

Un estudio de fijación de precios y dinámica industrial en el marco de los juegos evolutivos



**Facultad de
Economía y Empresa**
Universidad Zaragoza



Universidad
Zaragoza

Jesús Rafael Palacio Alsina
Trabajo de fin de máster en Economía
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: Isabel Almudi, Francisco
Fatás-Villafranca y Julio Sanchez-Choliz
Octubre de 2017

Abstract

From an empirical point of view, it is increasingly clear that some standard assumptions in economic theory are unnecessarily restrictive to study the evolution and the changing structure of highly-dynamic industries (Dosi et al. (2016, 2017)). Thus, assuming full intertemporal rationality of representative agents, perfect (or even probabilistic) access to endogenously changing knowledge, or addressing the study of changing industries from the perspective of static equilibrium models is far from satisfactory. In this respect, a number of well-known theorists -during the last two decades- have been asking for a new approach to industrial dynamics which might consider the perspective of evolutionary models (Weibull (1995), Vega-Redondo (1996) y Sandholm (2010) and others). In this dissertation, we begin by presenting crucial concepts and results from the classical theory of games, and we connect them with very recent advances in evolutionary game theory. Afterwards, we show how this evolutionary approach allows us to propose an original model in which we incorporate boundedly-rational heterogeneous firms, which compete and learn in an oligopoly with imperfect information, and which fix prices according to routines, to capture market share. The demand-side of the market consists of consumers who are also asymmetrically informed, boundedly rational, and capable of learning and gradually adapting to the changing market options. We consider alternative pricing routines in the evolutionary model and we obtain formal results which we interpret and compare at the light of alternative results obtained from a standard non-cooperative game. This standard game (which we also analyse) involves full rationality of agents and perfect information. Somehow surprisingly, we find that in the fully rational standard setting, firms, either end up lowering prices and mutually destroying their extra-profits (a la Bertrand), or they may try to cooperate in a high-prices collusive equilibrium which, apart from being unstable, erodes consumer welfare. On the contrary, in the evolutionary (boundedly-rational setting) with imperfect information, firms get profits and co-exist by fixing moderate prices. This result suggests the possibility that, instead of being "market failures", such features as market power, heterogeneity facing radical uncertainty, and asymmetric information may be essential traits of markets, which make it possible their functioning and their long-run viability.

1 Motivación

Al intentar modelizar en un marco estándar los procesos auto-organizativos, como por ejemplo, la dinámica de ciertas estructuras de mercados imperfectos a partir de la diversidad, la innovación como motor de crecimiento o la co-existencia dinámica de comportamientos diversos con información imperfecta, nos damos cuenta de que ciertas hipótesis que establecen los modelos teórico-económicos convencionales son demasiado restrictivas. Así, asumir el conocimiento perfecto o incluso probabilístico de la realidad y el futuro por parte de los agentes privados o el gobierno, supone la presencia de un agente representativo con expectativas racionales y perfecta racionalidad intertemporal; Considerar preferencias y tecnologías constantes, una demanda estable y mercados transparentes en equilibrio resultan supuestos innecesariamente restrictivos para modelizar ciertos procesos económicos. La evidencia empírica va poniendo de manifiesto de forma cada vez más clara la necesidad de una visión alternativa que relaje estos supuestos en el ámbito de la dinámica industrial (desde Nelson y Winter (1982) hasta los recientes trabajos de Dosi et al. (2016, 2017)). Es por ello que Nelson y Winter (1982), Weibull (1995), Vega-Redondo (1996) y Sandholm (2010) y muchos otros autores en el ámbito de la economía neo-schumpeteriana abordan estos procesos dinámicos autoorganizativos desde el punto de vista de los *modelos evolutivos*.

Pero, ¿Qué es la evolución? La evolución, como idea general, se podría interpretar como todo aquello que sigue un proceso dinámico. Aquí sin embargo adoptaremos la connotación que se le da al término evolución en el campo de la economía evolutiva neo-schumpeteriana y que está relacionado con

el concepto de evolución en la biología. Es por ello que un modelo dinámico se dirá que es evolutivo si puede ponerse en relación analógica con procesos de selección, mutación y transmisión intertemporal de ciertos rasgos de los agentes (Smith (1982)).

La selección es la fuerza que teniendo en cuenta las condiciones del entorno, en nuestro caso económicas y sociales, determina las oportunidades de sobrevivir y de reproducirse de cada individuo o agente entre una población heterogénea, por lo que será importante para explicar el comportamiento dinámico de la población. El reto sin embargo es doble: primero, identificar como actúa esta fuerza en un contexto particular; y segundo, entender el significado de los efectos a largo plazo que se producen por la iteratividad del proceso de selección.

La transmisión de rasgos de los agentes es concebida como el factor que transfiere (parcialmente) el comportamiento de los agentes a lo largo del tiempo en un entorno con racionalidad limitada (Simon (1965)). Es, por supuesto, una condición previa que ha de tener la selección para ser efectiva heredando ciertos patrones de comportamiento existentes de generación en generación de forma estable.

Por último, la mutación es el cambio que se produce en los rasgos y patrones de comportamiento de los agentes, juega por ello un papel importante en la evolución, generando comportamientos nuevos y no existentes, enriqueciendo los patrones de comportamiento anteriores para conseguir una mejor adaptación al medio.

Vega-Redondo (1996) defiende este enfoque para abordar aspectos inherentes a los agentes económicos, como son las capacidades limitadas de atención, cálculo o asociación. También toma como referencia el propio comportamiento humano, el cual, a menudo, se suele guiar por experiencias pasadas, siguiendo así una especie de proceso interno de selección de ideas, esto es, un proceso evolutivo. Dicho razonamiento se puede llevar al campo empresarial donde las diferentes firmas diseñan nuevas estrategias basándose en los resultados obtenidos en años anteriores, al tiempo que consolidan ciertas rutinas que emergen como evolutivamente viables en los procesos selectivos del mercado (Nelson y Winter (1982)). Es por ello interesante defender un enfoque evolutivo para el estudio de ciertos procesos sociales y económicos en los que tienden a prevalecer ciertos individuos, agentes o empresas cuyas decisiones resultan mejor adaptadas al entorno que las acciones que realizan el resto, fluctuando así la cantidad de individuos que hay en un momento determinado “jugando” una cierta estrategia, pudiendo llegar a desaparecer aquellos que tomaron decisiones incorrectas. Esta dinámica es sintetizada por sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales, la cual intenta ser abordada con un tratamiento formal o la realización de simulaciones con el fin de encontrar no solo el equilibrio en el largo plazo, sino también estudiar el desarrollo del mercado a lo largo del tiempo.

2 Introducción

Uno de los temas candentes en la dinámica industrial es la relación entre la evolución de las estructuras de mercado (distribuciones emergentes y cambiantes de cuotas de mercado en un sector, formación y destrucción de estructuras de mercado reflejadas en la dinámica del índice Herfindahl), y la forma en que las empresas fijan sus precios (Vives (2001)). Hasta ahora, se han llevado adelante esfuerzos importantes aplicando la teoría de juegos estáticos no cooperativos a problemas de economía industrial (Von Neumann y Morgenstern (1944)). Pero cuando queremos adentrarnos en entornos dinámicos complejos donde agentes o demandantes van descubriendo gradualmente y modificando con su acción la estructura del juego (en nuestro caso porque parte de esta estructura –los *pay-offs* de los consumidores y empresas- es endógena) hace falta moverse al ámbito de los juegos evolutivos (Hofbauer y Sigmund (1998); Weibull (1995)).

Más aún, cuando estudiamos problemas en los que el número de jugadores puede ser muy alto y por

tanto, el poder de influencia de cada uno de los jugadores muy pequeño, aún con un número de estrategias finito, la evolución de los *pay-offs* del juego puede depender de la proporción de jugadores que juegan unas estrategias u otras en cada momento, esto es, *pay-offs* endógenos y dependientes de cuotas de juego, lo que lleva a situaciones típicamente evolutivas. Esto se refuerza además si los jugadores tienen información imperfecta sobre la evolución del juego y las decisiones óptimas.

Teniendo en mente esta situación, este trabajo fin de máster intenta acercarse a la economía evolutiva y a sus principales fundamentos, para ello la organización del trabajo es la siguiente. En primer lugar, en la sección 3 se presentará la formalización y modelización de las diferentes estrategias de un juego y su función de *pay-off* asociada en juegos estáticos no-cooperativos estandarizados con el fin de mostrar la forma formal de representación de un juego. Posteriormente abordaremos el concepto de estrategia mixta desde un punto de vista geométrico. Una vez introducida esta base, enunciaremos varias definiciones para mostrar las relaciones que existen entre las diferentes estrategias de un juego y definiremos el equilibrio de Nash, analizaremos su estructura brevemente y enunciaremos varios refinamientos del mismo. Terminaremos esta sección restringiendo el estudio de los conceptos anteriores a juegos simétricos. En la sección 4 realizaremos un acercamiento básico a los juegos evolutivos. Primero mostraremos el concepto de estrategia evolutivamente estable, el cual ilustraremos con un ejemplo clásico y lo relacionaremos con la teoría clásica de juegos. Seguidamente definiremos este mismo concepto pero sobre poblaciones finitas, viendo las implicaciones que esto conlleva. Terminaremos esta sección con la parte más interesante y útil de la teoría evolutiva, el análisis dinámico. Presentaremos la dinámica replicador de forma discreta para dar rápidamente el salto al caso continuo y relacionarla con el concepto de estrategia evolutivamente estable y equilibrio de Nash, representando las conexiones con un pequeño diagrama. En la sección 5 aplicaremos la teoría mostrada en las secciones anteriores a un sencillo modelo de fijación de precios en competencia oligopolística, analizaremos su estabilidad para el caso del duopolio y el triopolio y veremos cual es el beneficio de las empresas, la utilidad de los consumidores y el índice de Herfindahl en los puntos de equilibrio. Finalmente en la sección 7 compararemos brevemente el modelo evolutivo con uno no-cooperativo estándar tipo “dilema del prisionero” con competencia en precios tipo Bertrand y así estudiar la diferencia de resultados. En la sección 8 sintetizaremos las conclusiones.

3 Algunas nociones básicas sobre teoría de juegos clásica

En esta sección se mostrarán conceptos y resultados de la teoría de juegos no cooperativos necesarios para el posterior análisis evolutivo.

3.1 Estrategias y función de pagos

En este trabajo nos restringiremos únicamente a tratar con juegos finitos y en forma normal. Esto es, sea $I = \{1, 2, \dots, n\}$ el conjunto de jugadores, donde $n \in \mathbb{N}$ y $S_i = \{1, 2, \dots, m_i\}$ el conjunto finito de estrategias puras que puede adoptar cada jugador $i \in I$, con $2 \leq m_i \in \mathbb{N}$. Llamaremos *perfil de estrategias puras* al vector $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, donde s_i es la estrategia pura del jugador i . Y al conjunto de perfiles de estrategias puras del juego dado por el producto cartesiano $S = \times_i S_i$ lo llamaremos *espacio de estrategias puras*.

Para cualquier perfil $s \in S$ y un jugador $i \in I$, sea $\pi_i(s) \in \mathbb{R}$ el pago (o *pay-off*) asociado al jugador i . La colección finita de números reales $\pi_i(s)$ define la función de pagos del i -ésimo jugador, $\pi_i : S \rightarrow \mathbb{R}$. La combinación de las funciones de pagos de cada jugador define la función de pagos del juego, $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$, la cual asigna a cada perfil de estrategias puras s el vector de pagos $\pi(s) = (\pi_1(s), \pi_2(s), \dots, \pi_n(s))$.

En terminos de estrategias puras, un juego se presentará en su forma normal como la tripleta $G = (I, S, \pi)$, donde I es el conjunto de jugadores, S el espacio de estrategias puras y π es la función de pagos.

El caso especial donde solo haya dos jugadores, un conjunto finito de estrategias y la función de pagos sea lineal, la función de pagos podrá escribirse en forma matricial, de dimensiones $m_1 \times m_2$. La matriz de pagos del primer jugador la denotaremos por $A = (a_{hk})$ donde $a_{hk} = \pi_1(h, k)$ para cada $h \in S_1$ y $k \in S_2$ y de la misma forma, la matriz de pagos del segundo jugador la denotaremos por $B = (b_{hk})$, donde $b_{hk} = \pi_2(h, k)$. De tal forma que las filas de ambas matrices corresponden a una estrategia pura del jugador 1 y cada columna a una estrategia pura del jugador 2. Cualquier juego con función de pagos lineal de dos jugadores podrá ser representado por el par (A, B) , donde el jugador 1 será interpretado como el jugador fila y el jugador 2 el jugador columna. A estos juegos se les conoce como *juegos bimatriciales*.

3.2 La geometría de los espacios de estrategias mixtas

Una *estrategia mixta* para el jugador i es una distribución de probabilidad sobre el conjunto S_i de las estrategias puras. Como el conjunto S_i es finito para todos los jugadores, podemos representar cualquier estrategia mixta x_i del jugador i como un vector x_i m_i -dimensional en el espacio euclideo $\mathbb{R}^{m_i}$, su h -ésima coordenada, $x_{ih} \in \mathbb{R}$ representará la probabilidad asignada a la estrategia pura h -ésima.

El conjunto de estrategias puras al que se le asignan probabilidades positivas por alguna estrategia mixta x_i se llama *sopORTE* de x_i y se denota como

$$C(x_i) \equiv \{h \in S_i : x_{ih} > 0\}. \quad (1)$$

Como todas las probabilidades x_{ih} (para $h = 1, 2, \dots, m_i$) son no negativas y suman uno, el vector $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ pertenece al simplex unidad Δ_i en el m_i -espacio, definido como:

$$\Delta_i = \left\{ x_i \in \mathbb{R}_+^{m_i} : \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} = 1 \right\}. \quad (2)$$

Notar que la estrategia mixta del simplex Δ_i del jugador i tiene dimensión $m_i - 1$, pues una coordenada puede expresarse como 1 menos el resto de probabilidades. Por lo que, sin perdida de generalidad, podemos estudiar la proyección del simplex $\Delta_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ en un espacio euclideo de dimensión $m - 1$.

Los vertices del simplex Δ_i son los vectores unitarios en el m_i -espacio, denotados con la notación usual, $e_i^1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_i^{m_i} = (0, \dots, 0, 1)$. De tal forma que cada vértice e_i^h representa la estrategia mixta del jugador i que asigna probabilidad 1 a la estrategia pura h -ésima. Desde este punto de vista las estrategias puras son simplemente un caso extremo de estrategias mixtas.

El simplex de estrategias mixtas Δ_i es el recubrimiento convexo de sus vértices, cada estrategia mixta $x_i \in \Delta_i$ es alguna combinación convexa de estrategias puras o vectores unitarios, e_i^h :

$$x_i = \sum_{h=1}^{m_i} x_{ih} e_i^h. \quad (3)$$

Al conjunto

$$\text{int}(\Delta_i) = \{x_i \in \Delta_i : x_{ih} > 0 \ \forall h\} \quad (4)$$

se le llama *interior* de Δ_i . En consecuencia, las estrategias mixtas de este subconjunto se llaman *interiores* o *completamente mixtas*. Asignan probabilidades positivas a todas las estrategias puras que los

jugadores pueden tomar y por lo tanto tienen un soporte completo, $C(x_i) = S_i$ para todo $i \in I$. Al conjunto de estrategias no interiores de Δ_i se llama *frontera* de Δ_i , denotado,

$$bd(\Delta_i) = \{x_i \in \Delta : x_i \notin \text{int}(\Delta_i)\}. \quad (5)$$

Un perfil de estrategias mixto es un vector $x = (x_1, \dots, x_n)$, donde cada componente $x_i \in \Delta_i$ es una estrategia mixta para el jugador $i \in I$. Un perfil de estrategias mixtas x es por tanto un punto en el espacio de estrategias mixtas, $\Theta = \times_{i \in I} \Delta_i$, del juego. El conjunto Θ es (m-n)-dimensional, donde $m = m_1 + \dots + m_n$.

Un perfil de estrategias x es *interior* si cada una de las estrategias x_i que lo componen es interior. El subconjunto de dichos perfiles se denota

$$\text{int}(\Theta) = \times_{i \in I} \text{int}(\Delta_i). \quad (6)$$

Escribiendo $C(x) = \times_{i \in I} C(x_i) \subset S$ tenemos que para cualquier perfil $x \in \Theta$, $x \in \text{int}(\Theta)$ si y solo si $C(x) = S$. La frontera de Θ , $bd(\Theta)$, es el conjunto de los perfiles no interiores.

