Clases de fiabilidad y órdenes estocásticos. Aplicaciones en modelos de inventario

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad Zaragoza
1542

Diego Adrián Díaz-Plaza
Trabajo de fin de master en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: Germán Badía Blasco
Carmen Sangüesa Lafuente
13 de Septiembre de 2017

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El objetivo que nos planteamos al abordar este trabajo y que desarrollaremos en los tres siguientes capítulos fue el de describir las clases de fiabilidad y los órdenes estocásticos, y aplicar estos conocimientos para demostrar un resultado general sobre modelos de inventario.

El capítulo segundo versará sobre las distintas clases de fiabilidad, y las relaciones que existen entre ellas. La teoría de la fiabilidad pretende estudiar distintas variables aleatorias (tiempo de vida de un elemento, el tiempo entre reparaciones, etc.) que afectan a un elemento determinado de un sistema (o al propio sistema).

No hay que olvidar que la teoría de la fiabilidad se desarrolló debido a las demandas de la tecnología moderna y, particularmente, de las experiencias con complejos sistemas militares en la segunda guerra mundial. De hecho, una de las áreas en la que se realizaron los primeros descubrimientos matemáticos de fiabilidad fue el mantenimiento de máquinas (Khintchine, 1932, y C. Palm, 1947) y uno de los estudios más característicos sigue siendo el de la observación del desgaste o la degeneración de un elemento de un sistema mientras se encuentra en funcionamiento, hasta que deja de ser operativo.

Por lo tanto, podemos afirmar que esta teoría nació con el objetivo de estudiar las variables aleatorias (tiempo de vida de un elemento, el tiempo entre reparaciones, etc.) que afectan a un elemento determinado de un sistema. Para ello, se definen tanto el tiempo de vida antes del fallo como el tiempo durante el cual un determinado elemento de un sistema opera satisfactoriamente, y transcurrido el cual el elemento falla. Existen varias opciones que podemos considerar después de que el elemento falle: conservarlo como elemento fallido, repararlo, reemplazarlo. Este tiempo de vida se intentará analizar mediante métodos probabilísticos y estadísticos. Los conceptos que utilicemos para describir tiempos de vida y sus propiedades pueden extenderse al estudio de variables aleatorias que no necesariamente representan tiempos de vida.

En la resolución de estos problemas tuvo una gran relevancia la distribución de las llamadas entrantes a un enlace telefónico en el contexto del espionaje. Este proceso fue estudiado por A.K. Erlang y C.Palm entre otros, llegando a justificar mediante argumentos heurísticos que la distribución Poisson es la distribución límite de dichas llamadas telefónicas. Posteriormente, Khintchine (1960) y Ososkov (1956) establecieron pruebas matemáticas rigurosas sobre ello. Estos experimentos también sentaron las bases para justificar la distribución exponencial como la distribución hasta el fallo de sistemas complejos.

Durante la década de los 40 los mayores esfuerzos en el estudio de los problemas de fiabilidad se dieron en el área de control de calidad. Posteriormente, en los inicios de la década de los 50 ciertas áreas de la fiabilidad, especialmente los test de vida y los problemas de fiabilidad electrónicos, empezaron a llamar la atención de estadísticos y de ingenieros militares e industriales. En 1956 aparece un artículo matemático de Moore y Shannon sobre redes de transmisión, a partir del cual, Von Neumann llega a describir ciertas operaciones del cerebro humano. Posteriormente, en 1959 Black y Proschan publican un artículo en el que se resuelven problemas de fiabilidad aplicados a la logística.

Aunque existe una gran cantidad de literatura sobre las clases de fiabilidad, nosotros nos basaremos principalmente para este trabajo en el libro de Marsall y Olkin [6]

Llamaremos tasa de fallo a esta función de la probabilidad esperada de fallo después de estar en funcionamiento hasta el tiempo t. La definiremos matemáticamente en términos de la densidad f y de la función de supervivencia $\bar{F}$ de la variable aleatoria X de la siguiente forma:

$$r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}.$$

Podemos considerar dos casos bien diferenciados, sistemas con una tasa de fallo decreciente o con una tasa de fallo creciente. Los denominaremos DHR e IHR respectivamente. Los primeros corresponden a sistemas que mejoran con el tiempo, y los segundos, con sistemas que se desgastan con el tiempo (que es lo mas frecuente).

De forma análoga, definiremos la tasa de fallo inversa, como $r(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$, donde F es la función de distribución de X. Análogamente, la tasa de fallo inversa puede ser decreciente (DRHR) o creciente (IRHR). La tasa de fallo inversa no tiene una interpretación tan intuitiva como la tasa de fallo, pero es una propiedad de forma de gran utilidad como veremos en los modelos de inventario.

Durante el capítulo relacionaremos estas propiedades que hemos mencionado con la log-concavidad o log-convexidad (concavidad o convexidad del logaritmo) de la función de densidad, probando las siguientes relaciones:

$$\begin{tikzcd}
densidad\ \ log-concava \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & IHR \\
DRHR & distribucion\ \ concava \arrow[l, Rightarrow] \\
densidad\ \ log-convexa \arrow[r, Rightarrow] & DHR \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

A continuación, en el tercer capítulo de este trabajo, introduciremos los órdenes estocásticos para realizar una comparación de variables aleatorias en un sentido probabilístico. La forma más sencilla de comparar dos distribuciones de probabilidad fijándonos en una característica de interés consiste en comparar alguna de las medidas asociadas a dicha característica. Sin embargo, si utilizamos este sistema podemos encontrarnos con tres inconvenientes. En primer lugar, una medida no puede contener toda la información acerca de la característica que estamos estudiando. Por ejemplo, la media no siempre es representativa de la distribución de probabilidad. En segundo lugar, el uso de medidas diferentes puede a veces conducir a conclusiones contradictorias. Por ejemplo, si queremos medir la variabilidad, nos podemos encontrar que distintos índices de dispersión dan lugar a distintas ordenaciones. Por último puede ocurrir que la medida que utilicemos no exista para la distribución de probabilidad comparada.

Por ello, para comparar variables aleatorias utilizaremos un método más general: los órdenes estocásticos. Un orden estocástico es una relación de orden parcial entre dos variables aleatorias, en una o más dimensiones, donde dicha relación dependerá de lo que pretendamos comparar. La teoría de las ordenaciones estocásticas comienza a adquirir peso dentro de la teoría de la probabilidad con el clásico libro de Hardy, Littlewood y Pólya (1934) sobre desigualdades. En las últimas décadas, el número de ordenaciones estocásticas ha crecido enormemente, aplicándose en áreas tan diversas como la estadística aplicada, la biología, la hidrología, la ingeniería, la fiabilidad de sistemas, las finanzas y la economía.

Como consecuencia, encontramos una vasta y exhaustiva literatura dedicada a este tema. Las referencias más importantes son los libros de Shaked y Shantikuman [12] y de Müller y Stoyan [7], donde, aparte de encontrar los resultados más importantes, podemos encontrar algunos capítulos adicionales en aplicaciones específicas de ordenes estocásticos en varios campos.

En nuestro trabajo vamos a definir y a relacionar distintos tipos de órdenes estocásticos. El primer candidato natural como orden estocástico es la comparación de las funciones de distribución de las variables aleatorias, que denominaremos orden estocástico usual. Diremos que la variable aleatoria X es más pequeña que la variable aleatoria Y respecto del orden estocástico usual (escrito como $X \leq_{st} Y$) si:

$$F_X(t) \geq F_Y(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

Como veremos, existen situaciones donde el órden estocástico usual no nos sirve para comparar variables aleatorias correctamente, por ejemplo cuando trabajamos con tiempos de vida. Para resolver este problema, introduciremos los órdenes de tasa de fallo y tasa de fallo inversa. De esta forma, diremos que la variable aleatoria X es más pequeña que la variable aleatoria Y respecto al orden de la tasa de fallo (escrito $X \leq_{hr} Y$), si la función

$$t \to \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}$$

es creciente. De forma análoga, diremos que la variable aleatoria x es más pequeña que Y respecto del orden de la tasa de fallo inversa (escrito $X \leq_{rh} Y$), si la función

$$t \leq \frac{F_Y(t)}{F_X(t)}$$

es creciente, o equivalentemente $F_Y(x)F_X(y) \leq F_X(y)F_Y(x)$ para $x \leq y$.

El orden de la tasa de fallo, al contrario que el orden estocástico usual, se conservará si trabajamos con el tiempo de vida residual, es decir, $X \leq_{hr} Y$ si y solo si $[X|X > t] \leq_{st} [Y|Y > t]$ para todo t real. Existen otras situaciones en las que queramos tener que $[X|X \in A] \leq_{st} [Y|Y \in A]$ para todos los sucesos posibles A. Este requisito nos conduce a definir el orden de razón de verosimilitudes. Así, diremos que la variable aleatoria Y es más grande que X por el orden de razón de verosimilitudes (escrito $X \leq_{lr} Y$), si X e Y tienen densidades respecto de alguna medida dominante μ verificando que

$$f_X(t)f_Y(s) \leq f_X(s)f_Y(t) \ \ \forall s \leq t$$

Durante este capítulo estudiaremos las propiedades más interesantes de los órdenes estocásticos que hemos mencionado, algunas de las cuales nos serán útiles en el cuarto capítulo.

En él, y para finalizar el trabajo, el objetivo que nos plantearemos será el de generalizar un resultado sobre modelos de inventario. Para ello utilizaremos los resultados obtenidos en los artículos de Rosling [10] y Badia y Sangüesa [1].

Los modelos de inventario son modelos matemáticos que se utilizan para describir cómo evoluciona en el tiempo la cantidad de producto almacenado, por ejemplo, en un almacén. Existen diferentes tipos de modelos de inventario; si atendemos a cuando se realiza un pedido podemos distinguir principalmente entre modelos de revisión periódica (si revisamos el inventario, por ejemplo, todos los lunes y solo podemos realizar un pedido de artículos ese día) o modelos de revisión continua (si podemos realizar el pedido en cualquier momento). Cuando realizamos un pedido, este se puede recibir en el momento, tras un periodo fijo, o tras un periodo aleatorio. El modelo que trataremos va a ser de revisión continua con un periodo de espera aleatorio y vendrá representado por un proceso de renovación (aunque en un principio por simplificar trabajemos con un periodo fijo). La demanda, además puede ser determinística (si la conocemos de antemano) o puede ser aleatoria. En este segundo caso, que es el que trataremos en este trabajo, es fácil que podamos llegar a una situación de escasez, en la que no tengamos artículos suficientes para satisfacer la demanda. Esta demanda la podemos perder o atrasarla (como es nuestro caso) para que se satisfaga tras el próximo envio.

Cada modelo de inventario suele tener definidos unos costes (coste por artículo almacenado, coste por envio no satisfecho, coste por envio retrasado, etc) siendo el objetivo principal minimizarlos. Existen diferentes políticas de inventario. Una de ellas (muy habitual) es la política (s,S). Esta política consiste en realizar un pedido cuando tengamos en el almacén un número de artículos menor que s, de forma que, entre los artículos restantes, y los artículos solicitados, superen el umbral que marca S.

Dado que en estos modelos podemos trabajar con condiciones muy diferentes, son muy útiles los resultados generales, que nos evitan tener que trabajar de forma completamente independiente cada modelo. Es claro que cuanto más general sea un resultado puede abarcar a un mayor número de modelos diferentes, por ello nuestro objetivo va a ser generalizar un resultado que aparece primero en el artículo de Rosling y, una generalización de él, en el artículo de Badía y Sangüesa. En dichos modelos, aparte de los costes habituales de almacenamiento y de demanda no satisfecha, se introducen dos términos adicionales de coste: uno cada vez que se produzca una nueva demanda no satisfecha (sin importar el tiempo que ésta pueda estar en espera) y otro que penaliza el tiempo que se está con demanda no satisfecha (sin importar la cantidad de dicha demanda). En un modelo donde se incluye este último término (pero no el primero) demostraremos que una política (s,S) es óptima cuando el tiempo entre demandas es IHR, el tiempo de espera es DRHR y $\Psi(.)$ es MCR; donde diremos que una función de distribución F no negativa tiene razón de convolución monótona (MCR) si satisface que $F^{*(n+1)}(x)/F^{*n}(x)$ es creciente en x para todo $n = 1,2,...$ donde F^{*n} denota la convolución de F consigo misma n veces.

Capítulo 2

Clases de fiabilidad

El ojetivo de este capítulo es describir una variable aleatoria en función de las propiedades de forma que verifican sus funciones asociadas (de distribución, de supervivencia y de densidad). Si dicha variable aleatoria es un tiempo de vida (de una máquina, por ejemplo) dichas propiedades nos describirán la forma que tiene de envejecer dicho mecanismo.

2.1. Conceptos previos

En primer lugar, vamos a recordar las definiciones básicas que necesitaremos para desarrollar este apartado.

