Trabajo Fin de Máster

Propuesta didáctica para 3º ESO: Poliedros y cuerpos de revolución

Teaching proposal for third year of the secondary education: Polyhedrons and geometric bodies

Autor/es

Joaquín Gutiérrez Rumoroso

Director/es

Óscar Carrión Lostal

Facultad de Educación

2017

ÍNDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar 1

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático 4

C. Sobre los conocimientos previos del alumno 10

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático 13

E. Sobre el campo de problemas 17

F. Sobre las técnicas 31

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas) 38

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma 41

I. Sobre la evaluación 42

J. Sobre la bibliografía y páginas web 49

K. Anexos 51

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar.

La Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, es bastante concisa en relación a este tema. Los contenidos que hacen referencia a nuestro objeto matemático (Poliedros y cuerpos de revolución) son los siguientes:

- *Geometría del plano.*
- *Geometría del espacio. Planos de simetría en los poliedros.*
- *Uso de herramientas tecnológicas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.*

En los libros de texto encontramos unos contenidos más detallados acerca del tema. Los objetos matemáticos que podemos encontrar se mencionan a continuación:

Poliedros

- Poliedros regulares
  - Tetraedro
  - Octaedro
  - Icosaedro
  - Hexaedro o cubo
  - Dodecaedro
- Prismas
- Pirámides

Cuerpos de revolución

- Cilindros
- Conos
- Esferas

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

La propuesta va dirigida a la asignatura *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas* de 3º ESO.

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Campo de problemas

1. Elementos característicos de cuerpos geométricos
2. Cálculo de áreas de cuerpos geométricos
3. Descomposición de cuerpos geométricos
4. Semejanza de cuerpos geométricos
5. Cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos
6. Principio de Cavalieri
7. Planos de simetría

Técnicas

1. Reconocer cuerpos geométricos en la vida cotidiana.
2. Aplicar el teorema de Euler a poliedros convexos.
3. Relacionar los cuerpos geométricos con su desarrollo plano y viceversa.
4. Comparar las características de dos cuerpos geométricos.
5. Calcular el área lateral o total de cuerpos geométricos.
6. Descomponer y componer figuras geométricas en cuerpos geométricos conocidos.
7. Reconocer la semejanza entre cuerpos geométricos.
8. Calcular el volumen de cuerpos geométricos.
9. Aproximar el volumen de cuerpos de la vida cotidiana.
10. Aplicar el principio de Cavalieri para calcular el volumen de cuerpos geométricos.
11. Encontrar los planos de simetría de un cuerpo geométrico.

Tecnologías

- Uso de materiales manipulativos para justificar el teorema de Euler en el caso de los sólidos platónicos.
- Uso de comprobaciones visuales, sobre todo cuando el resultado puede resultar poco intuitivo para los alumnos. Algunos ejemplos de los propios libros de texto son los siguientes:

- Deducción de las fórmulas de área lateral de los cuerpos geométricos a partir de su desarrollo plano.
- Deducción del volumen de la pirámide cuadrangular a partir del volumen del cubo.
- Uso del Principio de Cavalieri para deducir el volumen de cuerpos con la misma base y altura.
- Comprobación de la relación entre volúmenes de cuerpos geométricos semejantes.
- Deducción del volumen de la semiesfera utilizando la idea de Arquímedes.

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

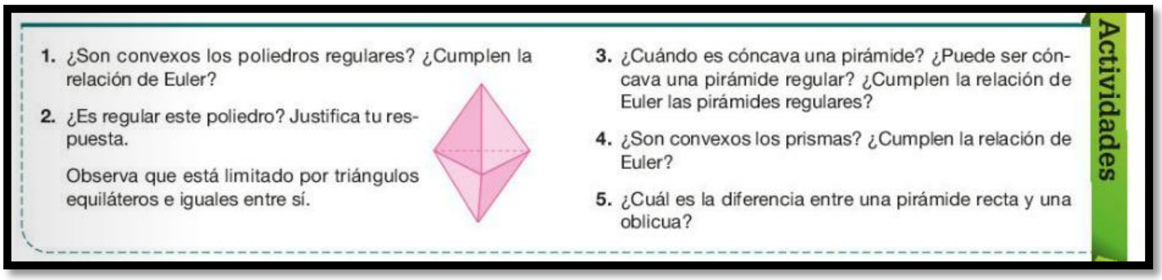
Los cuerpos geométricos se introducen en los libros de texto desde un enfoque puramente aritmético. Dado un cuerpo geométrico y conociendo algunas de sus distancias, se opera con esas distancias para obtener los elementos característicos del cuerpo (si fuera preciso) y se aplica la fórmula, bien del área o bien del volumen. Además se tiende a presentar los cuerpos de manera abstracta, sin ser contextualizados.

En algunos ejercicios si se plantean situaciones cotidianas en las que éstos aparecen, pero este tipo de ejercicios escasean en los libros de texto. Asimismo estos problemas se presentan como ejercicios finales, por lo que los alumnos no tienen esa percepción de los cuerpos en la vida cotidiana hasta el final del tema.

En algún libro de texto, como la editorial Edebé, también se hace referencia en la portada del tema a la motivación que tienen y han tenido los poliedros como símbolo de belleza ideal, perfección, etc. en campos como la pintura o la arquitectura, se trata pues de una justificación estética.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

En todas las editoriales se comienza introduciendo los distintos cuerpos geométricos y sus elementos, por lo que el campo de problemas se limita a ejercicios de identificación o reflexión acerca de sus propiedades.


Actividades

1. ¿Son convexos los poliedros regulares? ¿Cumplen la relación de Euler?
2. ¿Es regular este poliedro? Justifica tu respuesta.

   Observa que está limitado por triángulos equiláteros e iguales entre sí.
3. ¿Cuándo es cóncava una pirámide? ¿Puede ser cóncava una pirámide regular? ¿Cumplen la relación de Euler las pirámides regulares?
4. ¿Son convexos los prismas? ¿Cumplen la relación de Euler?
5. ¿Cuál es la diferencia entre una pirámide recta y una oblicua?

En cuanto al cálculo de áreas y volúmenes, abundan los ejercicios de aplicación de fórmulas. Pocos de ellos requieren un razonamiento más allá de dar un resultado final, como puede ser comparar dos cuerpos, pensar en lenguaje algebraico, realizar un planteamiento diferente, hacer una reflexión del resultado…

En cuanto a las técnicas y tecnologías también hay bastante afinidad de contenidos. Las técnicas y tecnologías no aparecen hasta que llegamos a los apartados de áreas y volúmenes, pues en los primeros apartados se centran en definir, clasificar e indicar los elementos de los distintos cuerpos geométricos

En el apartado de áreas tenemos que las fórmulas son las técnicas y los desarrollos planos son las tecnologías, pues en ellas se describe los elementos de las fórmulas, justificando visualmente las fórmulas.

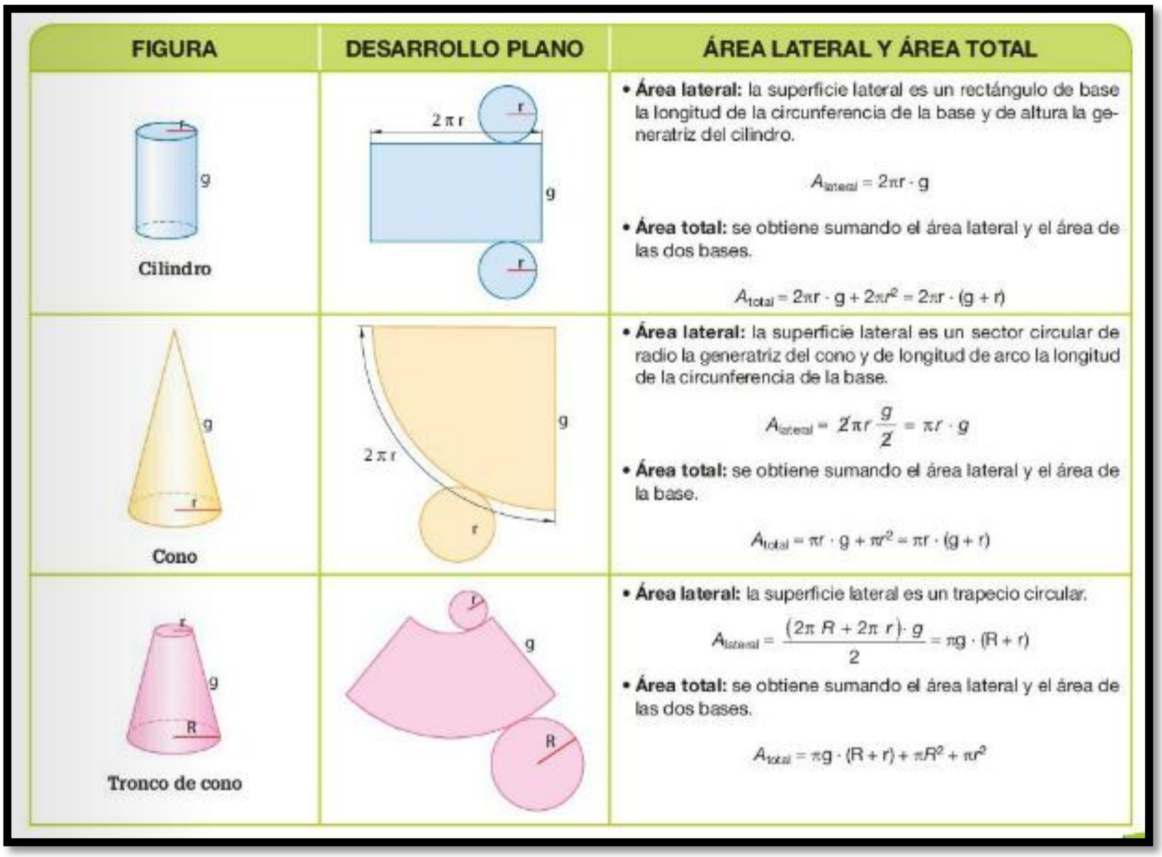
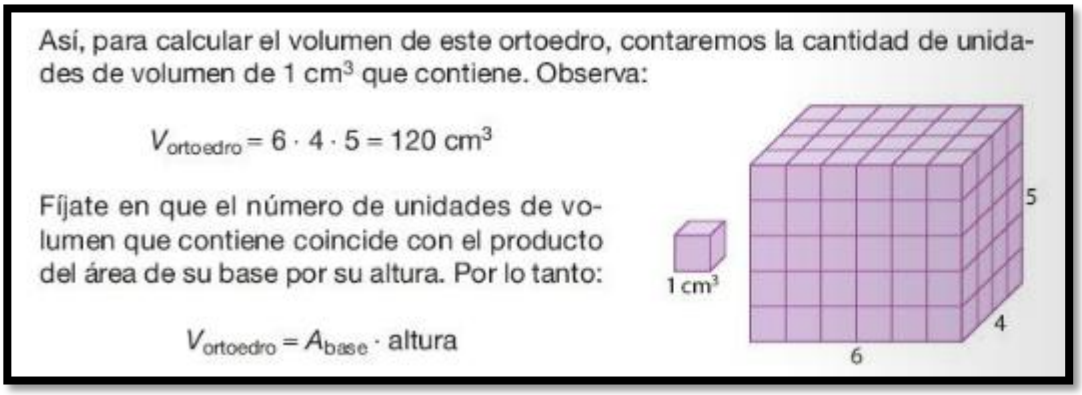


FIGURA	DESARROLLO PLANO	ÁREA LATERAL Y ÁREA TOTAL
Cilindro		• **Área lateral:** la superficie lateral es un rectángulo de base la longitud de la circunferencia de la base y de altura la generatriz del cilindro. $A_{lateral} = 2\pi r \cdot g$ • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de las dos bases. $A_{total} = 2\pi r \cdot g + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot (g + r)$
Cono		• **Área lateral:** la superficie lateral es un sector circular de radio la generatriz del cono y de longitud de arco la longitud de la circunferencia de la base. $A_{lateral} = 2\pi r \dfrac{g}{2} = \pi r \cdot g$ • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de la base. $A_{total} = \pi r \cdot g + \pi r^2 = \pi r \cdot (g + r)$
Tronco de cono		• **Área lateral:** la superficie lateral es un trapecio circular. $A_{lateral} = \dfrac{(2\pi R + 2\pi r) \cdot g}{2} = \pi g \cdot (R + r)$ • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de las dos bases. $A_{total} = \pi g \cdot (R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$

El apartado de volúmenes es común iniciarlo descomponiendo un ortoedro en cubos de volumen la unidad. Dado que los alumnos ya saben calcular volúmenes de ortoedros, dicho procedimiento se considera una tecnología.



Así, para calcular el volumen de este ortoedro, contaremos la cantidad de unidades de volumen de 1 cm^3 que contiene. Observa:

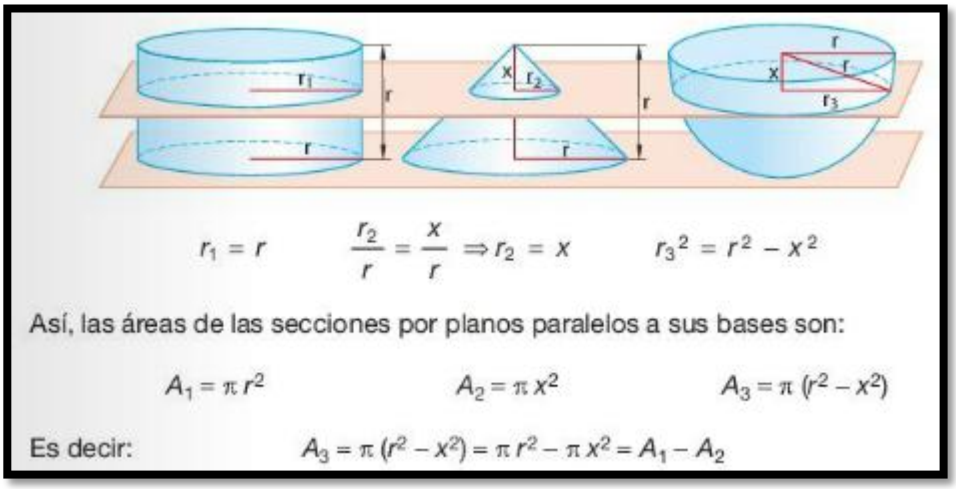
$$V_{ortoedro} = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 120\ cm^3$$

Fíjate en que el número de unidades de volumen que contiene coincide con el producto del área de su base por su altura. Por lo tanto:

$$V_{ortoedro} = A_{base} \cdot altura$$

Más adelante se presenta el principio de Cavalieri, el cuál es una técnica. En este caso no hay una tecnología, pues su demostración es muy larga y técnica. No obstante en el margen de algunos libros aparece una columna de monedas alineadas y otra desordenada, explicando que el volumen no cambia, lo cual para los alumnos podría interpretarse como una tecnología dado el nivel en el que están (ver imagen página 3).

A continuación, utilizando dicho principio como tecnología, se expresa la fórmula de un prisma y un cono, expresiones que se consideran técnicas. De forma análoga se presenta la tecnología que hace referencia al volumen de las pirámides y su técnica. Seguidamente la gran idea de Arquímedes es utilizada como tecnología de la fórmula del volumen de la esfera (técnica).



$$r_1 = r \qquad \frac{r_2}{r} = \frac{x}{r} \Rightarrow r_2 = x \qquad r_3{}^2 = r^2 - x^2$$

Así, las áreas de las secciones por planos paralelos a sus bases son:

$$A_1 = \pi r^2 \qquad A_2 = \pi x^2 \qquad A_3 = \pi (r^2 - x^2)$$

Es decir: $A_3 = \pi (r^2 - x^2) = \pi r^2 - \pi x^2 = A_1 - A_2$

Repitiendo de nuevo esquema, se presenta la tecnología que justifica la técnica que permite calcular el área de la esfera. Dicha tecnología consiste en descomponer la esfera en pirámides con centro el de la esfera y base triangular apoyada en la superficie esférica. Por último se suele presentar como técnica la fórmula que relaciona el volumen de cuerpos geométricos semejantes. La tecnología aparece como ejercicio.