Escribiremos (x_i, y_{-i}) para el perfil de estrategias en el que el jugador $i \in I$ juega la estrategia $x_i \in \Delta_i$, mientras que el resto de jugadores juegan cualquiera de sus perfiles. Dicho de otra forma, el perfil de estrategias $z = (x_i, y_{-i}) \in \Theta$ se define como $z_i = x_i$ y $z_j = y_j$ para todo $j \neq i$. Además denotaremos por Δ_{-i} al conjunto de estrategias $y_{-i} \forall i$, esto es, $y_{-i} \in \Delta_{-i}$ de tal forma que $(x_i, y_{-i}) \in \Delta_i \times \Delta_{-i} = \Theta$

3.2.1 Funciones de pago para estrategias mixtas

Consideraremos que todos los jugadores son estadísticamente independientes y por lo tanto la probabilidad de que una determinada estrategia $s = (s_1, \dots, s_n) \in S$ sea empleada, cuando se juega un perfil de estrategias mixtas $x \in \Theta$, es simplemente, el producto que cada jugador asigna en su estrategia mixta $x_i \in \Delta_i$ a la estrategia pura $s_i \in S_i$.

$$x(s) = \prod_{i=1}^n x_{i s_i}. \quad (7)$$

Por consiguiente el valor esperado del *pay-off* del jugador i asociado a cada perfil de estrategias mixtas $x \in \Theta$ es

$$u_i(x) = \sum_{s \in S} x(s) \pi_i(s). \quad (8)$$

Se entiende que el número real $u_i(x)$ es el *pay-off* obtenido por el jugador i -ésimo al jugar x . Es por ello que realizando un abuso en la notación previa¹ denotaremos $\pi_i(x) \equiv u_i(x)$. Notar que este *pay-off* es una función lineal para la estrategia mixta de cada jugador. Además, la ecuación (8) define un $\pi_i(x)$ para todos los vectores de $\mathbb{R}^m$, por lo tanto define una aplicación multilineal, esto es, lineal en cada componente. Esta función extendida, $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ se llama *función de pagos* del jugador i . La función combinada $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, definida por $\pi(x) = (\pi_1(x), \dots, \pi_n(x))$, se llamará la *función de pagos combinada de estrategias mixtas* del juego.

Como alternativa a la representación del juego para estrategias puras $G = (I, S, \pi)$, ahora se podrá dar dicha representación pero sustituyendo S por el espacio de estrategias mixtas, Θ y con π la función de pagos combinada de estrategias mixtas, quedando $G = (I, \Theta, \pi)$.

Para el caso de juegos bimatriciales de dos jugadores, el juego se puede representar por las matrices de *pay-off* (A, B) , donde A es la matriz de pagos del jugador 1. Por tanto, para cualquier par de estrategias

¹Se recurre a dicho abuso de notación de forma similar en Vega-Redondo (1996)

mixtas, $x_1 \in \Delta_1$ y $x_2 \in \Delta_2$, tenemos

$$\pi_1(x) = \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} x_{1h} a_{hk} x_{2k} = x_1 A x_2; \quad (9)$$

$$\pi_2(x) = \sum_{h=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} x_{1h} b_{hk} x_{2k} = x_1 B x_2 = x_2 B^T x_1. \quad (10)$$

3.3 Relaciones de dominación y mejores respuesta

La teoría de juegos no cooperativa ordena parcialmente y de dos formas distintas el conjunto de estrategias de un jugador. Debido a que las estrategias puras son un caso especial de las mixtas, definiremos el orden parcial de acuerdo al simplex Δ_i de cada jugador i .

3.3.1 Dominancia débil, estricta e iterativamente estricta

Diremos que una estrategia domina débilmente a otra si la primera estrategia siempre consigue un *pay-off* mayor o igual al obtenido con la segunda. Una estrategia se llama no-dominada si ninguna estrategia la domina débilmente. Formalmente.

Definición. Diremos que $y_i \in \Delta_i$ domina débilmente a $x_i \in \Delta_i$ si $\pi_i(y_i, z_{-i}) \geq \pi_i(x_i, z_{-i})$ para todo $z \in \Theta$, y con la desigualdad estricta para algún $z \in \Theta$. Una estrategia x_i es no-dominada si no existe tal estrategia y_i .

Igualmente una estrategia se dice que domina estrictamente a otra si la primera siempre consigue un mayor *pay-off*.

Definición. Diremos que $y_i \in \Delta_i$ domina estrictamente a $x_i \in \Delta_i$ si $\pi_i(y_i, z_{-i}) > \pi_i(x_i, z_{-i})$ para todo $z \in \Theta$.

Ejemplo 1. Pensemos en el juego de dos jugadores con matriz de pagos para el jugador 1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El jugador 1 tiene 3 estrategias puras. Su tercera estrategia pura, e_1^3 , no esta dominada débilmente por ninguna de las otras dos estrategias puras, sin embargo, si que está dominada estrictamente por la estrategia mixta $y_1 = (1/2, 1/2, 0) \in \Delta_1$, en efecto, $1 = \pi_1(e_1^3, z_2) < \pi_1(y_1, z_2) = 3/2$ para todo $z_2 \in \Delta_2$.

El postulado de racionalidad básica en la teoría de juegos no cooperativa es que los jugadores “racionales” nunca usan estrategias estrictamente dominadas. En este caso, todas las estrategias puras estrictamente dominadas pueden ser eliminadas del juego G sin afectar al resultado. Pero una vez hecho esto, algunas estrategias puras restantes pueden ser estrictamente dominadas en el nuevo juego reducido G^1 . La eliminación iterativa de estrategias puras estrictamente dominadas en un juego G conduce a un juego reducido G^t para cierto $t \in \mathbb{Z}$ en el cual ya no se pueden eliminar más estrategias. Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición. Una estrategia pura $s_i \in S$ no es *estrictamente dominada por iteración* si no está estrictamente dominada en el juego original G , ni en ningún juego reducido G^k con $k = \{1, \dots, t\}$.

Dado que hay un número finito de jugadores y estrategias puras, este procedimiento de eliminación iterada siempre se detendrá, y se puede demostrar que el conjunto restante de estrategias (un conjunto no vacío para cada jugador) es independiente del procedimiento de eliminación.

Para cualquier juego $G = (I, S, \pi)$, sea $S^D \subset S$ su subconjunto (no vacío) de perfiles de estrategias puras no-dominados estrictamente por iteración. Si este conjunto tiene un único elemento, entonces el juego se dice que es *resoluble por dominación*.

3.3.2 Mejores respuesta

Una mejor respuesta *pura* para el jugador i a un perfil de estrategia $y_{-i} \in \Delta_{-i}$ es una estrategia pura $s_i \in S_i$ tal que ninguna otra estrategia pura disponible para el jugador le da un mayor *pay-off* contra el perfil y_{-i} . Esto define una relación entre las estrategias puras y la mejor respuesta del i -ésimo jugador, $\beta_i : \Delta_{-i} \rightarrow S_i$ que asocia cada perfil de estrategia mixta $y_{-i} \in \Delta_{-i}$ al conjunto no vacío (finito)

$$\beta_i(y_{-i}) = \{h \in S_i : \pi_i(e_i^h, y_{-i}) \geq \pi_i(e_i^k, y_{-i}) \quad \forall k \in S_i\} \quad (11)$$

de mejores respuestas puras para el jugador i contra y_{-i} .

Puesto que cada estrategia mixta $x_i \in \Delta_i$ es una combinación convexa de estrategias puras, y $\pi(x_i, y_{-i})$ es lineal en x_i , ninguna estrategia mixta $x_i \in \Delta_i$ puede dar una mayor *pay-off* al jugador i contra $y_{-i} \in \Delta_{-i}$ que cualquiera de sus mejores respuestas puras a y_{-i} . Formalmente, Para cualquier $y_{-i} \in \Delta_{-i}$, $x_i \in \Delta_i$ y $h \in \beta_i(y_{-i})$,

$$\pi_i(x_i, y_{-i}) = \sum_{k=1}^{m_i} \pi_i(e_i^k, y_{-i}) x_{ik} \leq \sum_{k=1}^{m_i} \pi_i(e_i^h, y_{-i}) x_{ik} = \pi_i(e_i^h, y_{-i}) \quad (12)$$

y por tanto se podría redefinir $\beta_i(y_{-i})$ como

$$\beta_i(y_{-i}) = \{h \in S_i : \pi_i(e_i^h, y_{-i}) \geq \pi_i(x_i, y_{-i}) \quad \forall x_i \in \Delta_i\}. \quad (13)$$

Más aún, una mejor respuesta mixta para el jugador i a un perfil de estrategia $y_{-i} \in \Delta_{-i}$ es una estrategia $x_i \in \Delta_i$ tal que ninguna otra estrategia mixta da un *pay-off* superior a i contra y_{-i} . Como se señaló anteriormente, cada mejor respuesta pura vista como una estrategia mixta es también una mejor respuesta mixta. Por otra parte, por la linealidad de $\pi(x_i, y_{-i})$ en x_i , cualquier combinación convexa de mejores respuestas puras es una mejor respuesta mixta. En consecuencia, la relación entre estrategia mixta y mejor respuesta del jugador i -ésimo es $\tilde{\beta}_i : \Delta_{-i} \rightarrow \Delta_i$ que asocia a cada perfil de estrategia mixta $y_{-i} \in \Delta_{-i}$ las estrategias de Δ_i que son las mejores respuestas puras a y_{-i} :

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_i(y_{-i}) &= \{x_i \in \Delta_i : \pi_i(x_i, y_{-i}) \geq \pi_i(z_i, y_{-i}) \quad \forall z_i \in \Delta_i\} \\ &= \{x_i \in \Delta_i : x_{ih} = 0 \quad \forall h \notin \beta_i(y_{-i})\} = \{x_i \in \Delta_i : C(x_i) \subset \beta_i(y_{-i})\}. \end{aligned} \quad (14)$$

El conjunto es no vacío de forma trivial, cerrado debido a que contiene a su frontera, esto es, $bd(\tilde{\beta}_i(y_{-i})) = \{x_i \in \Delta_i : \pi_i(x_i, y_{-i}) = \pi_i(z_i, y_{-i}) \quad \forall z_i \in \Delta_i\} \subset \tilde{\beta}_i(y_{-i})$ y convexo, en efecto, sean $\bar{x}_i, \hat{x}_i \in \tilde{\beta}_i(y_{-i})$ y $t \in [0, 1]$, hay que ver que todas las componentes h que no pertenezcan a la mejor respuesta del jugador i ante el perfil y_{-i} de una combinación convexa de estos dos elementos son cero, esto es, $(t\bar{x}_i + (1-t)\hat{x}_i)_h = t\bar{x}_{ih} + (1-t)\hat{x}_{ih} = 0 \quad \forall h \notin \beta_i(y_{-i})$ luego $t\bar{x}_i + (1-t)\hat{x}_i \in \tilde{\beta}_i(y_{-i})$.

La relación entre la combinación de estrategias puras y la mejor respuesta, $\beta : \Theta \rightarrow S$ del juego se define como el producto cartesiano de las relaciones entre estrategias puras y mejor respuesta de todos los jugadores,

$$\beta(y) = \times_{i \in I} \beta_i(y_{-i}) \subset S. \quad (15)$$

La cual nos da uno o varios² vectores de estrategias puras donde una componente i -ésima no nula muestra la mejor estrategia pura a seguir para el jugador i -ésimo cuando el resto de jugadores juegan el perfil de estrategias $y_{-i} \in \Delta_i$.

La relación entre estrategias mixtas y la mejor respuesta $\tilde{\beta} : \Theta \rightarrow \Theta$ será,

$$\tilde{\beta}(y) = \times_{i \in I} \tilde{\beta}_i(y_{-i}) \subset \Theta. \quad (16)$$

La cual nos da uno o varios³ perfiles de estrategias mixtas donde la componente i -ésima muestra la mejor estrategia mixta a seguir para el jugador i -ésimo cuando el resto de jugadores juegan el perfil de estrategias $y_{-i} \in \Delta_i$.

Proposición 3.1. *Considerado un juego de dos jugadores, $s_i \in S_i$ no está estrictamente dominada si y sólo $s_i \in \beta_i(y_{-i})$ para algún $y \in \Theta$ y además, $s_i \in S_i$ es no-dominada si y solo si $s_i \in \beta_i(y_{-i})$ para algún $y \in \text{int}(\Theta)$.*

Demostración. Ver Pearce (1984). □

3.4 Equilibrio de Nash

Uno de los conceptos más importantes de la teoría económica, y en especial de la teoría de juegos, es el de equilibrio de Nash. Esencialmente un perfil de estrategias $x \in \Theta$ es un equilibrio de Nash si todos los jugadores consiguen con este perfil la mejor respuesta ante cualquier otro, formalmente:

Definición. En un juego con formal normal $G = (I, \Theta, \pi)$, diremos que un perfil de estrategias $x \in \Theta$ es un equilibrio de Nash si para cada jugador i , $\pi_i(x_i, x_{-i}) \geq \pi_i(z_i, x_{-i})$ para todo $z_i \in \Delta_i$

En términos de mejores respuestas, un perfil de estrategia $x \in \Theta$ es un equilibrio de Nash si y solo si es un punto fijo de $\tilde{\beta}$, esto es, si $x \in \tilde{\beta}(x)$. Además se deduce de la ecuación (14) que si $x \in \Theta$ es un equilibrio de Nash, entonces toda estrategia pura en el soporte de cada componente x_i es una mejor respuesta a x : $s_i \in C(x_i) \implies s_i \in \beta_i(x)$.

Una estrategia que sea un equilibrio de Nash no puede ser estrictamente dominada. Sin embargo, la definición no impide que un equilibrio de Nash sea débilmente dominado, puede haber otra respuesta que nunca es peor que el equilibrio en cuestión y que actúa mejor frente a algún otro perfil de estrategias.

Definición. Un equilibrio de Nash x se dirá *no-dominado* si cada componente x_i es no-dominada.

3.4.1 Estructura del conjunto de equilibrio de Nash

La existencia de equilibrios de Nash fue establecida por Nash (1950). Para un juego dado, denotaremos por $\Theta^{NE} \subset \Theta$ al conjunto de equilibrios de Nash.

Teorema 3.2. (Nash (1950)). *Para cualquier juego finito G : $\Theta^{NE} \neq \emptyset$.*

Demostración. El poliedro Θ es no vacío, convexo y compacto. La función $\tilde{\beta} : \Theta \rightarrow \Theta$ es semicontinua superiormente, y hemos visto que su imagen es no vacía, convexa y cerrada. Por tanto se cumplen las hipótesis del teorema del punto fijo de Kakutani, luego $x \in \tilde{\beta}(x)$ para al menos un $x \in \Theta$. □

²Debido a que pueden existir varias mejores respuestas de varios jugadores ante un mismo perfil de estrategias $y \in \Theta$.

³Análogo al pie de pagina 2.

Para el análisis posterior será conveniente utilizar algunas propiedades de invarianza del conjunto Θ^{NE} .

En primer lugar, dados dos juegos $G = (I, S, \pi)$ y $G' = (I, S, \pi')$. Si, para cada jugador $i \in I$, existe $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ y $\mu_i \in \mathbb{R}$ tal que $\pi'_i(s) = \lambda_i \pi_i(s) + \mu_i$, para todos los perfiles de $s \in S$, entonces los dos juegos tienen las mismas relaciones de mejor respuesta y de dominación entre estrategias. En particular, el conjunto Θ^{NE} de equilibrios de Nash es invariante bajo tales transformaciones en los *pay-off*.

Esta transformación de la función de pagos es particularmente útil en juegos bimatriciales. Sean las matrices de pagos de tal juego (A, B) . Una transformación afín positiva de la función de pagos del jugador 1 es simplemente una sustitución de la matriz A por una matriz A' tal que $a'_{hk} = \lambda_1 a_{hk} + \mu_1$ para algún $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+$ y $\mu_1 \in \mathbb{R}$.

3.5 Refinamientos del equilibrio de Nash

Desde finales de los años setenta, se han desarrollado una serie de refinamientos del concepto de equilibrio de Nash, cada uno de ellos está motivado por el deseo de deshacerse de un equilibrio de Nash implausible o frágil. Aquí únicamente trataremos de forma breve con uno de los refinamientos más conocidos y habituales, el de *equilibrio perfecto*, debido a su relación con los criterios evolutivos. Si se quiere ampliar el conocimiento del mismo o conocer otros, resultará interesante la lectura de Van Damme (1987), donde se encuentra una excelente descripción de este campo de investigación.

El refinamiento no cooperativo probablemente más conocido es el equilibrio perfecto de la mano temblorosa, o de forma abreviada, equilibrio perfecto. La idea básica bajo este concepto es que cada jugador tiene una pequeña probabilidad de cometer un error, jugando una estrategia diferente a la que querían jugar, lo que conlleva que cada estrategia pura pueda ser escogida con una probabilidad positiva, aunque sea pequeña. Matemáticamente, esta idea es modelizada utilizando el *juego perturbado*, esto es, un juego donde a cada jugador solo se le permite usar estrategias totalmente mixtas, veámoslo.

Sea el juego $G = (I, \Theta, \pi)$, y sea μ una función de error que a cada jugador i y estrategia pura $h \in S_i$ le asigna un número $\mu_{ih} \in (0, 1)$ que es la probabilidad de que la estrategia se juegue "por error", donde $\sum_h \mu_{ih} < 1$. La función de error μ define para cada jugador $i \in I$ el subconjunto $\Delta_i(\mu) \equiv \{x \in \Delta_i : x_{ih} \geq \mu_{ih} \forall h \in S_i\} \subset \text{int}(\Delta_i)$ de estrategias mixtas que el jugador podrá utilizar, dadas las probabilidades de error. El juego perturbado asociado es $G(\mu) = (I, \Theta(\mu), \pi)$, donde $\Theta(\mu) = \times_{i=1}^n \Delta_i(\mu) \subset \text{int}(\Theta)$. Por argumentos estándar se puede probar que cada juego perturbado $G(\mu)$ tiene un conjunto no vacío $\Theta^{NE}(\mu)$ de equilibrios de Nash. Cuanto más pequeñas son todas las probabilidades de error, mayor es $\Theta(\mu)$, y como todas las probabilidades de error tienden a cero, $\mu \rightarrow 0$, el juego perturbado asociado $\Theta(\mu)$ se aproxima al juego original.