Definición 2.1. *Sea (Ω, F, P) un espacio probabilístico y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria,*

a) Llamaremos función de distribución de X a la función F definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ como

$$F(x) = P\{X \leq x\}.$$

b) Llamaremos función de supervivencia de X a la función $\bar{F}$ definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$ como

$$\bar{F}(x) = P\{X > x\}.$$

c) Diremos que X es absolutamente contunua si existe una función medible $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ verificando

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dz \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A dicha función le llamaremos densidad de X o de F.

En segundo lugar, vamos a estudiar algunos resultados sobre concavidad y convexidad que utilizaremos durante el desarrollo de este capítulo. Diremos que una función ϕ es convexa si para cualesquiera dos puntos x e y y para todo $t \in [0, 1]$ se cumple que $\phi(tx + (1-t)y) \leq t\phi(x) + (1-t)\phi(y)$. Recordemos algunas propiedades de funciones convexas basándonos en el libro de Marsall y Olkin.

Proposición 2.2. *i) Sea I un intervalo, ϕ es convexa si y solo si:*

$$\phi(x + \Delta) - \phi(x)$$

es creciente en x para todo $\Delta > 0; x, x + \Delta \in I$.

ii) Sea $I = (a,b)$ un intervalo abierto, y ϕ diferenciable en (a,b), entonces ϕ es convexa si y solo si su derivada ϕ' es creciente en (a,b).

Proposición 2.3. *Sea ϕ una función finita y convexa definida en un intervalo abierto I de los reales. Entonces, ϕ es diferenciable, excepto posiblemente en un subconjunto contable de I. Además, ϕ' es continua y creciente en el subconjunto denso D de I donde ϕ es diferenciable.*

Definición 2.4. *Dada $\phi : I \to \mathbb{R}^+$, diremos que ϕ es log-convexa sobre I si y solo si se verifica que $log\phi$ es convexa (con $log(0)$ definido como $-\infty$) o, equivalentemente:*

$$\phi(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \phi(x)^\alpha \phi(y)^{1-\alpha} \quad \forall x,y \in I \ \ y \ \ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Si la desigualdad anterior se invierte, ϕ se dice log-cóncava.

Ahora recordemos algunas propiedades de las funciones cóncavas.

Proposición 2.5. *i) Si ϕ es una función positiva, convexa y extrictamente creciente definido en un intervalo (a,b) que puede ser infinito, entonces su función inversa ϕ^{-1} es estrictamente creciente y cóncava*

ii) Si ϕ es una función positiva y cóncava, entonces $log\phi$ es cóncavo.

Por último, vamos a definir el concepto de positividad total, y a enunciar algunas propiedades que utilizaremos durante el desarrollo del trabajo.

Definición 2.6. *Sean A,B subconjuntos de los números teales. Una función K definida en AxB se dira que es totalmente positiva de orden k si para todo $x_1 < ... < x_m$,$y_1 < ... < y_m$ $(x_i \in A, y_i \in B)$, y para todo m con $1 \leq m \leq k$:*

$$K\begin{pmatrix} x_1,...,x_m \\ y_1,...,y_m \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} K(x_1,y_1) & ... & K(x_1,y_m) \\ ... & & ... \\ K(x_m,y_1) & ... & K(x_m,y_m) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Diremos que K es estrictamente totalmente positiva si la desigualdad anterior es estricta.

Diremos que K es totalmente positiva de orden ∞ si es totalmente positiva para cualquier k.

Proposición 2.7. *La función $K(x,y) = f(y-x)$ con $-\infty < x,\ y < \infty$ es totalmente positiva de orden 2 si y solo si f es no negativa, y $logf$ es cóncavo en $(-\infty,\infty)$.*

Proposición 2.8. *La función $K(x,y) = f(y+x)$ con $0 < x,\ y < \infty$ es totalmente positiva de orden 2 en $x,y \geq 0$ si y solo si f es no negativa, y $logf$ es convexa en $[0,\infty)$.*

Ejemplo 2.9. i) La función indicadora $K(x,y) = 1$ si $x \leq y$, $K(x,y) = 0$ si $x > y$ con $-\infty < x,y < \infty$ es totalmente positiva de orden ∞.

ii) La función indicadora $K(x,y) = 0$ si $x < y$, $K(x,y) = 1$ si $x \geq y$ con $-\infty < x,y < \infty$ es totalmente positiva de orden ∞.

Lema 2.10. *Si σ es una medida finita y la integral $M(x,y) = \int K(x,z)L(z,y)d\sigma(z)$ converge absolutamente, entonces, con la notación de la definición 2.6:*

$$M\begin{pmatrix} x_1,...,x_m \\ y_1,...,y_m \end{pmatrix} = \int_{z_1<...<z_m} ... \int K\begin{pmatrix} x_1,...,x_m \\ z_1,...,z_m \end{pmatrix} L\begin{pmatrix} z_1,...,z_m \\ y_1,...,y_m \end{pmatrix} d\sigma(z_1)...d\sigma(z_m).$$

Demostración. Se puede ver una prueba de este resultado en Karlin [5] (1968, p. 17). □

Proposición 2.11. *Sea K totalmente positiva de orden m en AxB, y sea L totalmente positiva de orden n en BxC y sea* σ *una medida finita. Entonces*

$$M(x,y) = \int K(x,z)L(z,y)d\sigma(z)$$

es totalmente positiva de orden min$\{m,n\}$ *en AxC*

Demostración. Es una consecuencia directa del lema 2.10 □

2.2. Log-concavidad y Log-convexidad

Las densidades log-cóncavas y log-convexas tienen un papel muy importante, tanto porque presentan unas propiedades interesantes en fiablilidad, principalmente, como porque a menudo son fáciles de obtener. En este apartado vamos a introducir ambos conceptos, asi como a estudiar determinadas propiedades que requeriremos en el desarrollo de nuestro trabajo.

Definición 2.12. *Sea* F *una función de distribución absolutamente continua, con una distribución de densidad* f *asociada tal que la función* $logf$ *sea cóncava, entonces diremos que* F *tiene una densidad log-cóncava.*

Definición 2.13. *Sea* F *una función de distribución absolutamente continua, con una distribución de densidad* f *asociada tal que* $f(x) = 0\ \forall x < 0$ *y la función* $logf$ *sea convexa en el intervalo* $[0,\infty)$*, entonces diremos que* F *tiene una densidad log-convexa.*

En la observación 2.18 explicaremos la razón de requerir un intervalo disinto en el estudio de la log-convexidad.

Vamos a introducir algunos ejemplos sobre la log-concavidad y la log-convexidad.

Ejemplo 2.14. El logaritmo de muchas densidades conocidas es convexo o cóncavo.

i) La densidad normal es un conocido ejemplo de la densidad log-cóncava.

ii) Se puede ver que la función de densidad gamma $f(x|\lambda,\nu) = \lambda^{\nu}x^{\lambda-1}e^{-\lambda x}/\Gamma(\lambda)$, $x \geq 0$ es log-cóncava para $\nu \geq 1$ y log-convexa para $\nu \leq 1$.

iii) La densidad Weibull $f(x) = \alpha\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-(\lambda x)^{\alpha}}$, $x \geq 0$ es log-cóncava para $\alpha \geq 1$ y log-convexa para $\alpha \leq 1$.

Proposición 2.15. *Una densidad log-cóncava es unimodal, o sea, es no decreciente hasta un determinado punto y no creciente a partir de ese punto.*

Demostración. Para ver que una densidad es unimodal, es suficiente con ver que para una constante positiva c, $f(x) - c$ cambia de signo como mucho dos veces, y en el caso de tener dos cambios de signo, estos sean en el orden $-,+,-$. Notemos que f es unimodal si y solo si $logf$ es unimodal. Por ello, al ser $logf$ cóncava, esta propiedad de cambio de signo se va a cumplir. □

Proposición 2.16. *Si* f *es log-cóncava, entonces* $\bar{F}$ *y* F *son log-cóncavas. Si* f *es log-convexa en* $[0,\infty)$*, entonces* $\bar{F}$ *es logconvexa en* $[0,\infty)$*.*

Demostración. Supongamos primero que $logf$ es cóncava. Esta propiedad es equivalente por la proposición 2.7 a que $f(x-y)$ sea totalmente positiva de orden 2. Sea K la función indicadora del ejemplo 2.9 i): $K(y,z)=1$ si $y \leq z$ y $K(y,z)=0$ si $y>z$. Tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)K(y,z)dy = \int_{-\infty}^{z} f(x-y)dy = \int_{x-z}^{\infty} f(u)du = \bar{F}(x-z).$$

Dado que la función K es totalmente positiva, se sigue del teorema 2.11 que $\bar{F}(x-z)$ es totalmente positiva de orden 2 en x y z, esto es $\bar{F}$ es log-cóncava.

Probar que F es log-cóncava es análogo, utilizando la función K del ejemplo 2.9 ii) $K(y,z)=0$ si $y<z$, y $K(y,z)=1$ si $y \geq z$. El resultado que concierne a la log-convexidad tiene una prueba similar, pero utiliza el hecho de que la función indicadora anterior es totalmente positiva en las y y z no negativas, junto con la Proposición 2.8.

□

Proposición 2.17. *Si f es log-cóncava, entonces $r=f/\bar{F}$ es creciente, y $s=f/F$ es decreciente. Si f es log-convexa en $[0,\infty)$, entonces r es decreciente en $[0,\infty)$.*

Demostración. Si f es log-cóncava, entonces se sigue por la proposición 2.16 y 2.16 que $log\bar{F}$ y $logF$ tienen derivadas decrecientes. Esto es equivalente a la condición de que r es creciente y que s es decreciente. La prueba en el caso de f log-convexa en $[0,\infty)$ es similar.

□

A r y s las llamaremos tasa de fallo y tasa de fallo inversa respectivamente. Hablaremos de ellas en la siguiente sección, puesto que tienen gran importancia en fiabilidad.

Observación 2.18. *i) El tratamiento de la log-concavidad y la log-convexidad difiere en que la log-concavidad se requerirá en todo el conjunto $\mathbb{R}$. Si $log\psi$es cóncava en $[0,\infty)$ y $\psi(x)=0$ para $x<0$, entonces dado que $log0=-\infty$ y que $-\infty+x=-\infty$, para todo real x se sigue que $log\psi$ es cóncava en $(-\infty,\infty)$. No se puede decir lo mismo de la log-convexidad.*

ii) De acuerdo con la proposición 2.17, si $logf$ es convexo en $[0,\infty)$, entonces r es decreciente en $[0,\infty)$ y como consecuencia, la densidad es decreciente en $[0,\infty)$, dado que $f=r\bar{F}$. Dado que la integral de la densidad sobre los reales es 1, la densidad no puede ser decreciente en toda la recta real. Por ello, no podemos considerar la log-convexidad de la densidad en toda la recta real y debemos considerar la log-convexidad de una densidad como su log-convexidad en el intervalo $[0,\infty)$, a no ser que se especifique otro.

Proposición 2.19. *Si $f(x)=0$, $x<0$ y $logf$ es convexa en $[0,\infty)$, entonces $logF$ es cóncava en $(-\infty,\infty)$.*

Demostración. Bajo la hipótesis sobre f, se sigue por la observación 2.18 ii) que f es decreciente. Esto significa que F es cóncava en $[0,\infty)$, y entonces, por la proposición 2.5, F es log-cóncava en $[0,\infty)$. La extensión de la log-concavidad en $(-\infty,\infty)$ viene explicada en la observación 2.18 i)

□

2.3. Tasas de fallo monótonas

En este apartado vamos a introducir el concepto de tasa de fallo, asi como los conceptos asociados a su monotonía, la tasa de fallo creciente y decreciente.

Definición 2.20. *Sea F una función de distribución, llamaremos función de fallo a la función R definida en* $(-\infty,\infty)$ *por:*

$$R(x) = -log\bar{F}(x)$$

Definición 2.21. *Si F es una función de distribución absolutamente continua, con densidad f, entonces llamaremos tasa de fallo de F a la función r definida en* $(-\infty,\infty)$ *como:*

$$r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}, \ \ si \ \ \bar{F}(x) > 0$$

$$r(x) = \infty \ \ si \ \ \bar{F}(x) = 0$$

Podemos pensar $\Delta r(x)$ como la probabilidad condicional, dada una supervivencia hasta el momento x, de morir o de fallar en el siguiente intervalo pequeño de tiempo Δ. Esto es

$$r(x) = lim_{\Delta\to 0}\frac{P(X \leq x+\Delta|X > x)}{\Delta} = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}.$$

Utilizando la definición anterior, el concepto de ”tasa de fallo monótona” implicaría la monotonía de la función $r = f/\bar{F}$. Así pues, cuando X representa el tiempo de vida de un sistema (una máquina, por ejemplo), si la tasa de fallo es decreciente esto nos indicaría que el sistema se deteriora con el tiempo (cuanto mas tiempo lleva con vida, mas pausible es que falle), mientras que si la tasa de fallo es creciente esto significa que el sistema mejora con la edad.

