

# Ecuaciones diferenciales con aula invertida

## Differential equations with flipped classroom

Leonardo Fernández Jambrina  
leonardo.fernandez@upm.es

Departamento de Matemática e Informática  
Aplicadas a las Ingenierías Civil y Naval  
Universidad Politécnica de Madrid  
Madrid, España

**Resumen-** Con esta comunicación se quiere presentar una experiencia de metodología docente de aula invertida aplicada a una asignatura de módulo básico de matemática aplicada en grados de ingeniería. La motivación de esta experiencia ha sido mejorar las tasas de rendimiento y de éxito de la asignatura, poder combinarla con una evaluación realmente continua y un mejor aprovechamiento de las horas presenciales de la asignatura. Se detalla tanto el proceso de preparación de la experiencia como el desarrollo de la misma. Los resultados de la experiencia son positivos tanto en la apreciación de los alumnos como en las tasas de éxito y rendimiento de la asignatura.

**Palabras clave:** *Aula invertida, COMA, matemáticas.*

**Abstract-** This communication displays an experience of application of the methodology of flipped classroom to a basic course of applied mathematics in engineering studies. The aims of this experience are the improvement of the rates of success of the course, the possibility of combining it with an actual continuous evaluation and a better profiting of lecturing time of the course. Both the process of preparation of the experience and its development are explained. The results of the experience are positive regarding both the evaluation of the students and the rates of success of the course.

**Keywords:** *Flipped classroom, MOOC, mathematics.*

### 1. INTRODUCCIÓN

La metodología docente de aula invertida (flipped classroom en inglés) (Baker 2000, Lage et al 2000, Sams et al 2014) consiste esencialmente, como su nombre indica, en intercambiar el lugar y el tiempo de las tareas que desarrolla el alumno para su aprendizaje. Puede abarcar una asignatura entera o parte de ella (Sein-Echeluze et al 2015), combinada con otras metodologías docentes.

En una metodología tradicional de clase expositiva, el alumno toma notas de la exposición del profesor en la clase presencial y debe asimilar más o menos en tiempo real los contenidos que le son presentados.

En cambio, fuera del aula el alumno, individualmente o en grupo, debe realizar una serie de tareas (ejercicios, prácticas...) para consolidar el aprendizaje.

En la metodología de aula invertida estos papeles se invierten.

Fuera del aula, el alumno debe asimilar los contenidos de la asignatura a través de una serie de materiales para el autoaprendizaje facilitados por el profesor, que pueden incluir cuestionarios *online* (Novillo et al 2015).

Después, en el aula, en presencia del profesor, es donde el alumno debe realizar las tareas de consolidación de aprendizaje y poner en común sus dudas (Strayer 2012).

Las ventajas que puede ofrecer este tipo de metodología de cara al aprendizaje son muy variadas (Fernández-Jambrina 2013):

- Garantizar que los alumnos tienen a su disposición una serie de materiales fiables que guíen su aprendizaje, adaptados al contexto de la titulación y de su formación previa.

- Adaptación al marco del EEES, que sugiere que las actividades presenciales, incluidas la de evaluación, ocupen menos tiempo que el que se dedica al autoaprendizaje del alumno.

- Fomentar la participación del alumno en las tutorías, ya que las actividades presenciales forman parte de una tutoría colectiva, lo que tiende a facilitar la confianza entre profesor y alumno (Bergman & Sachs 2012).

- Adaptar el aprendizaje de los alumnos a sus necesidades personales, al desligarlo de horarios rígidos, más allá de las actividades presenciales y de evaluación (Fulton 2012).

- Mejorar las tasas de rendimiento y de éxito de los alumnos (Castilla et al 2015, Pino et al 2016).

Este enfoque no es del todo novedoso, ya que se puede implantar sin otros materiales que capítulos de libros de texto o de consulta, aunque parece que el impacto es mayor en formato audiovisual (Zheng et al 2006).

Sin embargo, la extensión del uso de las tecnologías de la información y de la comunicación permite el empleo de materiales más atractivos y más participativos para el alumno (Mestre-Mestre 2015).