Definición. El perfil de estrategias $x \in \Theta^{NE}$ es perfecto si, para alguna secuencia, $\{G(\mu^t)\}_{\mu^t \rightarrow 0}$ de juegos perturbados existe un perfil $x^t \in \Theta^{NE}(\mu^t)$ tal que $x^t \rightarrow x$.

En particular, todo equilibrio de Nash interior es perfecto, en efecto, si $x \in \text{int}(\Theta)$, entonces para un error de probabilidades μ_{ih} suficientemente pequeño, $x \in \Theta(\mu)$ y además si $x \in \Theta^{NE}$, entonces, $x \in \Theta^{NE}(\mu)$. Se puede ver en Selten (1957) que no es difícil probar que todo juego finito, incluso si no tiene equilibrios de Nash interiores, tiene algún equilibrio de Nash perfecto.

Selten (1957) muestra que un perfil de equilibrio de Nash x es perfecto si y sólo si para cada entorno de x existe algún perfil de estrategia interior $y \in \text{int}(\Theta)$ de tal forma que x es una mejor respuesta para y , esto es, $x \in \hat{\beta}(y)$. En otras palabras, los jugadores deben estar dispuestos a jugar sus estrategias de equilibrio x_i incluso si hay desconfianza acerca de las estrategias del otro y por lo tanto atribuyen (pequeñas) probabilidades positivas a todas las estrategias puras del juego. Finalmente también prueba

que un equilibrio de Nash perfecto no puede ser dominado y que el recíproco se cumple en los juegos bimatriaciales, lo que nos será útil en el siguiente capítulo.

Proposición 3.3. (Van Damme (1987)) *Un equilibrio de Nash $x \in \Theta$ de un juego bimatriacial es un equilibrio perfecto si y solo si x es no-dominado.*

Demostración. Ver Van Damme (1987) teorema 3.2.2 □

3.6 Juegos simétricos de dos jugadores

La subclase de juegos simétricos de dos jugadores proporciona la base para gran parte de la teoría evolutiva de los juegos.

Más precisamente, al hablar de un juego simétrico de dos jugadores $G = (I, S, \pi)$ se supone que hay precisamente dos posiciones de jugador, que cada posición tiene el mismo número de estrategias puras, y que el beneficio de cualquier estrategia es independiente de la posición del jugador a la que se aplica. Formalmente:

Definición. Un juego $G = (I, S, \pi)$ es un juego simétrico de dos jugadores si $I = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2$ y $\pi_2(s_1, s_2) = \pi_1(s_2, s_1)$ para todo $(s_1, s_2) \in S$.

Esta definición de simetría en las funciones de pago de las estrategias puras es equivalente para los juegos bimatriaciales con que la matriz de pagos del segundo jugador, B , sea la transposición del primer jugador: $B = A^T$.

Escribiremos $K = \{1, 2, \dots, k\}$ para el conjunto común de estrategias puras, donde ahora k es el número de estrategias puras disponibles para cada uno de los dos jugadores. Las estrategias mixtas del primer jugador se denotarán generalmente por $x \in \Delta$ y las del segundo jugador por $y \in \Delta$ donde Δ denota el conjunto de estrategias mixta común $\Delta = \{x \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i \in K} x_i = 1\}$. Por lo tanto $\Theta = \Delta^2$. La recompensa a cualquier estrategia pura $i \in K$, cuando se juega en contra de alguna estrategia mixta, $y \in \Delta$, se denotará $\pi(e^i, y) = e^i A y$. El conjunto de mejores respuestas a cualquier estrategia adversa $y \in \Delta$. Será denotado $\beta^*(y)$:

$$\beta^*(y) = \{x \in \Delta : \pi(x, y) \geq \pi(x', y) \quad \forall x' \in \Delta\}. \quad (17)$$

Para los juegos bimatriaciales el conjunto de mejores respuestas quedaría:

$$\beta^*(y) = \{x \in \Delta : x A y \geq x' A y \quad \forall x' \in \Delta\}. \quad (18)$$

Cabe definir el caso especial en el que la matriz de pagos A sea simétrica, esta subclase de juegos simétricos de dos jugadores se llamarán doblemente simétricos:

Definición. Un juego bimatriacial simétrico de dos jugadores es doblemente simétrico si $A^T = A$.

Dado que la simetría requiere que $B^T = A$, un juego simétrico es doblemente simétrico, si y sólo si $B = A$, o, equivalentemente, si $\pi(x, y) = \pi(y, x)$ para todo $x, y \in \Delta$.

3.6.1 Equilibrios de Nash simétricos

En el contexto actual de juegos simétricos, un par de estrategias $(x, y) \in \Theta = \Delta^2$ es un equilibrio de Nash, $(x, y) \in \Theta^{NE}$, si y solo si, $x \in \beta^*(y)$ e $y \in \beta^*(x)$, esto es, diremos que un equilibrio de Nash (x, y) es simétrico si $x = y$, notar que en este caso se cumplirá que $x \in \beta^*(x) \implies \pi(x, x) \geq \pi(x', y) \quad \forall x' \in \Delta$.

Notar que, al ser los juegos simétricos un caso particular, por el teorema 3.2 todo juego tendrá un equilibrio de Nash. Con ayuda del teorema del punto fijo de Kakutani se puede probar que entre todos los equilibrios de Nash, al menos uno será simétrico.

4 Juegos evolutivos

4.1 Análisis estático, estrategias evolutivamente estables

En esta formulación se considerará (por el momento) una población suficientemente grande de individuos los cuales se retarán en duelos entre dos (*pairwise contests*), por lo que desde el punto de vista de la teoría de juegos unicamente se tendrán en cuenta los juegos simétricos con dos jugadores. Denotaremos por $K = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$ al conjunto finito de estrategias puras. El conjunto de estrategias mixtas asociado $\Delta = \{x \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i \in K} x_i = 1\}$. El poliedro del perfil de estrategias mixtas es $\Theta = \Delta^2$ y el *pay-off* obtenido por el jugador que juega la estrategia $x \in \Delta$ contra $y \in \Delta$ será $\pi_1(x, y)$ que denotaremos, sin confusión alguna, simplemente por $\pi(x, y)$. Además si la función de pagos es lineal, tendremos que $\pi(x, y) = xAy$, donde $A \equiv (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,m}$ es la matriz de pagos del jugador 1 por otra parte A^T la matriz de pagos del jugador 2 de tal forma que el *pay-off* para el jugador 2 es $\pi_2(x, y) = \pi(y, x) = yAx = xA^T y$.

4.1.1 Estrategia evolutivamente estable

El concepto de estrategia evolutivamente estable o ESS, por sus siglas en ingles (Evolutionary Stable Strategy), es junto con la dinámica replicador, el núcleo central en la teoría evolutiva. Este concepto intenta reflejar una situación estacionaria en el proceso evolutivo. Una situación, en la que el patrón de comportamiento prevaleciente en las especies no puede ser invadido por ninguna mutación pese a que esta se ajuste mejor.

Supongamos que una cantidad relativamente pequeña de mutantes aparece en una población de individuos diseñados para jugar una misma estrategia (pura o mixta) $x \in \Delta$. Supongamos también que los mutantes están destinados para jugar siempre otra estrategia $y \in \Delta$. Sea la cuota de mutantes ε , con $\varepsilon \in (0, 1)$. Escogemos pares de individuos aleatoriamente para disputar duelos. Por lo tanto, si un individuo es elegido para disputar un duelo, la probabilidad de jugar contra la estrategia y es ε mientras que jugar contra la estrategia x es $(1 - \varepsilon)$. Por lo que el *pay-off* que se obtendrá en esta situación será análogo al que se obtendría si el contrincante jugará la estrategia mixta $w = (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y \in \Delta$. En consecuencia el *pay-off* de la estrategia de los individuos no mutantes será $\pi(x, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y)$ y la de los mutantes será $\pi(y, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y)$. Notar que este razonamiento será correcto unicamente si la población es lo suficientemente grande como para que la estrategia que decida seguir un individuo no afecta a la cantidad de individuos que juegan una estrategia u otra. Por lo tanto, la especie no mutante sobrevivirá si su función de *pay-off* es superior al de la mutante. En caso de cumplirse para cualquier $y \in \Delta$, diremos que la estrategia x es una ESS.

Definición. Una estrategia (puede ser mixta) $x \in \Delta$ se dice que es evolutivamente estable si, para cualquier otro $y \in \Delta$, existe $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que si $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, entonces

$$\pi(x, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) > \pi(y, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y). \quad (19)$$

Verbalmente, una estrategia x se dice que es una ESS si, una vez adoptada por toda la población, ninguna mutación y , adoptada por una fracción arbitrariamente pequeña de individuos puede “invadir” el sistema al obtener por lo menos un *pay-off* igual.

Ejemplo 2. Tomamos una población suficientemente grande de la misma especie que compite por un recurso escaso. Dicho recurso se da en una cantidad fija e indivisible. Cada participante es enfrentado a otro miembro de la especie elegido al azar y el ganador obtendrá el recurso completo. Por otra parte, el perdedor sufre una pérdida C , también idéntica para toda la población. Los concursantes eligen una estrategia entre las dos disponibles: Halcón, denotada por la letra H (Hawk) que representa una estrategia agresiva y Paloma, denotada por la letra D (Dove), que representa una estrategia pasiva.

Describiremos ahora los *pay-off* que se producen al realizarse los encuentros entre los diferentes comportamientos. Cuando H y D se encuentran, tendremos que la estrategia de Halcón obtendrá el recurso V y el pago que tendrá que hacer el individuo que ha optado por la estrategia de Paloma será nulo. Si se encuentran dos individuos con la misma estrategia, se considerará que cada uno se lleva la mitad del bien, esto es $V/2$. Además si el encuentro es entre dos estrategias Halcón cada uno deberá incurrir en un coste de esfuerzo $C/2$. Dicha descripción queda expresada en la siguiente tabla, donde el primer elemento de cada vector corresponde a los elementos de la matriz de pagos, A , del jugador 1 y los del segundo a la matriz de pagos, $B (= A^T)$, del jugador 2:

	H	D
H	$\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}$	$V, 0$
D	$0, V$	$\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$

Consideramos ahora una cierta población que adopta H y D en unas proporciones dadas, p y $(1-p)$ respectivamente. Y nos preguntamos cuando una estrategia mixta, $x = (p, 1-p)$ es no invadible, esto es, cuando es una ESS. Tenemos 3 casos según los valores de V y C .

- $V > C$. En este supuesto, jugar H con probabilidad 1, es decir, $x = (1, 0)$ es una estrategia estrictamente dominante. Además ninguna otra estrategia puede invadirla, por lo que es la única ESS.
- $V = C$. Veamos que ninguna otra estrategia $y = (p, 1-p)$ puede invadir a la estrategia H , $x = (1, 0)$. El *pay-off* de la estrategia x será $\pi(x, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) = \varepsilon(1-p)V$ mientras que el de la estrategia y será, $\pi(y, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) = \frac{V\varepsilon}{2}(1-p)(1+p)$. De tal forma que el primer *pay-off* será mayor que el segundo si $1 > p$, esto es, si existe la probabilidad de encontrarnos a algún individuo que juegue D . Por lo que la estrategia H será una ESS.
- $C > V$. Bajo estas circunstancias la estrategia $x = (1, 0)$ que anteriormente era una ESS puede ser invadida por otra que dé una probabilidad pequeña a jugar D , en efecto, en este caso tenemos que $\pi(x, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) = \frac{V-C}{2} + \varepsilon(1-p)\frac{V+C}{2}$ y $\pi(y, (1-\varepsilon)x + \varepsilon y) = p\frac{V-C}{2} + \frac{\varepsilon}{2}(1-p)(V+pC)$, de tal forma que para que el primer *pay-off* sea superior al segundo ha de cumplirse que $V-C + \varepsilon C > p\varepsilon C$ y como $V-C < 0$, dicha inecuación no se cumplirá si p es lo suficiente cercano a 1, lo que significa que a partir de una cierta probabilidad de encontrarnos con H , la estrategia de jugar x no es una ESS. Sin embargo, jugar D con probabilidad 1 no es una ESS, debido a que si toda la población adoptará el rol de Paloma, jugar H con una probabilidad positiva invadiría el sistema. En este caso solo una estrategia mixta $x = (p, 1-p)$ con $0 < p < 1$ puede definirse como ESS, veámoslo.

Un primer requisito para que una estrategia mixta sea una ESS es que tenga la misma recompensa que cada una de las estrategias puras. Si esto no se cumpliera, una menor probabilidad a la estrategia que tenga menor recompensa invadiría a la población. Entonces si p denota la probabilidad de jugar H , tal estrategia debe satisfacer

$$\pi(H, v(x)) = \pi(D, v(x)) \quad (20)$$

donde el perfil de la población $v(x) = x = (p, 1-p)$. Partiendo de que el emparejamiento de los concursantes es aleatorio, la igualdad anterior se convierte en:

$$p\pi(H, (1, 0)) + (1-p)\pi(H, (0, 1)) = p\pi(D, (1, 0)) + (1-p)\pi(D, (0, 1)) \quad (21)$$

y sustituyendo las funciones π , nos queda

$$p((V - C)/2) + (1 - p)V = p \cdot 0 + (1 - p)V/2. \quad (22)$$

Dicha igualdad se cumple cuando $p = V/C$. Este valor de p define un equilibrio de Nash del juego, esto es, la mejor respuesta a sí mismo, el cual será simétrico. Para confirmar que es una ESS debemos demostrar que ninguna otra estrategia puede invadirlo. Para ello, por la definición de ESS, para cualquier otra estrategia $y = (q, 1 - q)$, con $q \neq p$, existe un $\bar{\varepsilon} > 0$ tal que si $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ entonces

$$\pi(x, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) > \pi(y, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) \quad (23)$$

que debido a la linealidad de π inducida por la hipótesis de duelos aleatorios, se puede reescribir como

$$(1 - \varepsilon)\pi(x, x) + \varepsilon\pi(x, y) > (1 - \varepsilon)\pi(y, x) + \varepsilon\pi(y, y). \quad (24)$$

Por ser x un equilibrio de Nash simétrico, $\pi(x, x) \geq \pi(y, x)$. Por lo que la desigualdad de arriba se cumplirá si

$$\pi(x, y) > \pi(y, y). \quad (25)$$

Para demostrar la desigualdad basta calcular que $\pi(x, y) - \pi(y, y) = \frac{p-q}{2}(V - qC)$ teniendo en cuenta que $q \neq p$ y sustituyendo p por su valor, se reduce a que $\pi(x, y) - \pi(y, y) = c(V - qC)^2 > 0$. Probando así que la estrategia $x = (V/C, (1 - V)/C)$ es una ESS.

4.1.2 ESS como refinamiento de un equilibrio de Nash

Proposición 4.1. (Vega-Redondo (1996)) Sea $x \in \Delta$ una ESS. Entonces:

- (i) El par (x, x) es un equilibrio de Nash del juego bilateral inducido por la matriz de pagos A , es decir, $\forall y \in \Delta, xAx \geq yAx$.
- (ii) $\forall y \in \Delta, y \neq x, xAx = yAx \implies xAy > yAy$.

Recíprocamente, si se cumplen (i) y (ii), entonces x es una ESS.

Demostración. Sea x una ESS. Supongamos que (i) no se cumple. Entonces,

$$\exists y \in \Delta \text{ t.q. } yAx > xAx. \quad (26)$$

Esto implica que para algún $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se cumple que

$$yA((1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) \geq xA((1 - \varepsilon)x + \varepsilon y). \quad (27)$$

Lo cual contradice la definición de ESS.

Supongamos ahora que (ii) no es cierto, esto es, existe algún $y \in \Delta, y \neq x, xAx = yAx$ y $yAy \geq xAy$. Multiplicando por $(1 - \varepsilon)$ la igualdad, por ε la desigualdad y uniendo ambas expresiones, nos queda,

$$yA((1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) \geq xA((1 - \varepsilon)x + \varepsilon y). \quad (28)$$

Lo cual contradice de nuevo que y es una ESS.

El recíproco es prácticamente inmediato. Si (i) se cumple estrictamente, es claro que existe un $\bar{\varepsilon} > 0$ suficientemente pequeño tal que si $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$,

$$xA((1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) > yA((1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) \quad (29)$$

para todo $y \in \Delta, y \neq x$. Finalmente, si en (i) se da la igualdad para algún y , entonces (ii) implica que la desigualdad anterior también se cumpliría. $\square$

Esta proposición nos dice que el concepto de ESS es un refinamiento de equilibrio de Nash para los juegos bimatriaciales. Esto es, si $x \in \Delta$ es una ESS entonces x es un equilibrio de Nash (condición (i)) y “algo más” (condición (ii)). Este algo más nos dice que en el supuesto de que exista una estrategia $y \in \Delta$ que obtiene el mismo *pay-off* que x al enfrentarse a x ($\pi(x, x) = \pi(y, x)$) se tiene que cumplir que la estrategia x obtiene un mejor resultado al enfrentarse a y que cuando asume como propia la estrategia y ($\pi(x, y) > \pi(y, y)$). Recíprocamente, si $x \in \Delta$ es un equilibrio de Nash y “algo más” (condición (ii)), x será una ESS.

Veamos ahora que el concepto de ESS es incluso más fuerte que el de equilibrio perfecto.

Proposición 4.2. (Bomze(1986)) Sea $x \in \Delta$ una ESS. Entonces el par (x, x) es un equilibrio perfecto en el juego bilateral inducido por la matriz de pagos A .