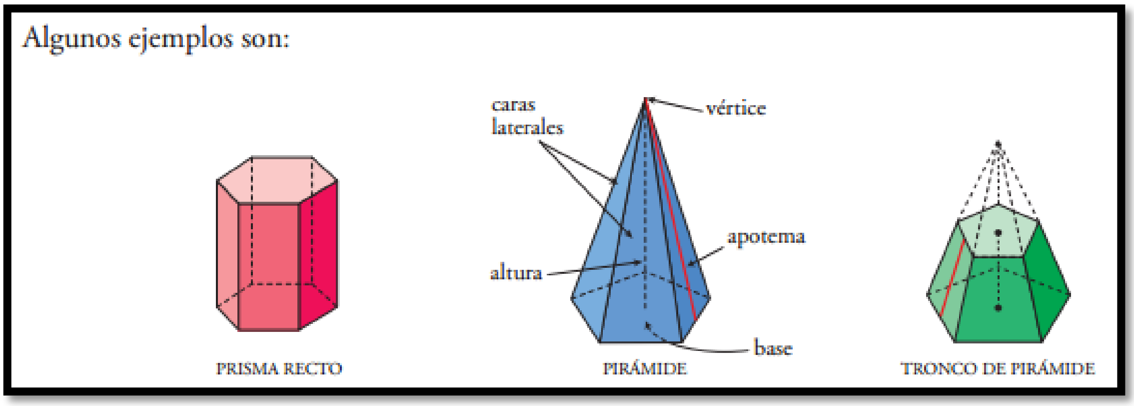
> De modo general, si x, y y z son las dimensiones de un objeto y k es la razón de semejanza de estas medidas, la razón de semejanza de los volúmenes es k^3:
>
> $$V' = k^3V$$

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

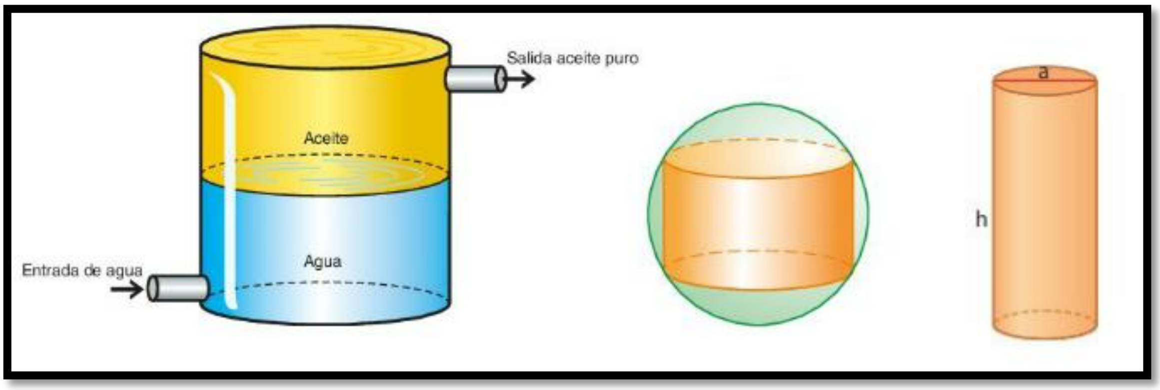
Se dedican muy pocos ejercicios a la interacción de los alumnos. Este tema en concreto permite múltiples actividades en las que los alumnos construyan poliedros, descubran por sí solos ciertas propiedades o muevan a su antojo un objeto tridimensional por medio de las TIC. De esta forma conseguimos que los alumnos estén motivados y no se dediquen la mayor parte de este tema a utilizar fórmulas de manera mecánica.

Además, éste último hecho tiene a mí parecer dos efectos bastante negativos: por un lado se trabajan los saberes y no los conocimientos en los problemas y por otro lado no hay una reflexión detrás del resultado, los alumnos ponen el número que les sale en la calculadora y ahí acaba el problema.

Otro aspecto llamativo que aparece con bastante frecuencia en los libros de texto son los estereotipos. Los estereotipos más recurrentes encontrados son los cuerpos geométricos apoyados sobre la base y los cuerpos geométricos con altura mayor que el ancho de la base. La siguiente ilustración ejemplifica este hecho:



Del mismo modo, como también apreciamos en la imagen, destacan los cuerpos geométricos presentados en perspectiva isométrica. Las editoriales tienden a presentar cada cuerpo geométrico en una determinada perspectiva. Todos los prismas y pirámides de base no cuadrangular se presentan en perspectiva isométrica y todos los cuerpos de revolución en perspectiva dimétrica. En los poliedros si existe cierta variabilidad aunque predomina la perspectiva cabellera.



Además los libros de texto exponen una variedad escasa de representaciones de los objetos matemáticos. La tendencia general es presentarlos mediante una única representación.

Por último, la descontextualización de los ejercicios dificulta el proceso de aprendizaje. Los alumnos necesitan imaginarse un contexto que les facilite la asimilación de contenidos, por lo que resulta un obstáculo añadido.

Una metodología que encaja muy bien en esta temática es el modelo de Van Hiele. La idea básica del modelo es que el aprendizaje de la geometría se construye pasando niveles de conocimiento. Según este modelo es necesaria una correcta instrucción para que los alumnos puedan pasar a través de los distintos niveles. Los Van Hiele identificaron las siguientes características del modelo a tener en cuenta para planificar la instrucción:

- <u>*Secuencial*</u>*: Una persona debe recorrer los niveles en orden. Para tener éxito en un nivel el estudiante tiene que haber adquirido las estrategias de los niveles anteriores.*
- <u>*Progresivo*</u>*: El progreso de un nivel a otro depende más del contenido y métodos de instrucción que de la edad.*
- <u>*Intrínseco y extrínseco (explícito/implícito)*</u>*: Los objetos inherentes (o implícitos) en un nivel pasan a ser objetos de estudio explícitos en el nivel siguiente.*
- <u>*Lingüístico*</u>*: Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y sus propios sistemas de relaciones entre símbolos.*
- <u>*Desajuste*</u>*: Si el profesor, los materiales empleados, el contenido, el vocabulario, etc. están en un nivel superior al del estudiante, este no será capaz de comprender lo que se le presente y no progresará.*

Los cinco niveles de Van Hiele son los siguientes:

<u>*Nivel 0: Visualización o Reconocimiento*</u>

En este nivel los alumnos perciben las figuras como un todo global, describiéndolas en relación a la forma, tamaño o posición de las figuras o elementos destacados.

<u>*Nivel 1: Análisis*</u>

El alumno analiza de un modo informal las propiedades de las figuras percibidas mediante procesos de observación y experimentación. Aunque empiezan a establecerse las propiedades esenciales de los conceptos el alumno es incapaz de ver relaciones entre propiedades y figuras.

Nivel 2: Ordenación o clasificación

El alumno ordena lógicamente las propiedades de los conceptos, empieza a construir definiciones abstractas y puede distinguir en la determinación de un concepto entre las propiedades que son necesarias para su determinación y propiedades suficientes.

Nivel 3: Deducción Formal

El alumno razona formalmente dentro del contexto de un sistema matemático complejo con términos indefinidos, axiomas, un sistema lógico subyacente, definiciones y teoremas.

Nivel 4: Rigor

El alumno puede comparar sistemas basados en axiomáticas diferentes y puede estudiar distintas geometrías en ausencia de modelos concretos. Este nivel es prácticamente inalcanzable por un estudiante de secundaria.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Conocimientos sobre figuras planas:

- Conocer y describir los principales polígonos regulares, sus elementos y sus propiedades básicas.
- Saber calcular el área de figuras planas básicas como el triángulo, el rectángulo o el círculo.
- Componer y descomponer figuras planas en figuras conocidas.
- Saber y conocer el teorema de Pitágoras.

Conocimientos sobre cuerpos geométricos:

- Conocer y describir las características de los principales cuerpos geométricos.
- Saber lo que es un desarrollo plano y su utilidad para calcular el área lateral de cuerpos geométricos.
- Conocer el procedimiento de como calcular el volumen de cilindros, prismas y pirámides.

Conocimientos generales de ambas

- Concepto de semejanza y razón de semejanza.
- Manejar las distintas unidades de medida y la relación entre ellas.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

En el currículo de Argón (Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo) se establecen los siguientes contenidos para el área de Matemáticas (bloque de Geometría) para el curso 2º ESO referidos a nuestro tema, Poliedros y cuerpos de revolución:

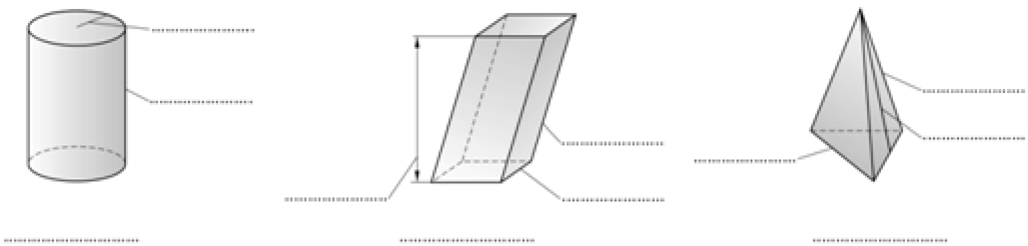
- *Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.*
- *Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones.*
- *Medida y cálculo de ángulos de figuras planas.*
- *Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.*
- *Circunferencia, círculo, arcos y sectores circulares.*
- *Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.*
- *Poliedros y cuerpos de revolución. Elementos característicos, clasificación. Áreas y volúmenes.*
- *Propiedades, regularidades y relaciones de los poliedros. Cálculo de longitudes, superficies y volúmenes del mundo físico.*
- *Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas.*

Como podemos ver, los alumnos sí deberían poseer los conocimientos previos necesarios.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

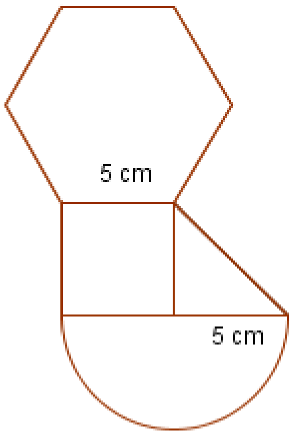
Antes de comenzar con el tema realizaré una prueba de evaluación inicial. Con ella podré comprobar que conocimientos están asentados y en cuáles pueda haber más dificultades, y así enfocar mejorar mi atención hacia las necesidades.

Ejercicio 1: Escribe el nombre de los siguientes cuerpos geométricos y los elementos que se indican.



Objetivo: identificar los cuerpos geométricos y sus principales características.

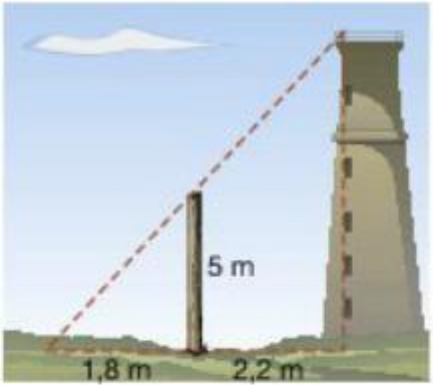
Ejercicio 2: Calcula el área de la siguiente figura:



Objetivo: conocer el área de las principales figuras planas.

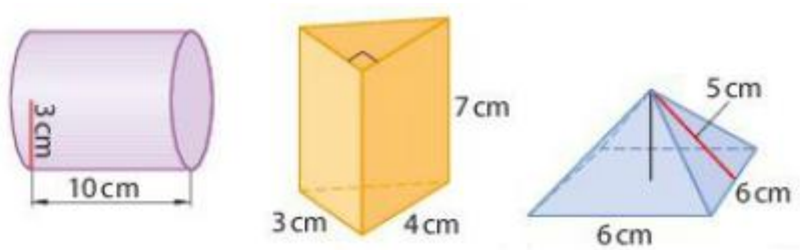
Ejercicio 3: En la figura puedes observar una torre y un poste cuyas sombras se superponen en un momento dado.

A partir de los datos facilitados calcular la altura de la torre.



Objetivo: Aplicación de la semejanza de triángulos.

Ejercicio 4: Calcula el volumen de las siguientes figuras:



Dibuja el desarrollo plano de los cuerpos anteriores y calcula el área lateral de cada uno.

Objetivo: calcular el volumen y el área lateral utilizando el desarrollo plano de cuerpos geométricos.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La razón de ser sobre la que se va a centrar la propuesta es la estrecha relación entre los cuerpos geométricos y la vida cotidiana. A lo largo de la propuesta veremos ejemplos en contextos cotidianos muy diversos, en los que es necesario reconocer el cuerpo geométrico del que se trata y razonar acerca de sus dimensiones para poder dar una respuesta al problema que se plantea.

Los problemas tendrán un contexto cercano a los alumnos, de manera que entiendan que la razón de ser de los poliedros y cuerpos geométricos no es otra que sus múltiples aplicaciones en la vida real.

También tendremos en cuenta, por ejemplo al hablar de las simetrías, el impacto que tienen en la pintura, escultura o arquitectura. La simetría ha sido utilizada como símbolo de belleza y perfección, y muchas obras de arte así lo manifiestan.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Si. La geometría es una de las ciencias más antiguas. Surgió con una finalidad práctica, se pretendía buscar métodos para calcular áreas, volúmenes y longitudes. Un ejemplo concreto es el cálculo del área de una parcela para poder reconstruirla tras sufrir una inundación, de donde precisamente viene el nombre geometría: "medición de la tierra".

La civilización babilónica contribuyó en la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro y además consideraron que la longitud de la circunferencia era un valor intermedio entre los perímetros de un cuadrado inscrito y un cuadrado circunscrito a dicha circunferencia.

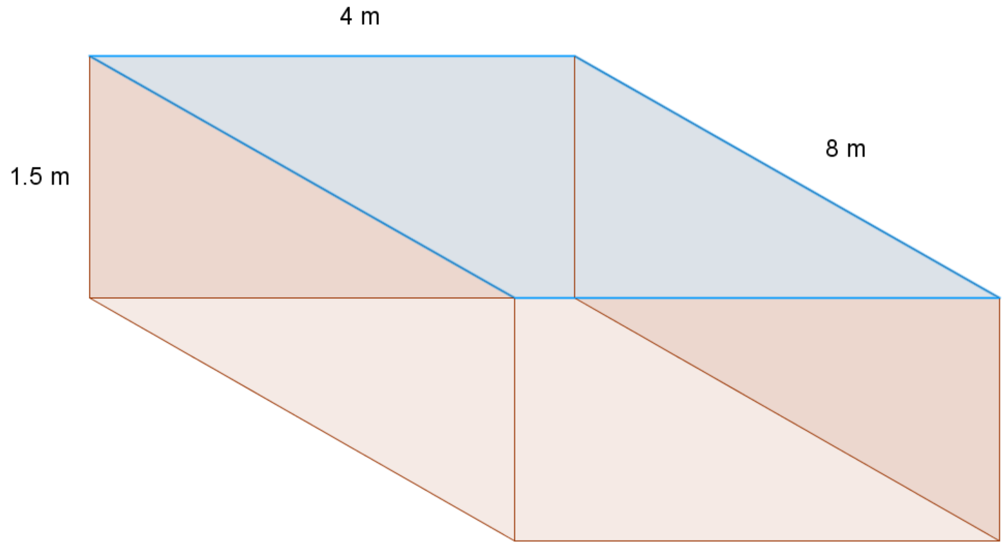
La civilización egipcia logró grandes avances en el cálculo de volúmenes, áreas y longitudes, como se muestra en el papiro de Ahmes, todos ellos con fines prácticos. A pesar de que algunas aproximaciones eran bastante buenas (como el valor de π: 3.16), no distinguían entre cálculos exactos y aproximados.

La civilización griega comenzó a asentar las bases de una geometría más formal. Para que una tesis sea cierta debe apoyarse en razonamientos válidos. Bajo este punto de vista Euclides decide construir la geometría a partir de 5 postulados, proposiciones intuitivamente claras. Por otro lado Arquímedes también realizó trabajos en distintas áreas de la geometría, si bien el más famoso es su ingenioso cálculo del volumen de la esfera a partir del cilindro y el cono.

Por último, la búsqueda de la perfección ha llevado a muchas civilizaciones a utilizar en sus obras la geometría con ese fin. Un ejemplo lo podemos encontrar en los griegos. La escultura griega plantea un estilo naturalista, que pretende imitar la realidad, pero idealizado, esto es, en función de un ideal de belleza que se basa en la proporción, la simetría y la armonía.