El problema de utilizar esta definición vendría dado en que requeriríamos de la existencia de la densidad f. Por ello utilizaremos una definición análoga, aunque menos intuitiva, que nos solucione este problema. Para introducirla, seguiremos un procedimiento análogo a la log-convexidad y log-concavidad. Para la tasa de fallo creciente, consideraremos que X puede ser una variable aleatoria general, pero para la tasa de fallo decreciente nos restringiremos a variables aleatorias no negativas.

Definición 2.22. *Sea F una función de distribución. Entonces se dice que F tiene una tasa de fallo creciente si para todo* $x \geq 0$ *y para toda t tal que* $F(t) < 1$,

$$\frac{[F(t+x)-F(t)]}{1-F(t)} = \frac{[\bar{F}(t)-\bar{F}(t+x)]}{\bar{F}(t)}$$

es creciente.

Se dice que F tiene una tasa de fallo decreciente si $F(0-) = 0$ *y la función anterior es decreciente*

Utilizando sus siglas en ingles, diremos que una función F es IHR si tiene una tasa de riesgo creciente. De forma análoga, diremos que es DHR si tiene una tasa de fallo decreciente.

A continuación vamos a estudiar una serie de resultados que nos presentarán condiciones equivalentes a nuestras definiciones de tasas de riesgo creciente y decreciente. En concreto la proposición 2.27 nos demuestra la equivalencia de la definición 2.22 con la definición 2.21 para variables absolutamente continuas. Para ello, en primer lugar necesitaremos comentar algunas características de la distribución de la vida residual F_t.

Definición 2.23. *Sea F una función de distribución tal que* $F(0) = 0$. *La distribución de la vida residual* F_t *de F en t se define para todo* $t \geq 0$ *tal que* $\bar{F}(t) > 0$ *como:*

$$\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}, \ \ x \geq 0.$$

Claramente, la función de vida residual F_t es una distribución condicional de la vida restante dada una supervivencia hasta el momento t ya que $\bar{F}_t(x) = P(X > x+t|X > t)$.

Observación 2.24. *Si F tiene una densidad f, entonces F_t tiene una densidad f_t y una tasa de fallo r_t dadas por:*

$$f_t(x) = \frac{f(x+t)}{\bar{F}(t)}, \quad x \geq 0,$$

$$r_t(x) = \frac{f(x+t)}{\bar{F}(x+t)} = r(x+t), \quad x \geq 0.$$

A continuación presentaremos las condiciones equivalentes a las definiciones de tasas de fallo creciente y decreciente.

Proposición 2.25. *Una distribución F tiene una tasa de fallo creciente (o decreciente) si y solo si para toda t tal que $\bar{F}(t) > 0$,*

$$\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)}$$

es decreciente (respectivamente creciente) en t para todo $x \geq 0$.

Demostración. Para todo $x \geq 0$ y todo t tal que $F(t) < 1$,

$$\frac{\bar{F}(t) - \bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} = 1 - \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \tag{1}$$

es creciente en t si y solo si $\bar{F}(t+x)/\bar{F}(t)$ es decreciente.

□

De esta forma, las variables IHR (DHR) se caracterizan por tener tiempo de vida residual decreciente (creciente). Esta propiedad está estrechamente relacionada con la logconcavidad o logconvexidad de $\bar{F}$. Es decir:

Proposición 2.26. *Si F es una distribución, entonces F tiene una tasa de fallo creciente (o decreciente) si y solo si la función de fallo $R = -log\bar{F}$ es convexa donde es finita (respectivamente cóncava en $[0,\infty)$).*

Demostración. Para todo t tal que $F(t) < 1$, (1) se cumple si y solo si $log\bar{F}(t+x) - log\bar{F}(t)$ es decreciente en los t tales que $\bar{F}(t) > 0$. De acuerdo con la proposición 2.2 i), esto es equivalente a la concavidad del $log\bar{F}$. Pero esto significa que $R = -log\bar{F}$ es convexa. La prueba para el caso de una tasa de fallo decreciente es similar. □

Proposición 2.27. *Supongamos que F tiene una densidad. Entonces F tiene una tasa de fallo creciente (decreciente) si y solo si existe una versión f de su densidad tal que su correspondiente tasa de fallo $r = f/\bar{F}$ es creciente (decreciente en $[0,\infty)$).*

Demostración. Este resultado se sigue de la proposición 2.26 diferenciando $R = -log\bar{F}$ y usando 2.2 ii), que establece que una fución diferenciable es convexa si y solo si su derivada es creciente. □

Proposición 2.28. *Una distribución F tiene tasa de fallo creciente (decreciente) si y solo si para todo $x \geq 0$ y para todo t tal que $\bar{F}(x+t) > 0$ su odds ratio $\Phi_t^-(x) = [F(x+t) - F(t)]/[\bar{F}(x+t)]$ de la distribución F_t de la vida residual es creciente (decreciente) en t.*

Demostración. Se sigue por la proposición 2.25 que F tiene tasa de fallo creciente (decreciente) si y solo si $\bar{F}_t(x)$ es creciente (decreciente) en t. □

Proposición 2.29. *La función de distribución F tiene una tasa de fallo creciente si y solo si el determinante*

$$\begin{vmatrix} \bar{F}(t_1 - s_1) & \bar{F}(t_1 - s_2) \\ \bar{F}(t_2 - s_1) & \bar{F}(t_2 - s_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

donde $s_1 \leq s_2$, $t_1 \leq t_2$

La función de distribución F tiene una tasa de fallo decreciente si y solo si el soporte de F es $[0,\infty)$ *y el determinante*

$$\begin{vmatrix} \bar{F}(t_1 + s_1) & \bar{F}(t_1 + s_2) \\ \bar{F}(t_2 + s_1) & \bar{F}(t_2 + s_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

donde $s_1 \leq s_2$, $t_1 \leq t_2$ *y* $s_1 + t_1 \geq 0$.

Demostración. Es una consecuencia de 2.28. □

El siguiente resultado nos servirá para estudiar una propiedad de una distribución con una tasa de fallo creciente.

Proposición 2.30. *Si F tiene una tasa de fallo creciente, entonces F tiene densidad, excepto posiblemente en el extremo derecho de su soporte, donde puede tener masa positiva.*

Demostración. Es una consecuencia de la definición de log concavidad. Si $\bar{F}$ es log-cóncava sólo puede tener discontinuidad en el momento en el que se hace 0. □

El teorema que presentaremos a continuación demuestra que la clase de las distribuciones con tasas de fallo crecientes es cerrada bajo la convolución.

Teorema 2.31. *Si F y G tienen tasas de fallo crecientes, entonces la convolución* $H = F * G$ *tiene una tasa de fallo creciente.*

Demostración. Supongamos que F tiene una densidad f y G tiene una densidad g. Recordemos que por la proposición 2.29 la condición de una tasa de fallo creciente se puede escribir en términos de un determinante. Para $t_1 < t_2$ y $u_1 < u_2$, formamos el determinante

$$D = \begin{vmatrix} \bar{H}(t_1 - u_1) & \bar{H}(t_1 - u_2) \\ \bar{H}(t_2 - u_1) & \bar{H}(t_2 - u_2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \int \bar{F}(t_1 - s)g(s - u_1)ds & \int \bar{F}(t_1 - s)g(s - u_2)ds \\ \int \bar{F}(t_2 - s)g(s - u_1)ds & \int \bar{F}(t_2 - s)g(s - u_2)ds \end{vmatrix}$$

$$= \int\int_{s_1 < s_2} \begin{vmatrix} \bar{F}(t_1 - s_1) & \bar{F}(t_1 - s_2) \\ \bar{F}(t_2 - s_1) & \bar{F}(t_2 - s_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g(s_1 - u_1) & g(s_1 - u_2) \\ g(s_2 - u_1) & g(s_2 - u_2) \end{vmatrix} ds_2 ds_1$$

La última igualdad es una aplicación de la fórmula de composición 2.10. Ahora, integrando el interior por partes, obtenemos:

$$D = \int\int_{s_1<s_2} \begin{vmatrix} \bar{F}(t_1-s_1) & f(t_1-s_2) \\ \bar{F}(t_2-s_1) & f(t_2-s_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g(s_1-u_1) & g(s_1-u_2) \\ \bar{G}(s_2-u_1) & \bar{G}(s_2-u_2) \end{vmatrix} ds_2 ds_1$$

El signo del primer determinante es el mismo que el de

$$\frac{f(t_2-s_2)\bar{F}(t_2-s_2)}{\bar{F}(t_2-s_2)\bar{F}(t_2-s_1)} - \frac{f(t_1-s_2)\bar{F}(t_1-s_2)}{\bar{F}(t_1-s_2)\bar{F}(t_1-s_1)}$$

asumiendo que los denominadores son distintos de cero. Pero

$$\frac{f(t_2-s_2)}{\bar{F}(t_2-s_2)} \geq \frac{f(t_1-s_2)}{\bar{F}(t_1-s_2)}$$

por hipótesis, y

$$\frac{\bar{F}(t_2-s_2)}{\bar{F}(t_2-s_1)} \geq \frac{\bar{F}(t_1-s_2)}{\bar{F}(t_1-s_1)}$$

por la proposición 2.29. Entonces el primer determinante es no negativo. Podemos aplicar un argumento similar para ver que el segundo determinante también es no negativo, por lo que $D \geq 0$. Por la proposición 2.29, se puede ver que H tiene una tasa de riesgo creciente.

Si las densidades f o g no existen, se necesita un argumento límite para completar la prueba.

□

Recordemos que si X e Y son variables independientes con distribuciones respectivas F y G, entonces $F*G$ es la función de distribución de $X+Y$. Por lo tanto, la anterior proposición nos indica que la propiedad IHR se preserva bajo sumas de variables independientes.

El siguiente resultado va a ser muy importante durante el desarrollo de este trabajo, dado que necesitaremos utilizarlo más adelante.

Proposición 2.32. *Suponer que F tiene una tasa de riesgo creciente, y un momento de orden 1 μ. Entonces, la distribución con densidad $f_{(1)}(x) = \bar{F}(x)/\mu, x \leq 0$, tiene una tasa de fallo creciente*

Demostración. De acuerdo con la proposición 2.26, la distribución F tiene una tasa de fallo creciente si y solo si $log\bar{F}$ es cóncava, lo que es equivalente a decir que $log f_{(1)}(x)$ es cóncava. Por la proposición 2.16, esto significa que $\log\bar{F}_{(1)}(x)$ es cóncava, esto es, $\bar{F}_{(1)}$ tiene una tasa de fallo creciente. □

Llamaremos distribución de equilibrio a una variable aleatoria con dicha densidad.

El siguiente resultado nos servirá para estudiar una propiedad de una distribución con una tasa de fallo decreciente

Proposición 2.33. *Suponer que $F(0-) = 0$ y que F tiene una tasa de riesgo decreciente. Entonces F tiene densidad, excepto posiblemente para una masa positiva en el origen. Existe una versión de f cuya densidad es decreciente y satisface $f(x) > 0$ $\forall x > 0$.*

Demostración. Una distribución F tiene una tasa de fallo decreciente cuando $R = -log\bar{F}$ es cóncavo en $[0,\infty)$. Consecuentemente R tiene una derivada continua, excepto para un conjunto de puntos contable (proposición 2.3). Cuando esta derivada $f = F'$ exista, será su densidad. En caso contrario, la densidad puede definirse por continuidad a derecha, por ejemplo. Esto significa que $R' = f/\bar{F}$ es decreciente (proposición 2.3), y consecuentemente, f es decreciente.

Si hubiese un punto $a < \infty$ tal que $\bar{F}(a) = 0$, entonces $R(a) = \infty$ y la concavidad de R no podría ser cierta porque $R(y) < \infty$ si $y < a$. Además, si existe un punto $b > 0$ tal que $\bar{F}(b) = 1$, entonces $R(b) = 0$, y de nuevo la concavidad de R no puede ser cierta a no ser que $R(x) = 0$, $\forall x > 0$, pero entonces F no es una función de distribución. □

2.4. Tasas inversas de fallo

Definición 2.34. *Sea F una función de distribución, llamaremos función de fallo inversa a la función S definida en $(-\infty, \infty)$ por:*

$$S(x) = logF(x)$$

Definición 2.35. *Si F es una función de distribución absolutamente continua, con densidad f, entonces llamaremos tasa de fallo inversa de F a la función s definida en $(-\infty, \infty)$ como:*

$$s(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$$

Definición 2.36. *Una distribución F se dice que tiene una tasa inversa de fallo decreciente (DRHR) si la función de fallo inversa correspondiente $S(x) = logF(x)$ es cóncava. De forma análoga, se dice que F tiene una tasa inversa de fallo creciente (IRHR) si $S(x)$ es convexa donde es finita.*

De modo análogo a la proposición 2.29 podemos deducir lo siguiente:

Proposición 2.37. *La función de distribución F tiene una tasa de fallo inversa decreciente si y solo si el determinante*

$$\begin{vmatrix} F(t_1 - s_1) & F(t_1 - s_2) \\ F(t_2 - s_1) & F(t_2 - s_2) \end{vmatrix} \geq 0$$

donde $s_1 \leq s_2$, $t_1 \leq t_2$

Además, la propiedad DRHR también se preserva bajo convolución.

