



## DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD

(Este documento debe acompañar al Trabajo Fin de Grado (TFG)/Trabajo Fin de Máster (TFM) cuando sea depositado para su evaluación).

### TRABAJOS DE FIN DE GRADO / FIN DE MÁSTER

D./Dª. Beatriz Moya García,

con nº de DNI 73005678 K en aplicación de lo dispuesto en el art. 14 (Derechos de autor) del Acuerdo de 11 de septiembre de 2014, del Consejo de Gobierno, por el que se aprueba el Reglamento de los TFG y TFM de la Universidad de Zaragoza,

Declaro que el presente Trabajo de Fin de (Grado/Máster) Máster, (Título del Trabajo) Estudio de la aplicación de la Teoría de Empujes en estructuras abovedadas

---

---

---

---

es de mi autoría y es original, no habiéndose utilizado fuente sin ser citada debidamente.

Zaragoza, a 9 de Junio de 2017

Fdo: Beatriz Moya García



## ESTUDIO DE LA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE EMPUJES EN ESTRUCTURAS ABOVEDADAS

### RESUMEN

A lo largo de la historia se han creado múltiples obras arquitectónicas, muchas de ellas de compleja geometría, que han sobrevivido al paso de los siglos. Sin embargo, son complicadas de reproducir con las herramientas actuales de análisis computacional, y un ejemplo de ello son las estructuras funiculares.

La teoría de redes de empujes presenta una metodología que tiene por objeto dar un nuevo enfoque al cálculo de estructuras abovedadas en su primera fase de diseño. Este método se basa en representaciones geométricas como alternativa a los métodos analíticos para la relación entre la forma, la fuerza y la fabricación, presentando como ventajas las mismas que la estática gráfica, proporcionar un enfoque simple e intuitivo en continua interacción con el usuario.

La viabilidad de esta teoría ha llevado al Institute of Technology in Architecture de Zurich a materializarla en el plug-in RhinoVAULT del software Rhinoceros para complementar otros métodos de modelado disponibles en dicha herramienta.

Con este trabajo se quieren analizar el alcance y las limitaciones de la teoría de redes de empujes a través de la implementación del método en Matlab de varios ejemplos prácticos, cuyo resultado será comparado con el obtenido en RhinoVAULT para su validación.

*"Los ordenadores sólo pueden calcular lo que está conceptualmente ya dentro de ellos; sólo puedes encontrar lo que buscas en los ordenadores. Sin embargo, puedes encontrar lo que no habías buscado con experimentación libre"* De *A Conversation with Frei Otto*, por Juan María Songel.

## IMPLEMENTATION STUDY OF THRUST NETWORK ANALYSIS FOR VAULTED STRUCTURES

### ABSTRACT

Throughout history, many architectural marvels have been created, some with a complex geometry, which have withstood the passing of centuries. Nevertheless, they are extremely hard to reproduce with current computational analysis tools. An example is vaults.

The Thrust Network Analysis is a new methodology whose purpose is to introduce a new perspective over the calculation of funicular structures in an early design phase. This method is based on the use of geometrical rather than analytical representations of the relationship between form, forces and fabrication, which adopts the same advantages as graphic statics, providing a simple and intuitive approach while continuously interacting with the user.

Its viability drove the Institute of Technology in Architecture at Zurich to develop the plug-in RhinoVAULT for the software Rhinoceros to complement other modelling methods available in that tool.

The aim of this project is to analyse the scope and limitations of the Thrust Network Analysis through the implementation in Matlab of a wide range of examples, and compare the results with the ones obtained using Rhinoceros.

*“The computer can only calculate what is already conceptually inside of it; you can only find what you look for in computers. Nevertheless, you can find what you haven’t searched for with free experimentation.” From A Conversation with Frei Otto, by Juan Maria Songel.*

thrust network analysis

# ÍNDICE

RESUMEN .....	3
ABSTRACT.....	4
ÍNDICE.....	5
1. INTRODUCCIÓN.....	7
Objetivo y alcance del proyecto.....	7
La estática gráfica.....	7
La teoría de redes de empujes.....	9
Estructuración del documento.....	11
1. LA TEORÍA.....	13
El polígono funicular.....	13
Base teórica del método .....	15
2. DESARROLLO DEL PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO .....	21
Pasos de la resolución .....	21
Formulación del problema en un punto .....	22
Implementación matricial .....	24
3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO .....	29
PRIMER EJEMPLO .....	29
Resolución lineal .....	29
Reproducción del modelo en Rhinoceros .....	34
SEGUNDO EJEMPLO .....	37
Resolución manual .....	37
Reproducción del modelo en Rhinoceros .....	41
TERCER EJEMPLO.....	43
Resolución matricial .....	43
Reproducción del modelo en Rhinoceros .....	50
4. CONCLUSIONES .....	53
5. BIBLIOGRAFIA.....	55
ANEXO I. CÓDIGOS Y RESULTADOS DESARROLLADOS EN MATLAB .....	57
CÓDIGO DE RESOLUCIÓN DEL PRIMER EJEMPLO .....	57
CÓDIGO DE RESOLUCIÓN DEL SEGUNDO EJEMPLO.....	62
CÓDIGO DE RESOLUCIÓN DEL TERCER EJEMPLO .....	68

ANEXO II. EJEMPLOS DE APRENDIZAJE DE USO DEL PLUG-IN RHINOVAULT.....	83
El software RhinoVault.....	83
Ejemplos de aprendizaje del software .....	86
Ejemplo básico .....	86
Ejemplo avanzado .....	92
ANEXO III. CONSTRUCCIÓN DE LOS EJEMPLOS CON EL SOFTWARE RHINOCEROS .....	97
Primer ejemplo.....	97
Segundo ejemplo.....	102
Tercer ejemplo .....	108

# 1. INTRODUCCIÓN

## Objetivo y alcance del proyecto

El objetivo de este proyecto es implementar la teoría de redes de empujes para abordar problemas de cálculo de estructuras abovedadas con el fin de encontrar un resultado estable. Para ello, siendo ésta la base del método, se diseñarán ejemplos de la distribución en planta de estructuras discretizadas y se aplicará el método de cálculo para desarrollar una estructura que sólo trabaje a compresión. Asimismo, el resultado obtenido se comparará con el reproducido por el software RhinoVAULT, herramienta desarrollada para aplicar esta metodología de diseño, de tal manera que se comprobará la correspondencia entre ambos cálculos.