Demostración. Sea x una ESS del juego bilateral inducido por la matriz de pagos A . Por la proposición 4.1, (x, x) es un equilibrio de Nash. Una vez que hemos probado que es un equilibrio de Nash por la proposición 3.3 tenemos que el par $(x, x) \in \Theta$ será perfecto si y solo si es no-dominado, esto es, si $x \in \Delta$ no es una estrategia dominada débilmente. Supongamos por reducción al absurdo, que x es una estrategia dominada débilmente, esto es, $\exists y \in \Delta$ tal que $\forall z \in \Delta$, $yAz \geq xAz$.

Haciendo el caso particular de x e y , tenemos las desigualdades:

- (a) $yAx \geq xAx$;
- (b) $yAy \geq xAy$.

Si (a) se satisface estrictamente, surge una contradicción con el punto (i) de la proposición 4.1. Por lo que se tendrá que cumplir la igualdad, pero entonces, (b) contradice el punto (ii) de la misma proposición. $\square$

Este resultado puede ser incluso más refinado, se puede probar que una ESS, x , define un equilibrio propio simétrico (x, x) del juego bilateral asociado (Van Damme (1987)), un concepto incluso más fuerte que el de equilibrio perfecto.

4.1.3 Existencia de una ESS

No hay ningún resultado en la literatura disponible que garantice la existencia de una ESS en un escenario general. Incluso cuando los participantes se enfrentan en duelos aleatorios, que es el caso más simple de todos, se pueden dar ejemplos en los que podría no existir una ESS. Sin embargo, si uno quiere dar estos contraejemplos, necesita considerar juegos con más de dos estrategias puesto que en el caso de juegos bimatriaciales con matrices 2×2 siempre existe una ESS (Vega-Redondo (1996)).

4.1.4 ESS en poblaciones finitas

El marco teórico considerado hasta ahora, de forma más o menos implícita, se ha centrado en un contexto con poblaciones infinitas, es decir, donde la población era relativamente grande respecto a los participantes en el juego. Esto era para poder considerar que pese a que se produzcan mutaciones con una probabilidad ε , los individuos “normales” y mutantes se enfrentan a un mismo perfil poblacional, pero si la población es finita, esta hipótesis es incorrecta pues un individuo “normal” tendrá una mayor probabilidad de encontrarse a un mutante en un duelo que el mutante de encontrarse a otro mutante (pensar en una población con dos individuos normales y un único mutante).

Es por ello que consideraremos el mismo marco introducido al comienzo de esta sección 4 pero con una población de n individuos. Sea x la estrategia adoptada originalmente por toda la población e y la

estrategia adoptada por un mutante intentando invadir a la población. ¿Puede x resistir y repeler a la mutación y ? Para ello el *pay-off* esperado del no mutante cuando se enfrenta al resto de la población debe ser mayor que el obtenido por el mutante al enfrentarse al resto de la población. Veamos como son estos *pay-off*.

El *pay-off* esperado de un no-mutante cuando se le empareja aleatoriamente con un individuo de los restantes $n - 1$ (que serán $n - 2$ no mutantes que jugarán x y 1 mutante que jugará y) es análogo al que se obtendría si el contrincante jugará $w = \frac{n-2}{n-1}x + \frac{1}{n-1}y$ por lo que el *pay-off* esperado puede escribirse como $\pi(x, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y)$ donde $\varepsilon = 1/(n - 1)$. Por otra parte, el *pay-off* esperado de un mutante cuando se le empareja aleatoriamente con un individuo de los restantes $n - 1$, los cuales son todos no mutantes, es $\pi(y, x)$. Por lo que la estrategia x será una ESS si el primer *pay-off* es superior al segundo. Formalmente.

Definición. Una estrategia $x \in \Delta$ se dice que es evolutivamente estable si, para cualquier otra estrategia $y \in \Delta$ y $\varepsilon = 1/(n - 1)$,

$$\pi(x, (1 - \varepsilon)x + \varepsilon y) > \pi(y, x). \quad (30)$$

Esta definición considera la situación donde una población monomórfica original que juega x es amenazada por una única mutación y , por lo tanto no es comparable al caso de poblaciones infinitas, donde las mutaciones se daban en una pequeña proporción de la población.

Notar que hay dos suposiciones importantes en la definición, la primera es que las mutaciones son tan extrañas que siempre se dan de una en una y la segunda es que los *pay-off* que se tienen en cuenta para evaluar las posibilidades de supervivencia de una estrategia son los esperados. Esta suposición es buena si la población es suficientemente grande, debido a que los *pay-off* esperados y los medios convergen, es por ello que se considerará una población finita pero suficientemente grande para que no afecte esta suposición.

Para ilustrar las implicaciones de la ESS en poblaciones finitas, nos restringiremos unicamente a los duelos aleatorios y simétricos con matriz de pagos A para el primer jugador y A^T para el segundo (juegos bimatrixiales). En este contexto la desigualdad de la definición anterior se podría reformular como:

$$\frac{n-2}{n-1}\pi(x, x) + \frac{1}{n-1}\pi(x, y) > \pi(y, x). \quad (31)$$

Para un n suficientemente grande, una estrategia x satisfecerá la condición solo si es un equilibrio de Nash, lo cual es acorde a la proposición 4.1.

Sin embargo para un n relativamente pequeño, una estrategia x que satisfaga la desigualdad para todo $y \neq x$ podría no ser un equilibrio de Nash, es decir podría no ser la mejor respuesta a sí mismo. Este hecho se ve mejor si se reescribe la desigualdad:

$$\pi(x, x) > \frac{n-1}{n-2}\pi(y, x) - \frac{1}{n-2}\pi(x, y) \quad (32)$$

$$= \pi(y, x) - \frac{1}{n-2}(\pi(x, y) - \pi(y, x)). \quad (33)$$

Esta expresión nos dice que incluso si una mutación y es estrictamente la mejor respuesta a x , esto es, $\pi(y, x) > \pi(x, x)$, todavía se cumpliría la desigualdad si $\pi(x, y) - \pi(y, x)$ es suficientemente grande con respecto a la población.

Ejemplo 3. Competencia oligopolista (Vega-Redondo (1996)). Consideramos una industria con n empresas, todas ellas venden cierto producto homogéneo. Sea la función de demanda del producto dada por una función $P(\cdot)$ estrictamente decreciente, cuyo argumento es la suma $x_1 + x_2 + \dots + x_n$, donde cada

x_i denota las ventas de la empresa $i = 1, 2, \dots, n$. Los costes de producción son idénticos para todas las firmas y representados por una función diferenciable $C(\cdot)$ con $\frac{d^2C(\cdot)}{d(x_i)^2} > 0$.

Suponemos que las empresas eligen las cantidades de forma simultanea. Se produce un equilibrio simétrico de Cournot-Nash, $(x^*, x^*, \dots, x^*)$ caracterizado por la desigualdad:

$$P(nx^*)x^* - C(x^*) \geq P((n-1)x^* + x)x - C(x), \quad \forall x \geq 0. \quad (34)$$

Por otra parte, el comportamiento competitivo requiere que cada empresa elija una cantidad x^w tal que

$$P(nx^w)x^w - C(x^w) \geq P(nx^w)x - C(x), \quad \forall x \geq 0. \quad (35)$$

Esto nos dice que cada empresa toma el precio que marca el mercado, $P(nx^w)$, el cual maximiza beneficios.

Bajo las suposiciones de $P(\cdot)$ y $C(\cdot)$ se puede demostrar que $x^* < x^w$ (Vega-Redondo (1996)). Por lo que, $(x^w, x^w, \dots, x^w)$ no es un equilibrio de Nash.

Sin embargo, vamos a probar que x^w es una ESS para la industria descrita. De hecho, si todas las empresas produjeran x^w , cualquier empresa que eligiera cambiar su cantidad de producción, obtendría siempre un beneficio inferior a las otras $n-1$ empresas. Esta afirmación se corresponde con que la siguiente inecuación sea cierta:

$$P((n-1)x^w + x)x^w - C(x^w) > P((n-1)x^w + x)x - C(x), \quad \forall x \neq x^w. \quad (36)$$

Probemos que tal desigualdad es cierta.

Por una parte si $x^w > x$ implica que $nx^w > (n-1)x^w + x$ y al ser $P(\cdot)$ decreciente se cumple que $P(nx^w) < P((n-1)x^w + x)$, de lo que se sigue que, $P(nx^w) - P((n-1)x^w + x) < 0$. Tenemos así que

$$\left[P(nx^w) - P((n-1)x^w + x) \right] x^w < \left[P(nx^w) - P((n-1)x^w + x) \right] x. \quad (37)$$

De forma análoga, si $x^w < x$, se tiene que $P(nx^w) - P((n-1)x^w + x) > 0$ por lo que se cumple de nuevo la desigualdad (37).

Podemos reescribir dicha desigualdad como

$$P((n-1)x^w + x)x^w + P(nx^w)x > P((n-1)x^w + x)x + P(nx^w)x^w. \quad (38)$$

Añadiendo ahora el termino $C(x) + C(x^w)$ y restando en ambos lados de la inecuación, nos queda:

$$\left[P((n-1)x^w + x)x^w - C(x^w) \right] + \left[P(nx^w)x - C(x) \right] > \quad (39)$$

$$> \left[P((n-1)x^w + x)x - C(x) \right] + \left[P(nx^w)x^w - C(x^w) \right]. \quad (40)$$

Por la desigualdad del comportamiento competitivo tenemos que,

$$\left[P((n-1)x^w + x)x^w - C(x^w) \right] + \left[P(nx^w)x - C(x) \right] > \quad (41)$$

$$> \left[P((n-1)x^w + x)x - C(x) \right] + \left[P(nx^w)x^w - C(x^w) \right] > \quad (42)$$

$$> \left[P((n-1)x^w + x)x - C(x) \right] + \left[P(nx^w)x - C(x) \right]. \quad (43)$$

Luego,

$$P((n-1)x^w + x)x^w - C(x^w) > P((n-1)x^w + x)x - C(x) \quad \forall x \neq x^w. \quad (44)$$

Probando que la estrategia competitiva x^w definida anteriormente es evolutivamente estable. Esto nos dice que una empresa que participe en una industria competitiva solo sobrevivirá si es competitiva. Dicha empresa ofrecerá un precio menor en el equilibrio evolutivamente estable y un precio mayor en el equilibrio de Nash.

Vemos así que una ESS no necesariamente será un equilibrio de Nash si la población es finita, lo que si ocurre en poblaciones infinitas. Es importante enfatizar el hecho de que la conclusión obtenida es en general falsa si existen otras empresas que no sean competitivas.

4.2 Análisis dinamico básico

Durante el analisis estático nos hemos percatado de dos grandes limitaciones. La primero es la falta de condiciones generales bajo las cuales se pueda asegurar la existencia o no de una ESS. Y segundo, el concepto de ESS posee un buen sentido teórico únicamente si todos los miembros de la población juegan la misma estrategia.

Sin embargo, nos gustaría tener un modelo general para situaciones donde los miembros de la población adopten diferentes estrategias. Es por ello que se presenta el siguiente modelo de dinámica.

4.2.1 La dinámica replicador

Tenemos una población de individuos amplia pero finita que están programados para tomar estrategias puras, $i \in K$ en un juego simétrico de dos participantes con función de pagos π . Primero presentaremos la dinámica replicador para el caso discreto y posteriormente lo haremos para el continuo.

Caso discreto

Sea el tiempo medido de forma discreta, $t = 1, 2, \dots$. Denotaremos por $v(t) \equiv (v_i(t))_{i=1,2,\dots,m}$ con $\sum v(\cdot) \equiv 1$, al perfil de estrategias de la población que prevalece en el momento t . Para simplificar, supondremos que cada miembro de la población vive unicamente un periodo, dejando descendencia, la cual hereda el mismo comportamiento que su padre.

Naturalmente, el número de descendientes que deja un individuo dependera del *pay-off* obtenido durante su vida. Entonces, si un individuo de la generación t juega una estrategia e^i contra un perfil poblacional $v(t)$, el número esperado de descendientes se supone que sera igual al *pay-off* obtenido, esto es, $\pi(e^i, v(t)) \equiv \pi_i(v(t))$.

Si normalizamos el tamaño de la población a la unidad, el perfil poblacional en el momento t es $v(t)$ y el tamaño de la población en el momento $t + 1$ vendrá dado por

$$\sum_i v_i(t) \pi_i(v(t)). \quad (45)$$

Luego, $v_i(t + 1)$, la fracción de la población que juega la estrategia s_i en $t + 1$, quedaría:

$$v_i(t + 1) = v_i(t) \frac{\pi_i(v(t))}{\sum_{j=1}^m v_j(t) \pi_j(v(t))}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (46)$$

o denotando el pago medio como $\bar{\pi}(v(t)) \equiv \sum_{j=1}^m v_j(t) \pi_j(v(t))$, nos queda que,

$$v_i(t + 1) - v_i(t) = v_i(t) \frac{\pi_i(v(t)) - \bar{\pi}(v(t))}{\bar{\pi}(v(t))}, \quad (47)$$

que para estrategias con una frecuencia poblacional positiva $v_i(t)$, se convierte en:

$$\frac{\Delta v_i(t)}{v_i(t)} \equiv \frac{v_i(t+1) - v_i(t)}{v_i(t)} = \frac{\pi_i(v(t)) - \bar{\pi}(v(t))}{\bar{\pi}(v(t))}. \quad (48)$$

Esta ecuación se puede interpretar como que la cuota de población que juega una determinada estrategia cambia en proporción a su *pay-off* relativizado.

Caso continuo

Cuando los ajustes en cada periodo son suficientemente pequeños, la dinámica discreta puede ser aproximada por la continua, la cual es mucho más fácil de analizar.

Consideraremos el marco de trabajo de tiempo discreto donde la longitud del periodo es $\delta > 0$. Siguiendo a Cabrales y Sobel (1992), asumimos que en cada periodo de longitud δ , solo una fracción δ de la población es reemplazada por su descendencia. Si la parte que varía no presenta ningún sesgo frente a toda la población, la ley del movimiento se puede escribir (análogo a la ecuación (48)) como:

$$v_i(t + \delta) = \frac{v_i(t)\delta\pi_i(v(t)) + v_i(t)(1 - \delta)}{\sum_{j=1}^m [v_j(t)\delta\pi_j(v(t)) + v_j(t)(1 - \delta)]} \quad (49)$$

o bien

$$v_i(t + \delta) - v_i(t) = \frac{v_i(t) [\delta\pi_i(v(t)) - \sum_{j=1}^m v_j(t)\delta\pi_j(v(t))]}{\sum_{j=1}^m [v_j(t)\delta\pi_j(v(t))] + (1 - \delta)}. \quad (50)$$

Dividiendo por δ y haciendo tender δ a 0, la expresión anterior se convierte en:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{v_i(t + \delta) - v_i(t)}{\delta} \equiv \dot{v}_i(t) = v_i(t) [\pi_i(v(t)) - \bar{\pi}(v(t))]; \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (51)$$

La ley de movimiento anterior se conoce como *la dinámica replicador*, RD, por sus siglas en ingles, debido a que modela el proceso de “replicación”.

Veamos algunas propiedades de esta dinámica.

- **Invarianza de Δ .** El sistema de ecuaciones diferenciales anterior esta dado sobre un campo vectorial de Δ . Para que este bien definido, cada trayectoria que se rija por la dinámica replicador y que comience en Δ debe permanecer en él. Para ver esto simplemente notar que,

$$\sum_{i=1}^m \dot{v}_i(\cdot) = \sum_{i=1}^m \left[v_i(\cdot) (\pi_i(v(\cdot)) - \bar{\pi}(v(\cdot))) \right] = \bar{\pi}(v(\cdot)) - \bar{\pi}(v(\cdot)) \sum_{i=1}^m v_i(\cdot) \equiv 0 \quad (52)$$

y por lo tanto, $\sum_{i=1}^m v_i(\cdot) = 1$ si, y solo si, $\sum_{i=1}^m v_i(0) = 1$

- **Invarianza en el interior y en la frontera de Δ .** La propiedad anterior se puede refinar. Esto es, si alguna estrategia es jugada por una proporción positiva de la población en el comienzo del proceso, se seguirá jugando con el paso del tiempo, aunque sea en una proporción muy pequeña e inversamente, solo una estrategia que se juegue al principio podrá ser jugada con el paso del tiempo. Esta propiedad muestra el problema de la no incorporación de mutaciones.
- **Invarianza aditiva.** Debido a que a la RD solo le afecta la relativa diferencia entre los *pay-off*, su comportamiento se verá inafectado por una variación aditiva común en la función de pagos.

- **El cociente de la dinámica replicador.** A partir de la ecuación (51) podemos deducir una ley equivalente del movimiento para las frecuencias relativas de cualquier par de estrategias.

$$\frac{\dot{v}_i(t)}{v_i(t)} - \frac{\dot{v}_j(t)}{v_j(t)} = \pi_i(v(t)) - \pi_j(v(t)) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, m \quad \text{tal que } v_i(t), v_j(t) > 0. \quad (53)$$

Esta ley describe la RD de una forma alternativa e intuitiva: Dadas dos estrategias cualquiera, las frecuencias relativas con las que serán jugadas cambiarán exclusivamente debido a su diferencia de pagos.

4.2.2 La ESS y la dinámica replicador

En las siguientes líneas comenzaremos el análisis de la RD explorando su relación con el concepto de ESS. Para simplificar nos centraremos únicamente en escenarios donde los participantes son escogidos aleatoriamente para competir en duelos, cuyo *pay-off* vendrá dado por la matriz de pagos $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,m}$ (juego bimatricial).