Proposición 2.38. *Si F y G son DRHR, entonces la convolución $H = F * G$ es DRHR.*

Demostración. Este resultado puede obtenerse del teorema 2.31 y de la observación de que la tasa inversa de fallo de una variable aleatoria X puede identificarse con la tasa de fallo de $-X$. □

Tanto las distribuciones absolutamente continuas con función de densidad log-cóncava así como las definidas en $[0, \infty)$ con función de densidad log-convexa son DRHR (por las proposiciones 2.16, 2.19). Por otra parte, las distribuciones con función de densidad log-cóncava son IHR (proposición 2.16) y las definidas en $[0, \infty)$ con función de densidad log-convexa son DHR.

2.5. Resumen de las relaciones

A continuación vamos a presentar un esquema donde resumamos las relaciones que hemos establecido en este capítulo

$$\begin{tikzcd}
densidad\ \ log-concava \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & IHR \\
DRHR & & distribucion\ \ concava \arrow[ll, Rightarrow] \\
densidad\ \ log-convexa \arrow[rr, Rightarrow] & & DHR \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Capítulo 3

Ordenes estocásticos univariantes

3.1. Orden parcial

Las relaciones estocásticas de orden son casos especiales de relaciones de orden parciales. Por ello, comenzaremos con la definición de orden parcial.

Definición 3.1. *Llamaremos orden parcial a una relación binaria $\leq$ en un conjunto arbitrario S que satisfaga las siguientes condiciones:*

i) Propiedad reflexiva: $x \leq x \; \forall x \in S$;

ii) Propiedad transitiva: si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$;

iii) Propiedad antisimétrica: si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.

En ocasiones conviene escribir $y \geq x$ de forma equivalente a $x \leq y$.

Observación 3.2. *Los órdenes estocásticos de variables aleatorias las definiremos por medio de sus distribuciones. Así es posible que existan variables aleatorias diferentes con la misma distribución, por lo que la relación $\leq$ cumpla la propiedad antisimétrica si atendemos a las distribuciones, pero no necesariamente si atendemos a las variables aleatorias.*

3.2. Orden estocástico usual

El candidato natural como orden estocástico es la comparación de las funciones de distribuciones de las variables aleatorias. Si $F_X(t) \geq F_Y(t)$ para todo t real, entonces X toma valores pequeños con una probabilidad más alta que Y, y toma valores grandes con una probabilidad más pequeña que Y. Esto nos permite definir una relación de orden que nos compara las variables aleatorias.

Definición 3.3. *Se dice que la variable aleatoria X es más pequeña que la variable aleatoria Y respecto del orden estocástico usual (escrito como $X \leq_{st} Y$) si:*

$$F_X(t) \geq F_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

o, equivalentemente, si

$$\bar{F}_X(t) \leq \bar{F}_y(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observación 3.4. *A primera vista puede parecer anti intuitivo decir que $X \leq_{st} Y$ si $F_X(t) \geq F_Y(t)$ para todo t real. Por otra parte, es claro que nosotros podemos decir que Y es más grande estocásticamente que X si toma los valores más grandes con mayor probabilidad. Pero la función de distribución describe la probabilidad de tomar valores pequeños, de ahí el cambio en el signo de la desigualdad.*

De la misma forma, $\leq_{st}$ puede se considerada una generalización del orden $\leq$ en el eje de los reales, ya que para a y b números reales tenemos que $a \leq b$ implica $a \leq_{st} b$ si consideramos a y b variables aleatorias degeneradas. En otras palabras $a \leq b$ implica $\delta_a \leq_{st} \delta_b$ para las correspondientes distribuciones de un único punto.

El siguiente teorema nos permite ver que $\leq_{st}$ está estrechamente relacionado con la comparación de variables aleatorias.

Teorema 3.5. *Sean X e Y variables aleatorias con funciones de distribución F_X y F_Y, las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $X \leq_{st} Y$;

ii) *Existe un espacio de probabilidad (Ω, F, P) y unas variables aleatorias $\hat{X}$ y $\hat{Y}$ con funciones de distribución F_X y F_Y tal que $\hat{X}(\omega) \leq \hat{Y}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.*

Demostración. $(i) \implies (ii)$ Denotamos como

$$F^{-1}(u) = inf\{x : F(x) \geq u\} \;\; para \;\; 0 < u < 1$$

la función de distribución inversa (también llamada función cuantil) correspondiente con la función de distribución F. Sea U una variable aleatoria uniformemente distribuida en $(0,1)$ y definimos $\hat{X} = F_X^{-1}(U)$ y $\hat{Y} = F_Y^{-1}(U)$. Entonces $\hat{X}$ tiene función de distribución F_X e $\hat{Y}$ tiene función de distribución F_Y. Por (i) $F_X \geq F_Y$ y por lo tanto $F_X^{-1} \leq F_Y^{-1}$. Finalmente, $\hat{X} \leq \hat{Y}$.

$(ii) \implies (i)$ Es obvio. □

Observación 3.6. *Un candidato natural como orden parcial consiste en comparar el tamaño de las variables aleatorias con la relación $X \leq_{c.s.} Y$, que se tiene si y solo si $X(\omega) \leq Y(\omega)$ para casi todo ω. Esta relación, sin embargo, no solo depende de las distribuciones. Es facil de comprobarlo dado que siempre se tiene que $X \leq_{c.s.} X$, en cambio $X \leq_{c.s.} Y$ no se cumple si X e Y son independientes e idénticamente distribuidas con la misma distribución no degenerada. Por lo tanto, la definición de $\leq_{st}$ es mucho mas útil. Además, por el teorema 3.5, es el orden más fuerte para las distribuciones con la propiedad de que $X \leq Y$ implica que $F_X \leq F_Y$.*

Teorema 3.7. *Las siguientes condiciones son equivalentes*

i) $X \leq_{st} Y$;

ii) *la desigualdad $Ef(X) \leq Ef(Y)$ se tiene para todas las funciones crecientes f tales que ambas esperanzas existan.*

Además, si para una función f la desigualdad anterior se cumple para todo X e Y tales que $X \leq_{st} Y$, entonces f debe ser creciente.

Demostración. $(i) \implies (ii)$ Por el teorema 3.5 podemos asumir sin pérdida de la generalidad que $X \leq Y$ casi seguramente (c.s.). Entonces, si f es creciente, $f(X) \leq f(Y)$ c.s., y por lo tanto $Ef(X) \leq Ef(Y)$ por la monotonía de las esperenzas.

$(ii) \implies (i)$ Se sigue inmediatamente de la observación de que $P(X > t) = Ef_t(X)$ para la función indicador:

$$f_t(x) = 1_{(t,\infty)}(x) = \begin{cases} 1 & para \;\; x > t \\ 0 & en \;\; otro \;\; caso \end{cases}$$

que obviamente es creciente.

Para demostrar la última afirmación, sea f no creciente, entonces existen $x \leq y$ con $f(x) > f(y)$, y sea $P(X = x) = P(Y = y) = 1$. Entonces $X \leq_{st} Y$, pero $Ef(X) > Ef(Y)$.

□

El orden estocástico $\leq_{st}$ tiene muchas propiedades interesantes. En este primer resultado, veremos que implica ordenar las esperanzas y que diferentes distribuciones con la misma esperanza no pueden ser ordenadas respecto de $\leq_{st}$.

Teorema 3.8. *Sean X e Y variables aleatorias con esperanzas finitas.*

a) Si $X \leq_{st} Y$, entonces $EX \leq EY$.

b) Si $X \leq_{st} Y$ y $EX = EY$, entonces X e Y tienen la misma distribución.

Demostración. a) Se sigue por el teorema 3.7 usando $f(x) = x$

b) Con la siguiente representación de la esperanza (Billingsley[4])

$$EX = \int_0^\infty [1 - F_X(t)]dt - \int_{-\infty}^0 F_X(t)dt$$

obtenemos que

$$EY - EX = \int_{-\infty}^\infty [F_X(t) - F_Y(t)]dt$$

.

Si $X \leq_{st} Y$ y $EX = EY$, entonces la parte izquierda de la expresión anterior desaparece y la parte derecha es una integral de una función continua a derecha y no negativa. Esto únicamente es posible si esta función también es cero. Por ello $F_X = F_Y$.

□

Observación 3.9. *Para personas con menos conocimientos matemáticos, existe un orden más natural que el orden estocástico usual, a veces llamado orden de los ingenieros, que simplemente se basa en la comparación de medias. Se dice que la variable aleatoria X es más pequeña que Y en media (escrito $X \leq_\mu Y$) si $EX \leq EY$.*

El teorema 3.8 a) establece que el orden estocástico usual implica el orden en medias.

La parte a) del teorema 3.8 se puede generalizar a la comparación de momentos más grandes. El siguiente resultado se sigue fácilmente del teorema 3.5

Teorema 3.10. *Si $X \leq_{st} Y$, entonces $EX^n \leq EY^n$ para $n = 1,3,5,...$ siempre que estas esperanzas existan. Además, si X e Y son no negativas, entonces $EX^n \leq EY^n$ para todo n.*

Teorema 3.11. *Si $X \leq_{st} Y$, entonces $f(X) \leq_{st} f(Y)$ para todas las funciones crecientes f.*

Teorema 3.12. *La relación de orden estocástico $\leq_{st}$ es cerrada respecto de la convergencia debil, es decir, si $F_n \leq_{st} G_n$ para todo n y las sucesiones (F_n) y (G_n) convergen débilmente a F y G, entonces $F \leq_{st} G$.*

Demostración. Ya que $F_n(t) \geq G_n(t)$ para todo t real, la convergencia débil implica que $F(t) \geq G(t)$, si t es un punto de continuidad de F y G. Dado que el conjunto de puntos de discontinuidad de F y G es contable, los puntos continuos son densos en $\mathbb{R}$. Entonces $F(t) \geq G(t)$ se tiene que cumplir para todo t real, dado que las funciones de distribución son continuas a derecha.

□

Otra propiedad importante de la relación de orden estocástica es que es cerrada bajo las mixturas. Vamos a ver a continuación que tiene esa propiedad.

Teorema 3.13. *El orden estocástico usual es cerrado bajo mixturas, esto es, si X, Y y Θ son variables aleatorias tal que $[X|\Theta = \theta] \leq_{st} [Y|\Theta = \theta]$ para toda θ en el soporte de Θ, entonces $X \leq_{st} Y$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema 3.8 ya que para una función creciente f

$$Ef(X) = E_\Theta E[f(X)|\Theta] \leq E_\Theta E[f(Y)|\Theta] = Ef(Y)$$

.

□

Teorema 3.14. *Sean $X_1,...,X_n$ y $Y_1,...,Y_n$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \leq_{st} Y_i$ para $i = 1,...,n$ y $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función creciente. Entonces*

$$\psi(X_1,...,X_n) \leq_{st} \psi(Y_1,...,Y_n).$$

Demostración. Utilizaremos el teorema 3.8 y procederemos por inducción.

Para $n = 1$ es fácil ver que $Ef(\psi(X_1)) \leq Ef(\psi(Y_1))$ para toda función creciente f, dado que la composición de dos funciones crecientes también es creciente. Ahora supongamos que es cierto para $n-1$. Vamos a definir $g(x) = Ef(\psi(X_1,...,X_{n-1},x))$ y $h(x) = Ef(\psi(Y_1,...,Y_{n-1},x))$ para todo real x. De acuerdo con la hipótesis de inducción, $g(x) \leq h(x)$ para todo x real, y entonces g y h son funciones crecientes, dado que f y ψ son crecientes. Esto significa que

$$Ef(\psi(X_1,...,X_n)) = Eg(X_n) \leq Eh(X_n) \leq Eh(Y_n) = Ef(\psi(Y_1,...,Y_n))$$

y por lo tanto $\psi(X_1,...,X_n) \leq_{st} \psi(Y_1,...,Y_n)$.

□

Tomando el teorema anterior para el caso particular $\psi(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ tenemos que $\leq_{st}$ se preserva bajo convolución, esto es, bajo la suma de variables aleatorias independientes.