Este tipo de metodología se ha aplicado a todo tipo de asignaturas y grupos, incluyendo primer curso y grupos numerosos (Vicente Torres et al 2015).

Octubre 4-6, 2017, Zaragoza, ESPAÑA

IV Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Competitividad (CINAIC 2017)

## 2. CONTEXTO

Durante el curso 2010-2011 se implantaron en la Universidad Politécnica de Madrid los grados en Arquitectura Naval e Ingeniería Marítima.

En el curso 2011-2012 se implantó su segundo curso, al que pertenece la asignatura Cálculo III, una de las diez asignaturas del Módulo Básico.

Este Módulo Básico contiene cuatro asignaturas de matemáticas correspondientes. Se imparte durante los dos primeros semestres, salvo dos asignaturas, Cálculo III y Principios de Economía y Gestión de Empresas, que se imparten en segundo curso, durante el tercer semestre de las titulaciones.

La asignatura tiene asignados 6 ECTS, que corresponden a 15 semanas de clase presencial, pruebas de evaluación incluidas, con 4 horas de clase presenciales por semana en dos bloques de dos horas.

En estos grados la ordenación de matrícula se limita a la obligatoriedad para el alumno de matricularse de las asignaturas pendientes de semestres anteriores.

Esto supone que en la asignatura Cálculo III conviven alumnos con formaciones muy dispares, dado que aprobar las asignaturas previas de matemática aplicada, Álgebra Lineal y Geometría, Cálculo I y Cálculo II, no es requisito para cursar Cálculo III, aunque sí lo es estar matriculado de ellas.

Su rendimiento, no obstante, es acorde en líneas generales con las competencias adquiridas, como refleja la Figura 1, ya que las tasas de éxito son considerablemente mayores entre quienes tienen aprobadas las tres asignaturas previas de matemática aplicada de primer curso.

Curso \ Asignaturas aprobadas	3	2	1	0
2011-2	91%	50%	0%	0%
2012-3	76%	53%	50%	0%
2013-4	71%	41%	36%	0%
2014-5	73%	30%	0%	0%
2015-6	60%	30%	32%	9%
2016-7	69%	37%	32%	0%

Figura 1. Porcentajes de alumnos que superan la asignatura en relación al número de asignaturas aprobadas de matemáticas de primer curso.

Es por ello que la metodología docente tradicional de clase magistral o expositiva presenta algunos problemas ante un alumnado tan heterogéneo, dado que las carencias y necesidades de los estudiantes son muy variadas, frente al nivel de referencia que se puede fijar en primer curso con los contenidos de la Prueba de Accesos a la Universidad o de la actual Reválida.

La asignatura comparte semestre, además de con la mencionada Principios de Economía y Gestión de Empresas, con las asignaturas científico-tecnológicas de Mecánica, Termodinámica y Electrotecnia.

En la Figura 2 se muestra que la mayoría de los alumnos aprueban la asignatura Cálculo III en su primera o segunda

matrícula, con lo cual no se trata de una asignatura conflictiva en el contexto de las enseñanzas técnicas.

En la Universidad Politécnica de Madrid no hay límite de convocatorias para las asignaturas, con lo cual la limitación se reduce a un incremento progresivo de las tasas de matriculación.

### Matrícula Total Porcentaje

<b>Primera</b>	317	73%
<b>Segunda</b>	89	21%
<b>Tercera</b>	17	4%
<b>Cuarta</b>	7	2%
<b>Quinta</b>	2	0%

Figura 2. Porcentajes de alumnos que superan la asignatura en relación al número de matrículas precisadas.

A pesar de tener unos resultados razonables para una asignatura de matemáticas en un grado de ingeniería, se puede observar en la Figura 4 un lento, pero continuado, descenso en la tasas de rendimiento (alumnos aprobados sobre alumnos matriculados) como de éxito (alumnos aprobados sobre alumnos presentados) de la asignatura desde su implantación en el curso 2011-2012.

Esto parece sugerir que la metodología seguida en titulaciones anteriores (Cantón y Fernández-Jambrina 2009), que permitió arrancar la asignatura con resultados razonables, es susceptible de mejoras.