El alcance del proyecto abarca, una vez comprendida la base del cálculo, el planteamiento de ejemplos con elementos simples de tres y cuatro barras, para finalmente diseñar una estructura más compleja de múltiples elementos a través del cálculo matricial para obtener su geometría final. En dichos ejemplos se dará una geometría inicial, se definirán las hipótesis para aplicar el procedimiento del método, se diseñará el procedimiento a seguir adaptado a cada caso, se codificará y se evaluarán los resultados de manera numérica y gráfica. Una vez finalizado se validará comparando el modelo con el propuesto con RhinoVAULT, cuyos resultados no tienen por qué ser idénticos dado el número infinito de soluciones según las condiciones elegidas.

Con este proyecto se pretende que el alumno adquiera una mayor comprensión sobre estructuras complejas y teorías de cálculo avanzadas, y que sea capaz de aplicar dichos conocimientos para proponer soluciones de cálculo óptimas.

## La estática gráfica

Eladio Dieste, ingeniero civil uruguayo del siglo XX, defendía que la resistencia de una estructura depende de su forma ya que a través de ella es estable y, así, se evita la acumulación de material innecesario. Al igual que él ha habido varios arquitectos e ingenieros defensores de los métodos gráficos como herramienta de diseño para generar obras que relacionaran el cálculo y la estética.

La estabilidad de una estructura se puede afrontar desde métodos analíticos o métodos gráficos. El objetivo del problema es calcular las reacciones en los apoyos y asegurar la estabilidad de la estructura y, mientras el primero da un resultado mucho más exacto y extensible a las tres dimensiones, el segundo es más limitado y sólo aplicable a problemas planos. Sin embargo, el método gráfico aplicado con precisión puede dar resultados suficientemente aproximados. Además, en muchas ocasiones el problema se puede resolver en dos dimensiones, siendo en estos casos más sencillo aplicar un método gráfico.

Históricamente, las estructuras de fábrica se han calculado a través de métodos geométricos para desarrollar el polígono funicular de las fuerzas, dando importancia a la forma con el fin de crear un diseño estable. Esta condición se cumple si el polígono funicular de las cargas se encuentra dentro del arco de la estructura, es decir, la línea de empujes está contenida en su interior. Aunque ya había antecedentes previos con Leonardo Da Vinci, fue en el siglo XIX cuando se desarrollaron los primeros métodos gráficos teóricos.

Este movimiento fue iniciado por Karl Culmann, profesor del Institute of Technology in Architecture de Zurich en la que impartía clases de estática gráfica y desde donde expuso los resultados de su investigación en el libro “Estática Gráfica” [1866].

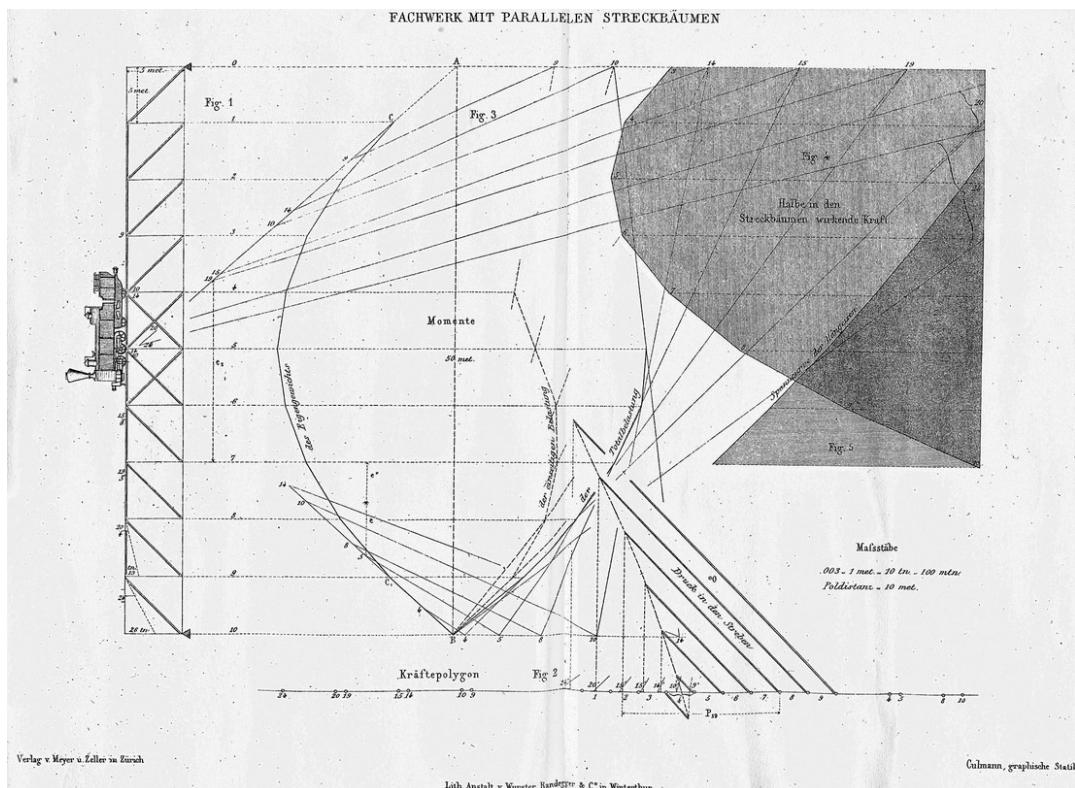


Figura 1. Karl Culmann: la estática gráfica aplicada al cálculo de un puente ferroviario. K. Culmann, Die graphische Statik, taf. 17, Meyer & Zeller, Zürich 1866; 2a ed. vol. 2, 1875.

Otros ejemplos de esta corriente fueron Maxwell [1864] y sus figuras recíprocas o Cremona y la yuxtaposición de polígonos funiculares para el cálculo de celosías. Sin embargo, la entrada en el siglo XX introdujo métodos teóricos de cálculo que poco a poco se hicieron camino en el campo del cálculo de estructuras implicando un mayor nivel de racionalización al proceso y rompiendo parcialmente el vínculo entre el diseño y el cálculo que la estática gráfica mantenía vivo.

En la historia reciente varios han sido los arquitectos que han empleado técnicas relacionadas con las formas funiculares para buscar geometrías óptimas de estructuras abovedas, como el uso de cables con pesos colgantes o técnicas más innovadoras. Ejemplo de ello son Antonio Gaudí y su modelo la iglesia de la Colonia Güell, Heinz Isler y los modelos de plástico invertidos, o Frei Otto y sus modelos de jabón.