Teorema 3.15. *Sea $X_1,...,X_n$ y $Y_1,...,Y_n$ variables aleatorias independientes tales que $X_i \leq_{st} Y_i$ para $i = 1,...,n$. Entonces*

$$X_1 + ... + X_n \leq_{st} Y_1 + ...Y_n.$$

3.3. Ordenes de tasa de fallo y tasa de fallo inversa

Hay muchas situaciones donde conceptos mas fuertes que el orden estocástico usual son necesarios y útiles. Consideremos la situación de alguien que quiere comprar un coche y tiene que elegir entre dos tipos con diferentes tiempos de vida aleatorios X e Y. Por supuesto, si $X \leq_{st} Y$ y el precio es el mismo, elegirá el segundo tipo. Pero pensemos ahora en que va a comprar un coche de segunda mano de un año, con tiempos de vida restante X' e Y', donde $P(X' > t) = P(X > 1+t|X > 1)$ y $P(Y' > t) = P(Y > 1+t|Y > 1)$. ¿Sigue siendo mejor el segundo tipo que el primero?, esto es, ¿$X' \leq_{st} Y'$?. En el siguiente ejemplo vamos a ver que no es necesariamente cierto

Ejemplo 3.16. ($X \leq_{st} Y$ no se preserva bajo envejecimiento.) Supongamos que X es una función uniforme en $(0,3)$ y que Y tiene la densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{3} & 2 < x < 3 \end{cases}$$

(definida como antes)

Entonces $X \leq_{st} Y$. Pero X' es uniformemente distribuida en $(0,2)$ y Y' tiene una densidad

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{5} & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{5} & 1 < x < 2 \end{cases}$$

por lo que $X' \geq_{st} Y'$.

Así nos tenemos que plantear la siguiente cuestión: ¿qué condiciones que son necesarias para tener el orden estocástico usual para todos los coches de segundo mano de una edad t?, esto es, ¿Cuándo se tiene que $[X|X > t] \leq_{st} [Y|Y > t]$ para todo t?

Utilizando la definición de $\leq_{st}$, la desigualdad anterior se puede reescribir como

$$P(X > s+t|X > t) \leq P(Y > s+t|Y > t)$$

para todo $s \geq 0$ y todo t. Esta equivalente a la siguiente desigualdad

$$\frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)} \leq \frac{\bar{F}_Y(s+t)}{\bar{F}_X(s+t)}$$

para todo $s \geq 0$ y todo t. Esta es la razón para establecer la siguiente definición.

Definición 3.17. *Se dice que la variable aleatoria X es más pequeña que la variable aleatoria Y respecto al orden de la tasa de fallo (escrito $X \leq_{hr} Y$), si la función*

$$t \to \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}$$

es creciente.

Nota 3.18. *Para evitar dividir por 0, el orden hr también se puede definir mediante la expresión $\bar{F}_Y(x)\bar{F}_X(y) \geq \bar{F}_Y(y)\bar{F}_X(x)$ para $x \leq y$.*

El nombre de este orden es debido al hecho de que, suponiendo la existencia de densidades continuas, y entonces, de las tasas de fallo, es equivalente la caracterización en términos de comparación puntual de las llamadas tasas de fallo.

Recordemos que la tasa de fallo $r_X(t)$ es la tasa infinitesimal de fallo en el tiempo t, esto es

$$r_X(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P(X \leq t + \varepsilon | X > t)}{\varepsilon} = \frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)} = -\frac{d}{dt} ln(\bar{F}_X(t))$$

para $\bar{F}_X(t) > 0$.

Teorema 3.19. *Si X e Y tiene densidades continuas, entonces $X \leq_{hr} Y$ es equivalente a $r_X(t) \geq r_Y(t)$ para todo real t.*

Demostración. $\bar{F}_Y(t)/\bar{F}_X(t)$ es creciente si y solo si

$$ln(\frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_X(t)}) = ln(\bar{F}_Y(t)) - ln(\bar{F}_X(t))$$

es creciente. Ya que $r_X(t) = -d/dt ln(\bar{F}_X(t))$, el resultado se sigue del hecho de que una función diferenciable es creciente si y solo si su derivada es no negativa.

□

Puede parecer más natural usar la caracterización del teorema anterior que la definición, pero esta tiene la ventaja de que no depende de la existencia de las densidades. Por tanto la podemos aplicar también a distribuciones discretas e incluso a mixturas de distribuciones discretas y continuas. Al igual que el orden usual, el orden hr se preserva bajo convergencia.

Teorema 3.20. *El orden de la tasa de fallo es cerrado respecto de la convergencia debil.*

Demostración. Sea (F_n) y (G_n) sucesiones de funciones de distribución que convergen en distribución a las funciones de distribución F y G respectivamente. Además, supongamos que $F_n \leq_{hr} G_n$ para todo n. Entonces $h_n(t) = \bar{G}_n(t)/\bar{F}_n(t)$ forman una sucesión de funciones continuas a derecha crecientes, que convergen a la función $h(t) = \bar{G}(t)/\bar{F}(t)$ en todo t donde F y G son continuas. Dado que esos puntos son densos y h es continua a derecha, h debe de ser creciente.

□

Como las funciones de distribución continuas son densas en el conjunto de todas las funciones de distribución, por el resultado previo siempre se puede considerar distribuciones con densidades para extraer resultados sobre el orden de la tasa de fallo. De hecho, esto revela que el orden de la tasa de fallo se podría definir alternativamente de la siguiente manera:

Primero la definiremos para distribuciones continuas utilizando la caracterización del teorema 3.19, y después, por la clausura respecto de la convergencia débil, extenderemos la definición a distribuciones arbitrarias.

Hay propiedades que se pierden al pasar del orden estocástico a órdenes más fuertes. Desafortunadamente, el orden de la tasa de fallo no es cerrado respecto de la convolución ni de las mixturas, como se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.21. ($X \leq_{hr} Y$ no implica $X+Z \leq_{hr} Y+Z$.) Sea X uniformemente distribuida en el intervalo $(0,3)$ e Y uniformemente distribuida en $(0,4)$. Entonces $X \leq_{hr} Y$. Supongamos ahora que Z es independiente de X e Y con $P(Z=0)=P(Z=3)=1/2$. Entonces

$$\frac{\bar{F}_{Y+Z}(3)}{\bar{F}_{X+Z}(3)} = \frac{5}{4} > \frac{9}{8} = \frac{\bar{F}_{Y+Z}(4)}{\bar{F}_{X+Z}(4)}.$$

Entonces $X+Z \nleq_{hr} Y+Z$. Estas variables aleatorias también nos sirven de contraejemplo para ver que el orden de la tasa de fallo no es cerrado bajo mixturas, dado que las distribuciones de $X+Z$ y $Y+Z$ son mixturas de las distribuciones de X y $X+3$; e Y e $Y+3$, y por lo que hemos visto $X+3 \nleq_{hr} Y+3$.

Shanthikumar y Yao [13] demostraron que la clausura respecto de convolución se cumple si trabajamos con variables aleatorias que tienen una distribución con tasa de fallo r creciente (IHR), o equivalentemente que $\bar{F}$ sea log-cóncava.

En el siguiente resultado vemos que el orden de la tasa de fallo es invariante respecto a cualquier transformación continua y monótona.

Teorema 3.22. *Supongamos que $X \leq_{hr} Y$ y que $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente y continua. Entonces $g(X) \leq_{hr} g(Y)$.*

Demostración. Se tiene inmediatamente de la igualdad $\bar{F}_{g(X)}(t) = \bar{F}_X(g^{-1}(t))$

□

Teorema 3.23. *$X \leq_{hr} Y$ implica que $X \leq_{st} Y$.*

Demostración. Dado que $\lim_{t\to-\infty} \bar{F}_Y(t)/\bar{F}_X(t) = 1$, $X \leq_{hr} Y$ implica que $\bar{F}_Y(t)/\bar{F}_X(t) \geq 1$ y entonces $F_X(t) \geq F_Y(t)$ para todo real t. □

Ya se ha demostrado en el ejemplo 3.16 que la implicación del teorema 3.23 es estricta.

Ahora definiremos el orden dual al hr, para lo que utilizaremos funciones de distribución en vez de la función de supervivencia.

Definición 3.24. *Se dice que la variable aleatoria X es más pequeña que Y respecto del orden de la tasa de fallo inversa (escrito $X \leq_{rh} Y$), si la función*

$$\frac{F_Y(t)}{F_X(t)}$$

es creciente, o equivalentemente $F_Y(x)F_X(y) \leq F_X(y)F_Y(x)$ para $x \leq y$.

El orden de la tasa fallo inversa comparte muchas propiedades con el orden usual de la tasa de fallo. De hecho, hay una fuerte dualidad entre $\leq_{hr}$ y $\leq_{rh}$. Esto es debido al siguiente resultado que fue demostrado por Nanda y Shaked [8].

Teorema 3.25. *Sea g una función continua estrictamente decreciente. Entonces $X \leq_{hr} Y$ si y solo si $g(X) \geq_{rh} g(Y)$.*

Demostración. Si g es continua y estrictamente decreciente, entonces ocurre lo mismo con g^{-1}. El enunciado se tiene a partir de la siguiente igualdad:

$$F_{g(X)}(t) = P(g(X) \leq t) = P(X \geq g^{-1}(t)) = \bar{F}_X(g^{-1}(t)).$$

si $g^{-1}(t)$ es un punto de continuidad. En caso contrario hay que seguir un razonamiento análogo al Teorema 3.20.

□

Las consecuencias más importantes de este teorema son las siguientes

Teorema 3.26. *El orden de la tasa de fallo inversa es cerrado respecto de la convergencia débil.*

Teorema 3.27. *Sean $X \leq_{rh} Y$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas y crecientes. Entoces $g(X) \leq_{rh} g(Y)$.*

Teorema 3.28. *$X \leq_{rh} Y$ implica que $X \leq_{st} Y$.*

Teorema 3.29. *$X \leq_{rh} Y$ si y solo si $[X|X \leq t] \leq_{st} [Y|Y \leq t]$ para todo t real*

Como en el orden estocástico, también se verifica la clausura por convolución (Teorema 3.8), pero bajo condiciones más restrictivas. Este resultado lo enunciaremos y lo utilizaremos en el capítulo 3.

3.4. Orden de razón de verosimilitudes

Una característica interesante del orden de la tasa de fallo es que $X \leq_{hr} Y$ si y solo si $[X|X > t] \leq_{st} [Y|Y > t]$ para todo t real. Esto es importante para analizar las distribuciones del tiempo de vida. También hay otras situaciones en las que queramos tener que $[X|X \in A] \leq_{st} [Y|Y \in A]$ para todos los sucesos posibles A. Este requisito conduce al llamado orden de razón de verosimilitudes.

Definición 3.30. *Se dice que la variable aleatoria Y es más grande que X por el orden de razón de verosimilitudes (escrito $X \leq_{lr} Y$), si X e Y tienen densidades respecto de alguna medida dominante μ verificando que*

$$f_X(t)f_Y(s) \leq f_X(s)f_Y(t) \quad \forall s \leq t$$

Observación 3.31. *i) En la definición hemos tomado una medida arbitraria dominante μ, por lo que incluye el caso de las densidades de las distribuciones continuas (donde μ es la medida de Lebesgue), y el caso de las distribuciones discretas (donde μ es la medida de contar) así como situaciones más generales como mixturas de ambas.*

ii) La desigualdad de la definición 3.30 simplemente establece que el ratio f_Y/f_X es creciente, pero está escrita de forma que elimina la dificultad de definir por separado el caso en que el numerador, el denominador o ambos sean cero.

El orden de razón de verosimilitudes es más fuerte que el orden estocástico usual.

Teorema 3.32. *Si $X \leq_{lr} Y$, entonces $X \leq_{st} Y$.*

Demostración. Es una consecuencia del teorema siguiente, pero tiene una prueba directa simple. Si f_Y/f_X es creciente, existe un t_0 tal que $f_Y(t)/f_X(t) \leq 1$ para $t < t_0$ y $f_Y(t)/f_X(t) \geq 1$ para $t > t_0$, dado que los valores de una densidad no pueden ser siempre superiores a los de otra, pues ambas tienen que integrar 1. Así tenemos que $f_Y(t) \leq f_X(t)$ para $t < t_0$ y $f_Y(t) \geq f_X(t)$ para $t > t_0$. Por tanto, $F_Y(t) - F_X(t)$ es decreciente para $t < t_0$ y creciente para $t > t_0$. Dado que

$$\lim_{t\to-\infty}(F_Y(t) - F_X(t)) = \lim_{t\to\infty}(F_Y(t) - F_X(t)) = 0,$$

esto implica que $F_Y(t) \leq F_X(t)$ para todo t.

□

El siguiente teorema caracteriza el orden de razón de verosimilitudes

Teorema 3.33. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $X \leq_{lr} Y$

ii) *Para todos los intervalos* $U = [a,b]$ *y* $V = [c,d]$ *con* $a < b < c < d$,

$$P(X \in V)P(Y \in U) \leq P(X \in U)P(Y \in V)$$

iii) $[X|a \leq X \leq b] \leq_{st} [Y|a \leq Y \leq b]$ *para todo* $a < b$ *con* $P(a \leq X \leq b) > 0$ *y* $P(a \leq Y \leq b) > 0$

iv) $[X|X \in A] \leq_{st} [Y|Y \in A]$ *para todos los sucesos A tales que* $P(X \in A) > 0$ *y* $P(Y \in A) > 0$

v) $[X|X \in A] \leq_{lr} [Y|Y \in A]$ *para todos los sucesos A tales que* $P(X \in A) > 0$ *y* $P(Y \in A) > 0$.