La dinámica implícita en una estrategia evolutivamente estable

Hay un pequeño incentivo dinámico implícito en el concepto de ESS, si una estrategia evolutivamente estable es adoptada al inicio por toda la población es amenazada por una pequeña mutación, el hecho de que esta última estrategia lo haga peor que la ESS nos deja la conclusión implícita de que esta mutación desaparecerá.

Esta dinámica puede ser formalmente descrita en términos del sistema replicador donde dos, y solo dos estrategias son posibles: sea x una estrategia evolutivamente estable e y la mutación. Denotando con $v_1 \in [0, 1]$ la proporción de la estrategia x en la población. La dinámica replicador que se da en este caso es la siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(t) &= v_1(t)x A \left(v_1(t)x + (1 - v_1(t))y \right) - v_1(t) \left[v_1(t) \left[x A \left(v_1(t)x + (1 - v_1(t))y \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + (1 - v_1(t)) \left[y A \left(v_1(t)x + (1 - v_1(t))y \right) \right] \right] = \\ &= v_1(t)(1 - v_1(t)) \left[x A \left(v_1(t)x + (1 - v_1(t))y \right) - y A \left(v_1(t)x + (1 - v_1(t))y \right) \right] \end{aligned} \quad (54)$$

que para pequeñas mutaciones, esto es, $1 - v_1(0)$ pequeño, se cumple que $\dot{v}_1(t) > 0$ debido a que x es una ESS y por lo tanto el termino entre corchetes es positivo. Esto confirma la estabilidad local de una estrategia evolutivamente estable.

Condiciones para la existencia de una ESS y estabilidad polimórfica

Como hemos visto antes, la interpretación del concepto de ESS depende de dos suposiciones importantes: Las mutaciones se dan en raras ocasiones y el estado inicial del sistema es monomórfico (toda la población juega la misma estrategia).

La primera suposición es asumible si suponemos que las mutaciones son fenómenos extraños y la probabilidad de que se den es prácticamente nula, pero la segunda es menos realista, debido a que la diversidad de comportamientos parece un resultado mucho más probable y natural en el proceso de la evolución.

En muchos contextos, una situación polimórfica (con varios comportamientos) describe mucho mejor el proceso evolutivo, y tenemos por ello que estudiar también la dinámica de estabilidad del proceso en estas condiciones. Y esto es precisamente lo que nos proporciona la RD.

Recordemos primero la definición de asintóticamente estable.

Definición. Sea $\dot{x} = F(x)$ un sistema dinámico en $\mathbb{R}^k$. Diremos que el punto x^* es un equilibrio asintóticamente estable del sistema si:

- (i) Es estable en el sentido de Liapunov: Dado un entorno U_1 de x^* existe otro entorno U_2 de x^* tal que todas las trayectorias con $x(0) \in U_2$ satisfacen que $x(t) \in U_1 \quad \forall t \geq 0$.
- (ii) Existe un entorno V de x^* tal que todas las trayectorias que pasan por V satisfacen que $x(t) \rightarrow x^*$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Una vez recordado este concepto podemos enunciar el resultado principal de la sección:

Teorema 4.3. (Hofbauer et al. (1979)) Sea x una ESS. Entonces, el estado $v^* = x$ es un estado asintóticamente estable de la dinámica replicador.

Demostración. Ver Vega-Redondo (1996) Teorema 3. □

El resultado anterior indica que si las frecuencias que definen un cierto estado pueden ser identificadas con los pesos de probabilidad correspondientes de una ESS, entonces esta es una condición suficiente para que el estado sea asintóticamente estable respecto a la RD.

Se presenta ahora un ejemplo de Taylor y Jonker (1978) el cual muestra que dicha condición no es necesaria para la estabilidad asintótica.

Ejemplo 4. Consideramos un escenario donde se realizan duelos entre dos concursantes escogidos aleatoriamente. El juego es definido por la siguiente tabla de *pay-off*:

	α	β	γ
α	0,0	1,-2	1,1
β	-2,1	0,0	4,1
γ	1,1	1,4	0,0

Son meros cálculos comprobar que dada la estrategia $\tilde{x} = (1/3, 1/3, 1/3) \in \Delta$, $(\tilde{x}, \tilde{x}) \in \Theta$ es el único equilibrio simétrico de Nash de este juego y por lo tanto la estrategia mixta $\tilde{x}$ sería, si existe, la única ESS posible. Sin embargo, $\tilde{x}$ no es una ESS. Para ver esto, demostraremos que $\hat{x} = (0, 1/2, 1/2)$ no cumple la segunda condición de la proposición 4.1. La matriz de pagos es

$$A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos así que $\hat{x}A\tilde{x} = \tilde{x}A\tilde{x} = 2/3$ y $\hat{x}A\hat{x} = 5/4 > \tilde{x}A\hat{x} = 7/6$. Lo que significa que una pequeña fracción de mutaciones $\hat{x}$ es capaz de invadir una población monomórfica que juegue $\tilde{x}$.

Examinamos ahora la estabilidad de $\tilde{x}$ respecto a la dinámica replicador. Dicha dinámica será $F_i(x) = x_i[A_i x - xAx]$, (siendo A_i la fila i -ésima de la matriz A y $\tilde{x}_i$ la componente i -ésima de $\tilde{x}$) la cual se encuentra sobre el espacio vectorial $F \equiv (F_i)_{i=1,2,3}$. Entonces, la estabilidad local de $\tilde{x}$ dependerá del jacobiano $DF(\cdot)$ evaluado en $\tilde{x}$. Calculémoslo, diferenciando F_i tenemos que $\frac{\partial F_i(x)}{\partial x} = x_i(A_i - (Ax)^T - xA)$. Evaluando $\tilde{x}$ en la expresión, obtenemos el jacobiano:

$$DF(\tilde{x}) = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

que tiene por valores propios $-1/3, -1/3, -2/3$, todos números reales negativos. Concluyendo así que $\tilde{x}$ es asintótica y localmente estable pese a no ser una estrategia evolutivamente estable.

4.2.3 Dinámica evolutiva y refinamientos de Nash

En esta subsección veremos los lazos existentes entre el concepto clásico de equilibrio y la teoría de juegos evolutivos desde un punto de vista dinámico.

El concepto más básico que habría que buscar en la dinámica replicador es el de estado estacionario.

Definición. Diremos que un estado $v^* \in \Delta$ es estacionario para la dinámica replicador si satisface que:

$$v_i^*(A_i v^* - v^* A v^*) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (55)$$

Recordar que A_i denota la i -ésima fila de la matriz de pagos A . La relación entre este concepto y el de equilibrio de Nash nos lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 4.4. (Vega-Redondo (1996)) Si (v^*, v^*) es un equilibrio de Nash simétrico, entonces v^* es un estado estacionario de la dinámica replicador. El opuesto no será cierto en general.

Demostración. Sea (v^*, v^*) un equilibrio de Nash, entonces se cumple que $A_i v^* = A_j v^* = v^* A v^* \forall i, j$ tal que $v_i^*, v_j^* > 0$. Luego se cumplirá la definición de estado estacionario.

Recíprocamente, considerar el estado poblacional $\hat{v} = (1, \dots, 0)$. Dicho vector satisface la condición de estado estacionario, pero, en general, no será un equilibrio de Nash. $\square$

La segunda parte de la proposición nos dice que, en general, pueden existir estados estacionarios que no sean equilibrios de Nash. Naturalmente, esto solo ocurrirá si el punto estacionario en cuestión no pertenece al interior de Δ , de lo contrario, si un punto interior es un estado estacionario, este será un equilibrio de Nash.

Proposición 4.5. (Bomze (1986)) Sea v^* un equilibrio asintóticamente estable de la dinámica replicador, es decir, de la ecuación (51). Entonces, (v^*, v^*) es un equilibrio de Nash.

Demostración. Sea v^* un punto asintóticamente estable de la ecuación (51), y sea N_{v^*} un entorno suficientemente pequeño del mismo. Tomamos $v(0) \in N_{v^*}$ tal que $v_i(0) > 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, m$. Por la estabilidad asintótica de v^* , sabemos que $v(t) \rightarrow v^*$.

Supongamos que v^* no es un equilibrio de Nash. Entonces, existirán $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ tales que $v_j^* > 0$ y $A_i v^* > A_j v^*$. Haciendo uso la expresión del cociente de la dinámica replicador vista antes, que $v_i(t) > 0$ para todo t implica que existen $\gamma > 0$ y $T > 0$ tal que si $t \geq T$,

$$\frac{\dot{v}_i(t)}{v_i(t)} - \frac{\dot{v}_j(t)}{v_j(t)} > \gamma. \quad (56)$$

Lo cual es claramente una contradicción con la convergencia a v^* . $\square$

Este resultado se puede incluso reforzar afirmando que (v^*, v^*) no es solo un equilibrio de Nash si no que es un equilibrio perfecto. Se puede encontrar este resultado en Bomze (1986).

Ejemplo 5. Retomaremos el juego Halcón-Paloma visto anteriormente. Recordar que la matriz de pagos del juego es $A = \begin{pmatrix} (V-C)/2 & V \\ 0 & V/2 \end{pmatrix}$. La dinámica replicador del juego viene dada por las ecuaciones

$$\dot{v}_i(t) = v_i(t)[A_i v(t) - v(t) A v(t)]; \quad i = 1, 2. \quad (57)$$

Donde A_i es la fila i -ésima de la matriz A . Definimos $v_1 \equiv x$ y $v_2 = 1 - x$. El sistema dinámico se nos reduce unicamente a una ecuación diferencial, puesto que la segunda es combinación lineal de la primera. Sustituyendo en el sistema tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \left[A_1 v - (x, 1-x) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} v \right] = x [A_1 v - x A_1 v - (1-x) A_2 v] = \\ &= x[(1-x)A_1 v - (1-x)A_2 v] = x(1-x)[A_1 v - A_2 v] = \\ &= x(1-x) \left[\frac{V-C}{2}x + V(1-x) - \frac{V}{2}(1-x) \right] = \frac{1}{2}x(1-x)(V-Cx).\end{aligned}\tag{58}$$

Probaremos ahora que, si $V < C$, el equilibrio del sistema dinámico $x^* = V/C$ es globalmente estable. Para verificar esto basta ver que el último termino de la ecuación, $V - Cx(t)$, es decreciente para $x \in [0, 1]$ con un cero para $x^* = V/C$. Luego el punto x^* es globalmente estable. Probando así que $v^* = (v_1^*, v_2^*) = (x^*, 1-x^*) = ((V/C, (C-V)/C))$ es un equilibrio globalmente estable.

Red de refinamientos de Nash

A continuación se va a mostrar de forma visual las diferentes relaciones existentes entre los conceptos vistos.

En la figura 1 podemos ver la relación que existe entre los diferentes refinamientos del equilibrio de Nash para un juego que tenga presentación normal, es decir, los expuestos en la subsección 3.1.

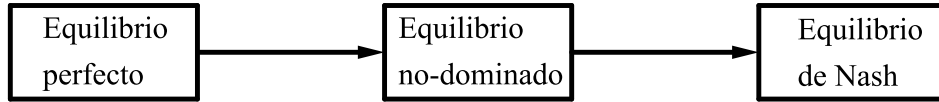


Figura 1: Relación de equilibrios para los juegos con forma normal.

Si nos restringimos a los juegos bimatriciales, la representación gráfica sería la de la figura 2, donde se añade que un juego bimatriicial no dominado es perfecto.

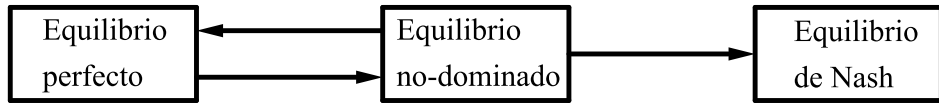


Figura 2: Relación de equilibrios para los juegos bimatriciales.

Finalmente, consideramos unicamente los juegos donde participan dos individuos escogidos aleatoriamente de una población infinita (*pairwise-contets*) donde las función de pagos del individuo 1 puede ser representada por la matriz A y la del individuo 2 por la matriz A^T , esto es, juegos bimatriciales simétricos. De acuerdo a la notación empleada, la conexión entre la estrategia $v \in \Delta$, ya sea una ESS o un estado estacionario de la RD con un equilibrio, se refiere al equilibrio simétrico $(v, v) \in \Theta$ inducido por la estrategia v . Tenemos así que la representación gráfica correspondiente es la de la figura 3.

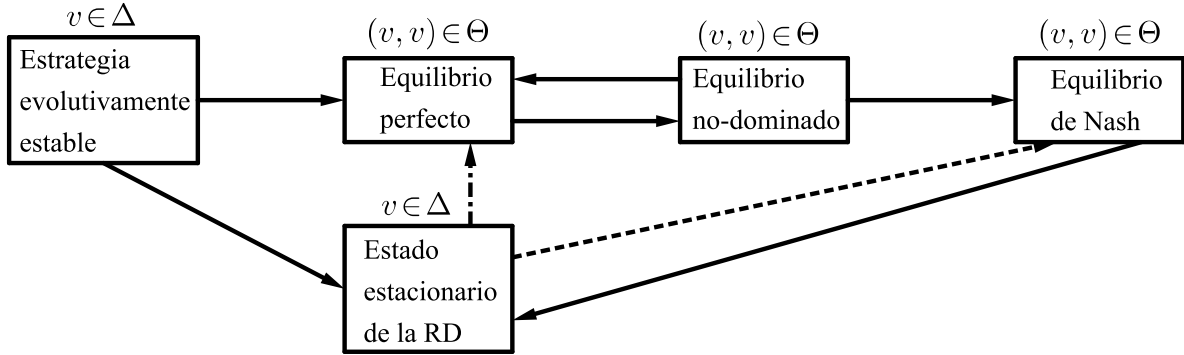


Figura 3: Relación de equilibrios y estados para los juegos tipo *pairwise-contests* bimatriciales simétricos. Línea de rayas y puntos, la conexión únicamente existe en el supuesto de que el estado sea asintóticamente estable. Línea de rayas, la conexión únicamente existe si el estado es interior, $v \in \text{int}(\Delta)$.

5 Aplicación: Un Juego evolutivo poblacional para el estudio de la fijación de los precios por las empresas y su interacción con la dinámica industrial

En esta sección, tendremos en cuenta lo dicho en las secciones 3 y 4, fundamentalmente lo dicho sobre la dinámica replicador, y partiremos de ahí para plantear un modelo original de dinámica industrial basado en la teoría de juegos evolutiva. Con él veremos cómo evolucionan las cuotas de las empresas en un mercado en el que las empresas fijan precios de acuerdo con diferentes rutinas.

El desarrollo del modelo será el siguiente, primero se enunciarán y justificarán los diferentes supuestos asumidos, para posteriormente deducir las ecuaciones que rigen la dinámica replicador. Este sistema será analizado en busca de equilibrios, a la vez que se estudiarán las diferentes evoluciones en base a diferentes parámetros.

5.1 Supuestos del entorno

El objetivo es estudiar la dinámica de una industria, obviando consideraciones de equilibrio general y consistencia macroeconómica. Por lo que se trata de un modelo de dinámica industrial en una industria aislada del resto.

5.2 Supuestos de la oferta

Nuestro sector consta de n empresas ($i = 1, 2, \dots, n$) que ofrecen variedades sustitutivas muy próximas del bien o servicio que ofrece la industria. Las empresas compiten en precios, siendo el precio de cada una $p_i(t)$. Esta coexistencia de precios distintos aún siendo las variedades del bien sustitutivas próximas, surge por la presencia de información imperfecta, la cual se debe a los hábitos e inercias por parte de los consumidores, pues no se les considera perfectamente informados ni completamente racionales, los supondremos limitadamente racionales en el sentido de Simon (1965).

Consideramos que el tamaño de la industria viene dado por un volumen de demanda y oferta constante $Q > 0$, y que la distribución inicial de las cuotas de mercado de las n empresas es: $\{s_1(0), \dots, s_n(0)\}$.

Por simplicidad, suponemos que las empresas producen de acuerdo con una función de producción en la que el único *input* es el trabajo, $Q_i(t) = L_i(t)$. Con productividad común y constante igual a la

unidad. Excluimos, también por simplicidad, la problemática del capital. Suponemos que el trabajo se retribuye a un salario w (medido en unidades de un numerario general de la economía) y fijamos también el salario igual a la unidad, $w = 1$. Es por ello que el coste unitario de producción de todas las empresas será $c = w = 1$ (común para todas ellas).

Los supuestos anteriores nos permiten definir el beneficio de cada empresa: $B_i(t) = (p_i(t) - 1)s_i(t)Q$, y la tasa de rentabilidad normalizada:

$$\pi_i(t) = (p_i(t) - 1)s_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (59)$$

Las empresas son limitadamente racionales (*profit-seekers* en vez de *profit-maximizers*). Actúan fijando sus precios en cada periodo de tal forma que capturan o pierden cuota de mercado. Esta fijación depende tanto de una rutina que es específica de cada empresa, como de la variación en la cuota de mercado de cada empresa. La demanda evoluciona y se va formando endógenamente, de forma que las empresas desconocen ex-ante la dinámica del mercado $\{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$. Supondremos que las empresas fijan precios aplicando un margen (mark-up) sobre el coste unitario. Podemos considerar distintas rutinas plausibles en la literatura (Vives (2001)):

$$\hat{p}_i(t) = \frac{\eta_i c}{\eta_i - s_i(t)}, \quad \eta_i > 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (60)$$

$$\tilde{p}_i(t) = (1 + \alpha_i s_i(t))c, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (61)$$

Debido a que hemos considerado el coste unitario, c , igual a la unidad ambas expresiones se verían simplificadas a,

$$\hat{p}_i(t) = \frac{\eta_i}{\eta_i - s_i(t)}, \quad \eta_i > 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (62)$$

$$\tilde{p}_i(t) = 1 + \alpha_i s_i(t), \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (63)$$

A parte de estas dos expresiones también se podría considera situaciones en las que una parte de la industria elijan una de las rutinas y la otra parte la otra⁴.