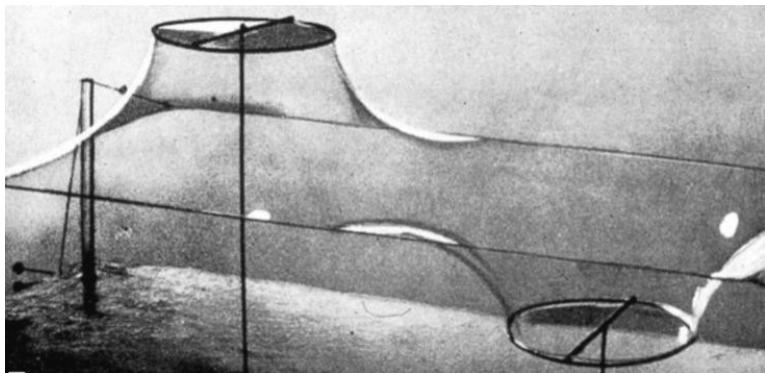


Figura 2. Frei Otto: modelo hecho con pompas de jabón. Songel J.M. A Conversation with Frei Otto, 2004.

El método gráfico propuesto, diseñado en el Institute of Technology in Architecture de Zurich siguiendo la corriente que Culmann inició, supone una extensión del polígono funicular de las cargas a las tres dimensiones, y tiene como ventaja principal ligar el proceso de diseño arquitectónico con la labor de los ingenieros estructurales, con detalles claros y un ahorro importante de material, ligando directamente el resultado a la forma de la estructura.

El método de la teoría de empujes presentado en este trabajo pretende dar solución a los problemas de indeterminación mediante sus algoritmos de optimización y comparar el coste gráfico al requerido para una resolución por elementos finitos.

### La teoría de redes de empujes

La teoría de redes de empujes es una metodología basada en un método gráfico y empleada para modelizar estructuras abovedadas a partir de una red discretizada de fuerzas que se encuentra en equilibrio con las cargas verticales que se aplican sobre ella. Este método, desarrollado en el Institute of Technology in Architecture de Zurich por Philippe Block y John Ochsendorf, supone la extensión del método de redes de fuerzas propuesto por O'Dwyer [1999], que a su vez está basado en la teoría de las figuras recíprocas de Maxwell [1864].

Se puede comparar con el método de bielas y tirantes, procedimiento para el diseño de elementos de hormigón armado, válido para el cálculo en estado límite último, que entiende la estructura como un conjunto de barras articuladas que trabajan a compresión (bielas) o tracción (tirantes), generando un campo de tensiones para el cual la estructura no colapsa. Ésta se basa en dos principios básicos: el teorema mínimo de la plasticidad, por el cual la estructura resistirá si se encuentra un mecanismo resistente viable que evite el colapso de la estructura y que satisfaga las condiciones de contorno y equilibrio estático, y el principio de Saint Venant, que demuestra que las discontinuidades generadas por una carga puntual se reducen a un trozo de pieza, afectando al resto como si fuera distribuida. La solución de la teoría de redes de empujes se puede entender como una red de bielas, es decir, un campo a compresión, que no es único, pero satisface el problema resistente de modo que la estructura no colapsa.

Además, la teoría de redes de empujes respeta el cálculo por el teorema del límite inferior. Como explicó Nielsen, “si para la carga supuesta de rotura podemos encontrar dentro de la estructura una configuración de equilibrio no de rotura que la resista, la carga real de rotura debe ser mayor que la supuesta”, es decir, si la estructura en la configuración propuesta resiste la carga de rotura sin convertirse en mecanismo, la carga de rotura será mayor. Si a la configuración de equilibrio obtenida por este método le aplicamos la carga de rotura, el esfuerzo máximo será mayor que los esfuerzos últimos de la estructura.

Maxwell expuso que dos figuras planas son recíprocas cuando éstas, compuestas por el mismo número de líneas, y siendo las equivalentes paralelas en cada figura, en un diagrama forman un polígono cerrado y en el otro las líneas convergen en un único punto. Así se establece la relación entre la geometría de una figura y sus fuerzas internas considerando que éstas están representadas en la malla recíproca; los polígonos cerrados de este diagrama representan el equilibrio de las fuerzas que convergen en cada punto de la figura original, y las longitudes de los lados de dichos polígonos son proporcionales a la fuerza axial.

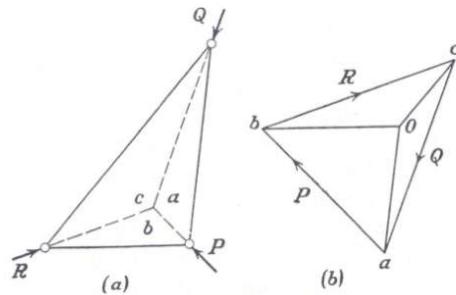


Figura 3. Ejemplo de figuras recíprocas de Maxwell. James Clerk Maxwell Foundation, 2015.

En base a esta teoría, O’Dwyer propuso un enfoque de equilibrio tridimensional implementando métodos de optimización para encontrar la figura recíproca que cumpliese no sólo que la estructura estuviese sometida a compresión pura, sino que ésta estuviese contenida dentro de los límites de diseño de la cúpula. De esta manera se podían proponer múltiples patrones de fuerzas que representasen infinitos estados de equilibrio interno, pero su aplicación quedó limitada a mallas simples y simétricas en las que la geometría del patrón de fuerzas debía ser propuesto en base a la intuición y la experiencia.

La teoría de redes de empujes es también un enfoque tridimensional de los diagramas recíprocos para relacionar la geometría de la estructura con los esfuerzos internos, pero aporta nuevas técnicas de optimización para solucionar el problema de resolución que supone el alto grado de indeterminación de la red tridimensional.

## Estructuración del documento

En los apartados posteriores a esta introducción se van a desarrollar los siguientes temas:

- En el segundo apartado del trabajo se explican la base del polígono funicular de las cargas y los fundamentos teóricos del método que lo caracterizan, y a los cuales se va a hacer referencia en la aplicación del método de resolución propuesto.
- En el tercer apartado se desarrollará el proceso de cálculo generalizado exponiendo los pasos del procedimiento y explicando las dos posibles vías de análisis: la lineal y la matricial.
- Basándose en las dos secciones anteriores, en el cuarto aparto se procederá a la presentación de los ejemplos de aplicación del método, explicando en detalle el proceso de resolución y la comparativa con el modelo construido con el plug-in RhinoVAULT.
- Como quinto apartado del trabajo se realizará la valoración del método y se expondrán las conclusiones alcanzadas al finalizar el proyecto.
- Para concluir el trabajo se redactará la bibliografía empleada en el trabajo.
- De manera adicional, se redactarán los siguientes anexos en los que se encuentran el código de Matlab desarrollado para todos los ejemplos presentados (ANEXO I), los ejemplos más significativos de RhinoVAULT para aprender a usar la herramienta y poder modelar los ejemplos (ANEXO II) y, por último, se explicará paso por paso la construcción de los modelos en Rhinoceros de los ejemplos (ANEXO III):

ANEXO I. CÓDIGOS Y RESULTADOS DESARROLLADOS EN MATLAB

ANEXO II. EJEMPLOS DE APRENDIZAJE DE USO DEL PLUG-IN RHINOVAULT

ANEXO III. CONSTRUCCIÓN DE LOS EJEMPLOS CON EL SOFTWARE RHINOCEROS



## 1. LA TEORÍA

La teoría de redes de empujes pretende conseguir una configuración de equilibrio a partir de unas condiciones geométricas iniciales, cumpliéndose la condición de que todos los elementos trabajen a compresión pura. Ésta se incluye dentro de la rama de la estática gráfica.