Asimismo, tratar de realizar una evaluación continua basada en ocho pruebas a lo largo del semestre en horario lectivo, con una periodicidad prácticamente quincenal, dificultaba el desarrollo normal de la asignatura con una metodología de clase expositiva, dado que dichas pruebas restaban demasiado tiempo a la presentación de contenidos de la asignatura, lo cual permitía sugerir dar mayor relevancia al aprendizaje autónomo del alumno.

Por ello, se planteó un cambio metodológico con los objetivos de aprovechar mejor las horas de clases presenciales, manteniendo una evaluación continua real y no basada en una o dos pruebas parciales, al tiempo que mejorar las tasas de éxito y rendimiento de la asignatura.

La opción elegida para cumplir con estos objetivos, basada en la experiencia previa con Aprendizaje Mixto (B-Learning) y Cursos Online Masivos en Abierto (COMA o MOOC, en inglés), ha sido la metodología de Aula Invertida (Flipped Classroom).

## 3. DESCRIPCIÓN

### A. Elaboración de materiales

Durante el curso 2016-2017, se implantó en la asignatura Cálculo III (Ecuaciones diferenciales) la metodología docente de aula invertida.

Para ello, durante los meses previos se realizaron presentaciones en LaTeX/Beamer de fragmentos cortos de las clases expositivas, lo más autocontenidas posible.

Cada presentación expone un concepto nuevo, una técnica, un resultado importante con su explicación o demostración o un ejemplo práctico de aplicación.

Todas las presentaciones comienzan con un resumen de los contenidos previos, necesarios para comprender la presentación de una manera autocontenida; el desarrollo propiamente dicho de los contenidos de la presentación y un resumen final de los conceptos o resultados nuevos, junto con unas preguntas relacionadas con los mismos, que se dejan en el aire con la intención de que el alumno las conteste por su cuenta.

Se aprovechó para las presentaciones la potencia de los paquetes PStricks y Beamer para LaTeX para que la exposición fuera visual y se incluyeron animaciones realizadas con la aplicación de Cálculo Simbólico Maple. En este sentido, las presentaciones ofrecen más posibilidades que la clase expositiva delante de una pizarra.

Estas presentaciones se grabaron y editaron en vídeos cortos, en torno a diez minutos (píldoras educativas), con la aplicación Camtasia. Los vídeos editados se subieron a un canal de YouTube.

En toda esta fase previa, el cuello de botella fue la elaboración de las presentaciones y de sus materiales complementarios, más que la grabación de las píldoras educativas en sí.

### B. Estructuración de los materiales

Finalizada la fase de elaboración y edición de materiales, se procedió a su incorporación a la página Moodle de la asignatura en los servidores de la universidad. Estos materiales están disponibles en abierto en el repositorio Open CourseWare de nuestra universidad (Fernández-Jambrina 2015).

Como asignatura OCW fue galardonada en 2015 con el primer premio en la edición VIII del Premio Ministerio de Educación, Cultura y Deporte-Universia a la Iniciativa OpenCourseWare.

El formato escogido fue la actividad Lección de Moodle (Leris et al 2013). Siguiendo la pauta de los MOOC, las lecciones se estructuraron arrancando con una píldora educativa.

Tras visionar el vídeo, los alumnos tienen que responder correctamente a una pregunta relacionada con el vídeo para poder avanzar en la lección, sin limitación en el número de intentos y sin consecuencias para la evaluación de la asignatura.

Las lecciones también están vinculadas entre sí, de modo que, para realizar una Lección, es preciso haber superado la anterior, dentro de las dos partes de la asignatura, Ecuaciones diferenciales ordinarias y Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que se pueden seguir independientemente.

Esta limitación es más teórica que práctica, dado que los alumnos pueden acceder directamente a las píldoras educativas en YouTube o en la mencionada página web de OCW.

En la página de Moodle de la asignatura, los alumnos tienen a su disposición los materiales docentes en diversos formatos (un manual de la asignatura a modo de libro de texto, una colección de problemas resueltos, resúmenes de los temas de la asignatura para usar en las pruebas de evaluación y las lecciones Moodle de la asignatura).