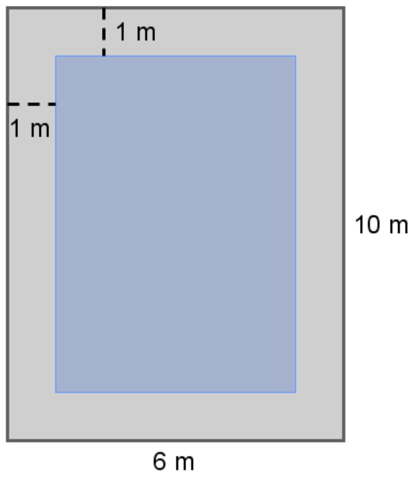
3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

La familia Jiménez quiere diseñar una piscina en su casa de campo para el verano. A continuación se muestra el esquema de la piscina:

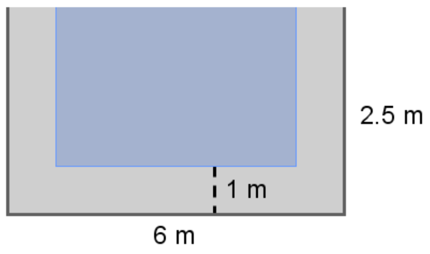


Dado que no tienen mucha idea de construir piscinas, deciden contratar dos albañiles para que hagan la obra.

Los albañiles les dicen que necesitan hacer un refuerzo de hormigón alrededor de la piscina, como muestran las siguientes figuras.



Vista desde arriba

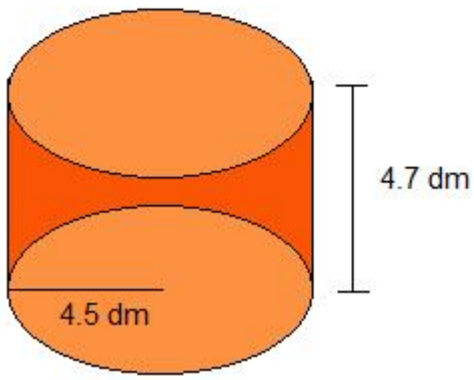


Sección por el ancho

¿Cuántos metros cúbicos de hormigón son necesarios?

Los albañiles también necesitan saber cuánto tiempo durará la obra aproximadamente para comunicárselo a la familia Jiménez.

La hormigonera, que es la máquina que utiliza el albañil para hacer el hormigón, tiene la siguiente forma:



¿Cuántos metros cúbicos de hormigón caben en el tambor de la hormigonera (figura de la derecha)?

¿Cuántas veces deberán usar la hormigonera para realizar el refuerzo de la piscina?

Los albañiles trabajan 10 horas al día y se turnan (uno está con la hormigonera y el otro mientras coloca el hormigón). Tardan en realizar ambas tareas media hora. ¿Cuántos días tardarán en acabar la obra?

Finalmente hay que embaldosar el interior de la piscina. ¿Cuántas baldosas necesitará el albañil como mínimo si la baldosa que eligió la familia Jiménez tiene un área de 50 cm^2?

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Se trata de una actividad de trabajo grupal a realizar en las primeras sesiones. Aunque ya han trabajado con áreas y volúmenes el curso anterior, esta actividad permite recordar ambos conceptos y trabajar otros como descomponer el volumen del refuerzo de la piscina. Por esta razón, dividir la clase en grupos de 4 y hacer un seguimiento por parte del docente a lo largo de la actividad, favorece el trabajo colaborativo y ayuda a refrescar de una manera bastante natural los dos conceptos básicos sobre los que gira el tema.

E. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Campo de problemas 1: Elementos característicos de cuerpos geométricos

Problema 1.1: ¿Cuántos poliedros regulares hay?

Un poliedro es regular cuando sus caras son polígonos regulares e iguales entre sí, y en cada vértice el mismo número de aristas.

En primer lugar vamos a recordar algunos polígonos regulares, que serán las caras de nuestro poliedro. ¿Qué polígono regular tenía 3 lados? ¿Y 4? ¿Y 5?

Los poliedros regulares los podemos construir a partir de su desarrollo en el plano. Es importante **dejar un hueco entre dos caras del mismo vértice**, ¡para poder doblar las caras y construir nuestro poliedro!

Para averiguar cuántos poliedros regulares hay vamos a prestar atención a un vértice, ya que todos son iguales. ¿Podríamos tener 2 caras compartiendo vértice? ¿Y 3?

Una vez que nos hemos dado cuenta que necesitamos al menos 3 caras por vértice, comencemos con los triángulos. Vamos a señalar con un punto rojo nuestro vértice.

¿Podemos tener en el vértice rojo 3 triángulos con hueco para poder unir las caras? ¿Y con 4? ¿Y con 5? ¿Qué ocurre si tenemos 6?

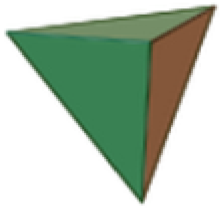
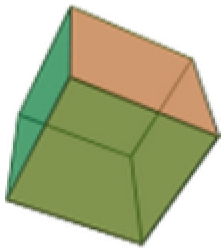
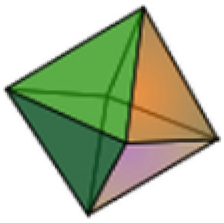
Hagamos ahora lo mismo con cuadrados. ¿Podemos tener 3 cuadrados en el vértice rojo? ¿Y qué ocurre con 4?

No podemos construir más poliedros con los cuadrados. Pasemos ahora a los pentágonos. ¿Podemos unir 3 pentágonos en el mismo vértice?

Como vemos, con 4 pentágonos nos pasaría igual que con los cuadrados, ¡no podríamos construirlo!

¿Qué ocurre si tenemos 3 hexágonos?

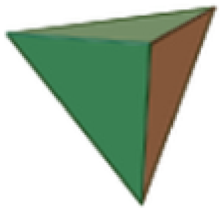
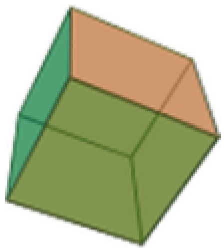
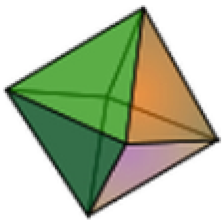
Pues ya los tenemos todos, ¡no podemos construir más! A continuación se presentan los 5 poliedros que hemos encontrado. Rellena la tabla con los datos que hemos obtenido y así sabrás como se llama cada uno.

					
Nombre	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Tipo de cara					
Nº de caras por vértice					

En las siguientes hojas (**Anexo 1**) se encuentran los desarrollos planos de los poliedros. ¿Sabríais decir que poliedro se construye a partir de cada uno?

Escoger cada miembro del grupo uno de ellos y construirlo. No los perdáis, los necesitaréis para el próximo problema. Los podéis dejar en clase si lo preferís.

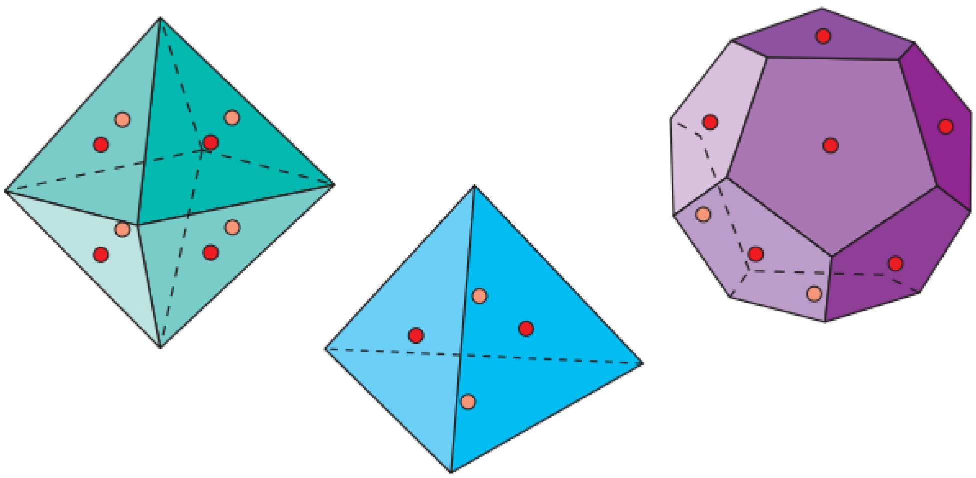
Problema 1.2: Los poliedros, Euler y los duales

					
Nombre	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Nº de caras (C)					
Nº de aristas (A)					
Nº de vértices(V)					
$V - A + C$					

Rellenar la tabla por grupos, utilizando los poliedros de la clase anterior.

El número obtenido en la última fila se llama característica de Euler. Euler demostró que esa relación entre vértices, aristas y caras la cumplen al menos todos los poliedros convexos.

A continuación se muestran tres de los sólidos platónicos. Hemos señalado en rojo los centros de las caras frontales y en un rojo más claro los centros de las caras traseras.



Uniendo los puntos de forma conveniente obtenemos un poliedro regular. Si lo crees necesario puedes hacerlo en tu cuaderno. ¿Cuál obtienes en cada caso?

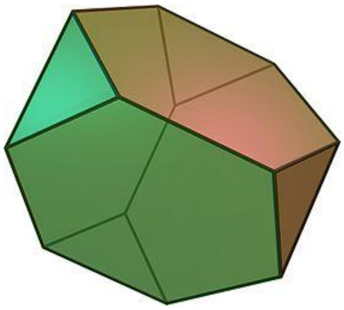
Dibuja ahora los poliedros obtenidos y repite los pasos, toma el centro de cada cara y trata de unirlo buscando un poliedro. ¿Qué obtienes?

Los poliedros con esta propiedad se llaman poliedros duales. Observa la tabla que rellenaste antes y deduce las relaciones que hay entre caras, aristas y vértices de dos poliedros duales.

Problema 1.3: Poliedros truncados

Truncar un poliedro consiste en “cortar” sus vértices. Si cortamos todos los vértices de un poliedro regular de la misma forma, obtenemos los poliedros arquimedianos.

La siguiente figura es un tetraedro truncado:

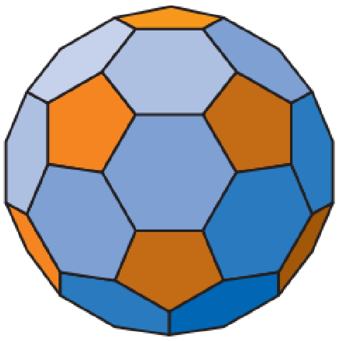


Como podemos ver todas sus caras ya no son triángulos.

Ya contamos los vértices, aristas y caras de cada poliedro regular en el Problema 2. Fíjate bien lo que ocurre en un vértice al truncarle. ¿Cómo cambia el número de caras? ¿Y el de vértices? ¿Y las aristas? Usando la tabla del Problema 2 calcula el número de caras, aristas y vértice del tetraedro truncado.

Dibuja ahora como sería un cubo truncado. ¿Cuántas caras, aristas y vértices tendrá?

La siguiente figura es un poliedro truncado de un poliedro regular. ¿Sabrías decir de cuál es? Explica por qué.



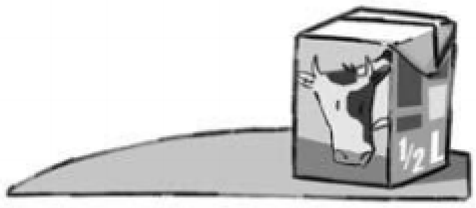
Campo de problemas 2: Cálculo de áreas de cuerpos geométricos

Problema 2.1: En el circo

El dueño de un circo quiere construir una carpa con forma de pirámide cuadrangular. ¿Qué cantidad de lona tiene que comprar si la apotema de la pirámide es de 20 m y el lado de la base mide 16 m?

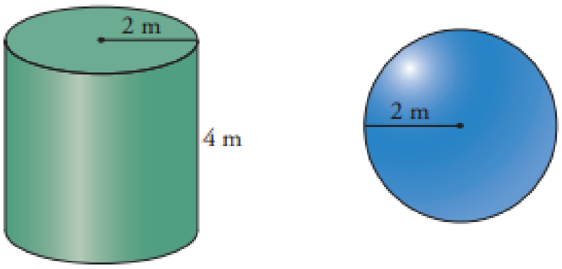
Problema 2.2: El tetra brik

Una empresa quiere hacer un tetra brik de base cuadrada de 6 centímetros de lado y con capacidad de medio litro. ¿Cuánto cartón va a necesitar?



Problema 2.3: La duda del pintor

Un pintor ha cobrado 1000 € por pintar el lateral de un depósito cilíndrico de 4 m de altura y 4 m de diámetro. ¿Cuánto deberá cobrar por pintar un depósito esférico de 2 m de radio?



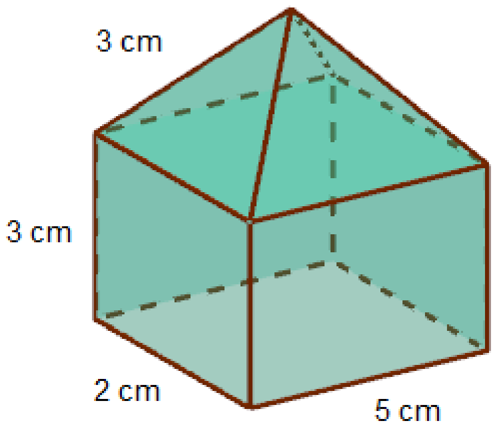
Problema 2.5: La tienda de campaña

Una tienda de campaña de forma cónica tiene una altura de 2 m y un diámetro de 1 m. ¿Cuántos metros cuadrados se necesitan para forrarla, incluyendo la base?

Campo de problemas 3: Descomposición de cuerpos geométricos

Problema 3.1: El acuario

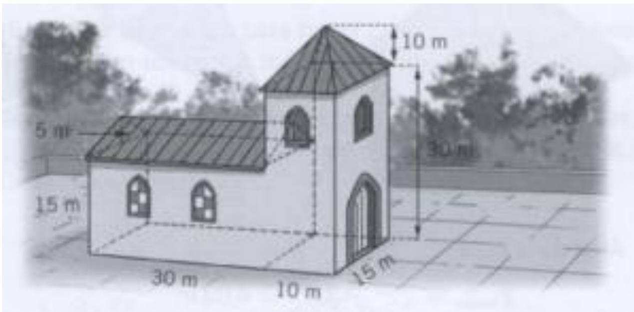
Una empresa que fabrica acuarios recibe un pedido. Tienen que diseñar un acuario con la siguiente forma:



- ¿Cuántos metros cuadrados de cristal necesitarán para construirlo?
- ¿Qué capacidad en litros tendrá el acuario?

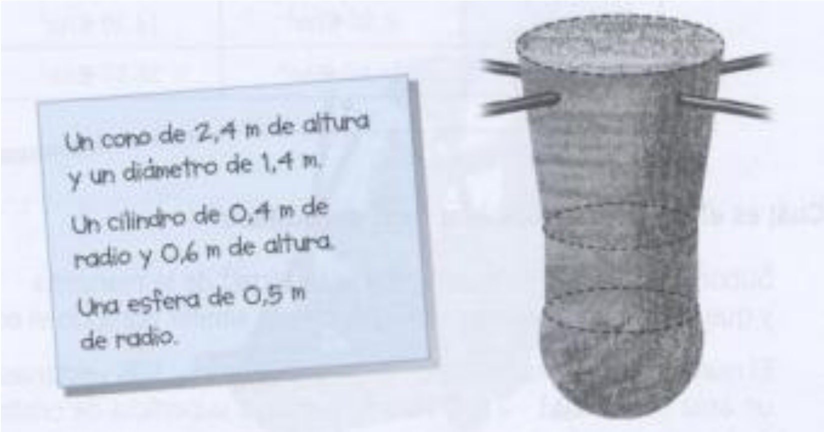
Problema 3.2: La construcción de la iglesia

Determina el coste de construir este edificio, sabiendo que el metro cuadrado de ladrillo cuesta 4.35 € y el de tejas 9.65 €.



Problema 3.3: La escultura

La escultora María Cincel ha recibido un encargo del ayuntamiento de Buril. Ha pensado en realizar una escultura de granito, piedra predominante en los alrededores. Cuando ha llamado a la cantera para que la proporcionen el granito, le han dado la siguiente información:



Para conseguir esa estructura deberá realizar un corte al cono y otro a la esfera, pero ¿a qué altura los tiene que hacer?

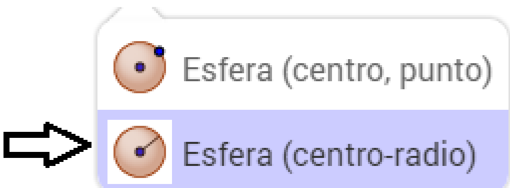
Campo de problemas 4: Semejanza de cuerpos geométricos

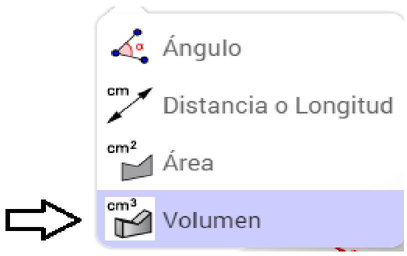
Problema 4.1: Semejanza (Práctica Geogebra)

Geogebra 3D es una programa online que nos permite trabajar con los poliedros y cuerpos de revolución.