La estática gráfica tiene como finalidad resolver el equilibrio de una estructura por medio de dibujos exactos, siempre que las cargas principales actúen sobre un único plano. Gracias a su aplicación en la práctica dentro ámbito del diseño estructural, fue una herramienta ampliamente utilizada en los siglos XIX y XX, y entre las teorías que comprende esta rama se encuentra el método del polígono funicular de las cargas, base para el desarrollo de la teoría de empujes.

### El polígono funicular

Existen ciertos elementos, como los cables, que sólo trabajan bajo solicitudes en una única dirección y que, bajo la influencia de las cargas, alcanzan su equilibrio de manera viable y eficaz llegando a su estado de menor energía potencial. La deformación del cable en estas condiciones da lugar al polígono funicular.

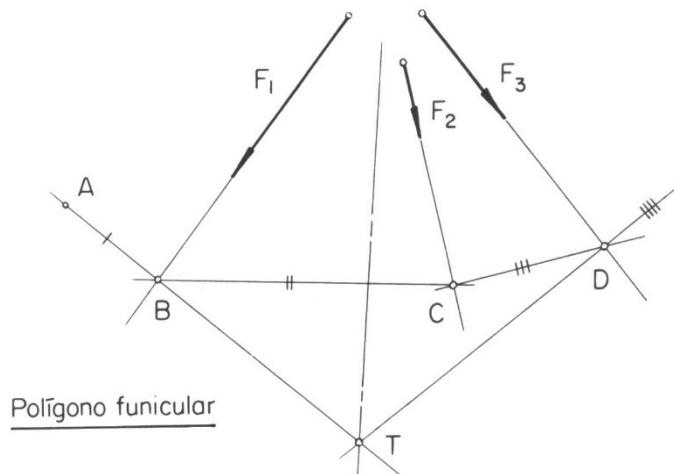


Figura 4. Ejemplo de aplicación del polígono funicular.

Cada punto de aplicación de la fuerza es un nudo, y en ellos tiene que haber equilibrio teniendo en cuenta las solicitudes tanto de dicho punto como de los contiguos. El método del polígono funicular consiste en la representación gráfica del sumatorio de las fuerzas para conocer la geometría final y los esfuerzos en los extremos del objeto estudiado.

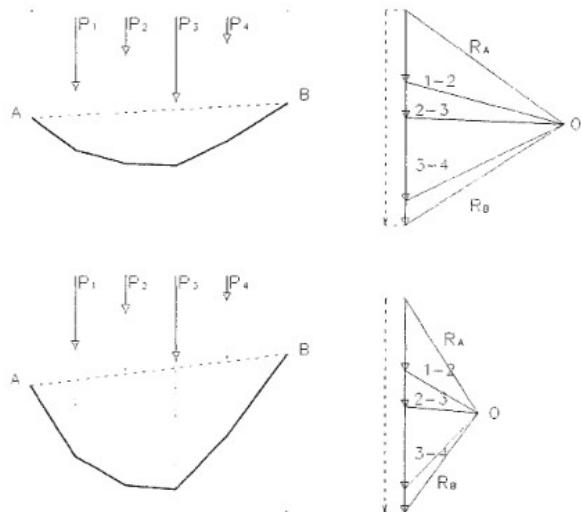


Figura 5. Dos opciones de resolución de un problema funicular. La primera con mayores reacciones y la segunda con mayor longitud de polígono funicular.

Con este método se puede llegar a un número infinito de posibles soluciones ya que presenta como ventaja la elección arbitraria de parámetros que permiten explorar un abanico más amplio de soluciones para el diseño. A partir de la determinación del polo O para llevar a cabo todo el análisis gráfico, se determinan los esfuerzos de los extremos y la geometría del polígono funicular. De esta manera, si el polo está cerca del sumatorio el elemento será largo y las solicitudes más pequeñas, pero si se aleja aumentarán los esfuerzos en los extremos y el elemento será más corto.

Robert Hooke (1635-1703) expuso que invirtiendo especularmente esta disposición se obtiene una estructura antifuncional de idénticas propiedades, pero con la particularidad de que las fuerzas horizontales ahora son de compresión.

Las estructuras de fábrica tienen el mismo requerimiento que la estructura antifuncional, todos sus elementos deben estar trabajando a compresión para conseguir el equilibrio de la estructura. Por tanto, si la sección transversal del arco contiene al polígono funicular de las fuerzas, se asegura que la estructura trabaja a compresión y, por tanto, es estable. Sin embargo, así como los cables cambian de forma para adaptarse al sistema de acciones aplicado, el arco se cae. Como soluciones a este problema se aceptaría aumentar la sección para que, aunque varíe el estado de cargas, el polígono funicular siga estando contenido en la sección, o emplear materiales que resistan flexión y emplear hormigón armado o acero en vez sillares de piedra o ladrillo.

El método de redes de empujes fija unos límites de altura para que, mediante la iteración del método, se consiga una geometría comprendida en los límites del intradós y el extradós, asegurando que el polígono funicular resultante de la acción de las cargas aplicadas se encuentre dentro de la sección de la estructura abovedada y, por tanto, en equilibrio.