De este modo, aunque se apueste por el formato Lección, el alumno puede escoger los materiales que mejor se adapten a su aprendizaje, o recurrir a otros materiales de la bibliografía recomendada.

### C. Desarrollo de la actividad docente presencial

Como se ha mencionado anteriormente, la parte presencial de la asignatura está organizada en sesiones de dos horas, que se organizan de la siguiente manera:

La sesión comienza con unos minutos dedicados a poner en común las dudas que hayan podido surgir en el visionado de las píldoras educativas, que previamente se habrán recomendado para dicha sesión.

A continuación, el profesor propone una lista de ejercicios para que los alumnos los resuelvan en el aula, individualmente o en grupo. El profesor se pasea entre las mesas para que los alumnos puedan preguntar las dudas que les surjan durante la resolución de los ejercicios y se sienta con ellos a trabajar.

La última media hora de la sesión se ocupa con la resolución en la pizarra de los ejercicios propuestos, normalmente a cargo del profesor de la asignatura.

No se ha realizado así durante este curso, pero está previsto en cursos posteriores terminar la sesión con alguna pregunta que los alumnos deberán responder a través de Moodle o alguna aplicación para móvil tipo Socrative.

La asistencia a estas sesiones presenciales es voluntaria para los alumnos.

Al final de cada semana se informa a los alumnos de los temas que se trabajarán en clase durante la semana siguiente y de los materiales que deben visionar para poder seguir las sesiones.

### D. Evaluación continua

La evaluación se realiza por medio de seis pruebas (en realidad, deberían ser ocho, pero, por cuestiones de agenda, se juntan las dos últimas de cada una de las dos partes de la asignatura). De este modo, se realiza una prueba cada dos o tres semanas de clase.

Una vez terminado un tema de la asignatura, se dedica la semana siguiente a la evaluación. Consideramos fundamental la proximidad de la evaluación, dado que continuar avanzando en la asignatura sin evaluar favorece la pérdida de interés por parte de los alumnos.

En la primera sesión los alumnos trabajan ejercicios similares a los propuestos en pruebas de cursos anteriores, a modo de *ensayo general*.

La segunda sesión de la semana se divide en dos partes: En la primera parte se evalúa el aprendizaje de los alumnos mediante una prueba escrita.

En la segunda parte se resuelven en la pizarra los ejercicios de la prueba. La asistencia a esta parte de la sesión es normalmente baja o muy baja. Por ello, está previsto en el futuro transmitir y almacenar esta parte con una aplicación tipo Periscope.

Normalmente las pruebas están corregidas antes del comienzo de la siguiente sesión para que el alumno pueda

recibir retroalimentación de su aprendizaje cuanto antes, de modo que pueda rectificar a tiempo, si es preciso.

#### 4. RESULTADOS

En términos generales, los alumnos parecen haber valorado positivamente el cambio de metodología docente.

En la encuesta de evaluación docente la asignatura obtuvo un 15% más de puntuación que el curso anterior.

A los alumnos que superaron la asignatura por evaluación continua, se les pidió que valoraran de 0 a 5 los medios puestos a su disposición. Los resultados de esta encuesta se consignan en la Figura 3.

Lo más valorado fueron la colección de problemas resueltos con 4.71 y los vídeos de la asignatura con 4.33.

Lo menos valorado fueron las academias de preparación para estudios de ingeniería con 0.88.

<b>Libro teoría</b>	3.13
<b>Libro problemas</b>	4.71
<b>Bibliografía</b>	1.67
<b>Clases presenciales</b>	3.92
<b>Academias</b>	0.88
<b>Tutorías</b>	2.58
<b>Vídeos</b>	4.33

Figura 3. Valoración de los materiales de apoyo al aprendizaje por parte de los alumnos que aprobaron la asignatura por evaluación continua.

La valoración de la experiencia y sus materiales es acorde con experiencias en otros ámbitos (Yoshida 2016).

En cuanto a los resultados académicos, se muestran en la Figura 4.

Los resultados corresponden al conjunto de los grados de Arquitectura Naval e Ingeniería Marítima.