En esta ocasión, dedicaremos una sesión a trabajar el concepto de semejanza y romper con la idea que tienen los alumnos sobre la llamada ilusión de linealidad, esto es, la tendencia a aplicar modelos lineales a situaciones en las que no son aplicables.

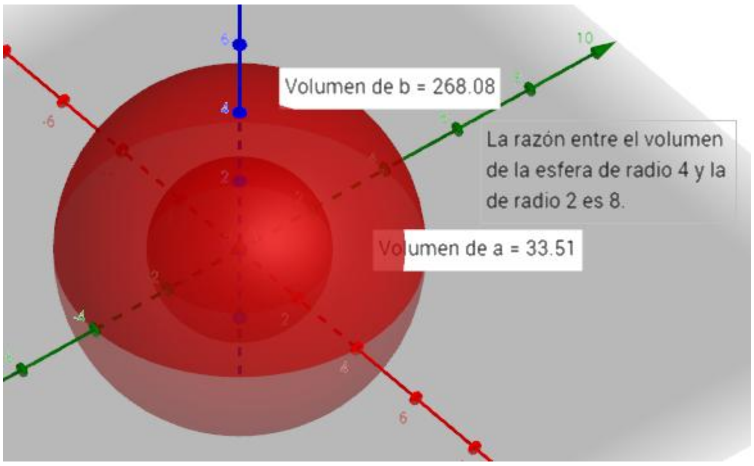
Semejanza de esferas: Primero pincharemos en la herramienta *Esfera (centro-radio)*. Tomaremos como centro el origen de coordenadas (0,0,0) y radio 2. Después seleccionamos *Volumen* en el siguiente desplegable y clicamos en nuestra esfera.





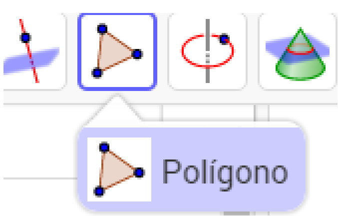
Repetimos el proceso con una esfera de de mismo centro (0,0,0) pero radio 4. Calculamos también su volumen. ¿Qué obtenemos si dividimos ambos volúmenes?

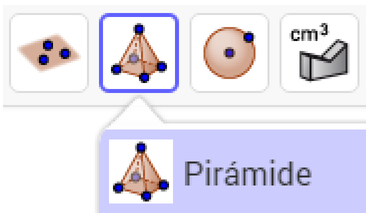
Piensa en la fórmula del volumen en cada caso. ¿Qué obtienes si las divides?



<u>Semejanza de pirámides:</u> Vamos a construir una pirámide y después una segunda con las medidas dobladas, para comparar ambos volúmenes.

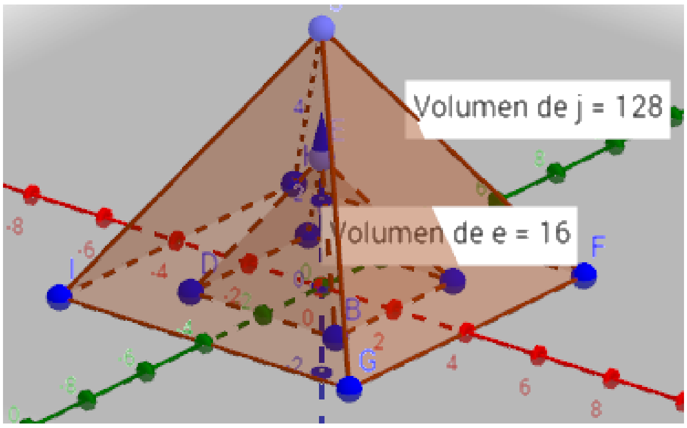
Primero introducimos en *Entrada* los puntos $(2,2,0), (2,-2,0), (-2,2,0)$ y $(-2,-2,0)$. A continuación clicamos en la quinta herramienta llamada *Polígono* y unimos los vértices de nuestra base.





Por último clicamos en la herramienta *Pirámide*. Elegiremos nuestro polígono como base y como vértice el punto $(0,0,3)$. Para obtenerle basta con pinchar en el 3 de la línea azul (es el eje z). Luego calculamos su volumen como hicimos antes con las esferas.

Nuestra segunda pirámide tendrá como base los puntos $(4,4,0), (4,-4,0), (-4,4,0)$ y $(-4,-4,0)$. El vértice será $(0,0,6)$. Vemos cuál es su volumen. ¿Qué obtenemos si dividimos ambos volúmenes?



Compara ahora las dos fórmulas en cada caso y trata de averiguar como ha ocurrido.

Nota: (Dependiendo del tiempo se pueden trabajar con otras construcciones sencillas como el cilindro o el cono.)

Problema 4.2: Jugando con el cono

Si en un cono reducimos a la mitad el radio de la base y mantenemos la misma altura, ¿el volumen se reduce a la mitad?

¿Y si mantenemos la misma base y reducimos la altura a la mitad?

Problema 4.3: Pirámides

Una pirámide de base cuadrada se corta por un plano paralelo a la base y que pasa por el punto medio de la altura. ¿Cuál será la relación entre los volúmenes del tronco de pirámide y la pirámide pequeña a la vista del anterior ejercicio?

Problema 4.4: Formalizando ideas

Demuestra analíticamente la relación entre volúmenes $V' = k^3 V$, en la que k es la razón de semejanza de las dimensiones de dos objetos semejantes en cada una de las tres dimensiones.

Campo de problemas 5: Cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos

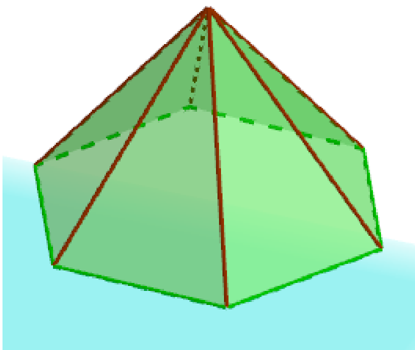
Problema 5.1: La esfera y el cilindro

En una botella de forma cilíndrica, llena de agua, introducimos una esfera, de radio 1m, cuyo diámetro es igual a la altura de la botella.

- Calcula el volumen de agua que se desbordó.
- ¿Qué altura alcanzará el agua si sacamos la esfera de la botella?

Problema 5.2: La impresora 3D

Una impresora 3D imprime una pirámide hexagonal a una velocidad de $45cm^3/h$. La pirámide mide 8 cm de arista de la base y tiene una altura de 15 cm.



Calcula el tiempo necesario para imprimir la pirámide.

Problema 5.3: La hoja de Galileo

En el año 1638 el gran matemático Galileo propuso el siguiente problema:

“Si se enrolla una hoja de papel en los dos sentidos, se obtienen dos cilindros distintos.

¿Tienen estos cilindros el mismo volumen? ”

Campo de problemas 6: Principio de Cavalieri

Problema 6.1: Torres Kio

Hallar el volumen de las torres Kio, sabiendo que su base es un cuadrado de 35 m de lado, y la altura es de 114 m.

Problema 6.2: Capital Gate

El Capital Gate es un rascacielos situado en Abu Dhabi, considerado el edificio más inclinado del mundo. Tiene una altura de 160 m y cada sección paralela a la superficie es de unos 25000 m^2.

Halla el volumen del edificio.

Campo de problemas 7: Planos de simetría

Problema 7.1: Simetrías

Estableced grupos de cinco y analizad cada uno un sólido platónico usando la técnica *Rompecabezas*. Indicad sus planos de simetría.

En grupos como estáis, realizar las siguientes cuestiones.

Las pirámides regulares también tienen planos de simetría. ¿Cuántos tiene una pirámide de base triangular? ¿Y una de base cuadrangular? ¿Sabrías decir cuántos tienen en función de los lados de la base?

Ahora hagamos lo mismo con los prismas que nos proporciona el profesor. Rellena una lista con los diferentes planos de simetría de cada figura. ¿Hay algún plano que tengan en común todos los prismas? ¿Puedes decir cuántos planos de simetría tiene un prisma con base un polígono regular de 19 lados?

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Primero de todo, cabe destacar que en la mayoría de ejercicios no basta con aplicar las fórmulas de áreas y volúmenes para llegar a la solución. Los problemas están planteados de forma que la respuesta en muchos casos sea una relación, un precio, un tiempo, exija un razonamiento…

Hay algunos problemas que requieren de un planteamiento algebraico para su resolución. En general los libros de texto, como ya hemos comentado, se centran en la parte aritmética.

Por otro lado se pretende relacionar los contenidos actuales con los contenidos anteriores. Así pues los alumnos no sólo tendrán que aplicar las técnicas anteriormente mencionadas, sino también deberán realizar cambios de unidades o utilizar la proporcionalidad, entre otros aspectos.

Además deberán hallar las áreas y volúmenes de distintas formas, para lo que deberán aplicar distintas estrategias de resolución en cada caso.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

El *Campo de problemas 1* se realizará por grupos de 5 personas. Se utilizará la técnica *Rompecabezas*. En un primer momento cada miembro del equipo prepara su parte del análisis del sólido platónico de forma individual. A continuación, se forman grupos de expertos (integrantes de otros grupos que han analizado el mismo sólido platónico) y se intercambia información. Finalmente, cada uno vuelve a sus grupos originales y explica a su grupo la parte que ha preparado.

Como vemos en este caso partimos totalmente desde la razón de ser. Además seguimos los niveles de Van Hiele. En un primer momento se establece una pequeña exploración individual del objeto, analizando las propiedades mediante la observación para más adelante, establecer cada grupo una clasificación de los mismos. Al final de la clase el docente realizaría una pequeña institucionalización de los conceptos tratados en las sesiones.

Los *Campos de problemas 4 y 7* siguen la misma estructura en cuanto a niveles. En el caso del *Campo de problemas 4*, la primera sesión se llevará a cabo en el aula de ordenadores por medio del programa libre *Geogebra*. En este caso en vista de tener un posible volumen de clase elevado, las actividades se realizarán por parejas. No es necesaria tampoco una previa clase teórica del docente, pues han tratado la semejanza en la geometría plana y las actividades están bastante guiadas. Se trataría de un modelo metodológico de aprendizaje por descubrimiento. El *Campo de problemas 7* requerirá de una breve explicación del docente acerca del concepto de *plano de simetría*.

Los *Campos de problemas 2, 3 y 5* tratan del cálculo de áreas y volúmenes. Son conceptos que en su mayoría ya conocen por lo que el docente comenzará recordando las fórmulas de manera participativa, pidiendo que los alumnos se involucren en el proceso. Posteriormente se realizarán los problemas propuestos y los alumnos serán los que los corrijan, bien saliendo a la pizarra o bien explicando el procedimiento seguido con el resultado. En la parte de *Tecnologías* se detalla el procedimiento a seguir para los conceptos nuevos.

El *Campo de problemas 6* se realizará posteriormente a la descripción de técnicas y tecnologías.

F. Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

Campo de problemas 1: Elementos característicos de cuerpos geométricos y desarrollo plano

Ejercicio 1.1

¿Puede tener un poliedro convexo el mismo número de caras, aristas y vértices? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 1.2: ¿Es cuerpo de revolución?

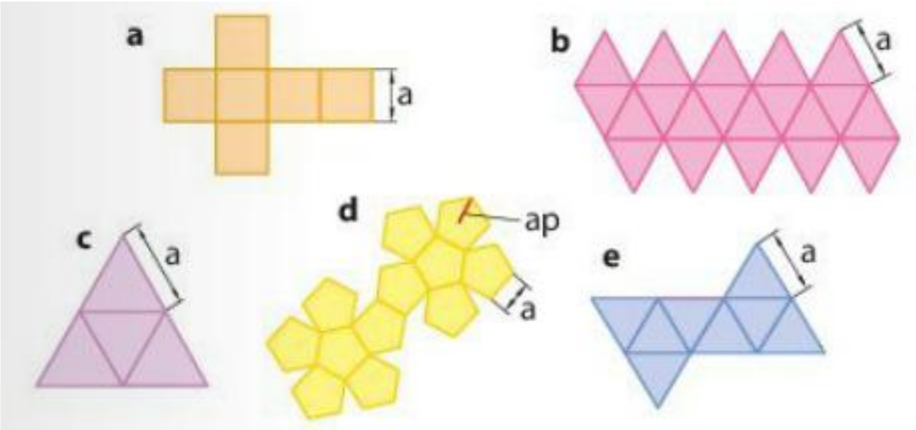
¿Cuáles de las siguientes figuras son cuerpos de revolución? En caso afirmativo indica su nombre en caso de que le conozcas.

Dibuja en el caso de los cuerpos de revolución el eje de revolución y la figura plana que lo genera.

Ejercicio 1.3

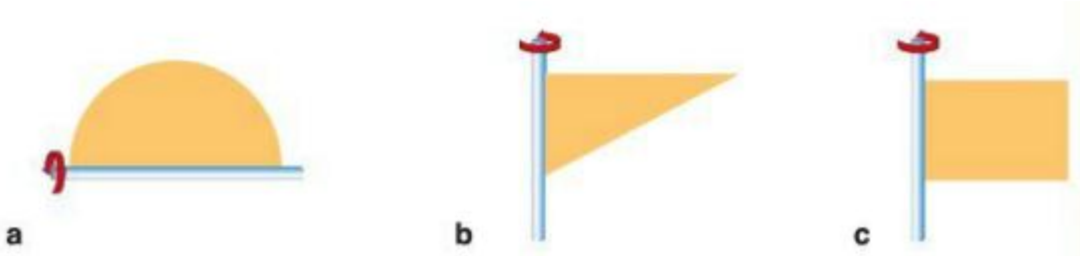
Relaciona cada poliedro regular con su desarrollo plano y di la fórmula que permite calcular su área.

Dodecaedro – Octaedro – Cubo – Icosaedro - Tetraedro



Ejercicio 1.4: ¿Qué cuerpo de revolución es?

Dibuja el cuerpo de revolución que se obtiene al girar 360º cada una de estas figuras planas alrededor del eje indicado:



Ejercicio 1.5: "¿Quién tiene…? Yo tengo…"

Se trata de un juego en el que todos los alumnos tienen una carta. Por un lado viene una pregunta y por el otro lado la respuesta a la pregunta de otro compañero. Se trata de hacer una cadena de preguntas y respuestas. Es una actividad distinta e interactiva en la que los alumnos repasarán conceptos importantes del tema jugando.

Campo de problemas 2: Cálculo de áreas de cuerpos geométricos

Ejercicio 2.1

El volumen de una esfera es $288\,\pi\, cm^3$. ¿Cuál es su área?

Ejercicio 2.2

Calcula el área lateral y el volumen de la pirámide de Chichén Itzá (México) cuyas bases miden 18 m y 55 m de arista y tiene una altura de 30 m. (Observa que es un tronco de pirámide y que cada cara es un trapecio isósceles).

Ejercicio 2.3

Dos cilindros tienen la misma área lateral y sus radios miden 3 cm y 5 cm. La generatriz del primero es 12 cm. ¿Cuál es la longitud de la generatriz del segundo?

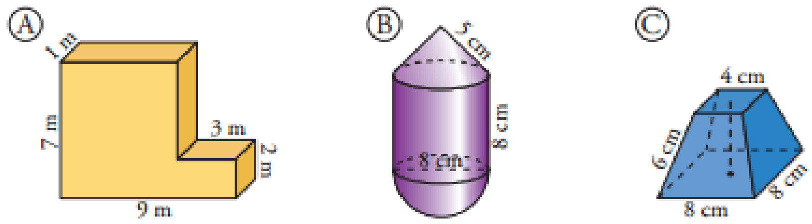
Ejercicio 2.4

Se quiere pintar una habitación con forma de prisma recto de base cuadrada de lado 3 m, y la altura de la habitación es 3,5 m. El pintor cobra 3 € por metro cuadrado. ¿Cuánto costará pintar las paredes de la habitación?