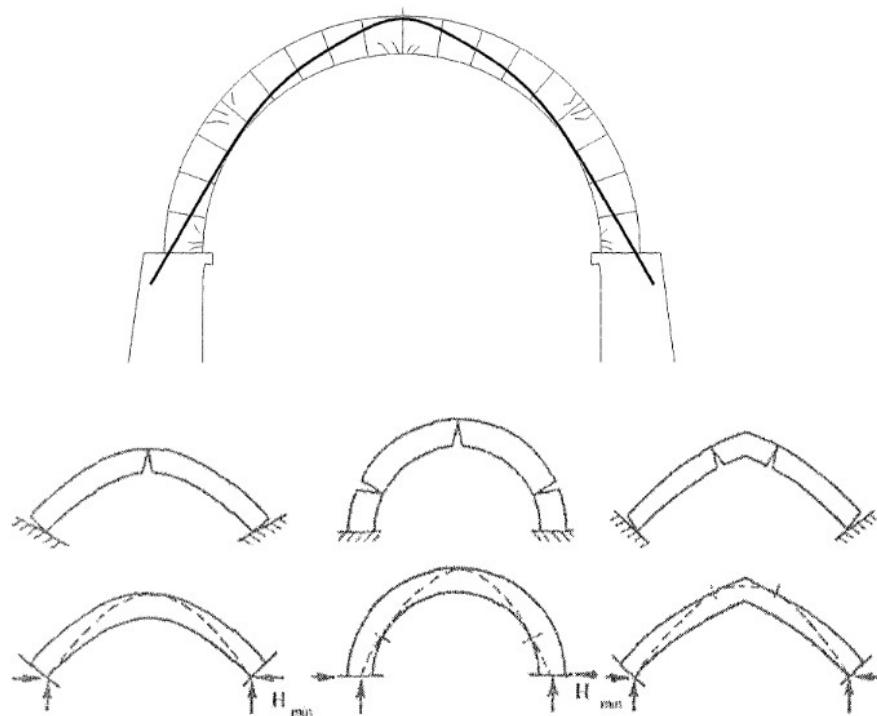


Figura 6. Esquemas de polígono funicular dentro de un arco y posibles formas de colapso de la estructura.

### Base teórica del método

La teoría de redes de empujes se basa en tres conceptos básicos para su aplicación, y éstos son la comprensión de los diagramas recíprocos aplicados a las estructuras para conseguir una única solución óptima en equilibrio y a compresión pura, su extensión a las tres dimensiones a través del parámetro de control denominado factor de escala que supone además la interacción directa entre el usuario y la geometría final de la estructura, y cómo tratar sistemas indeterminados.

En la aplicación de las figuras recíprocas a la ingeniería estructural, los polígonos resultantes en la figura recíproca representan el equilibrio estático en el punto analizado y las longitudes de las ramas son proporcionales a las fuerzas en la configuración original. Por tanto, en la formulación del método se debe asegurar que se alcanza una solución viable para el problema que se quiere analizar, y para ello todos los polígonos deben ser figuras cerradas.

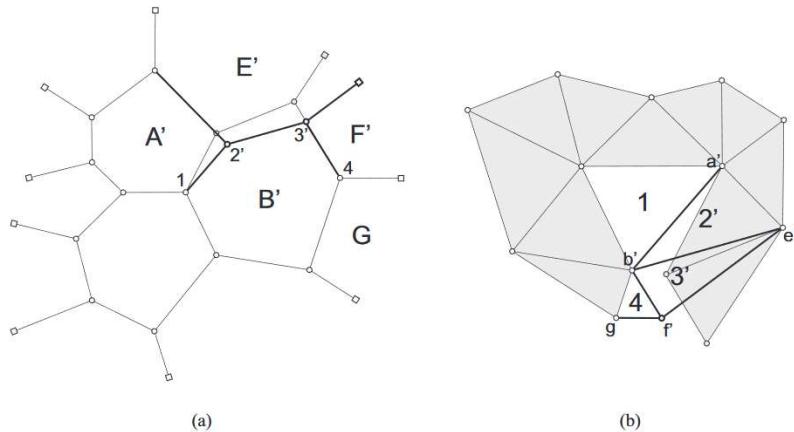


Figura 7. (a) Malla de tres barras desequilibrada, (b) su malla dual abierta y una posible corrección. Block P. y Ochsendorf J., Thrust network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium, 2009.

Sin embargo, no hay una única malla recíproca para cada planta propuesta. El usuario determina la geometría de la segunda malla según la distribución de fuerzas que quiera imponer en la estructura final. Así, se pueden obtener múltiples resultados como los mostrados en la figura 10.

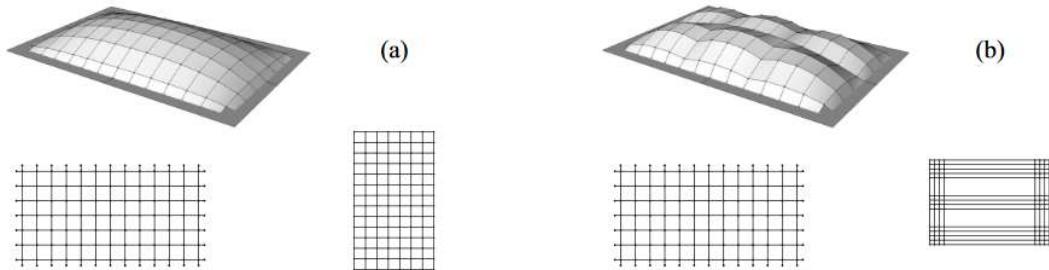


Figura 8. Mallas regulares y sus correspondientes mallas duales y soluciones de equilibrio. Block P. y Ochsendorf J., Thrust network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium, 2009.

Además de asegurar el equilibrio, la resolución debe dar una solución funicular, es decir, que la estructura trabaje a compresión pura. La construcción del polígono de fuerzas no garantiza esta condición, por lo que se debe imponer una condición adicional que desarrolló Cris J. K. Williams: las ramas que representan líneas de fuerza entrantes en un punto de la malla original deben estar colocadas en el sentido de las agujas del reloj.

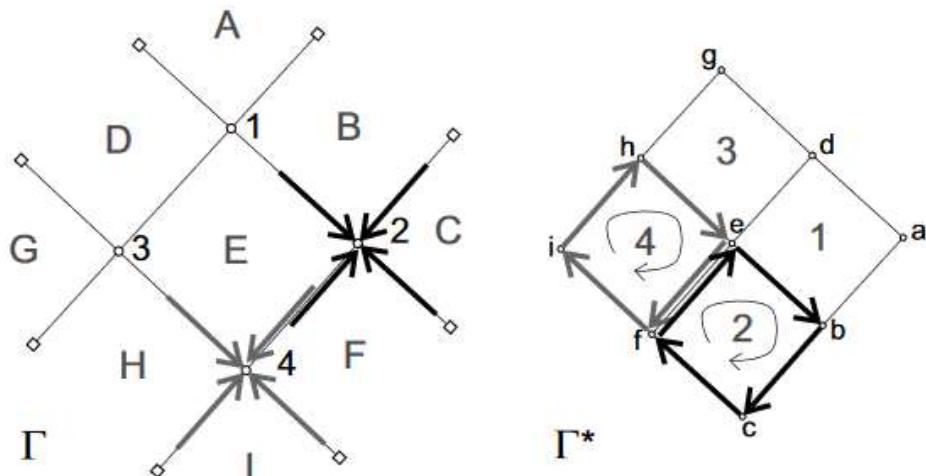


Figura 9. Polígonos cerrados representando equilibrio de fuerzas a compresión. Block P. y Ochsendorf J., Thrust network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium, 2009.