Demostración. $(i) \implies (v)$ La densidad de $[X|X \in A]$ viene dada por

$$f_{[X|X\in A]}(t) = \frac{f_X(t)}{P(X \in A)}.$$

Por lo tanto la afirmación se sigue inmediatamente de la definición de orden del índice de probabilidad.

$(v) \implies (iv)$ Es una consecuencia inmediata del Teorema 3.32

$(iv) \implies (iii)$ Es trivial

$(iii) \implies (ii)$ Por (iii) tenemos que

$$\frac{P(b \leq X \leq c)}{P(a \leq X \leq c)} \leq \frac{P(b \leq Y \leq c)}{P(a \leq Y \leq c)} \quad para \ \ a < b < c.$$

Esto únicamente puede ser cierto si

$$\frac{P(a \leq X \leq b)}{P(b \leq X \leq c)} \geq \frac{P(a \leq Y \leq b)}{P(b \leq Y \leq c)} \quad para \ \ a < b < c$$

o, equivalentemente, si

$$\frac{P(a \leq X \leq b)}{P(a \leq Y \leq b)} \geq \frac{P(b \leq X \leq c)}{P(b \leq Y \leq c)} \quad para \ \ a < b < c.$$

De forma análoga,

$$\frac{P(b \le X \le c)}{P(b \le Y \le c)} \ge \frac{P(c \le X \le d)}{P(c \le Y \le d)} \quad para \;\; b < c < d,$$

y por lo tanto

$$\frac{P(a \le X \le b)}{P(a \le Y \le b)} \ge \frac{P(c \le X \le d)}{P(c \le Y \le d)} \quad para \;\; a < b < c < d.$$

$(ii) \implies (i)$ Sea μ la medida dominante en la definición del orden lr. La desigualdad del apartado (ii) implica que

$$\frac{P(X \in V)}{\mu(V)} \frac{P(Y \in U)}{\mu(U)} \le \frac{P(X \in U)}{\mu(U)} \frac{P(Y \in V)}{\mu(V)}.$$

(vease Billingsley [4], pg. 419)

Ahora, podemos tomar $U = [s - \varepsilon, s + \varepsilon]$ y $V = [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$ donde $s < t$ y $0 < \varepsilon < (t - s)/2$. Tomando el límite cuando $\varepsilon \to 0$ tenemos que:

$$f_X(t) f_Y(s) \le f_X(s) f_Y(t)$$

$\mu - c.s.$ y por tanto $X \le_{lr} Y$. □

El orden de razón de verosimilitudes es más fuerte que el orden de la tasa de fallo.

Teorema 3.34. *$X \le_{lr} Y$ implica que $X \le_{hr} Y$ y $X \le_{rh} Y$.*

Demostración. Es consecuencia directa del Teorema 3.33 *iv*) tomando $A = (t, \infty)$ □

En el siguiente teorema podemos ver que el orden de razón de verosimilitudes es cerrado respecto de la convergencia débil. La prueba es más complicada que para los órdenes anteriores, y puede consultarse en Muller y Stoyan [7].

Teorema 3.35. *El orden de razón de verosimilitudes $\le_{lr}$ es cerrado respecto de la convergencia débil.*

Capítulo 4

Modelo de inventario de renovación compuesto

4.1. Introducción

Los modelos de inventario son modelos matemáticos que se utilizan para describir cómo evoluciona en el tiempo la cantidad de producto almacenado, por ejemplo, en un almacén. Esta evolución puede ser descrita de la siguiente manera: sea t un tiempo arbitrario, x_t el producto almacenado en el instante t, r_t la cantidad de producto que recibe un almacén debido a un pedido y d_t la demanda de este producto en el instante t (determinística o aleatoria), entonces el producto almacenado inmediatamente después de t es $x_t + r_t - d_t$ si $x_t + r_t > d_t$ (0 en otro caso).

Además, existe una función de coste asociada al sistema de inventario, que incluye costes tales como costes de almacenamiento, costes de pedido, costes por demanda no satisfecha (o por aplazar la entrega), etc. El objetivo de la teoría de inventario es adoptar una política apropiada de pedidos que minimice la función de coste.

El modelo de inventario estocástico básico de un único artículo está basado en las siguientes suposiciones: la demanda va a ser aleatoria y se recibirán los pedidos después de un tiempo de espera L dado. Debido a esto último, no podremos garantizar tener en todo momento producto almacenado, ya que, dado que la demanda es aleatoria, puede ocurrir que durante el tiempo de espera L se agoten las reservas del almacén. Cuando suceda esto, hablaremos de desabastecimiento.

En caso de desabastecimiento, podemos considerar que los pedidos que se realicen en este periodo ya no se podrán satisfacer (se pierde la demanda) o que se entregarán con retraso. Esta diferencia se puede representar en la función de coste dado que, respectivamente, debería incluir costes por demanda no satisfecha o por el aplazamiento de la entrega.

En nuestro modelo, cuando suceda un desabastecimiento, se retrasarán todos los pedidos pendientes. Nuestra función de coste, por lo tanto, incluirá costes fijos y variables, tales como costes de almacenamiento y costes asociados a la entrega con retraso. Hoy en día existen multitud de artículos que se ocupan del estudio de este modelo o de sus variantes. En la mayoría de ellos se supone una revisión periódica, es decir, se revisa el estado del inventario cada cierto tiempo, siendo esta cantidad fija. En éstos, se particionará la línea temporal en periodos de igual longitud, situando los pedidos en el inicio de cada periodo.

Por el artículo de Scarf [11], sabemos que este modelo puede ser representado como un problema de optimización dinámica unidimensional, donde la variable de estado es la posición de inventario (o nivel de inventario) más todos los pedidos pendientes. Esto se puede lograr cargando a cada periodo de revisión, con una posición de inventario de x unidades, no los costes esperados incurridos inmediatamente hasta el siguiente instante de revisión, pero si el coste esperado tras el tiempo de espera L. El coste se puede expresar mediante una función $G(x)$, donde x representa el stock inicial.

Denominaremos política (s,S) a la política consistente en realizar un pedido cuando una revisión muestre que el almacén tiene una cantidad de producto almacenada x menor igual que s. Se solicitará la cantidad de producto necesaria para que el almacén (en el supuesto de que el pedido llegase inmediatamente) alcanzase el nivel S.

Es conocido por Veinott [14] que en caso de un coste fijo por reposición, una política (s,S) es óptima si la función $G(.)$ es cuasi-convexa. Una función $G(x)$ es cuasi-convexa si $G[\lambda u+(1-\lambda)v] \leq max[G(u),G(v)]$ $\forall\lambda \in [0,1]$ $\forall u,v \in Dom(G)$ tales que $u \neq v$ y $G(u) \neq G(v)$. G es cuasi-convexa si y solo si $-G$ es unimodal. Actualmente, existen algoritmos muy eficientes para calcular el límite óptimo del par (s^*,S^*). Las versiones más estándares del modelo suponen que los costes de almacenamiento son proporcionales al nivel de inventario y los costes asociados a la tardanza también lo son con el tiempo de retraso. Se puede verificar en este caso que la función $G(.)$ es convexa cuando el tiempo de espera L es determinístico o, más generalmente, cuando es estocástico, siempre y cuando los tiempos de espera sean secuenciales (sin solapamientos) y se deban a causas externas. Por ello el tiempo de espera debe ser independiente del proceso de demanda.

Consideraremos los costes habituales h y p, donde h es el coste del inventario por unidad y por periodo de tiempo y p es el coste por unidad y por periodo de tiempo que se entregue con retraso. Además de ellos, Rosling añade dos tipos adicionales de costes por retraso, que son comunes en los modelos de inventario y sus aplicaciones: uno es el coste fijo π por cada unidad retrasada independientemente del tiempo de retraso con el que se entregue, y el segundo es un coste fijo b que se añade por cada periodo temporal que la unidad se entrega con retraso. Nuestro objetivo va a ser el análisis de la cuasi-convexidad en la función de coste bajo el modelo de Rosling.

El objetivo de este capítulo es generalizar un resultado acerca de la cuasiconvexidad de la función de coste en un modelo de demanda llamado de renovación compuesto (lo definiremos más adelante). Este resultado generalizará las anteriormente obtenidas por Rosling [10] y Badia y Sangüesa [1].

4.2. Preliminares

En primer lugar vamos a definir el concepto de razón de convolución monótona, que necesitaremos posteriormente.

Definición 4.1. *Se dice que una función de distribución F no negativa tiene razón de convolución monótona (MCR) si satisface que $F^{*(n+1)}(x)/F^{*n}(x)$ es creciente en x para todo $n = 1,2,...$ donde F^{*n} denota la convolución de F consigo misma n veces.*

Esta condición se relaciona con clases de fiabilidad y con órdenes estocásticos. De hecho, como se puede ver en Rosling, la propiedad DRHR implica la propiedad MCR. Además, que F sea MCR es equivalente a decir que si tenemos una sucesión $(Z_n)_{n=1,2,...}$ de variables aleatorias idénticamente distribuidas con función de distribución F, entonces $Z_1+...+Z_n \leq_{rh} Z_1+...+Z_{n+1}$ para cada $n = 1,2,...$ dado que la función de distribución de $Z_1+...+Z_n$ es F^{*n}.

Antes de abordar el modelo de renovación compuesto introduciremos, por simplicidad, el modelo de revisión periódica y demanda periódica que consideró Rosling en su artículo. Supondremos que todos los sucesos ocurren al inicio de cada periodo siguiendo la secuencia siguiente. En primer lugar, si es necesario, se realiza un pedido. En segundo lugar, el pedido realizado hace L unidades de tiempo se recibe (L es determinístico). Entonces, las demandas atrasadas, si las hay, se satisfacen por orden de llegada. Por último, llegan los consumidores y piden una cantidad aleatoria. Estas cantidades demandadas serán variables aleatorias absolutamente continuas de media D. Se satisface la demanda, y si hay escasez, se retrasan los pedidos. Asumiremos que la cantidad demandada es absolutamente continua excepto (posiblemente) en 0.

La decisión de la cantidad de pedido no afecta al coste hasta después del tiempo de espera L. Por ello, si la posición del inventario es $x \geq 0$ en el tiempo t, entonces el stock esperado en el periodo comprendido entre $t+L$ y $t+L+1$ (el periodo objetivo) es:

$$I(x) = xF^{*(L+1)}(0) + \int_0^x [x-y] f^{*(L+1)}(y)dy = [x-(L+1)D] + \int_x^\infty [y-x] f^{*(L+1)}(y)dy$$

$$= [x-(L+1)D] + \int_x^\infty [1-F^{*(L+1)}(y)]dy. \quad (1)$$

La segunda igualdad se tiene dado que $F^{*(L+1)}(0) + \int_0^x f^{*(L+1)}(y)dy = 1 - \int_x^\infty f^{*(L+1)}(y)dy$ y $(L+1)D = \int_0^\infty y f^{*(L+1)}(y)dy = \int_0^x y f^{*(L+1)}(y)dy + \int_x^\infty y f^{*(L+1)}(y)dy$. Para verificar la tercera igualdad se aplica Fubini a $\int_x^\infty [1-F^{*(L+1)}(y)]dy$. Además, dado que el segundo término del lado derecho de la última ecuación es igual a cero para $x < 0$, tenemos que (1) se cumple para todo x.

De forma análoga, para $x \geq 0$ el coste por demanda retrasada esperada (coste por unidad) en el tiempo de espera L es:

$$B_p(x) = \int_x^\infty [y-x] f^{*(L+1)}(y)dy = \int_x^\infty [1-F^{*(L+1)}(y)]dy, \quad (2)$$

que también es válida para $x < 0$ ya que en ese caso es igual a $[-x+(L+1)D]$.

El número esperado de nueva demanda retrasada $B_\pi(x)$ durante el periodo objetivo es la diferencia entre la demanda retrasada al inicio y al final del periodo objetivo. Por lo tanto, el coste por demanda retrasada por unidad y periodo es:

$$B_\pi(x) = \int_x^\infty [1-F^{*(L+1)}(y)]dy - \int_x^\infty [1-F^{*L}(y)]dy = \int_x^\infty [F^{*L}(y) - F^{*(L+1)}(y)]dy, \quad (3)$$

que es igual a D para $x \leq 0$. Este es un coste por unidad (sin importar el tiempo que la unidades estén en espera).