Nótese que ambas expresiones garantizan beneficios positivos, esto es, las empresas irán dominando o no en la medida en que capturen cuota de mercado. Y esto, junto a los precios, irá marcando la tasa de rentabilidad y el beneficio de cada empresa conforme evolucione el mercado.

Suponemos por último, que la oferta se ajusta a la demanda (*demand-driven model*). Esto es, una vez que las empresas fijan y anuncian sus precios, el juego de consumo que estableceremos a continuación irá determinando las dinámica de $\{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$ y, en consecuencia, los niveles necesarios de producción de cada empresa, sus beneficios, la evolución endógena de precios o el índice de Herfindahl⁵ entre otros.

Nótese que como la suma de las cuotas de mercado es en todo momento igual a la unidad, una de las cuotas se podrá obtener a partir de la dinámica de las restantes, $s_n(t) = 1 - s_1(t) - s_2(t) - \dots - s_{n-1}(t)$. Pudiendo así trabajar en el simplex $(n-1)$ dimensional.

Finalmente suponemos que la oferta de trabajo es infinitamente elástica al salario vigente, o que el empleo se reasigna de forma flexible entre empresas de acuerdo con las necesidades de producción que

⁴Pese a que desde un punto de vista económico ambas rutinas son diferentes, al analizarlas matemáticamente nos damos cuenta de que la rutina de la ecuación (63) es el desarrollo en serie de Taylor de orden 1 (hasta la primera derivada) de la rutina de la ecuación (62) al tomar $\alpha_i = \frac{1}{\eta_i}$ por lo que, la estabilidad del sistema será la misma sea cual sea la rutina de precios que se siga.

⁵El índice de Herfindahl empleado en este trabajo será el siguiente: $H(t) = \sum_{i=1}^n s_i^2(t)$, el cual nos muestra la concentración del mercado. Un valor cercano a la unidad nos muestra un mercado muy concentrado próximo al monopolio y poco competitivo mientras que valores cercanos a $1/n$ nos muestran un mercado muy competitivo

marca la evolución de la demanda de cada empresa. Esto lo suponemos, una vez mas, por simplicidad, para centrarnos en el problema que nos ocupa.

5.3 Supuestos de Demanda

Al ser un modelo *demand-driven* en un sector con tamaño constante, la demanda y la tasa de variación en la demanda de cada empresa vienen dirigidas por la dinámica de las cuotas de mercado $s_i(t)$. Es aquí donde vamos a introducir los supuestos fundamentales del juego poblacional que rigen el comportamiento de los consumidores demandantes del bien (de las variedades del bien) en el sector. Suponemos que existe una masa grande de consumidores ($Q > 0$) que se distribuye en sus decisiones de compra entre las $i = 1, \dots, n$ empresas que, en cada momento, hay en esta industria. En cada t , la proporción del total de consumidores que demandan la variedad de la empresa i -ésima al precio que fija la empresa $p_i(t)$, es $s_i(t)$.

Suponemos que el consumo en esta industria no satura la restricción presupuestaria de los consumidores quienes, aparte de rentas salariales, pueden obtener otras rentas, gastar en otros mercados, etc. No abordamos ese tema porque es un modelo parcial de dinámica de una industria aislada, no es un modelo de coordinación general.

Cada una de las n empresas produce una variedad de producto que son perfectamente sustitutivas y que son, desde el punto de vista de los consumidores, sus n posibles estrategias. Dada una distribución inicial de consumo $\{s_1(0), \dots, s_n(0)\}$, los consumidores irán revisando (o pueden ir revisando) sus estrategias en un entorno de información imperfecta e interacción con otros consumidores conforme discurre dinámicamente el juego.

Suponemos que los payoffs de los consumidores, para cada estrategia, vienen dados por:

$$u_i(t) = -p_i(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (64)$$

Estos es, en un entorno de hábitos inerciales e información imperfecta (consumidores limitadamente racionales), los consumidores, gradualmente, intentarán descubrir variedades del bien (son sustitutivas muy próximas) más baratas. Y esto, de acuerdo con un protocolo de revisión que introducimos seguidamente, que guiará la evolución endógena de la demanda y las relaciones bidireccionales con los precios de las empresas.

Protocolo de revisión: Supondremos encuentros aleatorios entre consumidores (Sandholm (2010); Vega-Redondo (1996)). Esto es, los consumidores que están consumiendo en cada momento t las variedades i y j pueden encontrarse y comunicarse con una probabilidad proporcional al tamaño de dichos grupos de consumidores, $\beta s_i(t)s_j(t)$, siendo $0 < \beta < 1$ un parámetro que indica la frecuencia de los encuentros, y determinará la intensidad de la competencia en este sector. Además hay que establecer una función de cambio de variedad (*switching-function*). Denotaremos por $f_{ij}(t)$ al flujo de consumidores que cambian su estrategia de compra (la variedad que compran) dejando de comprar j y pasando a comprar i en el momento t . La cual se define como : $f_{ij}(t) = \max\{u_i(t) - u_j(t); 0\} = \max\{p_j(t) - p_i(t); 0\}$, es decir:

$$f_{ij}(t) - f_{ji}(t) = p_j(t) - p_i(t) \quad (65)$$

Esto es, el flujo siempre es hacia variedades más baratas, conforme se va descubriendo y explorando gradualmente el espacio de precios que, a su vez, cambia endógenamente según las *pricing routines*.

Ahora, dicho lo anterior, es claro que, en tiempo continuo, la evolución de la cuota de mercado de cada empresa i , esto es, la evolución de la proporción de consumidores/jugadores que juegan i , conforme

pasa el tiempo será:

$$\begin{aligned}\dot{s}_i &= \sum_{j=1}^n \beta s_i(t) s_j(t) (f_{ij}(t) - f_{ji}(t)) = \sum_{j=1}^n \beta s_i(t) s_j(t) (p_j(t) - p_i(t)) = \\ &= \beta s_i(t) \sum_{j=1}^n s_j(t) (p_j(t) - p_i(t)).\end{aligned}\quad (66)$$

Definiendo $\bar{p}(t) = \sum_{i=1}^n s_i(t) p_i(t)$ nos queda que la evolución del mercado será

$$\dot{s}_i = \beta s_i(t) (\bar{p}(t) - p_i(t)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (67)$$

Con $p_i(t)$ dadas por las *pricing routines* de las ecuaciones (63) y (62) según nos convenga.

6 Análisis dinámico: Estabilidad y equilibrios

6.1 Duopolio

En primer lugar realizaremos el estudio de estabilidad para la evolución de un duopolio. Debido a que la cuota de la segunda empresa, $s_2(t)$, se puede escribir en función de la primera, $s_2(t) = 1 - s_1(t)$, el sistema se regirá por una única ecuación:

$$\dot{s}_1(t) = \beta s_1(t) (1 - s_1(t)) (p_2(t) - p_1(t)). \quad (68)$$

6.1.1 Estabilidad

A continuación estudiaremos la estabilidad de la dinámica replicador dada por la ecuación (68) según se tomen las rutinas de precios de la ecuación (62) o de la ecuación (63).

Tomando las rutinas de precios de la ecuación (62) la ecuación que hemos de estudiar es:

$$\dot{s}_1(t) = \hat{f}(s_1) = \beta s_1(t) (1 - s_1(t)) \left(\frac{\eta_2}{\eta_2 - 1 + s_1(t)} - \frac{\eta_1}{\eta_1 - s_1(t)} \right). \quad (69)$$

Dicha ecuación tiene tres puntos críticos, $s_1 = 0$, $s_1 = 1$ y $s_1 = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$. Veamos su estabilidad. Para ello evaluamos la ecuación en $\bar{s}_0 \in \left(0, \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}\right)$ y en $\hat{s}_0 \in \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}, 1\right)$. Vemos que $\hat{f}(\bar{s}_0) > 0$ y $\hat{f}(\hat{s}_0) < 0$ por lo que los puntos $s_1 = 0$ y $s_1 = 1$ son inestables mientras que el punto $s_1 = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$ es estable. Se puede ver una representación gráfica de la estabilidad en la figura 4. Este análisis nos dice que cualquier trayectoria $s_1^*(t)$ con $s_1^*(0) \neq 1$ y $s_1^*(0) \neq 0$ acabará cuando $t \rightarrow \infty$ en $\lim_{t \rightarrow \infty} s_1(t) = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}$.

Mientras que si tomamos las rutinas de precios de la ecuación (63) la dinámica replicador nos queda:

$$\dot{s}_1(t) = \tilde{f}(s_1) = \beta s_1(t) (1 - s_1(t)) (\alpha_2 (1 - s_1(t)) - \alpha_1 s_1(t)). \quad (70)$$

Los puntos críticos de dicha ecuación son $s_1 = 0$, $s_1 = 1$ y $s_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$. Para ello procedemos de forma analoga al caso anterior y evaluamos la función en $\bar{s}_0 \in \left(0, \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)$ y en $\hat{s}_0 \in \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, 1\right)$. Vemos que $\tilde{f}(\bar{s}_0) > 0$ y $\tilde{f}(\hat{s}_0) < 0$ por lo que los puntos $s_1 = 0$ y $s_1 = 1$ son inestables mientras que el punto $s_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ es estable. La representación gráfica de la estabilidad es análoga a la de la figura 4.

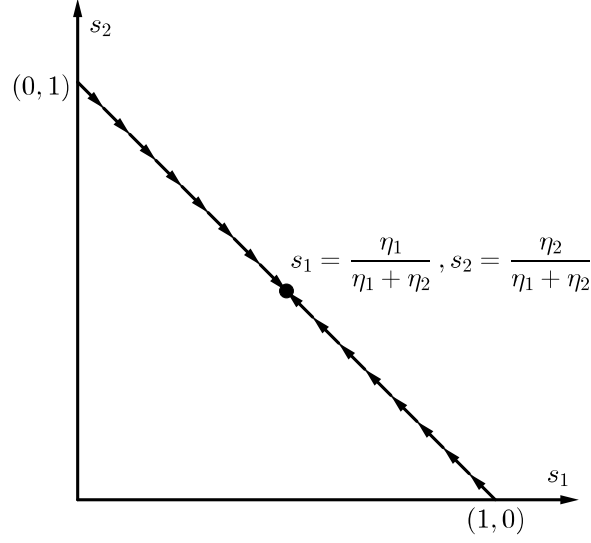


Figura 4: Estabilidad de la ecuación (69).

6.1.2 Resultados en el equilibrio

Acabamos de ver que para las *pricing routines* de la ecuación (62) el equilibrio se alcanza en $\hat{s}^* = \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}, \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right)$ y si se toman las de la ecuación (63), $\tilde{s}^* = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)$. Partiendo de estos resultados veamos cual es la rentabilidad normalizada que obtienen las empresas, la utilidad de los consumidores y el índice de Herfindahl.

Rentabilidad normalizada. Recordar que la rentabilidad normalizada viene dada por la ecuación (59) de tal forma que tendremos:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_i^* &= (\hat{p}_i^* - 1)\hat{s}_i^* = \left(\frac{\eta_i}{\eta_i - \hat{s}_i^*} - 1 \right) \hat{s}_i^* = \frac{\hat{s}_i^{*2}}{\eta_i - \hat{s}_i^*} = \frac{\frac{\eta_i^2}{(\eta_i + \eta_j)^2}}{\eta_i - \frac{\eta_i}{\eta_i + \eta_j}} = \\ &= \frac{\eta_i}{(\eta_i + \eta_j)(\eta_i + \eta_j - 1)}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\tilde{\pi}_i^* = (\tilde{p}_i^* - 1)\tilde{s}_i^* = \alpha_i \tilde{s}_i^{*2} = \frac{\alpha_i \alpha_j^2}{(\alpha_i + \alpha_j)^2}. \quad (72)$$

Una vez conocida la rentabilidad en el equilibrio es natural preguntarse que le sucede a la rentabilidad de una empresa cuando su competidor modifica su parámetro de fijación de precios o si podría mejorar su rentabilidad modificando el suyo. Para poder responder estas preguntas es necesario recurrir a las derivadas parciales respecto η_i y η_j para la función de rentabilidad normalizada $\hat{\pi}_i^*$ y las derivadas parciales respecto α_i y α_j para la función de rentabilidad normalizada $\tilde{\pi}_i^*$. Calculemoslas. Para la primera expresión de la rentabilidad obtenemos:

$$\frac{\partial \hat{\pi}_i^*}{\partial \eta_i} = \frac{(\eta_i + \eta_j)(\eta_i + \eta_j - 1) - \eta_i(2\eta_i + 2\eta_j - 1)}{(\eta_i + \eta_j)^2(\eta_i + \eta_j - 1)^2}, \quad (73)$$

$$\frac{\partial \hat{\pi}_i^*}{\partial \eta_j} = \frac{\eta_i(1 - 2\eta_i - 2\eta_j)}{(\eta_i + \eta_j)^2(\eta_i + \eta_j - 1)^2}. \quad (74)$$

La derivada parcial $\frac{\partial \hat{\pi}_i^*}{\partial \eta_i}$ es positiva cuando $1 < \eta_i < \sqrt{\eta_j(\eta_j - 1)}$ y negativa cuando $\sqrt{\eta_j(\eta_j - 1)} < \eta_i$. Por lo que la empresa i podría maximizar su rentabilidad normalizada si es capaz de fijar $\eta_i = \sqrt{\eta_j(\eta_j - 1)}$ y la mejoraría al acercarse. Por otra parte $\frac{\partial \hat{\pi}_i^*}{\partial \eta_j}$ siempre será negativa al ser η_i y η_j mayores a la unidad. Por lo que si la otra empresa decide aumentar su parámetro η_j de fijación de precios, la rentabilidad normalizada de la empresa i será menor.

Conjuntamente, por una parte tenemos que $\hat{\pi}_i^*$ es máximo respecto η_i cuando $\eta_i = \sqrt{\eta_j(\eta_j - 1)}$ y por la otra que $\hat{\pi}_i^*$ es máximo respecto η_j cuando η_j sea lo más pequeño posible, esto es, η_j cercano a uno, por lo que la empresa i alcanzará la rentabilidad normalizada máxima cuando ambos parámetros sean cercanos a la unidad. Dicha rentabilidad normalizada será siempre menor que 0,5. Notar que la empresa j también alcanzará sus beneficios máximos cuando los parámetros sean cercanos a la unidad por lo que a ambas empresas les interesará fijar los precios con η_i, η_j cercanos a 1. Notemos que esto supone, aproximadamente, precios inversamente proporcionales a la cuota del otro duopolista.

Para la segunda expresión de la rentabilidad tenemos:

$$\frac{\partial \hat{\pi}_i^*}{\partial \alpha_i} = \frac{\alpha_j^2(\alpha_j - \alpha_i)}{(\alpha_j + \alpha_i)^3}, \quad (75)$$

$$\frac{\partial \hat{\pi}_i^*}{\partial \alpha_j} = \frac{2\alpha_i^2\alpha_j}{(\alpha_i + \alpha_j)^3}. \quad (76)$$

Teniendo en cuenta que α_i y α_j son estrictamente positivos, vemos que $\frac{\partial \hat{\pi}_i^*}{\partial \alpha_i}$ es positiva cuando $(0 <) \alpha_i < \alpha_j$ y negativa cuando $(0 <) \alpha_j < \alpha_i$. Por lo que la empresa i maximizará su rentabilidad normalizada si es capaz de fijar el mismo parámetro que el otro duopolista y mejoraría su rentabilidad cuando su parámetro, α_i , se acerque al parámetro de su rival, α_j . Por otra parte $\frac{\partial \hat{\pi}_i^*}{\partial \alpha_j} > 0$ para todo $\alpha_i, \alpha_j > 0$. Tenemos así que la rentabilidad normalizada de la empresa i crecerá cuando la empresa j marque un parámetro α_j mayor.

En este caso si nos fijamos directamente en la expresión de $\hat{\pi}_i^*$ vemos que este beneficio crece indefinidamente, es decir, no existe máximo global de tal forma que los beneficios de la empresa i serán infinitos cuando α_i y α_j sean infinitos.