	% presentados	% aprob./mat	% aprob./pres.
<b>2011</b>	88%	73%	82%
<b>2012</b>	91%	66%	72%
<b>2013</b>	85%	58%	69%
<b>2014</b>	91%	51%	56%
<b>2015</b>	86%	45%	52%
<b>2016</b>	81%	54%	67%

Figura 4. Porcentajes de alumnos aprobados sobre matriculados y presentados en la asignatura Cálculo III.

A modo de comparación, se ofrecen en la Figura 5 las tasas de rendimiento y de éxito del resto de las asignaturas del

mismo semestre en el grado de Arquitectura Naval en la convocatoria ordinaria del curso actual.

<b>Asignatura</b>	<b>Rendimiento</b>	<b>Éxito</b>
Cálculo III	52.69	65.33
P. Economía	57.35	72.22
Electrotecnia	30.83	31.90
Mecánica	16.55	21.43
Termodinámica	30.00	40.00

Figura 5. Tasas de rendimiento y de éxito de las asignaturas del tercer semestre del grado en Arquitectura Naval.

#### 5. CONCLUSIONES

En esta comunicación se presentan los resultados de una experiencia de aula invertida aplicada a una asignatura de Ecuaciones diferenciales.

Esta metodología ha permitido revertir la tendencia a la baja de las tasas de rendimiento y de éxito de la asignatura y parece haber sido acogida positivamente por los alumnos.

También ha conducido a unas tasas de éxito y de rendimiento significativamente mejores que las del resto de asignaturas del mismo semestre, con la excepción de Principios de Economía y Gestión de Empresas.

Todo ello en un entorno en el que los alumnos se pueden matricular libremente de la asignatura, aun no habiendo demostrado tener los conocimientos previos requeridos para cursar la asignatura, puesto que no existe una limitación académica para la matriculación, salvo por la obligación de cursar las asignaturas pendientes del primer semestre de la titulación.

La implantación de esta metodología ha presentado no obstante algunos problemas, que esperamos que puedan ser corregidos en lo posible con la experiencia adquirida en este curso inicial.

El principal problema es que es inevitable que haya un porcentaje significativo de alumnos que acuden a las sesiones prácticas sin haber cursado las Lecciones de Moodle o haber visionado las píldoras educativas.

En estudios previos (Acacio Rubio et al 2012) se ponía de manifiesto la tendencia a no hacer uso de las horas de trabajo fuera del aula durante el curso.

Algunos de ellos intentan paliar esta carencia visionando los vídeos durante la sesión en sus tabletas o consultando otros materiales docentes, lo cual encontramos positivo.

Pero durante este curso nos hemos encontrado con que otro grupo importante de alumnos no intenta participar en las tareas propuestas para la sesión y espera pasivamente al final de la sesión para copiar la resolución de los ejercicios de la pizarra por parte del profesor, cuando no intenta incorporarse a la sesión directamente en su parte final.

Esta actitud podría paliarse, como se ha mencionado anteriormente, con la introducción en las sesiones presenciales de alguna pregunta o *one-minute-paper* a lo largo de su desarrollo.

Otro condicionante que aparta a los alumnos de la pauta de autoaprendizaje sugerida es la proximidad de pruebas parciales de las otras asignaturas a mitad y a final del semestre, que fomenta que los alumnos se dediquen a preparar otras pruebas en las que se decide un porcentaje significativo de la calificación final, mayor que el que proporcionan las pruebas de evaluación continua de esta asignatura.

Deberían considerarse estrategias como realizar las pruebas de evaluación continua al comienzo de la semana, para que no interfieran con la actividad docente del resto de las asignaturas.

Aunque no se refleja en las estadísticas consignadas, durante este curso la asistencia a clase, no obligatoria, ha descendido. Es un problema que ha sucedido en otras experiencias parecidas (Pino et al 2016). En principio, este no es un indicador positivo, si bien las tasas de éxito y rendimiento no parecen haberse visto afectadas de momento.

Sería interesante en cursos sucesivos, manteniendo la voluntariedad de la asistencia a las clases presenciales, poder relacionar los resultados académicos de los alumnos con su asistencia a clase.