Por último, el coste por unidad de tiempo por demanda retrasada (coste por periodo) en el periodo objetivo es:

$$B_b(x) = [1-F^{*(L+1)}(x)]. \quad (4)$$

Notar que la variable que indica si se produce o no restraso en un periodo es una Bernoulli y la expresión anterior es su valor esperado o probabilidad de periodo con retraso. Este es un coste por unidad de tiempo, sin importar la cantidad de unidades retrasadas.

Multiplicando (2) y (4) por los coeficientes de coste respectivos y sumándolos, tenemos la tasa de coste:

$$G(x) = h[x-(L+1)D] + (p+h)\int_x^\infty [1-F^{*(L+1)}(y)]dy + \pi \int_x^\infty [F^{*L}(y) - F^{*(L+1)}(y)]dy + b[1-F^{*(L+1)}(x)]. \quad (5)$$

Notar que si $F(0) > 0$ y $b > 0$, entonces $G(x)$ no es derivable ni continua en $x = 0$, pero únicamente ahí. Si $F(0) = 0$ o $b = 0$, entonces $G(x)$ es continua y derivable en todo punto.

En relación con el modelo que hemos descrito, podemos encontrar en el articulo de Rosling la siguiente proposición.

Proposición 4.2. *i) $G(x)$ en (5) es cuasi-convexa para todo valor no negativo de h, p, π y b si y solo si $F^{*L}(x)/F^{*(L+1)}(x)$ y $f^{*(L+1)}(x)/F^{*(L+1)}(x)$ son no crecientes en x (esto sucede si $F(x)$ es log-cóncava).*

ii) $G(x)$ en (5) es cuasi-convexa para $b=0$ y para todos los valores no negativos de h, p y π si y solo si $F^{*L}(x)/F^{*(L+1)}(x)$ no es creciente en x (esto sucede si $F(x)$ es MCR).

iii) $G(x)$ en (5) es cuasi-convexa para $\pi=0$ y para todos los valores no negativos de h, p y b si y solo si $f^{*(L+1)}(x)/F^{*(L+1)}(x)$ no es creciente en x (esto sucede si $F(x)$ es log-cóncava).

Como generalización del modelo que hemos descrito, podemos considerar un proceso en tiempo continuo para describir la llegada de las demandas en un modelo de inventario. Esas llegadas están modeladas en términos de un proceso estocástico $\{N(t) : t \geq 0\}$, donde cada $N(t)$ cuenta el número de llegadas de demandas hasta el instante t. $(X_n)_{n=1,2,...}$ será la sucesión de los tiempos entre llegadas, mientras que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n = 1,2,...$ $(S_0 = 0)$ serán los tiempos de llegada. El proceso de contabilización de las llegadas viene definido por los tiempos de llegada mediante la siguiente expresión $N(t) = max\{n : S_n \leq t\}, t \geq 0$ (contamos el número de llegadas hasta el tiempo t). Asumimos que los tiempos entre llegadas son independientes. Cuando los tiempos entre llegadas X_n están idénticamente distribuidos, el proceso de contabilización será un proceso de renovación. Cuando las X_n tengan distribución exponencial hablaremos de un proceso de Poisson. La distribución exponencial tiene densidad gamma con $v = 1$ (recuerdese ejemplo 2.14) y por tanto es log-cóncava.

Para nuestro trabajo consideraremos un proceso de renovación con retardo, que es una ligera modificación del proceso de renovación, cuando consideramos una distribución idéntica para X_n, $n \geq 2$. En particular, el llamado proceso de renovación de equilibrio es un proceso de renovación con retardo, en el cual el primer tiempo de llegada X_1^e tiene la distribución de equilibrio de X_2, esto es:

$$P(X_1^e > t) = \frac{1}{E[X_2]} \int_t^\infty P(X_2 > u) du, \quad t \geq 0.$$

Hay que tener en cuenta que X_1^e tiene densidad decreciente, y por lo tanto una distribución cóncava. El proceso de renovación de equilibrio surge en la práctica cuando comenzamos a observar un proceso de renovación en un instante de tiempo arbitrario, pero suficientemente grande.

4.3. Proceso de demandas de renovación compuesto y función de coste

En primer lugar, vamos a describir el modelo de inventario con un proceso de demandas de renovación compuesto. Describimos la llegada de los clientes mediante el proceso de renovación clásico $\{N(t) : t \geq 0\}$ con un tiempo medio entre llegadas $1/\lambda$. Si elegimos un instante de tiempo arbitrario, pero lo suficientemente grande, para observar el proceso, podemos observar su proceso de equilibrio asociado $\{\tilde{N}(t) : t \geq 0\}$. Respectivamente, denotaremos la probabilidad de exactamente n llegadas en un periodo de longitud t como:

$$p_n(t) := P(N(t) = n) \;\; y \;\; \tilde{p}_n(t) := P(\tilde{N}(t) = n) \;\; n = 0,1,...$$

Las llegadas de las demandas de los clientes son las cantidades aleatorias independientes idénticamente distribuidas $(Z_n)_{n=1,2,...}$ con media μ. Denotaremos por Ψ la función de distribución de las demandas. La demanda agregada, o suma de las demandas, en un intervalo de longitud t es $\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i$, cuya distribución podemos escribir como:

$$\Psi^{*N(t)}(x) = P(\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) \Psi^{*n}(x), \quad x \geq 0. \quad (6)$$

donde Ψ^{*n} es la función de distribución de $Z_1 + ... + Z_n$.

Análogamente, la demanda agregada evaluada justo despues de la llegada del primer consumidor (contando también la demanda que este ha realizado) después de un tiempo t es $\sum_{i=1}^{N(t)+1} Z_i$, cuya distribución podemos escribir como:

$$\Psi^{*(N(t)+1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\Psi^{*(n+1)}(x), \quad x \geq 0. \quad (7)$$

Si observamos el proceso de equilibrio, la función de distribución de la demanda agregada $\sum_{i=1}^{\tilde{N}(t)} Z_i$ se escribe como:

$$\Psi^{*\tilde{N}(t)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n(t)\Psi^{*n}(x), \quad x \geq 0. \quad (8)$$

En este modelo, Rosling considera que el tiempo de espera L es constante. Así, en un instante de tiempo arbitrario, la función de distribución de la demanda acumulada tras el tiempo de espera será $\Psi^{*\tilde{N}(L)}$ como se ha definido anteriormente, y en este caso los términos de la función de coste definidos en (1), (2) y (4) serán:

$$I(x) = [x - LD] + \int_x^{\infty} [1 - \Psi^{*\tilde{N}(L)}(y)]dy$$

$$B_p(x) = \int_x^{\infty} [1 - \Psi^{*\tilde{N}(L)}(y)]dy$$

$$B_b(x) = 1 - \Psi^{*\tilde{N}(L)}(x)$$

donde $D := \lambda\mu$ es la demanda esperada a largo plazo por unidad de tiempo. Esto se puede deducir utilizando resultados límite de procesos de renovación. La tasa de nueva demanda retrasada por unidad de tiempo se obtiene de considerar una llegada y computar la demanda atrasada esperada en un tiempo de espera justo antes y después de la llegada del siguiente cliente.

$$\int_x^{\infty} [1 - \Psi^{*(N(L)+1)}(y)]dy - \int_x^{\infty} [1 - \Psi^{*N(L)}(y)]dy.$$

Dividiendo este término por el promedio de los tiempos entre llegadas, obtenemos el coste por unidad de tiempo:

$$B_\pi(x) = \lambda \int_x^{\infty} [\Psi^{*N(L)}(y) - \Psi^{*(N(L)+1)}(y)]dy.$$

Multiplicando por los respectivos coeficientes de coste y sumando todo, la función de coste es:

$$G(x) = h[x - LD] + (p+h)\int_x^{\infty} [1 - \Psi^{*\tilde{N}(L)}(y)]dy + \lambda\pi \int_x^{\infty} [\Psi^{*N(L)}(y) - \Psi^{*(N(L)+1)}(y)]dy + b[1 - \Psi^{*\tilde{N}(L)}(y)], \quad x \geq 0.$$

Ahora, asumimos que el tiempo de espera es aleatorio. Entonces, tomando esperanzas en la fórmula previa, podemos obtener la siguiente función de coste:

$$G(x) = h[x - E[L]D] + (p+h)\int_x^{\infty} [1 - \Psi^{*\tilde{N}(L)}(y)]dy + \lambda\pi \int_x^{\infty} [\Psi^{*N(L)}(y) - \Psi^{*(N(L)+1)}(y)]dy + b[1 - \Psi^{*\tilde{N}(L)}(y)], \quad x \geq 0.$$

donde el tiempo de espera entre demandas pasa a ser:

$$\Psi^{*\tilde{N}(L)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}_n^* \Psi^{*n}(x), \ \ x \geq 0$$

$$\Psi^{*N(L)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^* \Psi^{*n}(x)$$

$$\Psi^{*(N(L)+1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^* \Psi^{*(n+1)}(x), \ \ x \geq 0$$

donde p_n^* y $\tilde{p}_n^*$ es la probabilidad de exáctamente n llegadas en el periodo de longitud aleatoria L, esto es:

$$p_n^* := P(N(L) = n) \ \ y \ \ \tilde{p}_n^* := P(\tilde{N}(L) = n), \ \ n = 0, 1, ...$$

4.4. Teorema a generalizar

El teorema que vamos a enunciar a continuación es una generalización del Teorema 4.2, que aparece en el artículo de Rosling [10] para el proceso de demandas de renovación compuesto con L determinístico.

Teorema 4.3. *i) Una política (s,S) es óptima para todos los parámetros del coste, si el proceso de demanda es un proceso de Poisson compuesto con una distribución de demanda $\Psi(.)$ cóncava y una distribución del tiempo de espera L que es convolución de exponenciales o determinístico, este último como límite de dicha convolución.*

ii) Cuando $b = 0$, una política (s,S) es óptima cuando los tiempos entre llegadas y la distribución del tiempo de espera L son log-cóncavas y $\Psi(.)$ es MCR.

La prueba de este teorema se puede ver en el artículo de Badía y Sangüesa [1] y generaliza los resultados de Rosling, ya que considera un tiempo L de espera aleatorio. Nuestro objetivo va a ser generalizar este resultado, en concreto el apartado *ii*) considerando tiempos entre llegadas *IHR* y un tiempo de espera L *DRHR*.

Recordemos del capítulo 1 que log-concavidad implica IHR y DRHR, luego debilitaremos las condiciones en ii).

4.5. Generalización del teorema

Para generalizar el teorema, necesitaremos enunciar una serie de resultados previos. Para introducir el primero de ellos, necesitaremos enunciar un teorema como preliminar. Este resultado tiene que ver con la preservación del orden rh bajo mixturas (recordar el teorema análogo para el orden estocástico usual). Para los órdenes hr y rh la preservación bajo mixturas requiere de condiciones mas restrictivas. Para ello, vamos a considerar una familia de funciones de distribución $\{G_\theta, \theta \in \chi\}$ donde χ es un subconjunto de $\mathbb{R}$. $X(\theta)$ denota la variable aleatoria con función de distribución G_θ. Para alguna variable aleatoria Θ con soporte en χ, y con función de distribución F, denotaremos por $X(\Theta)$ a la variable aleatoria mixtura con función de distribución H dada por:

$$H(y) = \int_{\chi} G_\theta(y) dF(\theta), \quad y \in \mathbb{R}.$$

Con ello vamos a enunciar el siguiente preliminar que aparece en Shaked y Shanthikumar [12], en el que veremos que el orden *rh* se preserva bajo mixturas.

Teorema 4.4. *Sea una familia de funciones de distribución $\{G_\theta, \theta \in \chi\}$ como antes. Sean Θ_1 y Θ_2 dos variables aleatorias con soportes en χ y funciones de distribución F_1 y F_2 respectivamente. Sean Y_1 y Y_2 dos variables aleatorias tales que $Y_i =_{st} X(\theta_i), i = 1,2$; o sea, supongamos que la función de distribución de Y_i viene dada por:*

$$H_i(y) = \int_{\chi} G_\theta(y) dF_i(\theta), \quad y \in \mathbb{R}, i = 1,2.$$

Si $X(\theta) \leq_{rh} X(\theta')$ siempre que $\theta \leq \theta'$ y $\Theta_1 \leq_{rh} \Theta_2$, entonces $Y_1 \leq_{rh} Y_2$.

Este teorema lo utilizaremos para demostrar el primer resultado.

Teorema 4.5. *Sea $(Z_n)_{n=1,2,...}$ una sucesión de variables aleatorias no negativas independientes idénticamente distribuidas con función de distribución F, y sea L_i $i = 1,2$ dos variables aleatorias independientes con valores enteros de la secuencia anterior. Si F es MCR y $L_1 \leq_{rh} L_2$, entonces $Z_1 + ...Z_{L_1} \leq_{rh} Z_1 + ... + Z_{L_2}$.*

Demostración. Si F es MCR entonces, como ya se ha explicado antes,

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \leq_{rh} \sum_{i=1}^{n+1} Z_i.$$

Utilizariamos por lo tanto el Teorema 4.4, con $X(n) = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, $\Theta_1 = L_1$ y $\Theta_2 = L_2$. □

A continuación vamos a introducir otros tres preliminares, que utilizaremos para demostrar el siguiente resultado. El primero de ellos es un resultado sobre procesos de renovación, en el que relacionaremos para un tiempo aleatorio L, la probabilidad del recuento $N(L)$ con la esperanza de la suma S_n de las variables aleatorias que lo componen.