Campo de problemas 3: Descomposición de cuerpos geométricos

Ejercicio 3.1

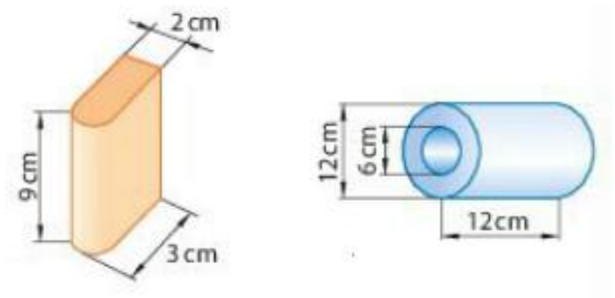
Un ingeniero debe calcular el volumen de las siguientes piezas para hacer el pedido del material. ¿Qué volumen tiene cada una?



Ahora quiere saber cuántos litros de pintura va a necesitar para pintar 20 piezas del tipo A, 10 del tipo B y 15 del tipo C (todas las quiere del mismo color).

Ejercicio 3.2

Calcula el área y el volumen de los siguientes cuerpos geométricos:



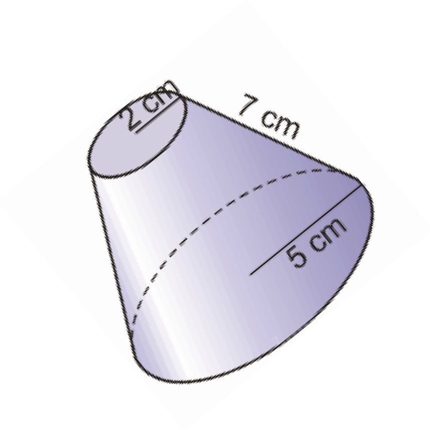
Campo de problemas 4: Semejanza de cuerpos geométricos

Ejercicio 4.1

Queremos construir una pirámide de base cuadrada y volumen $2\ m^3$ semejante a otra, cuya base mide $4\ m$ de lado y altura $3\ m$. Calcula las medidas de la nueva pirámide.

Ejercicio 4.2

Halla la altura de este tronco de cono:



Ejercicio 4.3

El Pentágono es un edificio situado en Washington. Es considerado el edificio de oficinas más grande de todo el mundo, con una superficie total de unos 616.500 m². Como vemos en las imágenes es un edificio bastante particular que contiene un patio pentagonal en su interior.

Calcula la razón entre el lado de los dos pentágonos. Para ello puedes medir con la regla en la figura de la derecha. ¿Cómo calcularías la superficie del patio interior?

<u>Campo de problemas 5: Cálculo de volúmenes de cuerpos geométricos</u>

<u>Ejercicio 5.1: El estanque</u>

Un estanque tiene forma de prisma hexagonal. Su apotema mide 3 m y su altura mide 4 m. Está lleno de agua y se quiere vaciar mediante un grifo que arroja 100 litros por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse?

<u>Ejercicio 5.2: ¿Qué polígono es?</u>

¿Qué polígono forma la base de un prisma de 18 aristas?

Calcula su volumen sabiendo que el lado mide 4 m y la altura es 10 m.

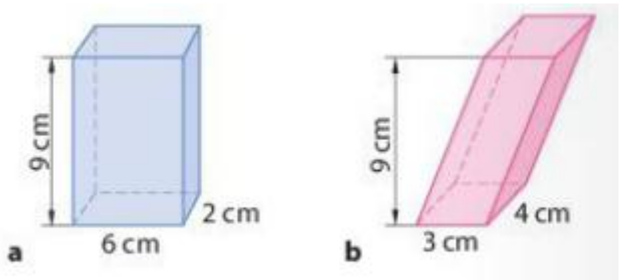
<u>Ejercicio 5.3: Medidas de la Tierra</u>

Aproximar el volumen y la superficie de la Tierra, sabiendo que su radio es de 6371 km. (Suponemos que la Tierra es una esfera)

<u>Campo de problemas 6: Principio de Cavalieri</u>

<u>Ejercicio 6.1</u>

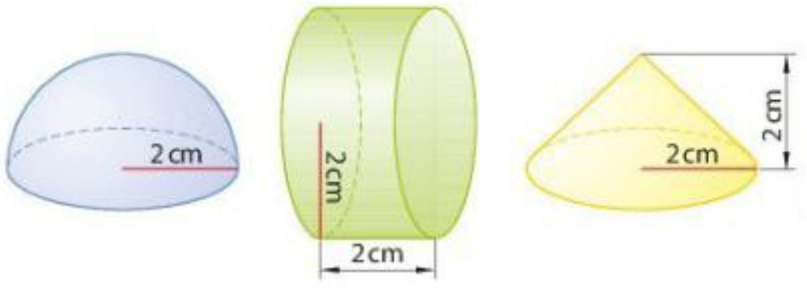
Observa estos cuerpos geométricos. Aplica el principio de Cavalieri y razona si tienen el mismo volumen.



Ejercicio 6.2

Calcula los volúmenes de la semiesfera, de cilindro y del cono representados a continuación.

¿Cómo se relaciona el volumen de la semiesfera con el de los otros dos cuerpos geométricos? Justifica tu respuesta.



Campo de problemas 7: Planos de simetría

Ejercicio 7.1

Dibuja un plano de simetría de una pirámide de base hexagonal, de un cilindro, de un cono y de una esfera.

¿Cuáles de estos cuerpos geométricos tienen infinitos planos de simetría?

Ejercicio 7.2

¿Cuántos planos de simetría tienen las Torres Kio? ¿Y la pirámide de Chichén Itzá?

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Las técnicas necesarias para la realización de los ejercicios serán las relacionadas con el campo de problemas. En general no se precisan nuevas modificaciones de la técnica, pues se trata de que reconozcan que se puede usar la técnica y que recuerden como llevarla a cabo. Así mismo la aplicación de las técnicas requerirá que el alumno esté familiarizado con el objeto en cuestión.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Las técnicas se adecuan al campo de problemas. Ambos aspectos están ordenados en orden de pertenencia. Las técnicas 1-4 hacen referencia al campo de problemas 1, las técnicas 5, 6 y 7 se corresponden al campo de problemas 2, 3 y 4 respectivamente, los campos de problemas 5 y 6 tratan de volúmenes, técnicas número 8, 9 y 10 y por último el campo de problemas 7 se corresponde con la técnica número 11.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Se trata de ejercicios de repaso. Algunos de ellos se llevarán a cabo en el aula y otros formarán parte de la tarea para casa.

Dependiendo del tiempo que quede de clase al final de cada sesión (se estima entre 5 y 10 minutos), los alumnos realizarían dichos ejercicios. Se corregirían al día siguiente en los primeros 5 minutos. Los alumnos saldrán de forma voluntaria y se valorará con positivos.

La forma de trabajo de estos ejercicios será individual, pues se trata de conceptos vistos durante la sesión.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

La justificación de las técnicas va a ser variada. En unos casos una justificación algebraica será conveniente mientras que en otros casos una justificación visual o manipulativa puede ser más pertinente.

El objetivo es que los alumnos tengan diferentes estrategias de resolución y en este caso de justificación o demostración, pues puede que un alumno se sienta más cómodo con un tipo de justificación que con otra, o que realmente la entienda mejor y se sienta más seguro.

Las justificaciones de tipo algebraico son necesarias, pues nos permiten manipular cantidades que no conocemos y trabajar con ellas. Además es conveniente que los alumnos comiencen a familiarizarse con este tipo de justificaciones, pues en cursos superiores será la predominante.

Este tema también permite justificaciones de tipo visual. Hay alumnos que tienen una buen visión espacial y este tipo de demostraciones les resultarán sencillas de entender. Con las prácticas de *Geogebra* pretendemos fomentar este tipo de tecnología.

Por otro lado, no podemos obviar el proceso de justificación basado en la experiencia. Los alumnos son capaces de observar qué ocurre en casos particulares y tratar de obtener conjeturas a partir de ellos. A través del material manipulativo se puede acercar a los alumnos esta forma de resolver problemas y tratar de justificar por qué ocurren ciertos fenómenos.

En el **Anexo 2** se detalla cada tecnología asociada a cada técnica.

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

La justificación de técnicas como el área o volumen de la esfera serán llevadas a cabo por el profesor, pues tanto la idea como su justificación son demasiado complejas y técnicas para el nivel de los alumnos.

Por otro lado tenemos técnicas como la semejanza de cuerpos geométricos, para la cual se destinará una sesión de *Geogebra* y en la cual se pretende que los alumnos sean capaces de observar que sucede al variar las medidas de un cuerpo geométrico. De tarea deberán comprobar algebraicamente lo que han experimentado en el aula (Problema 4.4).

Para justificar el área total de los cuerpos se llevará a cabo una demostración guiada, en la que los alumnos deberán participar activamente. Se trata de conocimientos que acaban en unidades didácticas anteriores por lo que el objetivo es ir refrescando conocimientos entre todos más que justificar una técnica nueva.

El volumen del cilindro y el prisma será llevado a cabo por el profesor. El volumen de la pirámide cuadrangular la pueden obtener los alumnos de manera guiada. En la demostración de la pirámide y del cono los alumnos podrán participar más, pues su demostración es muy parecida a la del cilindro y el prisma.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

En el proceso de institucionalización deben participar tanto alumnos como el profesor, pues es el momento en el que se expresan la construcción de ideas que ha tenido lugar durante la clase.

En general el proceso de institucionalización consistirá en una puesta final en común. En caso de que los alumnos estén trabajando por grupos, el profesor nombrará un representante por grupo para que traslade las experiencias y resultados obtenidos por el grupo al resto de la clase.

Tras la comparación de resultados de los distintos grupos, el profesor tratará de buscar el debate lanzando preguntas acerca de lo ocurrido en clase y sobre casos que no hayan tratado, buscando que los alumnos puedan responder basándose en su intuición o capacidad para extrapolar a otras situaciones. Un ejemplo lo podríamos encontrar en el problema 2, donde ven que los sólidos platónicos cumplen el teorema de Euler. *"¿Se cumplirá el teorema para las pirámides?"*. *"¿Y para los prismas?"* Cuando comparan en *Geogebra* el volumen de cuerpos geométricos semejantes, cabe preguntarles por los sólidos que no han sido vistos: *"¿Ocurrirá lo mismo?"*.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

El aprendizaje se basa en la construcción de conocimientos en la medida de lo posible por parte del alumno. Es por ello que *la metodología consistirá en la interacción y fomentará la participación del alumnado, generando reflexiones sobre la realidad y dándoles posibilidades de experiencia y contraste con lo que enseñamos (García, 1998).*

El profesor tendrá un rol más pasivo en las tecnologías destinadas a los estudiantes, tratando de guiarles por el camino adecuado.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

Esta unidad didáctica se llevará a cabo en 10 sesiones, basadas en clases de 55 minutos.

SESIÓN	DISTRIBUCIÓN DEL TIEMPO		
1	Prueba de evaluación inicial (25’)	Problema de introducción razón de ser (30’)	
2	Breve explicación de los conocimientos previos pertinentes de la prueba (10’)	Resolución y corrección del **Problema 1.1** (40’)	Realización del **Ejercicio 1.3** (5’)
3	Corrección de ejercicios para casa (5’)	Resolución y corrección del **Problema 1.2** y **Problema 1.3** (45’)	Realización del **Ejercicio 1.1** y **1.2** (5’)
4	Explicación de la técnica de descomposición de cuerpos geométricos (10’)	Repaso de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos (20’)	Resolución y corrección del **Problema 3.1** y **Problema 3.3** (25’)
5	Corrección de ejercicios para casa (10’)	Realización del **Problema 4.1** y **Problema 4.3** (45’)	
6	Corrección de ejercicios para casa (10’)	Explicación del principio de Cavalieri y realización de **Problema 6.1** y **Problema 6.2** (45’)	
7	Corrección de ejercicios para casa (5’)	Demostración del volumen de la pirámide, el cono y la esfera. (45’)	Realización del **Problema 5.1** (5’)
8	Corrección de ejercicios para casa (5’)	Demostración del área de la esfera (20’)	Realización del **Problema 2.3, Ejercicio 2.1 y Ejercicio 5.3** (30’)
9	Breve explicación del concepto de plano de simetría (10’)	Resolución y corrección del **Problema 7.1** (40’)	Realización del **Ejercicio 7.2** (5’)
10	Realización de la prueba de evaluación (55’)		

I. Sobre la evaluación

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

EXAMEN DE POLIEDROS Y CUERPOS DE REVOLUCIÓN

1. a) Dibuja los siguientes poliedros señalando de forma clara sus vértices:

I. Un octaedro
II. Un prisma de base hexagonal
III. Un tronco de pirámide triangular

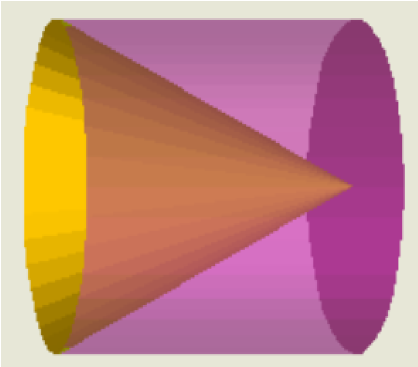
b) Completa el cuadro a partir de las figuras del ejercicio anterior:

	Vértices	**Aristas**	**Caras**
Octaedro			
Prisma de base hexagonal			
Tronco de pirámide triangular			

c) ¿Cuáles de ellos cumplen la fórmula de Euler?

2. Calcula la superficie total de un tetraedro regular de 12 cm de arista.

3. Calcula el área total del recipiente de la figura sabiendo que el radio de la base es 7 cm y su altura es 13 cm.



4. Una pirámide de base cuadrada se corta con un plano paralelo a la base por la mitad de la altura de la pirámide, obteniendo una pirámide más pequeña y un tronco de pirámide ¿Cuántas veces es más grande el volumen del tronco con respecto al volumen de la pirámide pequeña?

5. a) Si un cilindro y un prisma recto de base pentagonal tienen la misma base y la misma altura, ¿cuántas veces es mayor el volumen del prisma que el del cilindro?

b) ¿Cuántos planos de simetría tienen los cuerpos anteriores?

Cada pregunta vale lo mismo, 2 puntos. En las preguntas con varios apartados, cada apartado tiene el mismo valor.

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

PREGUNTA 1

CAMPOS DE PROBLEMAS	Elementos característicos de cuerpos geométricos (apartado b) Teorema de Euler (apartado c)
TÉCNICAS	Reconocer cuerpos geométricos en la vida cotidiana. (apartado a) Aplicar el teorema de Euler a poliedros convexos (apartado c)
TECNOLOGÍAS	Justificar el conteo de elementos del cuerpo (segunda forma de resolución) (apartado b)

TAREAS PRINCIPALES	a) No hay b) Utilizar técnicas de conteo o razonar a partir de las simetrías del cuerpo. c) 1ª forma: Utilizar la fórmula de Euler 2ª forma: Decir que estamos en las condiciones de la fórmula (se trata de poliedros convexos) y que por tanto se cumple
TAREAS AUX. ESP.	a) Dibujar correctamente las distintas caras y señalar de forma clara los vértices. b) No tiene c) No tiene
TAREAS AUX. GEN.	a) No tiene b) Contar correctamente c) 1ª forma: Operar correctamente 2ª forma: No tiene
ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	Est.MAAC.3.5.1. Identifica los principales poliedros y cuerpos de revolución, utilizando el lenguaje con propiedad para referirse a los elementos principales.

PREGUNTA 2

CAMPOS DE PROBLEMAS	Desarrollo plano de un sólido platónico
TÉCNICAS	Utilizar el desarrollo plano de un cuerpo para calcular su área lateral.
TECNOLOGÍAS	Cálculo del área lateral del tetraedro.
TAREAS PRINCIPALES	Descomponer el área total en 4 triángulos equiláteros.
TAREAS AUX. ESP.	Calcular el área del triángulo.
TAREAS AUX. GEN.	Utilizar Teorema de Pitágoras. Resolución de la ecuación.
ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	Est.MAAC.3.5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.

PREGUNTA 3

CAMPOS DE PROBLEMAS	Cálculo de áreas
TÉCNICAS	Si el alumno utiliza directamente las fórmulas de áreas (a)
TECNOLOGÍAS	Si el alumno calcula el área por medio de razonamientos (b)
TAREAS PRINCIPALES	Descomponer la figura y obtener su desarrollo plano.
TAREAS AUX. ESP.	Utilizar las fórmulas pertinentes para el cálculo de áreas (a y b) Justificación de las fórmulas. (b)
TAREAS AUX. GEN.	Resto de operaciones.
ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	Est.MAAC.3.5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.