El equilibrio en dos dimensiones representado en los diagramas recíprocos se puede relacionar con una estructura en tres dimensiones ya que Henrici y Turner [1903] demostraron que la proyección de los vectores convergentes en equilibrio en un punto en el espacio también se encuentra en equilibrio. Por tanto, la proyección de la estructura en el plano, siendo ésta la malla original o primal, estará en equilibrio si la estructura lo está y viceversa. Dado dicho caso, la construcción de la malla recíproca o dual representará el equilibrio de fuerzas en los nudos siendo la estructura una solución funicular que trabaje a compresión pura.

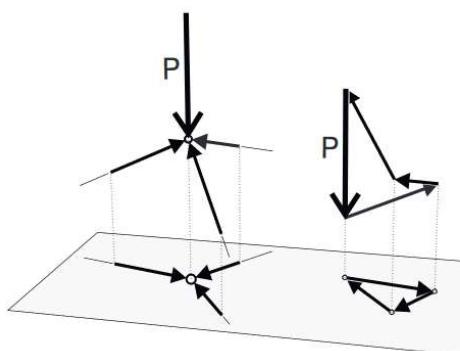


Figura 10. Proyección de las fuerzas en el plano horizontal. Block P. y Ochsendorf J., Thrust network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium, 2009.

La altura, y por tanto la geometría de la estructura, es dependiente de la magnitud de las fuerzas representadas en la malla dual, y esto es controlado por un único parámetro denominado factor de escala. Un incremento en el factor de escala de la malla propuesta supondría un aumento proporcional de las fuerzas que representa y, por tanto, la altura sería menor. Esto sería equivalente a mover el polo en el polígono funicular de las cargas.

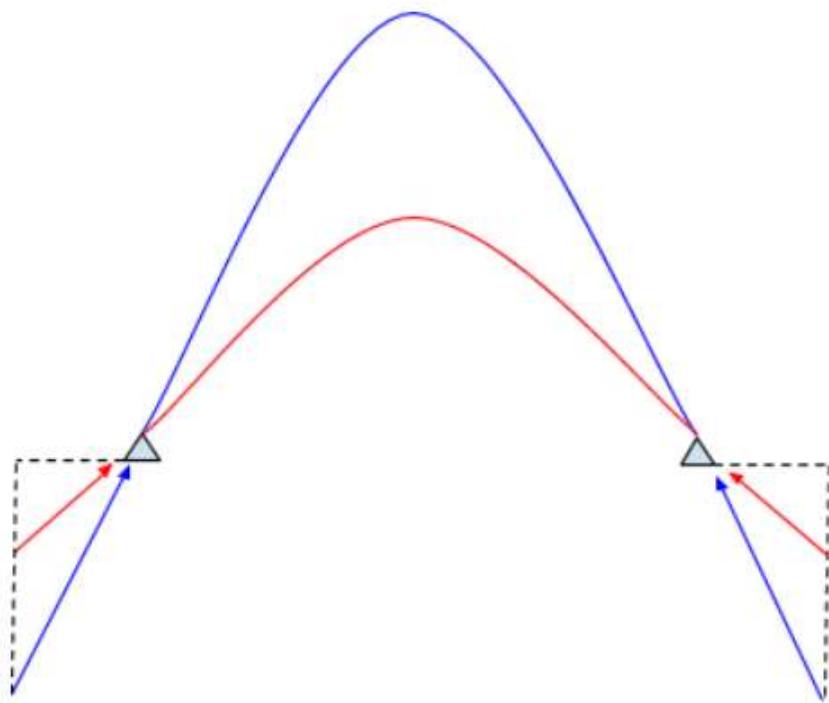
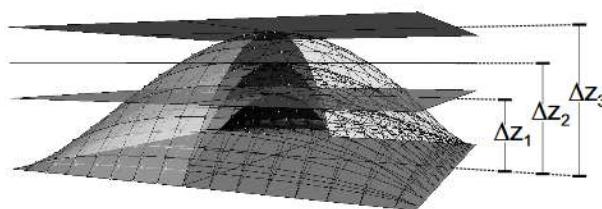


Figura 11. Comparación de la magnitud de las fuerzas según la altura de la estructura.

Con el factor de escala podemos obtener un número infinito de soluciones cuyas alturas son inversamente proporcionales a este parámetro determinado por el usuario. Si éste está definido, sólo hay una única solución posible.



$\Delta z_{\max}$	5	7.5	10
$\zeta$	16	12	8

Figura 12. Evolución de la altura con el factor de escala en una estructura. Block P. y Ochsendorf J., Thrust network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium, 2009.

Los puntos en los que convergen tres líneas de fuerza son sistemas determinados y, por definición, tienen solución única. Sin embargo, se pueden presentar casos en los que, por la discretización realizada, la malla primal se componga de nudos con cuatro o más ramas convergentes y, por tanto, no sea un sistema determinado.

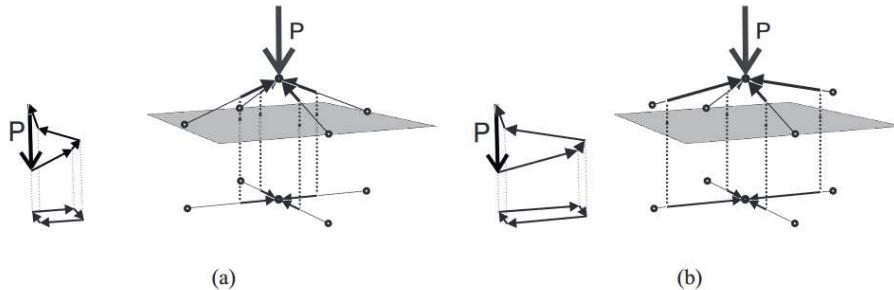


Figura 13. Dos esquemas indeterminados con la misma carga y mismo esquema, pero diferentes diagramas recíprocos, (b) dobla la magnitud de la fuerza en una dirección y por lo tanto disminuirá la altura a la mitad en ella. Block P. y Ochsendorf J., Thrust network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium, 2009.