#### REFERENCIAS

- Acacio Rubio, J.A. et al (2012). Monitorización y seguimiento del esfuerzo realizado por los estudiantes y de su asistencia a actividades presenciales. En *XX Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas XX CUIEET, Las Palmas de Gran Canaria*.
- Baker, J.W. (2000). The 'Classroom Flip': Using Web Course Management Tools to Become the Guide by the Side. *Selected Papers from the 11th International Conference on College Teaching and Learning*, Jacksonville, pp. 9-17.
- Bergmann, J., Sams, A. (2012). *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day*. New York, International Society for Technology in Education.
- Cantón, A. y Fernández-Jambrina L. (2009). De la clase magistral a la evaluación continua. *III Jornadas Internacionales U.P.M. sobre Innovación Educativa y Convergencia Europea INECE'09, Madrid*.
- Castilla, G. Alriols, J. Romana, M. Escribano, J.J. (2015). Resultados del estudio experimental de flipped learning en el ámbito de la enseñanza de matemáticas en ingeniería. *Universidad Europea, XII Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria Educar para transformar: Aprendizaje experiencial*, pp. 774-782.
- Fernández-Jambrina, L. (2013). Docencia no presencial como alternativa a la clase magistral en los primeros cursos de ingeniería. *III Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Competitividad CINAIC 2013, Madrid*, pp. 414-419.
- Fernández-Jambrina, L. (2015) Ecuaciones diferenciales. OpenCourseWare de la Universidad Politécnica de Madrid
- Fulton, K. (2012). Upside down and inside out: Flip your classroom to improve student learning. *Learning & Leading with Technology*, 39, pp. 12-17.
- Lage, M. J., Platt, G. J. y Treglia, M. (2000). Inverting the classroom: A gateway to creating an inclusive learning environment. *The Journal of Economic Education*, 31(1), pp. 30-43.
- Leris, D., Bellostas, B., Vea F., Velamazán, Á, Sein-Echeluze, M.L. (2013). Modelos operativos de aprendizaje adaptativo en Moodle. *II Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Competitividad CINAIC 2013, Madrid*, pp. 659-664.
- Mestre-Mestre, E.M., Fita, I.C., Fita, A.M., Monserrat J.F., Moltó, G. (2015) Aula inversa en estudios tecnológicos. *III Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Competitividad CINAIC 2015, Madrid*, pp. 329-334.
- Novillo, A. Blanco, M. J. Cid, M.A. Rodríguez, I. (2015). Una modalidad de flipped classroom combinada con cuestionarios on-line en la asignatura de bioquímica. *Universidad Europea, XII Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria Educar para transformar: Aprendizaje experiencial*, pp. 683-691.
- Pino, B. Prieto, B. Prieto, A. Illeras, F. (2016). Utilización de la metodología de aula invertida en una asignatura de Fundamentos de Informática. *Enseñanza y Aprendizaje de Ingeniería de Computadores*, 6, pp. 67-75.
- Sams, A., Bergmann, J. et al. (2014). *What Is Flipped Learning? Flipped Learning Network (FLN)*
- Sein-Echaluze, M.L. Fidalgo, A. García, F. (2015). Metodología de enseñanza inversa apoyada en b-learning y gestión del conocimiento. *III Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Competitividad CINAIC 2015, Madrid*, pp. 464-468.
- Strayer, F.J. (2012). How learning in an inverted classroom influences cooperation, innovation and task orientation. *Learning Environ Res.* 15, pp. 171-193.
- Vicente Torres, M.A., Colino Matilla, A., Comas Rengifo, M.D., Martín Fernández, B. La *Enseñanza Inversa Exprés* fomenta el aprendizaje autónomo en grupos numerosos. *III Congreso Internacional sobre Aprendizaje, Innovación y Competitividad CINAIC 2015, Madrid*, pp. 807-810.
- Yoshida, H. (2016). Perceived Usefulness of “Flipped Learning” on instructional design for elementary and secondary education: with focus on pre-service teacher education. *International Journal of Information and Education Technology*, 6, pp. 430-434.
- Zhang, D., Zhou, L., Briggs, R.O. & Nunamaker, J.F. (2006). Instructional video in e-learning: Assessing the impact of interactive video on learning effectiveness. *Information & Management*, 43, pp. 15-27.