PREGUNTA 4

CAMPOS DE PROBLEMAS	Descomposición de cuerpos geométricos Semejanza de cuerpos geométricos
TÉCNICAS	Semejanza de pirámides Descomponer el tronco como resta de dos volúmenes 1ª forma: Razón de volúmenes de cuerpos semejantes 2ª forma: Cálculo del volumen del tronco de pirámide y las pirámides
TECNOLOGÍAS	Volumen del tronco de una pirámide
TAREAS PRINCIPALES	Aplicar la semejanza de pirámides para obtener el lado de la pirámide pequeña
TAREAS AUX. ESP.	1ª forma: Uso de la propiedad sobre la razón de cuerpos semejantes Descomposición del tronco como resta de dos volúmenes o

	aplicación directa de su fórmula 2ª forma: Cálculo de volúmenes y su posterior razón
TAREAS AUX. GEN.	Resto de operaciones (muy sencillas en 1ª forma, no tanto en 2ª forma)
ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	Est.MAAC.3.5.2. Calcula áreas y volúmenes de poliedros, cilindros, conos y esferas, y los aplica para resolver problemas contextualizados.

PREGUNTA 5

CAMPOS DE PROBLEMAS	Principio de Cavalieri Planos de simetría
TECNOLOGÍAS	Comparar las características de dos cuerpos geométricos. Aplicar el principio de Cavalieri para calcular el volumen de cuerpos geométricos (apartado a) Encontrar los planos de simetría de un cuerpo geométrico (apartado b)
TECNOLOGÍAS	No hay.
TAREAS PRINCIPALES	a) Justificación de la respuesta: 1ª forma: Principio de Cavalieri 2ª forma: Hallar los volúmenes utilizando la fórmula del volumen del cilindro y del prisma b) Técnica utilizada para deducir el número de planos de cada cuerpo.
TAREAS AUX. ESP.	a) 1ª forma: No tiene 2ª forma: Deducir que tienen el mismo volumen b) Uso de la fórmula general sobre los planos de un prisma recto de base un polígono regular. En el caso de ver las rectas que dejan invariante el pentágono y volver al prisma, dicho razonamiento.

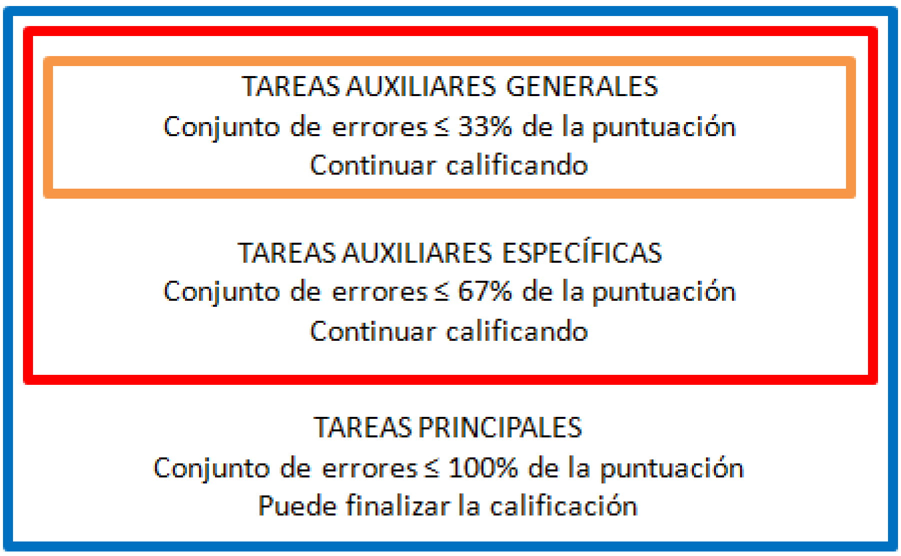
TAREAS AUX. GEN.	a) No tiene b) Contar correctamente el número de planos de simetría
ESTÁNDARES DE APRENDIZAJE	Est.MAAC.3.5.3. Identifica centros, ejes y planos de simetría en figuras planas, poliedros y en la naturaleza, en el arte y construcciones humanas.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

En **Anexo 3** se detallan las respuestas esperadas del los alumnos en cada pregunta y en **Anexo 4** los posibles errores asociados a cada una de ellas.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Se utilizará el modelo de penalización de errores llamado *Modelo de tercios*. Como podemos apreciar en el siguiente esquema, este modelo tiene 3 partes bien diferenciadas: Tareas principales, Tareas auxiliares específicas y Tareas auxiliares generales. La calificación de cualquiera de las partes es ajena a las otras dos, por tanto el conjunto de errores en cada parte queda restringido a $\frac{1}{3}$ de la nota del ejercicio.



Dado que no en todos los apartados tenemos tareas de cada tipo, adaptaremos el proceso de calificación a los objetivos perseguidos en cada pregunta.

La información concreta de cada ejercicio se encuentra más detallada en **Anexo 5**.

J. Sobre la bibliografía y páginas web

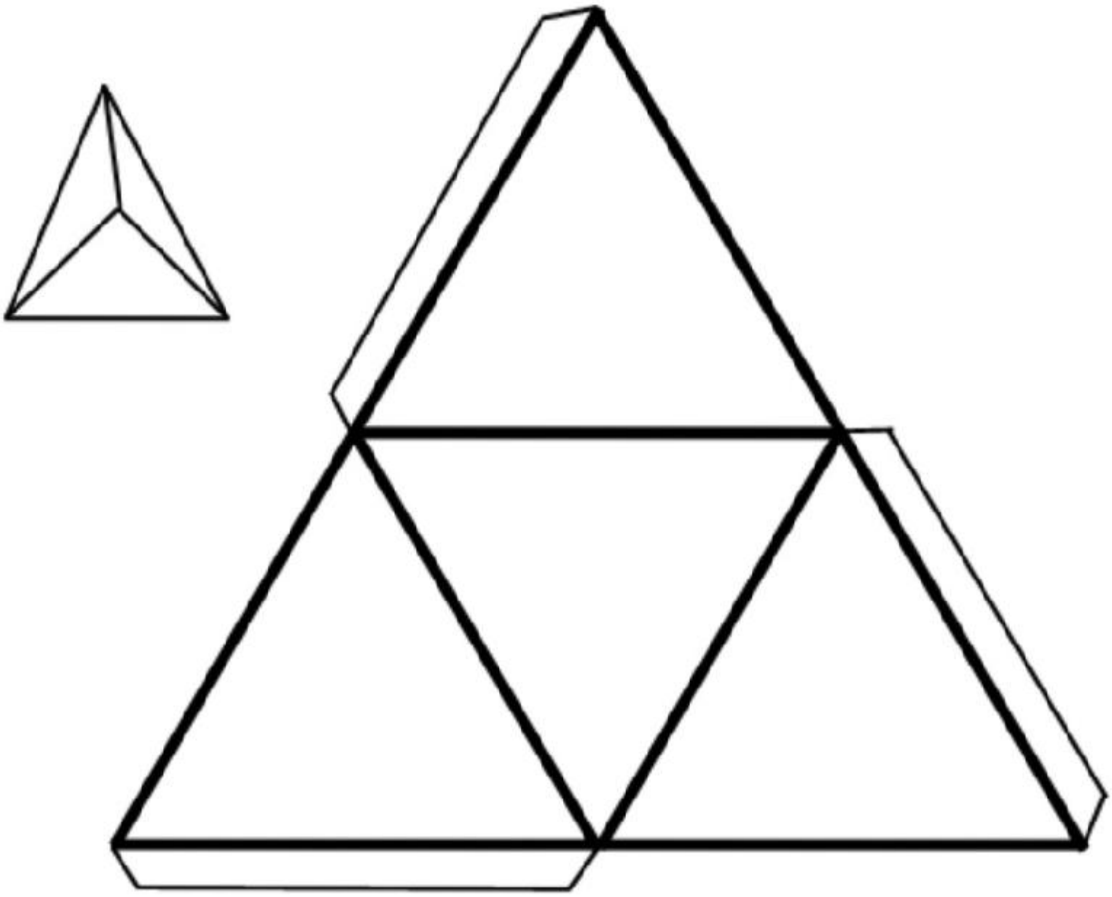
1. Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.

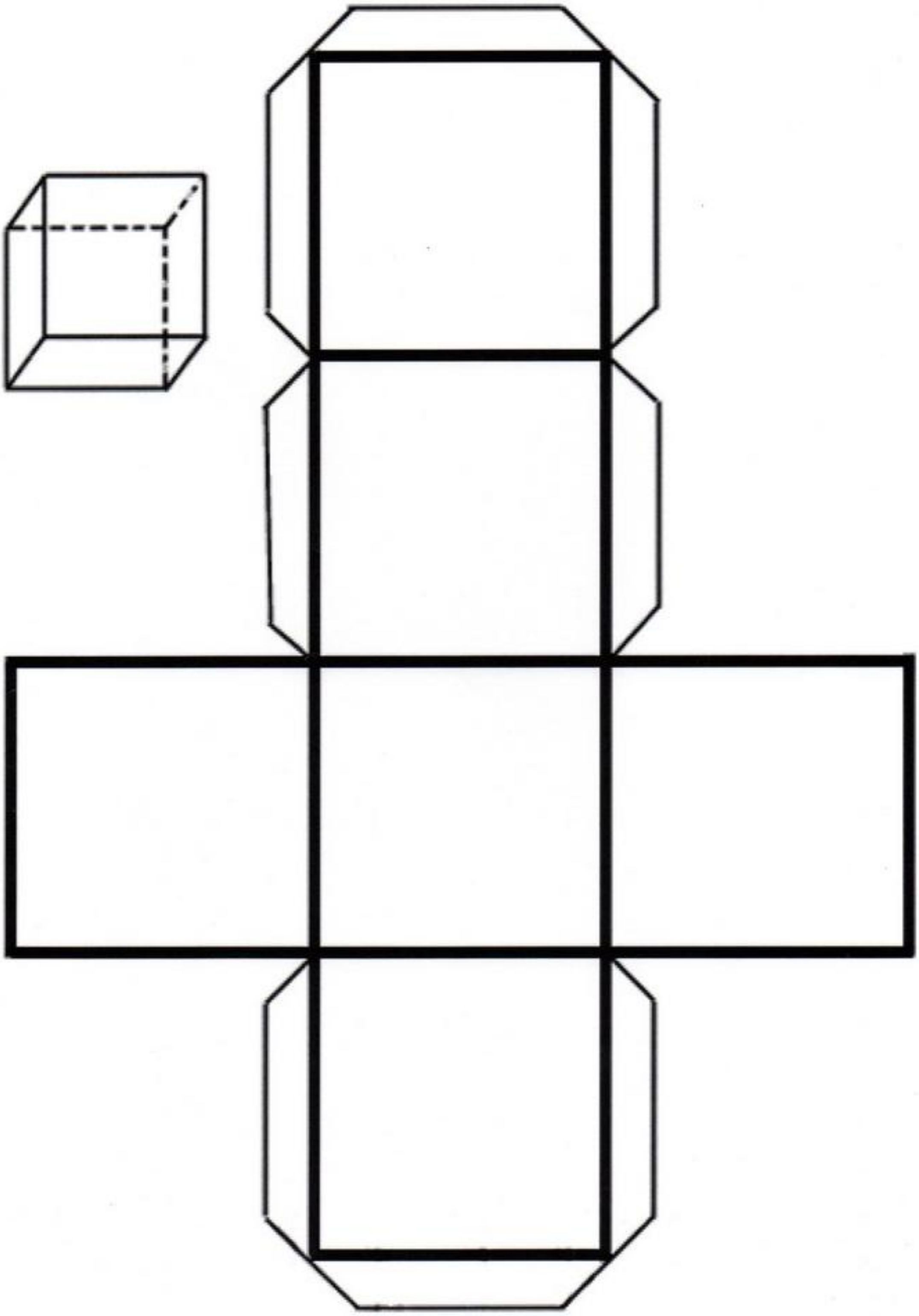
- Alsina, C. (2014), Materiales para construir la geometría, Síntesis
- Arnal, A.: DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA APUNTES DE CLASE – CURSO 2014 15, GRADO EN MAGISTERIO EN EDUCACIÓN PRIMARIA, Universidad de Zaragoza
- Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. A. (2015), Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. PNA, 9(2), 107-127
- Castañeda, A., Rosas, A., Molina, J.G. y Zavaleta, M., (2012), La institucionalización del conocimiento en la clase de matemáticas. Un estudio sobre el discurso del aula, SciELO, Perfiles Educativos, 34(135)
- Cid, E, y Muñoz, J.M., LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO (TAD) Un marco teórico para la didáctica de las matemáticas
- Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira, Mª J. y Colera, R.: Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO, ANAYA: Madrid.
- Fernández, J., (2011), Taller de Matemáticas: De Arquímedes a Cavalieri hacia el cálculo integral. Universidad de la Rioja http://www.jorge-fernandez.es/talleres/taller_cavalieri/index.html
- Gairín, J.M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En Investigación en educación matemática : actas del XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática : Baeza, 20-22 de septiembre de 2012, pp.261-274
- Gairín, J.M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M., (2013), Anomalías en los procesos de identificación de errores en las pruebas escritas de matemáticas de las P.A.U., Campo Abierto, 32(2)
- García, L. A. (1998), Psicología instruccional e intervención para la mejora cognitiva. Memoria de Cátedra. Universidad de La Laguna.
- Llorente, N., Barberá P. y Carvajal, S.: Matemáticas 3º ESO orientadas a las Enseñanzas Académicas, Edebé: Barcelona

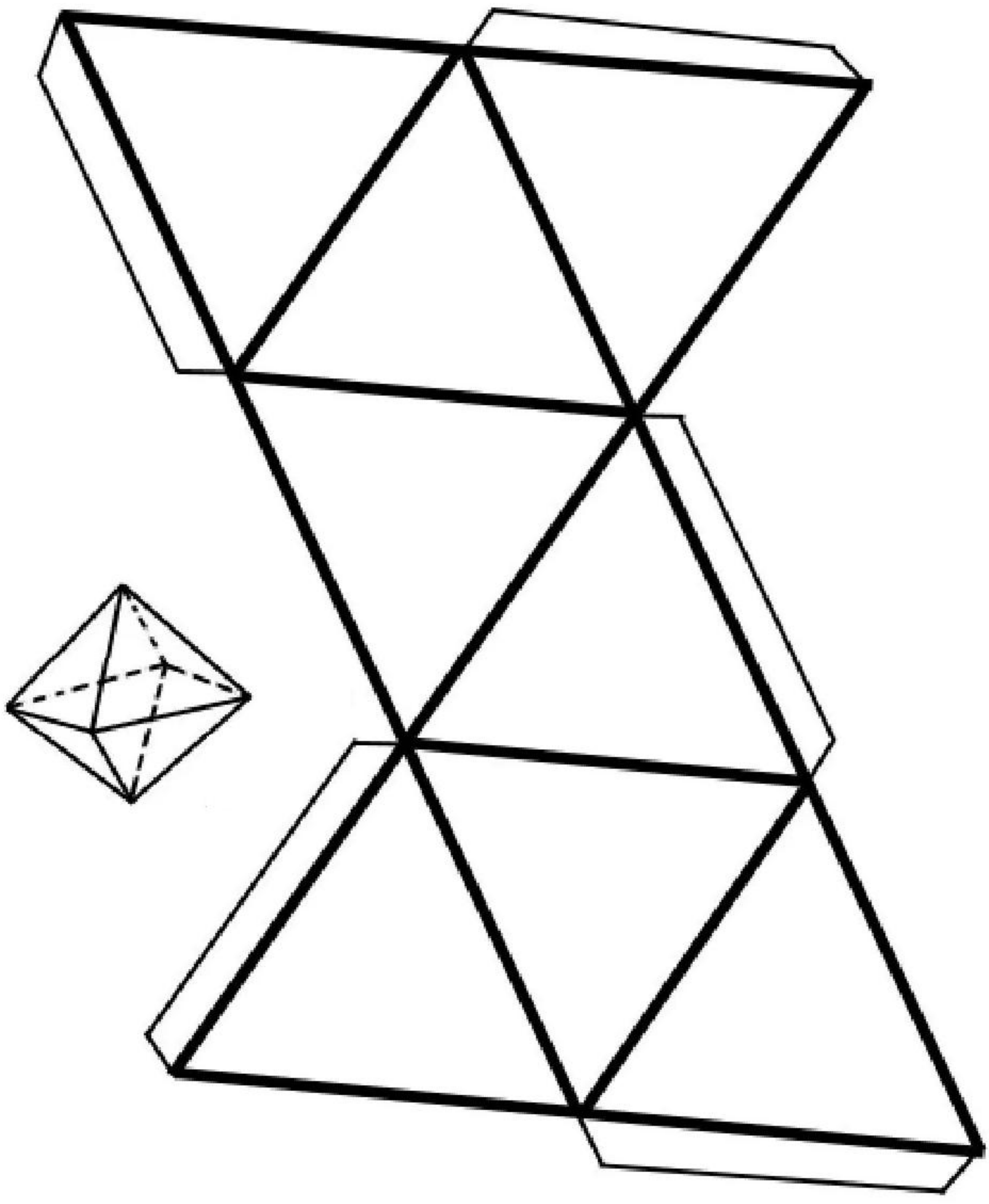
- Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2013). Validación de un instrumento para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 367-381). Bilbao: SEIEM.
- Scaglia, S. y Moriena, S. (2005), PROTOTIPOS Y ESTEREOTIPOS EN GEOMETRÍA, Educación Matemática, Santillana, 17 (3), 105-120
- Web Wikipedia, Historia de la Geometría: https://es.wikipedia.org/wiki/Historia_de_la_geometr%C3%ADa
- Web del centro de innovación y desarrollo a distancia CIDE@D http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/
- Página web: http://www.matematicasvisuales.com/
- Artículo web: Geometría en Egipto http://blogmathist.blogspot.com.es/2009/04/damos-comienzo-nuestro-blog-un-espacio.html

