "Alex tiene 25 cromos".
2		X	X			X		No escribe respuesta.
3								
4			X			X		

5			X			X		Escribe: "Alex tiene 25 euros más"
6			X			X		
7			X			X		
8			X			X		Escribe: "Alex tiene 35 euros"
9			X			X		
10			X			X		
11			X			X		
12		X	X			X		No escribe respuesta
13			X			X		
14			X			X		
15			X				X	Aplica mal la resta y no escribe respuesta.
16			X			X		
17			X			X		
18			X			X		
19		X	X			X		En la respuesta le faltan las unidades
20			X			X		
21								
22			X			X		Escribe: Escribe: "Juan tiene 25 euros"
23								No lo hizo
24								No lo hizo
25			X				X	
26								No lo hizo
27			X			X		No escribe respuesta.
28			X			X		No escribe respuesta.

Problema 6. Juan tiene 15 cromos menos que su hermano Alex. Si Juan tiene 16 cromos, ¿cuántos cromos tiene Alex?

Alumno/a	Modelización		Sentencia numérica			Resuelve correctamente		Observaciones
	Material	Diagrama	Canónica	No canónica	No la escribe	SI	NO	
1	X		X			X		
2		X				X		No escribe respuesta.
3								

4	X		X			X		
5		X					X	Escribe: "Alex tiene 15 cromos más"
6			X			X		Escribe el símbolo de la suma pero aplica una resta.
7			X			X		Escribe: 'Juan tiene 31 cromos'
8			X			X		
9			X			X		
10		X	X			X		
11			X			X		
12		X	X			X		Diagrama incorrecto
13			X			X		
14			X			X		
15			X			X		No escribe respuesta.
16			X			X		
17			X			X		
18			X			X		
19		X	X			X		
20			X			X		
21								
22	X		X			X		
23								No lo hizo
24								No lo hizo
25								No lo hizo
26								No lo hizo
27								No lo hizo
28		X					X	

Los alumnos que están marcados de color verde son los que no comprendían el problema y con preguntas se les guiaron para comprender el problema.