Para este caso habrá más de una solución y, para definirlo, se tendrán que imponer tantas condiciones y relaciones como grados de indeterminación tenga la estructura. Sin embargo, para mallas altamente indeterminadas y de geometría complicada es muy difícil aplicar este procedimiento de manera satisfactoria. Éste fue uno de los principales hándicaps de la teoría propuesta por O'Dwyer y, para solucionarlo, Block y Ochsendorf proponen un algoritmo de optimización en el que se imponen como restricciones las mismas que para encontrar una solución a compresión pura. Para geometrías difíciles, es necesario hacer este proceso dividiendo la planta en zonas más pequeña para la aplicación del algoritmo.



## 2. DESARROLLO DEL PROCEDIMIENTO DE CÁLCULO

### Pasos de la resolución

A continuación se van a exponer los principales pasos del método con un comentario relacionado con la puesta en práctica de cada apartado en este trabajo.

- Construcción de la malla primal o diagrama original

El diagrama dual representa la proyección horizontal de la discretización de la estructura propuesta. Al igual que en un análisis de elementos finitos, cuanto mayor sea la discretización más preciso será el resultado obtenido por el método. Asimismo, se planteará un patrón para el flujo de fuerzas en la estructura.

- Formulación de límites de altura objetivo llamados intradós y extradós entre los cuales se debe encontrar la solución final.

A la hora de imponer las restricciones de altura se debe asegurar que la estructura trabaja a compresión pura. La excentricidad con la que se aplica la fuerza podría provocar que se genere momento y, por tanto, esfuerzos de tensión en el elemento analizado. Para impedirlo, se debe asegurar que el punto de aplicación de las fuerzas se encuentre en una fracción del área transversal del elemento llamada núcleo central de la sección. Esta condición será impuesta en el método a través de los límites interno y externo de altura para cada punto.

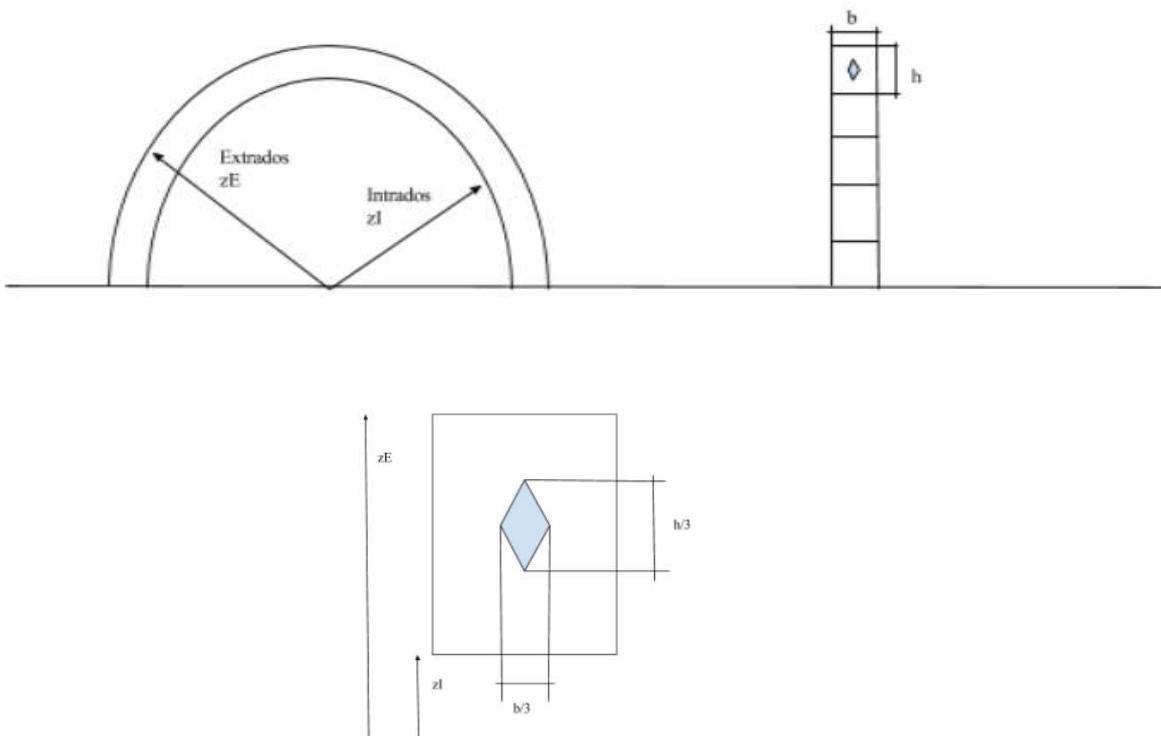


Figura 14. Representación de los límites de altura inferior, intradós, y superior, extradós, en un arco y el núcleo central de su sección.

En este estudio se van a establecer unos límites amplios ya que el objetivo del trabajo es obtener una solución funicular óptima, no llegar a una geometría específica.

c) Atribución de las cargas nodales

Dado que se trabaja con un diagrama discretizado, las cargas son aplicadas en los puntos que componen la malla. Aunque la carga principal es el peso propio, las cargas que se van a imponer en los ejemplos son arbitrarias ya que en los ejemplos no se ha definido ningún material determinado para obtener una solución general para una carga seleccionada por el usuario.

d) Propuesta de malla dual

Ésta, como se ha explicado anteriormente, tiene que asegurar el equilibrio y que la estructura trabaje a compresión pura. Si fuese un caso de malla indeterminada, el usuario impone las condiciones convenientes para que el diagrama quede totalmente definido.

e) Planteamiento y resolución de las ecuaciones a partir de las características de ambos diagramas.

En ellas, el único parámetro que quedará por definir será el factor de escala. Éste permitirá encontrar varias soluciones para una única malla variando la magnitud de las fuerzas para influir directamente en la altura de cada punto. En el caso de que no se encontrase una solución válida, se debería actualizar la malla variando la forma de ésta, pero manteniendo las condiciones anteriores de equilibrio.

### Formulación del problema en un punto

La formulación se inicia planteando el equilibrio estático en cada uno de los nodos, de tal manera que el sumatorio de las componentes verticales de las fuerzas compense la acción vertical aplicada en cada nodo. Dado que esto se aplicada en cada punto, habrá tantas ecuaciones como nudos internos tenga la estructura ya que los externos o puntos de contorno ya están determinados, es decir, se conoce su altura.