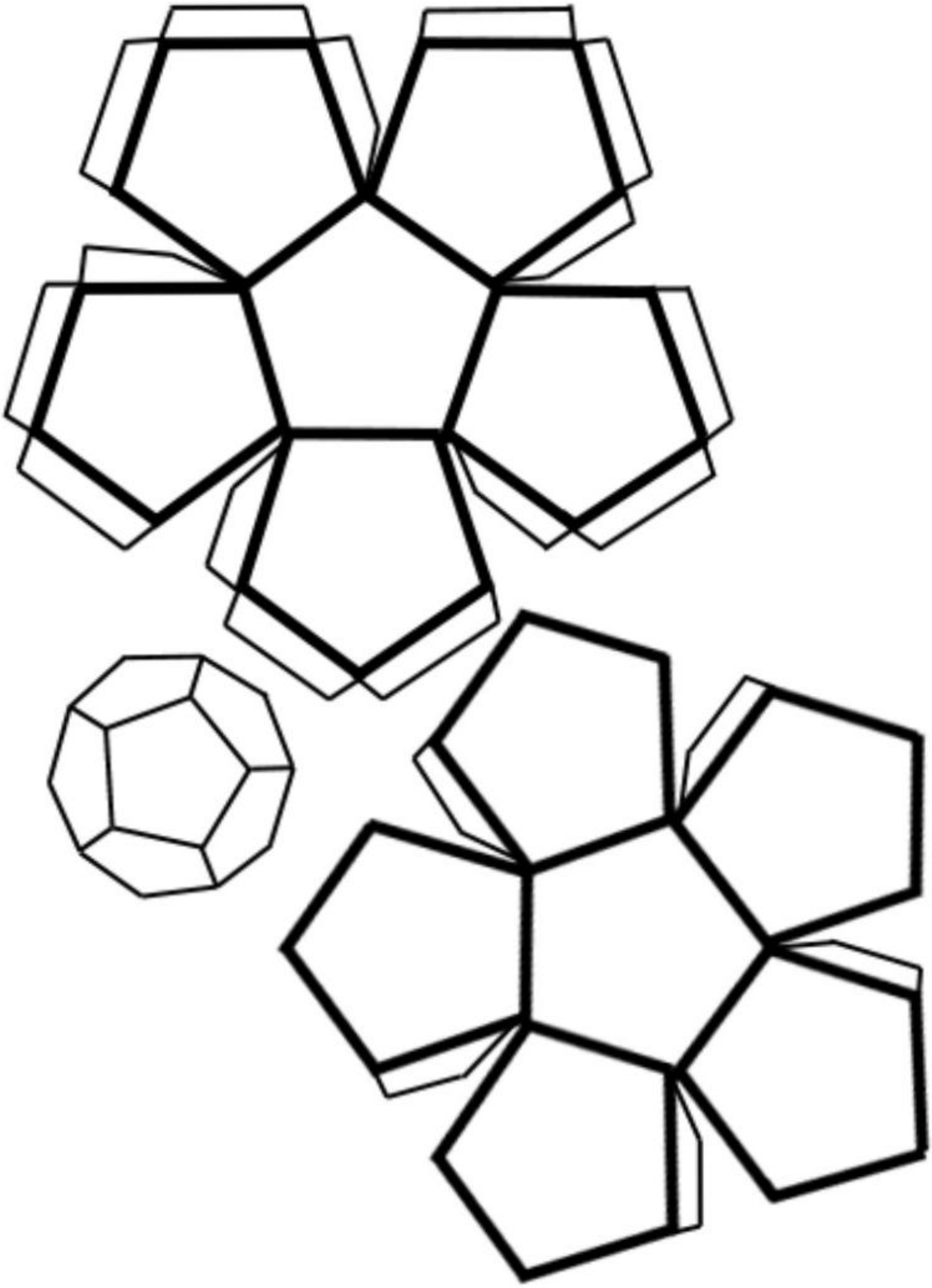
ANEXOS

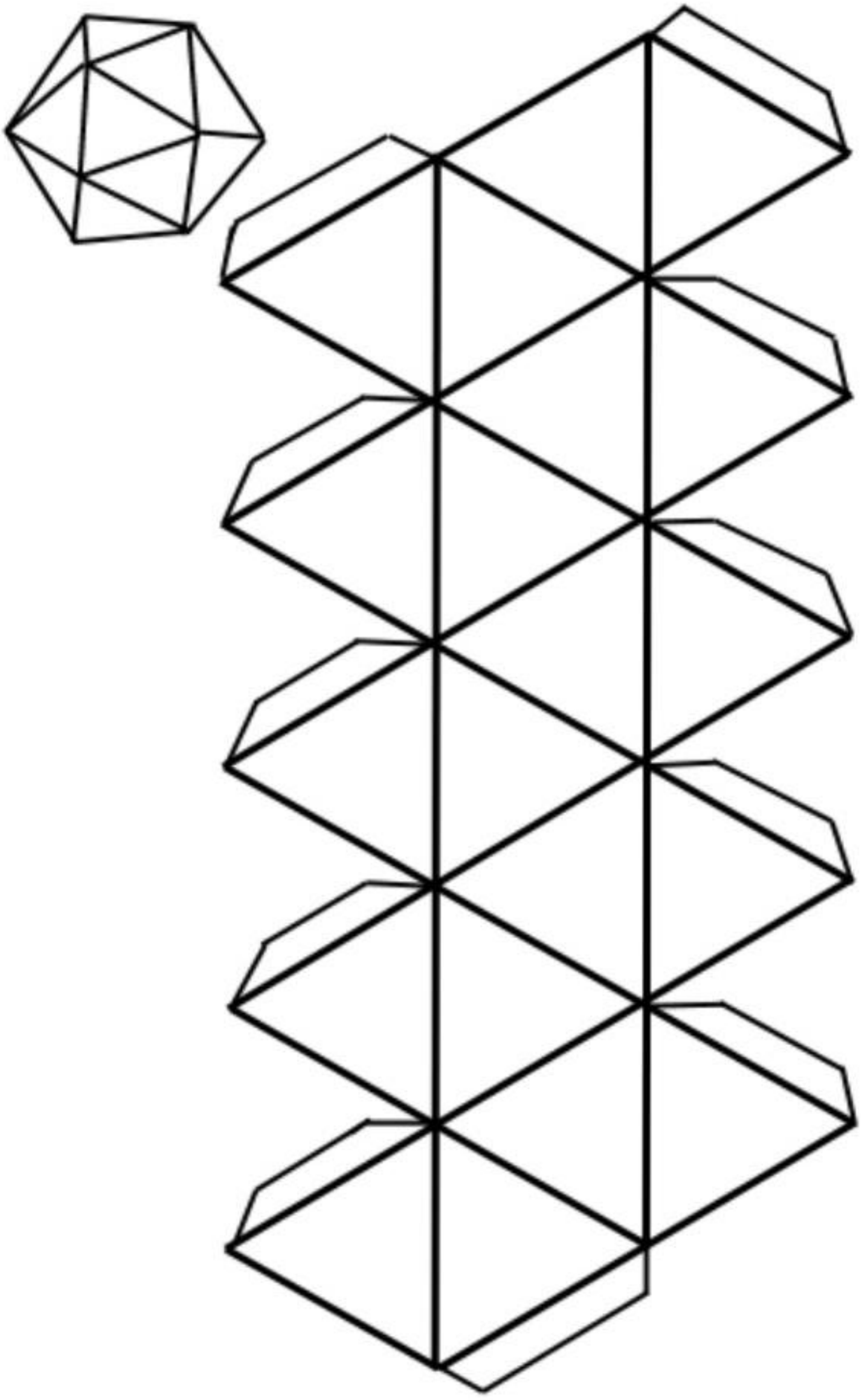
ANEXO 1











ANEXO 2

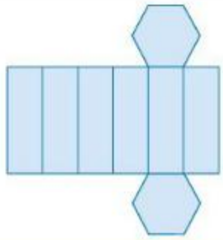
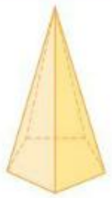
Relación de Euler

El problema 2 está muy relacionado con esta técnica y su tecnología. Tecnología como tal no la vamos a tratar, pero sí que se pretende que los alumnos experimenten y tengan conjeturas acerca de esta técnica. En dicho problema los alumnos deberán comprobar que efectivamente la fórmula es correcta para el caso de los sólidos platónicos utilizando el material manipulativo creado en la clase anterior.

Área total de cuerpos geométricos

Como ya mencionamos la forma natural de justificar el área de cuerpos geométricos es a través de su desarrollo plano. Para el caso de cuerpos de revolución ya vimos como podíamos desarrollar tanto el cono como el cilindro y calcular el área a partir de él.

En el caso de los prismas la forma de justificar su área total es exactamente igual. Nos fijamos en la forma de la base y de una cara lateral. Su desarrollo plano tendrá tantas caras laterales como aristas tiene la base. A partir de ahí sólo nos queda sumar al área de la(s) base(s) y el área de una cara lateral multiplicada por el número de aristas de la base. El siguiente esquema muestra este hecho:

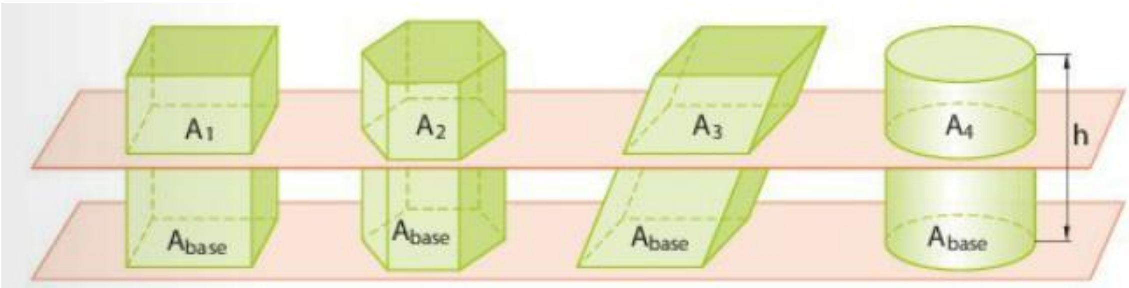
FIGURA	DESARROLLO PLANO	ÁREA LATERAL Y ÁREA TOTAL
 Prisma		• **Área lateral:** la superficie lateral está formada por paralelogramos. $A_{lateral}$ = Área de sus caras laterales • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de las dos bases. $A_{total} = A_{lateral} + 2A_{base}$
 Pirámide		• **Área lateral:** la superficie lateral está formada por triángulos. $A_{lateral}$ = Área de sus caras laterales • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de la base. $A_{total} = A_{lateral} + A_{base}$
 Tronco de pirámide		• **Área lateral:** la superficie lateral está formada por trapecios. $A_{lateral}$ = Área de sus caras laterales • **Área total:** se obtiene sumando el área lateral y el área de las dos bases. $A_{total} = A_{lateral} + A_{b1} + A_{b2}$

<u>Principio de Cavalieri</u>

La demostración del Principio de Cavalieri es demasiado técnica y larga para ser mostrada a los alumnos. Es por ello que en este caso es necesario optar por una justificación visual. La siguiente imagen muestra como a ambos lados tenemos el mismo número de pajitas y por tanto el mismo área. Fácilmente los alumnos podrían imaginarse que tenemos varias columnas con la misma forma y entonces los cuerpos que resultan tendrían el mismo volumen.

Volumen del prisma y del cilindro

Consideramos un ortoedro, un prisma recto, un prisma oblicuo y un cilindro, todos ellos con la misma área de la base, que llamaremos A_{base} , y la misma altura, h.



El principio de Cavalieri nos dice:

"Si dos cuerpos geométricos de la misma altura cumplen que las secciones por planos paralelos a sus bases tienen el mismo área, entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen."

Por tanto aplicando el principio de Cavalieri, los 4 cuerpos tienen el mismo volumen.

$$V_{ortoedro} = V_{prisma\ \ recto} = V_{prisma\ \ oblicuo} = V_{cilindro}$$

El volumen del ortoedro es conocido, es igual al área de la base por su altura.

$$V_{ortoedro} = A_{base} \cdot h$$

Por tanto podemos concluir que el volumen del cilindro y del prisma es igual al área de su respectiva base por la altura, o lo que es lo mismo:

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

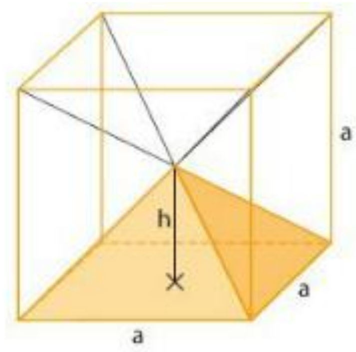
$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$$

Donde r es el radio del cilindro.

Volumen de la pirámide de base cuadrangular

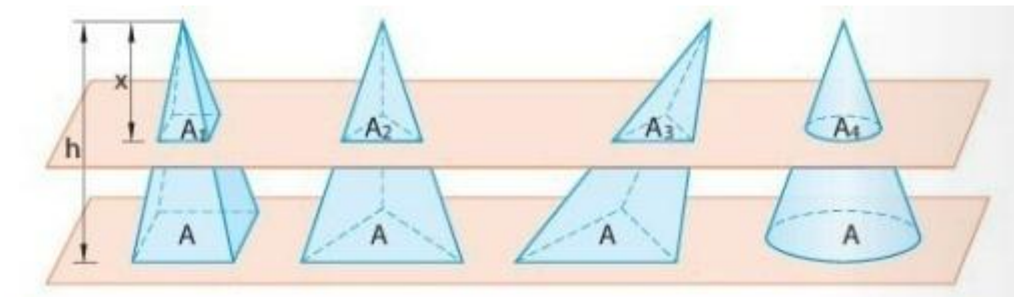
En la figura observamos que podemos descomponer un cubo de arista a en 6 pirámides de base cuadrangular y altura $h = \frac{a}{2}$. El volumen del cubo es conocido, luego:

$$V_{\substack{pirámide\ recta\\ de\ base\ cuadrada}} = \frac{1}{6}V_{cubo} = \frac{1}{6}A_{base} \cdot 2h = \frac{1}{3}A_{base} \cdot h$$



Volumen de una pirámide y de un cono

La idea es la misma utilizada para calcular el volumen del prisma y del cilindro. Consideramos una pirámide recta de base cuadrada, una pirámide triangular recta, una pirámide triangular oblicua y un cono, todos ellos con la misma área de la base, que llamaremos A_{base} , y la misma altura, h.



Las secciones de cada figura son semejantes con razón de semejanza $k = \frac{x}{h}$, luego se cumple que:

$$\frac{A_1}{A_{base}} = \frac{A_2}{A_{base}} = \frac{A_3}{A_{base}} = \frac{A_4}{A_{base}} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow A_1 = A_2 = A_3 = A_4$$

Por tanto, las secciones por un plano paralelo a sus bases tienen la misma área. Así, por el principio de Cavalieri, los cuatro cuerpos tienen el mismo volumen, el cual podemos calcular a partir del volumen de la pirámide recta de base cuadrada.