Utilidad de los consumidores. La utilidad de los consumidores viene dada por la ecuación (64). Notar que en el equilibrio, la utilidad de los consumidores ha de ser la misma para cada estrategia, $u_1^* = u_2^*$, en efecto, si no fuera la misma los consumidores descubrirían un bien más barato y fluctuarían las cuotas, lo cual no puede ocurrir debido a que nos encontramos en el equilibrio. Es por ello que nos referiremos por u^* a la utilidad de los consumidores en el equilibrio y por p^* al precio de equilibrio, poniendo gorro o tilde según la rutina de precios. Tenemos así.

$$\hat{u}^* = -\hat{p}^* = -\frac{\eta_i}{\eta_i - \hat{s}_i^*} = \frac{-\eta_i(\eta_i + \eta_j)}{\eta_i(\eta_i + \eta_j) - \eta_i} = \frac{\eta_i + \eta_j}{1 - \eta_i - \eta_j}, \quad (77)$$

$$\tilde{u}^* = -\tilde{p}^* = -1 - \alpha_i \tilde{s}_i^* = -1 - \alpha_i * \frac{\alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j} = \frac{-\alpha_i - \alpha_j - \alpha_i \alpha_j}{\alpha_i + \alpha_j}. \quad (78)$$

Analicemos como varía la utilidad de los consumidores frente a movimientos en los parámetros de fijación de precios. Para $\hat{u}^*$ tenemos que, $\frac{\partial \hat{u}^*}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \hat{u}^*}{\partial \eta_j} = \frac{1}{(\eta_i + \eta_j - 1)^2} > 0$, luego la utilidad de los consumidores en el equilibrio aumentará conforme aumenten los parámetros, es decir, los precios del equilibrio serán menores cuanto más grandes sean los parámetros, alcanzándose la mayor utilidad de los consumidores cuando el precio sea igual a la unidad, esto es, cuando el precio es igual al coste marginal y se tiene una situación similar a la competencia perfecta. Y para $\tilde{u}^*$ tenemos $\frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial \alpha_i} = \frac{-\alpha_j^2}{(\alpha_i + \alpha_j)^2} < 0$ y

$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial \alpha_j} = \frac{-\alpha_i^2}{(\alpha_i + \alpha_j)^2} < 0$, luego la utilidad de los consumidores aumentará conforme disminuyan los parámetros, es decir, los precios del equilibrio serán menores cuanto más cercanos a 0 sean los parámetros. Por tanto, al igual que para la otra función de fijación de precios, la máxima utilidad para los consumidores se alcanza en una situación similar a la competencia perfecta. Es importante notar, como es bien conocido, que los criterios de maximización de la utilidad del consumidor se mueven en sentido contrario a los de maximización del beneficio de las empresas.

Índice de Herfindahl. En nuestro caso índice de Herfindahl en el equilibrio viene dado por la expresión $H = s_1^{*2} + s_2^{*2}$ sustituyendo las diferentes s^* según las rutinas de precios:

$$\hat{H} = \hat{s}_1^{*2} + \hat{s}_2^{*2} = \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} \right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right)^2 = \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{(\eta_1 + \eta_2)^2}, \quad (79)$$

$$\tilde{H} = \tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2 = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2}. \quad (80)$$

Recordar que el índice de Herfindahl es mínimo cuando es igual a $1/n$, en nuestro caso $1/2$, que se produce cuando todas las empresas tienen la misma cuota de mercado. Este mínimo se alcanza si y solo si las empresas tienen los mismo parámetros de fijación de precios, esto es, $\eta_1 = \eta_2$ para la primera rutina de precios y $\alpha_1 = \alpha_2$ para la segunda.

6.1.3 Ejemplo ilustrativo

Pese a la simplicidad del modelo y la desestimación en el planteamiento de factores externos que puedan afectar al devenir de nuestro duopolio, el resultado obtenido es asimilable al que se produce en ciertos mercados, como podría ser el de la fabricación de aviones comerciales donde Airbus y Boeing acaparan actualmente en torno al 90% del mercado. En esta industria se ha desacelerado la innovación y se compite principalmente en precios con rentabilidades aproximables por la cuota de mercado (Ammous (2017)). En la figura 5 podemos ver la evolución temporal de las cuotas de venta de nuevas aeronaves de ambas compañías. Si nos fijamos en el largo plazo, desde 1975 hasta la década los 2000 podemos ver como las cuotas convergen a un tipo de equilibrio semejante al presentado en este trabajo. Mientras que si nos fijamos en el corto plazo, la década de los 2000, vemos como se mantiene el equilibrio interior (entorno al cual hay fluctuaciones debidas a shocks externos).

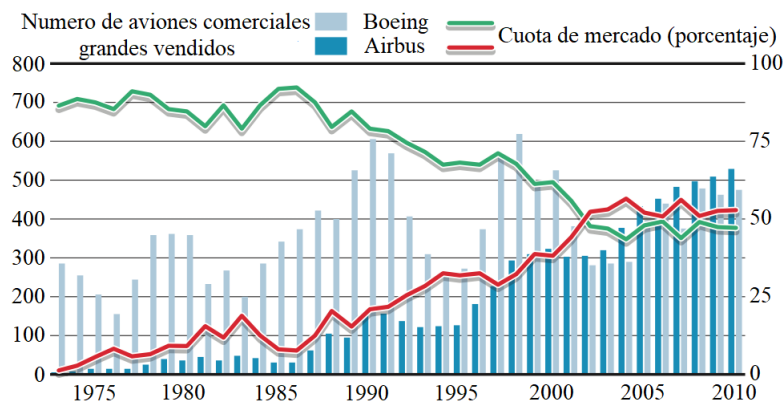


Figura 5: Evolución de las cuotas de ventas y de mercado de aeronaves para Airbus y Boeing. Fuente: Reuters (2012).

6.2 Triopolio

Veamos ahora como se comporta el proceso evolutivo cuando hay tres empresas en el sector. Al igual que en el duopolio y de acorde lo expuesto en la teoría, bastará analizar la cuota de mercado de dos empresas, pues la cuota de la tercera es expresión de las anteriores, $s_3(t) = 1 - s_1(t) - s_2(t)$. Por lo que la dinámica se reducirá a un sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{s}_1(t) &= \beta s_1(t) [s_2(t)(p_2(t) - p_1(t)) + (1 - s_1(t) - s_2(t))(p_3(t) - p_1(t))]; \\ \dot{s}_2(t) &= \beta s_2(t) [s_1(t)(p_1(t) - p_2(t)) + (1 - s_1(t) - s_2(t))(p_3(t) - p_2(t))].\end{aligned}$$

En base a la rutina de precios que se escoja tendremos un sistema u otro. Para la rutina de precios de la ecuación (62) tenemos.

$$\begin{aligned}\dot{s}_1(t) &= \hat{f}_1(s_1, s_2) = \beta s_1(t) \left[s_2(t) \left(\frac{\eta_2}{\eta_2 - s_2(t)} - \frac{\eta_1}{\eta_1 - s_1(t)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - s_1(t) - s_2(t)) \left(\frac{\eta_3}{\eta_3 - 1 + s_1(t) + s_2(t)} - \frac{\eta_1}{\eta_1 - s_1(t)} \right) \right]; \\ \dot{s}_2(t) &= \hat{f}_2(s_1, s_2) = \beta s_2(t) \left[s_1(t) \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 - s_1(t)} - \frac{\eta_2}{\eta_2 - s_2(t)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - s_1(t) - s_2(t)) \left(\frac{\eta_3}{\eta_3 - 1 + s_1(t) + s_2(t)} - \frac{\eta_2}{\eta_2 - s_2(t)} \right) \right].\end{aligned}\tag{81}$$

Y para la rutina de precios de la ecuación (63) tenemos.

$$\begin{aligned}\dot{s}_1(t) &= \tilde{f}_1(s_1, s_2) = \beta s_1(t) \left[s_2(t) (\alpha_2 s_2(t) - \alpha_1 s_1(t)) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - s_1(t) - s_2(t)) (\alpha_3 (1 - s_1(t) - s_2(t)) - \alpha_1 s_1(t)) \right]; \\ \dot{s}_2(t) &= \tilde{f}_2(s_1, s_2) = \beta s_2(t) \left[s_1(t) (\alpha_1 s_1(t) - \alpha_2 s_2(t)) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - s_1(t) - s_2(t)) (\alpha_3 (1 - s_1(t) - s_2(t)) - \alpha_2 s_2(t)) \right].\end{aligned}\tag{82}$$

6.2.1 Estabilidad

Al igual que hemos hecho para el duopolio, vamos a proceder a analizar la estabilidad de los sistemas (81) y (82).

Para el primer sistema obtenemos los siguientes puntos críticos: $\hat{A} = (0, 0)$, $\hat{B} = (0, 1)$, $\hat{C} = (0, \frac{\eta_2}{\eta_2 + \eta_3})$, $\hat{D} = (1, 0)$, $\hat{E} = (\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_3}, 0)$, $\hat{F} = (\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}, \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2})$ y $\hat{G} = (\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}, \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3})$. Para ver la estabilidad local en cada punto, se calcula la matriz jacobiana de $\hat{f}(s_1, s_2) = (\hat{f}_1(s_1, s_2), \hat{f}_2(s_1, s_2))$, se evalúa en dicho punto y se estudian sus valores y vectores propios. Obteniendo los siguientes resultados:

- $\hat{A} = (0, 0)$. Los valores propios del jacobiano son iguales y positivos, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\beta}{\eta_3 - 1} > 0$ y los vectores propios son $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$. Estamos ante un punto inestable del que las trayectorias salen en todas las direcciones.

- $\hat{B} = (0, 1)$. Los valores propios del jacobiano son iguales y positivos, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\beta}{\eta_2 - 1} > 0$ y los vectores propios son $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$. Estamos ante un punto inestable del que las trayectorias salen en todas las direcciones.
- $\hat{C} = (0, \frac{\eta_2}{\eta_2 + \eta_3})$. Los valores propios son $\lambda_1 = \frac{\beta}{\eta_2 + \eta_3 - 1} > 0$ y $\lambda_2 = \frac{-\beta(\eta_2 + \eta_3)}{(\eta_2 + \eta_3 - 1)^2} < 0$. Con vectores propios asociados $v_1 = (\frac{-\eta_2 - \eta_3}{\eta_2}, 1)$ y $v_2 = (0, 1)$. Por lo que es un punto silla cuya trayectoria atrayente es v_2 .
- $\hat{D} = (1, 0)$. Los valores propios del jacobiano son iguales y positivos, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\beta}{\eta_1 - 1} > 0$ y los vectores propios son $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$. Estamos ante un punto inestable del que las trayectorias salen en todas las direcciones.
- $\hat{E} = (\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_3}, 0)$. Los valores propios son $\lambda_1 = \frac{\beta}{\eta_1 + \eta_3 - 1} > 0$ y $\lambda_2 = \frac{-\beta(\eta_1 + \eta_3)}{(\eta_1 + \eta_3 - 1)^2} < 0$. Con vectores propios asociados $v_1 = (\frac{-\eta_1}{\eta_1 + \eta_3}, 1)$ y $v_2 = (1, 0)$. Por lo que es un punto silla cuya trayectoria atrayente es v_2 .
- $\hat{F} = (\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}, \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2})$. Los valores propios son $\lambda_1 = \frac{\beta}{\eta_1 + \eta_2 - 1} > 0$ y $\lambda_2 = \frac{-\beta(\eta_1 + \eta_2)}{(\eta_1 + \eta_2 - 1)^2} < 0$. Con vectores propios asociados $v_1 = (\frac{\eta_1}{\eta_2}, 1)$ y $v_2 = (-1, 1)$. Por lo que es un punto silla cuya trayectoria atrayente es v_2 .
- $\hat{G} = (\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}, \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3})$. Los valores propios del jacobiano son iguales y positivos, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-\beta(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - 1} < 0$ y los vectores propios son $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$. Estamos ante un punto estable al que las trayectorias van desde todas las direcciones.

La representación gráfica⁶ de la estabilidad se puede ver en la figura 6 donde se han tomado los parámetros $\beta = 0,5$, $\eta_1 = 1,1$, $\eta_2 = 1,4$ y $\eta_3 = 1,2$, de tal forma que los puntos críticos son: $\hat{A} = (0, 0)$, $\hat{B} = (0, 1)$, $\hat{C} = (0, 0,538)$, $\hat{D} = (1, 0)$, $\hat{E} = (0,478, 0)$, $\hat{F} = (0,44, 0,56)$ y $\hat{G} = (0,297, 0,378)$.

Vemos así que existe un único punto estable, $\hat{G}$. Al cual van a parar todas las trayectorias del sistema que no están en la frontera del simplex $n-1$ dimensional, esto es, que $1 \neq s_i(0) \neq 0$ para $i = 1, 2$ y $s_1(0) + s_2(0) \neq 1$. Notar que en el caso de que $s_1(0) + s_2(0) = 1$ se obtendrían los mismos resultados que para el caso de duopolio, siendo entonces $\hat{F}$ el punto estable de ese duopolio. Comparar con la figura 4.

Vamos ahora con el segundo sistema de precios. Obtenemos los siguientes punto críticos: $\tilde{A} = (0, 0)$, $\tilde{B} = (0, 1)$, $\tilde{C} = (0, \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3})$, $\tilde{D} = (1, 0)$, $\tilde{E} = (\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3}, 0)$, $\tilde{F} = (\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2})$ y $\tilde{G} = (\frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3}, \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3})$. Para calcular la estabilidad de los puntos procedemos de forma análoga a la anterior.

- $\tilde{A} = (0, 0)$. Los valores propios del jacobiano son iguales y positivos, $\lambda_1 = \lambda_2 = \beta \alpha_3 > 0$ y los vectores propios son $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$. Estamos ante un punto inestable del que las trayectorias salen en todas las direcciones.
- $\tilde{B} = (0, 1)$. Los valores propios del jacobiano son iguales y positivos, $\lambda_1 = \lambda_2 = \beta \alpha_2 > 0$ y los vectores propios son $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$. Estamos ante un punto inestable del que las trayectorias salen en todas las direcciones.

⁶La representación gráfica ha sido hecha con el software *pplane.m* desarrollado por John C. Polking. Para más información consultar Polking y Arnold (2004).

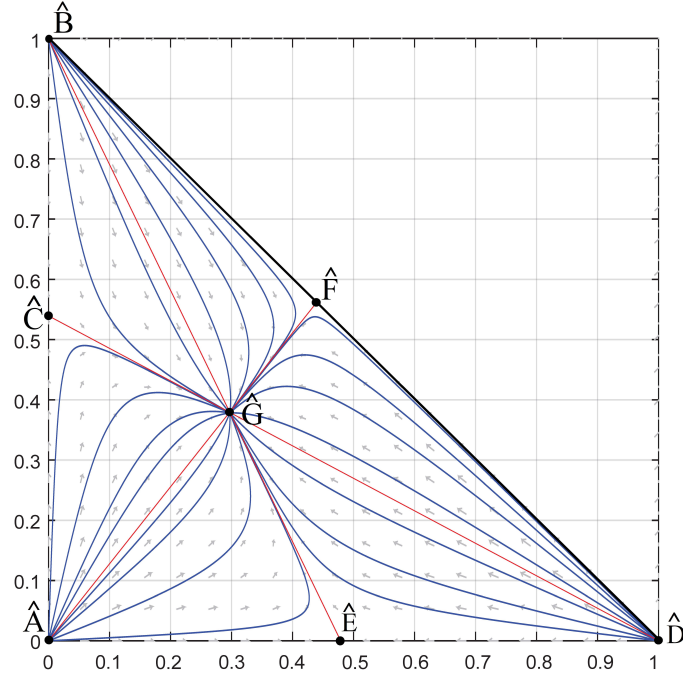


Figura 6: Diagrama de fases para la dinámica replicador del sistema de ecuaciones (81). En el eje de abscisa, la cuota de la empresa 1, en el de ordenadas la de la empresa 2. Con parámetros: $\beta = 0,5$, $\eta_1 = 1,1$, $\eta_2 = 1,4$ y $\eta_3 = 1,2$.

- $\tilde{C} = (0, \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3})$. Los valores propios son $\lambda_1 = \frac{\beta \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3} > 0$ y $\lambda_2 = \frac{-\beta \alpha_2 \alpha_3}{(\alpha_2 + \alpha_3)^2} < 0$. Con vectores propios asociados $v_1 = (\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_3}, -1)$ y $v_2 = (0, 1)$. Por lo que es un punto silla cuya trayectoria atrayente es v_2 .
- $\tilde{D} = (1, 0)$. Los valores propios del jacobiano son iguales y positivos, $\lambda_1 = \lambda_2 = \beta \alpha_1 > 0$ y los vectores propios son $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$. Estamos ante un punto inestable del que las trayectorias salen en todas las direcciones.
- $\tilde{E} = (\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3}, 0)$. Los valores propios son $\lambda_1 = \frac{\beta \alpha_1 \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3} > 0$ y $\lambda_2 = \frac{-\beta \alpha_1 \alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3} < 0$. Con vectores propios asociados $v_1 = (\frac{\alpha_3}{\alpha_3 + \alpha_1}, -1)$ y $v_2 = (1, 0)$. Por lo que es un punto silla cuya trayectoria atrayente es v_2 .
- $\tilde{F} = (\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}, \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2})$. Los valores propios son $\lambda_1 = \frac{\beta \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} > 0$ y $\lambda_2 = \frac{-\beta \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} < 0$. Con vectores propios asociados $v_1 = (\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1)$ y $v_2 = (-1, 1)$. Por lo que es un punto silla cuya trayectoria atrayente es v_2 .
- $\tilde{G} = (\frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3}, \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3})$. Los valores propios del jacobiano son iguales y positivos, $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-\beta \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3} < 0$ y los vectores propios son $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$. Estamos ante un punto estable al que las trayectorias van desde todas las direcciones.

La representación gráfica del diagrama de fases es análoga a la vista para la otra rutina de fijación de precios. Esto es debido a que al analizar la estabilidad del sistema, unicamente nos fijamos en las derivadas parciales de primer orden de la función $f(s_1, s_2) = (f_1(s_1, s_2), f_2(s_1, s_2))$ y como la rutina de

fijación de precios de la ecuación (63) es el primer termino del desarrojo de Taylor de la rutina de la ecuación (62), los resultados de estabilidad son los mismos para ambas rutinas.