Proposición 4.6. *Dado un proceso de renovación $\{N(t) : t \geq 0\}$ y un tiempo aleatorio L, de modo que L y cada uno de los tiempos de llegada del proceso no tienen puntos de discontinuidad comunes en la función de distribución, se tiene que:*

$$P(N(L) \leq n) = E[F_L(S_{n+1})],$$

donde F_L es la función de distribución de L.

Demostración. Si denotamos por F_{S_n} a la función de distribución de S_n, tenemos que:

$$P(N(L) \leq n) = P(S_{n+1} > L) = \int_0^\infty P(L < u) dF_{S_{n+1}}(u)$$

$$= \int_0^\infty F_L(u) dF_{S_{n+1}}(u) = E[F_L(S_{n+1})],$$

donde la primera desigualdad se basa en la siguiente equivalencia de los procesos de renovación $N(L) \geq n \iff S_n \leq L$; en la segunda igualdad fijamos S_n en el valor u considerando la suma, mediante la integral, de todos los valores $S_n = u$ posibles; y la penúltima igualdad se debe a que L no tiene puntos de discontinuidad comunes con los S_n. □

El siguiente resultado es una caracterización muy útil del orden hr. Existen también análogos para los órdenes rh y lr. Reciben el nombre de caracterizaciones bivariantes de dichos órdenes. Este resultado se puede consultar en Muller y Stoyan.

Teorema 4.7. *Sean X y X^* variables aleatorias no negativas. Supongamos que X^* e Y^* son dos variables aleatorias independientes tales que $X =^d X^*$ y $Y =^d Y^*$. Entonces $X \leq_{hr} Y$ si y solo si $Eg(X^*,Y^*) \leq Eg(Y^*,X^*)$ para todo $g \in G_{hr}$ donde G_{hr} es la clase de las funciones bivariantes definidas como sigue:*

$$G_{hr} = \{g : \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x,y) - g(y,x) \ \ es \ \ creciente \ \ en \ \ x \ \ \forall x \geq y\}$$

Como hemos indicado anteriormente, el orden hr (al contrario que el orden st) no se preserva bajo convoluciones. Sin embargo, Shantikuman y Yao demostraron el siguiente resultado de preservación bajo convolución.

Teorema 4.8. *Sean (Y_i,Z_i), $i = 1,2,...,m$ pares independientes de variables aleatorias tales que $Y_i \leq_{hr} Z_i$, $i = 1,2,...,m$. Si Y_i,Z_i, $i = 1,2,...,m$ son todas IHR, entonces*

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i \leq_{hr} \sum_{i=1}^{m} Z_i.$$

Con estos resultados previos podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 4.9. *Sea $\{N(t) : t \geq 0\}$ un proceso de renovación con tiempo entre llegadas X y sea $\{N^*(t) : t \geq 0\}$ un proceso de renovación con retardo asociado con un primer tiempo entre llegadas X^*. Si L es un tiempo aleatorio DRHR independiente del proceso y X y X^* son IHR, entonces*

$$N(L) \leq_{rh} N^*(L) \leq_{rh} N(L) + 1$$

cuando $X^* \leq_{hr} X$.

Demostración. Denotaremos $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y $S_n^* = \sum_{i=1}^{n} X_i^*$ siendo $X_1,X_2,...,X_2^*,X_3^*,...$ independientes idénticamente distribuidas y X_1^* independiente de $X_1,X_2,...,X_2^*,X_3^*,...$ Si las funciones de distribución de L y el proceso de conteo no tienen puntos de discontinuidad comunes, tenemos, por la igualdad de la proposición 4.6, que:

$$P(N(L) \leq n) = E[F_L(S_{n+1})] \qquad (9)$$
$$P(N^*(L) \leq n) = E[F_L(S_{n+1}^*)] \qquad (10)$$
$$P(N(L) + 1 \leq n) = E[F_L(S_n)] \qquad (11)$$

Utilizando la definición del orden de la tasa de fallo, mas concretamente la Nota 3.18, tenemos que la primera desigualdad ($N(L) \leq_{rh} N^*(L)$) es equivalente por (9) y (10) a

$$E[F_L(S_{n+1}^*)]E[F_L(S_{n+2})] \leq E[F_L(S_{n+2}^*)]E[F_L(S_{n+1})], n = 0,1,... \qquad (12)$$

mientras que la segunda desigualdad($N(L) \leq_{rhr} N(L) + 1$) es equivalente por (10) y (11) a

$$E[F_L(S_{n+2}^*)]E[F_L(S_n)] \leq E[F_L(S_{n+1}^*)]E[F_L(S_{n+1})], \ \ n = 0,1,... \qquad (13)$$

Vamos a considerar la función bivariante auxiliar $G_h(x,y) = F_L(x)F_L(y+h)$ $x,y \geq 0$ para todo $h \geq 0$. Si L es DRHR vamos a ver que $G_h(x,y)$ es creciente en x para $x \geq y$, y por lo tanto esta función pertenece a la clase G_{rh} definida anteriormente. Para ello tenemos que ver que la función $F(x)F(y+h)-F(y)F(x+h)$ es creciente en x. Sacando factor común, tenemos

$$F(x+h)[\frac{F(x)F(y+h)}{F(x+h)}-F(y)].$$

Dado que $F(x+h)$ no negativa y creciente, basta con comprobar que $\frac{F(x)}{F(x+h)}$ es creciente y que el segundo factor es no negativo. En efecto, $F(x_1)F(x_2+h) \leq F(x_2)F(x_1+h)$, lo cual tenemos por el Teorema 2.37 tomando $t_1 = x_1$, $t_2 = x_2$, $s_1 = -h$, $s_2 = 0$. La no negatividad se demuestra de forma análoga.

Por el Teorema 4.8, tenemos que $S^*_{n+1} \leq_{hr} S_{n+1}$ considerando $m = n+1$, $X^*_i = Y_i$ y $X_i = Z_i$. Por lo tanto, utilizando la caracterización bivariante del orden estocástico hr (Teorema 4.7), tenemos que:

$$E[F_L(S^*_{n+1})]E[F_L(S_{n+1}+h)] \leq E[F_L(S_{n+1})]E[F_L(S^*_{n+1}+h)] \quad (14)$$

De forma análoga, por el Teorema 4.8 se tiene que $S_n \leq_{hr} S^*_{n+1}$ considerando $m = n+1$, $Y_i = X_i$ si $i \neq n+1$, $Y_{n+1} = 0$ y $Z_i = X^*_i$; y por el Teorema 4.7:

$$E[F_L(S_n)]E[F_L(S^*_{n+1}+h)] \leq E[F_L(S^*_{n+1})]E[F_L(S_n+h)] \quad (15)$$

Tomando $h = X_{n+2}$ en (14) y (15) y reordenando, tenemos que son equivalentes respectivamente a (12) y (13) si $E[F_L[S^*_{n+1}+X_{n+2}]] = E[F_L[S^*_{n+2}]]$ y $E[F_L[S_n+X_{n+2}]] = E[F_L[S_{n+1}]]$. La primera igualdad se tiene dado que X_{n+2} y X^*_{n+2} tienen la misma distribución y por tanto ambas esperanzas son iguales. Equivalente, tenemos la segunda igualdad porque la distribución de X_{n+1} y X_{n+2} también es la misma.

□

Por último vamos a demostrar el teorema que generalizará el apartado ii) de 4.3. Para ello utilizaremos el Teorema 2.32 que nos asegura que, bajo la condición de proceso de renovación con tiempos entre llegadas IHR, el proceso de renovación de equilibrio verifica que X^*_1 es IHR (De hecho, tiene densidad log-cóncava)

Teorema 4.10. *Si $b = 0$, una política (s,S) es óptima cuando el tiempo entre demandas es IHR, el tiempo de espera es DRHR y $\Psi(.)$ es MCR.*

Demostración. Una condición necesaria y suficiente para la quasi-convexidad de G (que se definió en la página 29) y, por lo tanto, para la existencia de una política (s,S) óptima es que

$$\frac{\Psi^{*N(L)} - \Psi^{*(N(L)+1)}}{\Psi^{*\tilde{N}(L)}} \quad (16)$$

sea decreciente. Veamos que es condición suficiente (el hecho de que es necesaria se demostraría como en el artículo de Rosling). En primer lugar $G(x)$ es decreciente en $x < 0$ y puede tener un salto descendente en $x = 0$. Dado que $G(x)$ es derivable en $x > 0$, vamos a estudiar el comportamiento de su derivada:

$$\begin{aligned} G'(x) &= h-(p+h)[1-\Psi^{*\tilde{N}(L)}(x)] - \pi[\Psi^{*N(L)(x)} - \Psi^{*(N(L)+1)}(x)] \\ &= \Psi^{*\tilde{N}(L)}(x)[\frac{-p}{\Psi^{*\tilde{N}(L)}(x)} + (p+h) - \pi\frac{\Psi^{*N(L)}(x) - \Psi^{*(N(L)+1)}(x)}{\Psi^{*\tilde{N}(L)}(x)}]. \end{aligned}$$

Veamos que el término entre paréntesis es creciente. El primer sumando lo es por ser $\Psi^{*\tilde{N}(L)}$ función de distribución. El tercer término será creciente si (16) es decreciente. Si el término entre paréntesis es creciente, tenemos que $G(x)$ cambia de signo como mucho una vez, de negativo a positivo y por ello $G(x)$ cambia como mucho una vez, de decreciente a creciente para $x > 0$. Por lo tanto si (16) es decreciente entonces $G(x)$ es quasi-convexa.

Veamos pues el decrecimiento de (16). Bajo la suposición de un tiempo entre demandas IHR, las condiciones del Teorema 4.9 se verifican, y tenemos que $N(L) \leq_{rh} \tilde{N}(L) \leq_{rh} N(L)+1$. Dado que Ψ es MCR, por el Teorema 4.5 tenemos que $\sum_{i=1}^{N(L)} Z_i \leq_{rh} \sum_{i=1}^{\tilde{N}(L)} Z_i \leq_{rh} \sum_{i=1}^{N(L)+1} Z_i$ y entonces $\frac{\Psi^{*\tilde{N}(L)}}{\Psi^{*N(L)}}$ y $\frac{\Psi^{*(N(L)+1)}}{\Psi^{*\tilde{N}(L)}}$ son crecientes, y por ello

$$\frac{\Psi^{*N(L)} - \Psi^{*(N(L)+1)}}{\Psi^{*\tilde{N}(L)}}$$

es decreciente. De esta forma, tenemos el resultado. □

Bibliografía

[1] F.G. BADÍA, C. SANGÜESA, *Inventory Models with Nonlinear Shortage Cost and Stochastic Lead Times; Aplications of Shape Properties of Randomly Stopped Counting Processes*, Naval Research Logistics, Vol 62, pg 345-356, 2015.

[2] R. BARLOW, F. PROSCHAN, *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, 1965.

[3] F. BELZUNCE, C. MARTINEZ-RIQUELME, J. MULERO, *An Introduction to Stochastic Orders*, Academic Press, 2016.

[4] BILLINGSLEY, *Probability and Measure*, Jhon Wiley & Sons, 1995.

[5] S. KARLIN, *Total Positivity Vol.I*, Stanford University Press, 1968.

[6] A. MARSALL, I. OLKIN, *Life Distributions*, Springer, 2007.

[7] A. MULLER, D. STOYAN, *Comparison Methods for Stochastic Orders and Risks*, Wiley, 2002.

[8] A. K. NANDA, M. SHAKED, *The hazard Rate and the Reversed Hazard Rate Orders, with Applications to Order Statistics*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, Vol 53, pg 853-864, 2001.

[9] OEA.ES, *Grupo de Trabajo. Ordenaciones Estocásticas y sus Aplicaciones*, `http://oea.seio.es/`.

[10] K. ROSLING, *Inventory Cost Rate Functions with Nonlinear Shortage Cost*, Operations Research, Vol 50, pg 1007-1017, 2002.

[11] H.E. SCARF, *The Optimatily of (s,S) Policies in the Dynamic Inventory Problem*, Mathematical Methods in the Social Sciences, 1960.

[12] M. SHAKED, G. SHANTIKUMAR, *Stochastic Orders*, Springer, 2007.

[13] G. SHANTHIKUMAR, D. YAO, *Bivariate Characterization of some Stochastic Order Relations*, Adv in Appl Probab, 1991.

[14] A. VEINOTT, JR., *The Optimal Inventory Policy for Batch Ordering*, Operations Research, Vol 13, pg 424-432, 1965.