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = A_{base} \cdot h$$

Finalmente podemos concluir que:

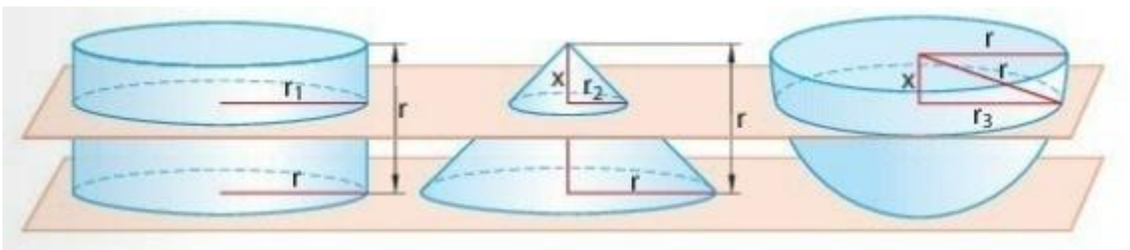
$$V_{pir\acute{a}mide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$$

<u>Volumen de la esfera</u>

Arquímedes determinó el volumen de una esfera relacionándolo con el volumen de un cilindro y un cono. Para ello consideró un cilindro y un cono de radios r y cuyas alturas son iguales a los radios, y una semiesfera de radio r.

Observemos ahora la relación entre el radio de sus bases y el radio de las secciones por un plano paralelo a dichas bases.



De la primera figura tenemos: $r_1 = r$.

En la segunda observamos que tenemos semejanza: $\frac{r_2}{r} = \frac{x}{r} \Longrightarrow r_2 = x$.

En la tercera figura aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos: ${r_3}^2 = r^2 - x^2$

De esta manera obtenemos las áreas de las secciones por planos paralelos a sus bases:

$$A_1 = \pi r^2$$

$$A_2 = \pi x^2$$

$$A_3 = \pi(r^2 - x^2)$$

de donde

$$A_3 = \pi(r^2 - x^2) = \pi r^2 - \pi x^2 = A_1 - A_2$$

Las secciones de la semiesfera por un plano paralelo a la base son iguales a la del cilindro menos las del cono. Si aplicamos ahora el principio de Cavalieri a la semiesfera y al cuerpo que resulta de extraer el cono del cilindro, se tiene que:

$$V_{semiesfera} = V_{cilindro\ -cono}$$

Luego el volumen de la esfera es:

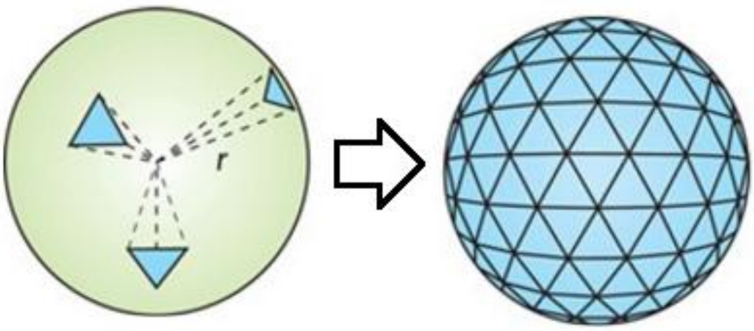
$$V_{esfera} = 2\,V_{semiesfera} = 2(V_{cilindro\ -cono}) = 2\left(\pi r^2 r - \frac{1}{3}\pi r^2 r\right) = 2\left(\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3\right)$$
$$= 2 \cdot \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Área de la esfera

Como sabemos, la esfera no tiene desarrollo plano, por lo que no podremos justificar dicha técnica como con el cilindro o el cono.

Veamos cómo obtener el área de la esfera a partir de su volumen.

Vamos a recubrir la superficie esférica con triángulos iguales y consideraremos las pirámides con base esos triángulos y vértices el centro de la esfera. El radio de la esfera por tanto será la altura de la pirámide. De esta manera obtenemos que el volumen de la esfera puede aproximarse sumando los volúmenes de dichas pirámides:



$$V_{esfera} = V_1 + V_2 + \cdots = \frac{1}{3}A_1 \cdot r + \frac{1}{3}A_2 \cdot r + \cdots = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \cdots) \cdot r$$
$$= \frac{1}{3}A_{esfera} \cdot r$$

donde V_{esfera}, A_{esfera} y r son el volumen, área y radio de la esfera y V_i y A_i el volumen y el área de la base de la pirámide número i.

Por otro lado, sabemos que $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Por tanto, igualando las dos expresiones obtenemos:

$$\frac{1}{3}A_{esfera} \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Despejando el área de la esfera llegamos a que $A_{esfera} = 4\pi r^2$.

<u>Semejanza de cuerpos geométricos</u>

Supongamos que tenemos dos cuerpos geométricos, cuya razón de semejanza es k. Al ser semejantes, los lados y la altura son proporcionales y sus bases son polígonos semejantes.

Calculamos sus volúmenes:

$$V = A_{base} \cdot h \quad ; \quad V' = A'_{base} \cdot h'$$

Como son cuerpos semejantes:

$$\frac{A'_{base}}{A_{base}} = k^2 \quad ; \quad \frac{h'}{h} = k$$

Si ahora calculamos la razón entre sus volúmenes:

$$\frac{V'}{V} = \frac{A'_{base} \cdot h'}{A_{base} \cdot h} = k^2 \cdot k = k^3$$

En el caso de dos esferas, su razón de semejanza es el cociente de los radios:

$$\frac{r'}{r} = k$$

Por tanto obtenemos del mismo modo que

$$\frac{V'}{V} = \frac{\frac{4}{3}\,\pi\, r'^3}{\frac{4}{3}\,\pi\, r^3} = k^3$$

ANEXO 3

Ejercicio 1

a) En este caso las respuestas podrían variar al dibujar cuerpos rectos u oblicuos.

b) Para rellenar la tabla la mayoría de los alumnos contarán los elementos en las figuras anteriores.

Otra estrategia distinta (a fin de justificar el conteo) sería razonar de la siguiente manera, la cual se vio en clase en el problema 2:

Ejemplo: *"El octaedro tiene 8 caras, como su nombre indica. Cada cara tiene 3 vértices y cada vértice es compartido por 4 caras. Luego el número de vértices es* $\frac{8 \cdot 3}{4} = 6$. *Cada arista tiene 2 vértices y cada vértice es compartido por 4 aristas. Luego el número de aristas es* $\frac{6 \cdot 4}{2} = 12$ *."*

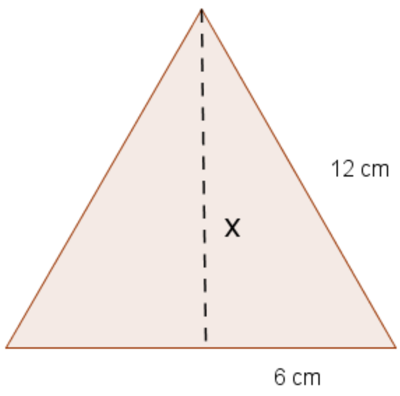
c) Una posible solución sería escribir la fórmula de Euler y ver que se verifica en cada caso.

- Octaedro: $V - A + C = 6 - 12 + 8 = 2$
- Tronco: $V - A + C = 12 - 18 + 8 = 2$
- Prisma: $V - A + C = 6 - 9 + 5 = 2$

Un razonamiento más directo sería decir que los 3 cuerpos son poliedros convexos, por lo que la fórmula de Euler se cumple.

Ejercicio 2

Para calcular la superficie total del tetraedro la técnica es bastante limitada en cuanto a variedad. Se espera que los alumnos se den cuenta de que el desarrollo plano del tetraedro regular está formado por 4 triángulos equiláteros de lado en este caso 12 cm. Una vez que hemos descompuesto la figura, basta con calcular el área de un triángulo. Para ello necesitaremos calcular la altura, utilizando el teorema de Pitágoras:



$$x^2 + 6^2 = 12^2 \Rightarrow x^2 = 144 - 36 = 108 \Rightarrow x = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\ cm$$

Por tanto el área total del poliedro es

$$Área\ total = 4 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = 2\ b \cdot h = 2 \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\ cm^2$$

Ejercicio 3

La primera parte del ejercicio sería descomponer la figura en las partes del cilindro y del cono que necesitamos y obtener su desarrollo plano.

Después habría que calcular el área de las figuras. Se podría hacer utilizando directamente la fórmula de cada superficie, es decir, utilizando las técnicas de memoria.

Otra manera sería razonar a partir de las figuras obtenidas. El rectángulo y el círculo tienen áreas conocidas. En el caso del sector circular podemos recordar que su área es igual a la longitud de arco por el radio del sector entre 2. Esto nos daría de igual manera el área buscado.

$$Área_{total} = Área_{rectángulo} + Área_{sector} + Área_{círculo} =$$

$$= 2\pi \cdot 7 \cdot 13 + 2\pi \cdot 7 \cdot \sqrt{218} + 7^2\pi = 7\pi \cdot \left(33 + 2\sqrt{218}\right)\ cm^2$$

Ejercicio 4

1ª forma: *"La pirámide pequeña y la pirámide principal son semejantes. Sabemos que dos cuerpos geométricos con razón de semejanza k, tienen como razón de sus volúmenes k^3, es decir el cuerpo grande es k^3 el pequeño, en nuestro caso $2^3 = 8$ veces. Como no nos piden la relación entre las pirámides sino entre el tronco y la pirámide pequeña debemos restar una pirámide pequeña a la pirámide grande para obtener el tronco y por tanto en lugar de 8 veces será 7 veces mayor su volumen."*

2ª forma: Cálculo directo de cada volumen y su posterior comparación.

Si llamamos l al lado de la pirámide, el lado de la pirámide pequeña mide por semejanza $\frac{l}{2}$, luego obtenemos que:

$$V_{pir\acute{a}mide\ peque\tilde{n}a} = \frac{1}{3} base \cdot altura = \frac{1}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \frac{h}{2} = \frac{l^2 \cdot h}{3} \cdot \frac{1}{8}$$

$$V_{pir\acute{a}mide\ grande} = \frac{1}{3} base \cdot altura = \frac{l^2 \cdot h}{3}$$

$$V_{tronco\ pir\acute{a}mide} = V_{pir\acute{a}mide\ grande} - V_{pir\acute{a}mide\ peque\tilde{n}a} = \frac{l^2 \cdot h}{3} - \frac{l^2 \cdot h}{3} \cdot \frac{1}{8}$$
$$= \frac{l^2 \cdot h}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{l^2 \cdot h}{3} \cdot \frac{7}{8}$$

Por tanto

$$\frac{V_{tronco\ pir\acute{a}mide}}{V_{pir\acute{a}mide\ peque\tilde{n}a}} = \frac{\frac{l^2 \cdot h}{3} \cdot \frac{7}{8}}{\frac{l^2 \cdot h}{3} \cdot \frac{1}{8}} = 7.$$

Ejercicio 5

a) Para contestar a la pregunta basta darse cuenta que estamos en las condiciones del Principio de Cavalieri pues los cuerpos tienen igual base y altura, y cualquier sección por un plano paralelo tiene la misma área que la base. Tienen por tanto el mismo volumen.

Otra posible solución sería tratar de calcular el volumen de los cuerpos.

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h$$

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$$

Si vuelven a leer el enunciado se darán cuenta de que en realidad $V_{cilin\,dro} = V_{prisma}$.

b) Los planos de simetría del cilindro consiste en ver que cualquier cuerpo de revolución tiene infinitos planos de simetría, pues una vez encontrado uno tenemos infinitos girándolo alrededor del eje de revolución. Por tanto se espera que los alumnos digan que tiene muchos, o más precisamente infinitos.

Para ver los planos de simetría del prisma (aparte del plano horizontal) lo podemos hacer de varias formas:

Hay un ejercicio dedicado a averiguar la fórmula general del número de planos de simetría de los diferentes cuerpos geométricos. Tal vez algún alumno se acuerde de esos resultados.

En todo caso, podemos reducir el problema a buscar simetrías en el plano, en este caso del pentágono, ya que se trata de un prisma recto. Tras un pequeño rato cabe esperar que los alumnos se den cuenta que cada recta que pasa por el vértice y el punto medio del lado opuesto es el eje de una simetría. Volviendo al plano cada recta se convierte en un plano de simetría.

ANEXO 4

Posibles errores que pueden cometer los alumnos en cada una de las preguntas:

Antes de empezar haremos referencia a algunos errores propios de estos temas, que suceden con cierta frecuencia independientemente del ejercicio:

- Falta de unidades de medida.
- Confusión entre las fórmulas de áreas y volúmenes.
- Errores algebraicos al despejar, operar y simplificar.

PREGUNTA 1

a) No se acuerden que forma tiene alguno de ellos, especialmente el octaedro.

b) Contar mal los elementos de alguna figura.

c) Escribir erróneamente la fórmula de Euler.

PREGUNTA 2

No recuerden cuál es el tetraedro.

Mal planteamiento del teorema de Pitágoras.

Uso incorrecto de la fórmula del área del triángulo.

PREGUNTA 3

Descomposición errónea de la figura en otras más simples.

Confusión con la notación: radio de la base y generatriz del cono.

Mala aplicación de las fórmulas del área de figuras planas.

PREGUNTA 4

Aplicar la *Ilusión de linealidad* (Van Dooren, 2012), es decir, aplicar modelos lineales a situaciones que no lo permiten.

Problemas con la fórmula del volumen de la pirámide.

Errores algebraicos derivados del cociente de fórmulas de volúmenes.

PREGUNTA 5

No verificar todas las condiciones del Principio de Cavalieri.

Concluir que el volumen de los cuerpos es igual por una mala notación (utilizar la misma letra en ambas fórmulas).

Olvidarse el plano de simetría horizontal.

Pensar que el prisma de base pentagonal sólo tenga un plano de simetría.

ANEXO 5

PREGUNTA 1

a) Valorar con un tercio de la nota del apartado cada correcta representación de cada cuerpo. La representación incorrecta o parcial supondrá la pérdida total de la calificación de esa figura.

b) La elección justificada de una técnica de conteo supondrá la mitad de la calificación. La otra mitad se destinará a la aplicación correcta de la técnica.

c) 1ª forma de resolución: Se valorará con dos tercios de la calificación escribir correctamente la fórmula de Euler y un tercio su aplicación a cada caso.

2ª forma de resolución: Se penalizará con un tercio la omisión de información relevante para aplicar la fórmula: *poliedros convexos*.

PREGUNTA 2

Se podrá penalizar hasta un tercio de la nota por una incorrecta descomposición del área total en 4 triángulos equiláteros.

Se penalizará con hasta un tercio de la calificación el cálculo incorrecto del área del triángulo equilátero.

El último tercio de la nota se destina al correcto uso del Teorema de Pitágoras y las consiguientes operaciones para dar el resultado final.

PREGUNTA 3

Un tercio de la nota supondrá la descomposición del cuerpo geométrico en otros conocidos y la obtención del desarrollo plano.

Otro tercio de la nota se destina a la utilización o deducción de las fórmulas necesarias para calcular el área de las figuras planas.

El resto de operaciones hasta llegar al resultado se valorará con un tercio de la nota.

PREGUNTA 4

Un tercio de la nota de destinará a aplicar la semejanza de las pirámides para obtener el lado de la pirámide pequeña resultante.

El siguiente tercio de la nota se distribuye como sigue:

- Con la mitad de la calificación se valorará la descomposición del tronco de pirámide como resta de dos volúmenes o la aplicación directa de su fórmula.
- La otra mitad se aplicará al correcto uso de la propiedad que relaciona el volumen de cuerpos semejantes o el cálculo de cada uno de los volúmenes y su posterior razón.

El resto de operaciones y el resultado final comprenderá el tercio restante de la calificación.

PREGUNTA 5

a) 1ª forma: La aplicación correcta y razonada del Principio de Cavalieri supondrá la totalidad de la puntuación. Se penalizará con un tercio de la nota la omisión de información necesaria para su aplicación: no decir que tienen igual base y altura o que las secciones de planos paralelos a la misma altura tienen la misma área.

2ª forma: La mitad de la nota consistirá en hallar los volúmenes utilizando la fórmula del volumen del cilindro y del prisma. La mitad restante queda destinada a deducir de forma razonada que tienen el mismo volumen. Llegar al resultado de forma errónea se penalizará con la mitad de la puntuación del apartado.

b) Un tercio de la nota se destina a la descripción de la técnica utilizada para deducir el número de planos de cada cuerpo.

Otro tercio de la nota valorará el uso de la fórmula general sobre los planos de un prisma recto de base un polígono regular. En el caso de ver las rectas que dejan invariante el pentágono y volver al prisma, dicho razonamiento.

El último tercio de la nota penalizará el incorrecto conteo de los planos.