Tras el análisis, como no podía ser de otra forma por lo dicho en el párrafo anterior, vemos que existe un único punto estable, $\tilde{G}$, al cual van a parar todas las trayectorias del sistema que no están en la frontera del simplex $n-1$ dimensional, esto es, que $1 \neq s_i(0) \neq 0$ para $i = 1, 2$ y $s_1(0) + s_2(0) \neq 1$. Notar que en el caso de que $s_1(0) + s_2(0) = 1$ se obtendrían los mismos resultados que para el caso de duopolio.

6.2.2 Índice de Herfindahl

En el triopolio el índice de Herfindahl viene dado por la expresión $H = s_1^{*2} + s_2^{*2} + s_3^{*2}$ donde s_1^{*2} , s_2^{*2} y s_3^{*2} son las cuotas de mercado en el equilibrio. Sustituyendo las diferentes cuotas según las rutinas de precios:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= s_1^{*2} + s_2^{*2} + s_3^{*2} = \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} \right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} \right)^2 + \left(\frac{\eta_3}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} \right)^2 = \\ &= \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}{(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)^2} \end{aligned} \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \hat{s}_1^{*2} + \hat{s}_2^{*2} + \hat{s}_3^{*2} = \left(\frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3} \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3} \right)^2 = \frac{\alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_3^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2}{(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_3)^2} \end{aligned} \quad (84)$$

En nuestro caso el índice de Herfindahl será mínimo cuando sea igual a $1/3$. Este mínimo se alcanza si y solo si las empresas tienen los mismo parámetros de fijación de precios, esto es, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3$ para la primera rutina de precios y $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ para la segunda.

7 Aplicación: Un juego no-cooperativo con racionalidad plena de duopolio tipo “Bertrand”

Por último vamos a modificar el modelo evolutivo de fijación de precios para dos empresas propuesto en las secciones 5 y 6. El objetivo de la modificación es adaptarlo para que sea un juego no-cooperativo en forma normal, tipo “Dilema del Prisionero”, que capte las ideas fundamentales de racionalidad de un duopolio en el que se compite en precios, con coste unitario igual a la unidad e idéntico para los duopolistas y sin diferenciación de productos. Intentamos así relacionar los juegos dinámicos con los clásicos. Comencemos.

Al igual que antes, la función de *pay-off* de los duopolistas es la expresión

$$\pi_i = (p_i - 1)s_i, \quad i = 1, 2 \quad (85)$$

y mantenemos las rutinas de precios con las que hemos tratado en los casos dinámicos. En esta adaptación los duopolistas, al igual que en el modelo evolutivo, deciden sobre la variable “precios” pero esta vez no lo hacen con las rutinas de precios, sino conociendo perfectamente el juego, las estrategias propias y las del otro duopolista, la matriz completa de pagos, siendo además plenamente racionales.

Por otra parte los consumidores tienen información perfecta, pudiendo ordenar de forma completa y consistente las ofertas empresariales y elegir todos instantaneamente la de menor precio.

Vamos a obtener la matriz de pagos de nuestro duopolio de Bertrand donde el duopolista 1 es el jugador fila y el duopolista 2 el jugador columna. Veremos que resulta ser una matriz de pagos tipo “dilema del prisionero”. Las estrategias que pueden tomar los duopolistas son, cooperar o no cooperar. Veamos que *pay-off* proporciona cada estrategia.

- Los 2 duopolistas pueden, a la hora de fijar los precios, cooperar, es decir que se de colusión en el mercado de tal forma que fijarían el mismo precio obteniendo ambos un beneficio jugoso e idéntico y con cuota $s_1 = s_2 = 0,5$. Podemos pensar que se ponen de acuerdo en fijar el máximo precio posible de acuerdo a la rutina que sigan las empresas ($\hat{p}_i = \frac{\eta_i}{\eta_i - 1}$ ó $\tilde{p}_i = 1 + \alpha_i s_i$). Para ello escogen el mismo parámetro de fijación de precios ($\eta \equiv \eta_1 = \eta_2$ ó $\alpha \equiv \alpha_1 = \alpha_2$). En el supuesto en el que ambas empresas usan la rutina de precio $\hat{p}_i$, los precios que fijarían serían $\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \frac{\eta}{\eta - 1}$ y si usan $\tilde{p}_i$, $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = 1 + \alpha$. Pactando mantener ambos ese precio idéntico de forma que se reparten el mercado $s_1 = s_2 = 0,5$. Estamos ante una situación práctica de monopolio con reparto de beneficios, lo que lleva a unos beneficios normalizados $\hat{\pi}_1 = \hat{\pi}_2 = \left(\frac{\eta}{\eta - 1} - 1\right) 0,5 = \frac{0,5}{\eta - 1}$ ó $\tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = (1 + \alpha - 1) 0,5 = 0,5\alpha$, según la rutina de precios que se siga. Tenemos así que la primera casilla de la matriz de pagos, cuando ambos pactan y cooperan, es $\left(\frac{0,5}{\eta - 1}, \frac{0,5}{\eta - 1}\right)$ si se fijan precios de acuerdo a $\hat{p}_i$ y $(0,5\alpha, 0,5\alpha)$ si se fijan de acuerdo a $\tilde{p}_i$.
- Si ambos se traicionan y entran en guerra de precios y dado que no hay diferenciación de productos, acabarán con precios iguales $p_1 = p_2 = 1$ (independientemente de la rutina de precios que se siga, pues se baja el precio hasta que se iguala al coste marginal) y beneficios idénticos $\pi_1 = \pi_2 = 0$, de modo que la cuarta casilla (inferior derecha) de la matriz de pagos será $(0, 0)$ para ambas rutinas, conocido como equilibrio ruinoso de Bertrand.
- Por otra parte, si alguno de los 2 duopolistas de forma unilateral decide apartarse de la solución pactada de colusión -suponiendo que el otro sigue cumpliendo- como la demanda en nuestro modelo reacciona a los precios, sólo tiene que situarse ligeramente por debajo del precio pactado para llevarse todo el mercado y obtener beneficios. Esto se alcanzaría modificando ligeramente el parámetro de fijación de precios, α o η acordado en la colusión.

En el supuesto en el que ambas empresas siguen la rutina de precios $\hat{p}_i$, el jugador, i , que decide traicionar al otro, aumenta ligeramente su parámetro, η_i , con respecto al pactado, esto es, $\eta_i > \eta$, con el objetivo de fijar un precio $\hat{p}_i$ ligeramente menor, $\hat{p}_i = \frac{\eta_i}{\eta_i - 1} < \frac{\eta}{\eta - 1} = \hat{p}_j$, quedándose con toda la cuota de mercado y obteniendo un beneficio $\hat{\pi}_i = \frac{1}{\eta_i - 1}$. Por otra parte el otro duopolista, al no tener cuota de mercado, conseguirá un beneficio nulo. Como el juego es simétrico, los beneficios para ambos duopolistas en las casillas superior derecha e inferior izquierda de la matriz de pagos, quedan $\left(0, \frac{1}{\eta^+ - 1}\right)$ y $\left(\frac{1}{\eta^+ - 1}, 0\right)$ respectivamente.

De igual modo, si ambas empresas siguen la rutina $\tilde{p}_i$, el jugador, i , que decide traicionar al otro, disminuye ligeramente su parámetro, α_i , con respecto al pactado, esto es, $\alpha_i < \alpha$, con el objetivo de fijar un precio $\tilde{p}_i$ ligeramente menor, $\tilde{p}_i = 1 + \alpha_i < 1 + \alpha = \tilde{p}_j$, quedándose con toda la cuota de mercado y obteniendo un beneficio $\tilde{\pi}_i = \alpha^-$. Por otra parte el otro duopolista conseguirá un beneficio nulo. Como el juego es simétrico, los beneficios para ambos duopolistas en las casillas superior derecha e inferior izquierda de la matriz de pagos, quedan $(0, \alpha^-)$ y $(\alpha^-, 0)$ respectivamente.

Tenemos así que las matriz de pagos del juego estático con racionalidad plena (con duopolista 1 jugador fila y duopolista 2 jugador columna) y rutina de precios $\hat{p}_i$ es la del cuadro 1, mientras que la de la rutina de precios $\tilde{p}_i$ es la del cuadro 2.

Cuadro 1: Matriz de pagos para la rutina $\hat{p}_i$. $\eta^+ > \eta > 1$.

		Jugador 2	
		cooperar	no cooperar
Jugador 1	cooperar	$(\frac{0,5}{\eta-1}, \frac{0,5}{\eta-1})$	$(0, \frac{1}{\eta^+-1})$
	no cooperar	$(\frac{1}{\eta^+-1}, 0)$	$(0, 0)$

Nótese que la estrategia “no cooperar y bajar el precio traicionando” es debilmente dominante para ambos jugadores, si suponemos que $\frac{1}{\eta^+-1} > \frac{0,5}{\eta-1}$. En efecto, esta suposición es cierta si y solo si $2\eta - 1 > \eta^+$. Escribiendo $\eta^+ = \eta + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ nuestra suposición se reduce a que se cumplirá si $\eta - 1 > \varepsilon$, como $\eta > 1$, siempre existirá tal ε y podremos tomar por cierto que $\frac{1}{\eta^+-1} > \frac{0,5}{\eta-1}$ para algún $\eta^+ > \eta$. De tal modo que uno de los posibles equilibrios de Nash del juego es la no cooperación, (no cooperar, no cooperar). Por ello, aún ganando más cooperando, en este equilibrio de Nash, hay un alto nivel de racionalidad a que se entre en guerra de precios y se acabe en el equilibrio de Bertrand obteniendo unos beneficios nulos. Los otros equilibrios de Nash del juego (se puede comprobar que no hay equilibrios de Nash en estrategias mixtas) son los asociados a que un jugador cooperé y el otro no lo haga, pero estos equilibrios llevarían dinámicamente a que él que ha confiado bajase el precio, lo que arrastraría finalmente al equilibrio (0,0), de tal forma que estos dos equilibrios de Nash no son estables mientras que (no cooperar, no cooperar) si lo es.

Cuadro 2: Matriz de pagos para la rutina $\tilde{p}_i$. $0 < \alpha^- < \alpha$.

		Jugador 2	
		cooperar	no cooperar
Jugador 1	cooperar	$(0,5\alpha, 0,5\alpha)$	$(0, \alpha^-)$
	no cooperar	$(\alpha^-, 0)$	$(0, 0)$

Para esta matriz, de nuevo tenemos que la estrategia “no cooperar y bajar el precio traicionando” es debilmente dominante para ambos jugadores, si suponemos que $\alpha^- > 0,5\alpha$. En efecto, escribiendo $\alpha^- = \alpha - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$, la suposición se reduce a $0,5\alpha > \varepsilon$, y como $\alpha > 0$ siempre existirá tal ε . Tenemos así que uno de los posibles equilibrios de Nash del juego es la no cooperación, (no cooperar, no cooperar). De modo que, al igual que antes, la racionalidad nos lleva a que se acabe en el equilibrio de Bertrand. De forma análoga a la otra rutina de precios, los otros equilibrios de Nash del juego (se puede comprobar que no hay equilibrios de Nash en estrategias mixtas) se producen cuando un jugador coopera y el otro no lo hace, pero estos equilibrios llevarían dinámicamente a que él que ha confiado bajase el precio, lo que arrastraría finalmente al equilibrio (0,0), de tal forma que estos dos equilibrios de Nash no son estables mientras que (no cooperar, no cooperar) si lo es.

Para ambas rutinas de precios, el equilibrio de Nash estable alcanzado es una situación en la que la presión de la demanda y la guerra en precios destruye los beneficios pudiendo quedar el mercado a la larga desabastecido. Además la solución colusiva es un optimo paretiano inestable y socialmente indeseable porque todo el beneficio se genera cargando altos precios a los consumidores, cuya función

de utilidad es $u(t) = -p(t)$.

Finalmente añadir que haciendo uso de la proposición 4.1 son meros cálculos comprobar que la estrategia $x = (0, 1)$, elegir siempre no cooperar, es una estrategia evolutivamente estable y por tanto un equilibrio perfecto. Además por la proposición 4.4 también será un estado estacionario de la dinámica replicador formulada en la ecuación (55).

8 Conclusiones

Tras analizar los dos modelos propuestos, vemos que hay una gran diferencia en los resultados según se aplique un marco teórico estático no cooperativo en forma normal o un enfoque dinámico evolutivo con racionalidad limitada de los agentes. Comparando ambos análisis se observa cómo los resultados de los agentes y el comportamiento del mercado varía muy significativamente. Vamos a sintetizar a continuación varias conclusiones interesantes.

Al suponer racionalidad limitada en el modelo evolutivo, tanto desde el punto de vista de las empresas que no maximizan beneficios sino que buscan beneficios ajustando sus rutinas de precios, como desde el punto de vista de los demandantes, que aprenden también gradualmente sus opciones y revelan inercias, obtenemos un equilibrio interior estable donde las empresas acaban obteniendo beneficios. Mientras que con racionalidad plena, al menos en una situación sencilla, obtienen beneficios nulos porque son incapaces de mantener un acuerdo cooperativo colusivo y se destruyen compitiendo en precios.

Las limitaciones de información en la demanda y en la oferta, así como la persistencia de heterogeneidad en el caso evolutivo con racionalidad limitada, llevan a un patrón de bienestar, en términos de beneficios y *pay-off* de los demandantes dependientes de los precios, más balanceado que en un juego con racionalidad perfecta y conocimiento pleno de las opciones del mercado. En el caso evolutivo se generan beneficios, el mercado es viable, admite heterogeneidad y los consumidores no soportan un coste de bienestar tan alto como en el óptimo paretiano de colusión del modelo no-cooperativo. Este resultado es, como mínimo, sorprendente. Lo que hemos obtenido parece indicarnos que el hecho de que el mundo sea solo parcialmente comprensible, que haya costes de aprendizaje y ajuste, que los agentes sean diferentes y que ni los consumidores ni las empresas actúen permanentemente como perfectos maximizadores en mercados perfectamente competitivos no sólo no son fallos del mercado, sino que por el contrario, estas aparentes imperfecciones pueden ser la esencia misma que hace posible el mercado, al tiempo que impide el secuestro de los precios por una oferta colusiva. Por supuesto, es necesario extender nuestro análisis al caso n -dimensional y una situación de mercado más general.

Como líneas de posible investigación sugerimos la posibilidad de estudiar este modelo con funciones generales, incorporar mecanismos de entrada de empresas, diferenciación de productos, inversión y procesos de innovación, profundizar en las dinámicas de competencia en precios con modelos evolutivos, así como extender el análisis a las interacciones entre sectores que coevolucionan verticalmente relacionados (*upstream*, *midstream* y *downstream*). Por último, el contraste de nuestros resultados con casos reales como el mencionado en el apartado 6.1.3, es otra interesante línea de investigación.

Referencias

- Ammous, S. (2017). Slowdown: Aviation and modernity's lost dynamism. *Center on Capitalism and Society. Columbia University. Working Paper*.
- Bomze, I. M. (1986). Non-cooperative two-person games in biology: A classification. *International Journal of Game Theory*, 15(1):31–57.

- Cabrales, A. y Sobel, J. (1992). On the limit points of discrete selection dynamics. *Journal of Economic Theory*, 57:407–19.
- Dosi, G., Grazzi, M., Marengo, L., y Settepanella, S. (2016). Production theory: Accounting for firm heterogeneity and technological change. *Journal of Industrial Economics*, 64(4):875–907.
- Dosi, G., Pereira, M. C., y Virgillito, M. E. (2017). The footprint of evolutionary processes of learning and selection upon the statistical properties of industrial dynamics. *Industrial and Corporate Change*, 26(2):187–210.
- Hofbauer, J., Schuster, P., y Sigmund, K. (1979). A note on evolutionary stable strategies and game dynamics. *Journal of Theoretical Biology*, 81(3):609–12.
- Hofbauer, J. y Sigmund, K. (1998). *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge university press.
- Nash, J. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1):46–49.
- Nelson, R. R. y Winter, S. G. (1982). *An Evolutionary Theory of Economic Change*. Harvard University Press. Cambridge, MA.
- Pearce, D. (1984). Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection. *Econometrica*, 52(4):1029–1050.
- Polking, J. C. y Arnold, D. (2004). *Ordinary Differential Equations Using MATLAB*. Pearson/Prentice Hall.
- Reuters (2012). Airbus market share pitted against boeing. <https://blogs.thomsonreuters.com/answeron/airbus-market-share-comparison-boeing/>.
- Sandholm, W. H. (2010). *Population Games and Evolutionary Dynamics*. MIT Press. Cambridge, MA.
- Selten, R. (1957). Re-examination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, 4:25–55.
- Simon, H. A. (1965). *Administrative behavior: a study of decision-making processes in administrative organization*. Free Press paperback. Free Press.
- Smith, J. M. (1982). *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press.
- Taylor, P. D. y Jonker, L. B. (1978). Evolutionarily stable strategies and game dynamics. *Mathematical Bioscience*, 40:145–156.
- Van Damme, E. (1987). *Stability and the Perfection of Nash Equilibria*. Springer-Verlag.
- Vega-Redondo, F. (1996). *Evolution, Games, and Economic Behaviour*. Oxford University Press.
- Vives, X. (2001). *Oligopoly Pricing*. The MIT Press. Cambridge, MA.
- Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton university press.
- Weibull, J. W. (1995). *Evolutionary Game Theory*. The MIT Press. Cambridge, MA.