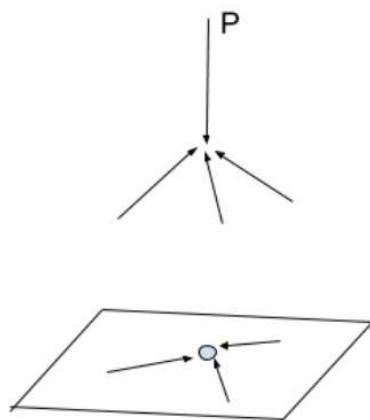


Figura 15. Proyección en el plano horizontal de las fuerzas que actúan en un punto.

$$F_{ji}^V + F_{ki}^V + F_{li}^V = P$$

Como se ha citado anteriormente, por la teoría de Henrici y Turner [1903], la proyección horizontal de las fuerzas cuya componente vertical compensa la acción impuesta en el nudo también deben asegurar esta condición. Por tanto, el problema se puede reformular en función de las componentes horizontales de las fuerzas convergentes a través de la proporcionalidad geométrica.

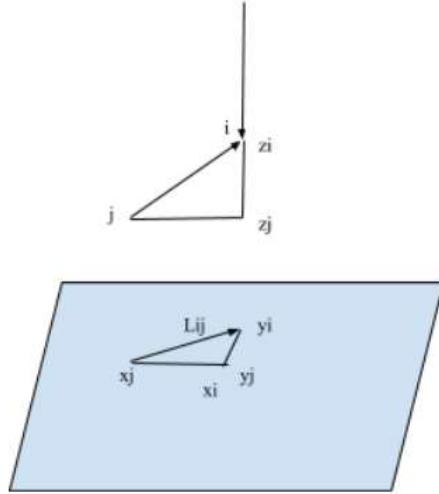


Figura 16. Relación geométrica entre los vectores de fuerzas y su proyección en el plano.

$$L_{ij}^H = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

$$\frac{F_{ij}^H}{L_{ij}^H} = \frac{F_{ij}^V}{z_i - z_j}$$

Por tanto, la ecuación queda en función de las fuerzas horizontales, la longitud de las ramas de la malla primal y de las alturas.

$$F_{ji}^H \frac{z_i - z_j}{L_{ij}^H} + F_{ki}^H \frac{z_i - z_k}{L_{ik}^H} + F_{li}^H \frac{z_i - z_l}{L_{il}^H} = P$$

La magnitud de las fuerzas horizontales se relaciona a través de la longitud de la representación de las fuerzas en la malla dual, por eso la ecuación puede expresarse en términos de la geometría de la malla propuesta, que cumple las condiciones de equilibrio y compresión pura, y del factor de escala para controlar la geometría de la solución final.

$$F_{ji}^H = \zeta L_{ij}^{H*}$$

$$L_{ij}^{H*} = \sqrt{(x_i^* - x_j^*)^2 + (y_i^* - y_j^*)^2}$$

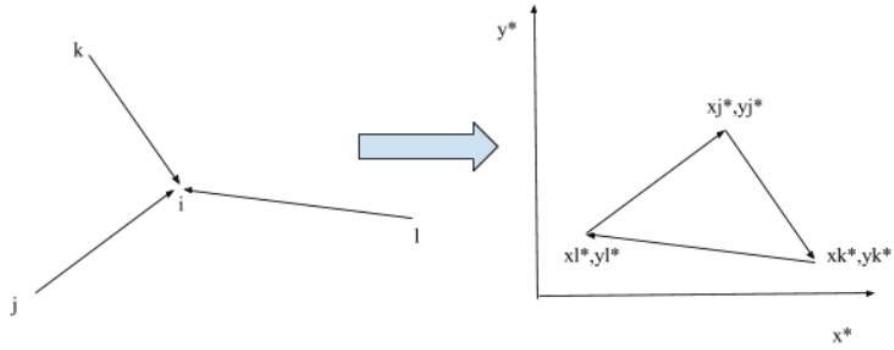


Figura 17. Representación de un punto de la malla original como un polígono de la malla recíproca.

$$L_{ij}^{H*} \frac{z_i - z_j}{L_{ij}^H} + L_{ik}^{H*} \frac{z_i - z_k}{L_{ik}^H} + L_{il}^{H*} \frac{z_i - z_l}{L_{il}^H} = \frac{1}{\zeta} P$$

Si se separan las alturas del resto de parámetros la ecuación para cada punto quedaría como:

$$\left( \frac{L_{ij}^{H*}}{L_{ij}^H} + \frac{L_{ik}^{H*}}{L_{ik}^H} + \frac{L_{il}^{H*}}{L_{il}^H} \right) z_i + \left( \frac{L_{ij}^{H*}}{L_{ij}^H} \right) z_j + \left( \frac{L_{ik}^{H*}}{L_{ik}^H} \right) z_k + \left( \frac{L_{il}^{H*}}{L_{il}^H} \right) z_l = \frac{1}{\zeta} P$$

La relación entre las longitudes de ambas mallas se puede agrupar en un término llamado  $d_{ni}$  ya que todos los parámetros son conocidos. Con las condiciones de contorno impuestas y el factor de escala seleccionado por el usuario, sólo queda determinar la altura de los puntos.

$$d_{ii} z_i + d_{ii} z_j + d_{ii} z_k + d_{ii} z_l = \frac{1}{\zeta} P$$

Este procedimiento se puede aplicar a pequeñas estructuras ya que se puede codificar de manera muy sencilla. Sin embargo, cuando la estructura se compone de muchos nudos, las ecuaciones se deben resolver mediante un análisis computacional más complejo.

## Implementación matricial

Basándose en los mismos principios, la implantación computacional se sirve de vectores y matrices que representan no sólo la geometría de ambas mallas como en el caso anterior, sino también la conectividad de las barras de los diagramas. Además, los puntos serán numerados en las matrices de una manera específica: los nudos internos se numeran primero y después los puntos que configuran el contorno. Este orden, igual que el que imponga el usuario a las fuerzas, debe mantenerse hasta el final del cálculo. En cuestión de notación, se denomina con el subíndice  $i$  a los elementos internos y con el subíndice  $b$  a los de contorno:

$$x = \begin{bmatrix} x_i \\ x_b \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_i \\ y_b \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} z_i \\ z_b \end{bmatrix}$$

La matriz C será la encargada de relacionar la conectividad de los nudos. Aunque haya flechas salientes que podrían interpretarse como fuerzas de tensión, pero es una propuesta de camino del flujo de las cargas, no indica la dirección de las fuerzas en los nodos. Como se observa en la figura 20, las flechas se orientan para asegurar el estado de compresión pura: las entrantes en el sentido de las agujas del reloj y las salientes siguiendo el giro antihorario. Cabe destacar que la notación empleada para las ramas son los números romanos, y para los polígonos de la malla primal las letras.

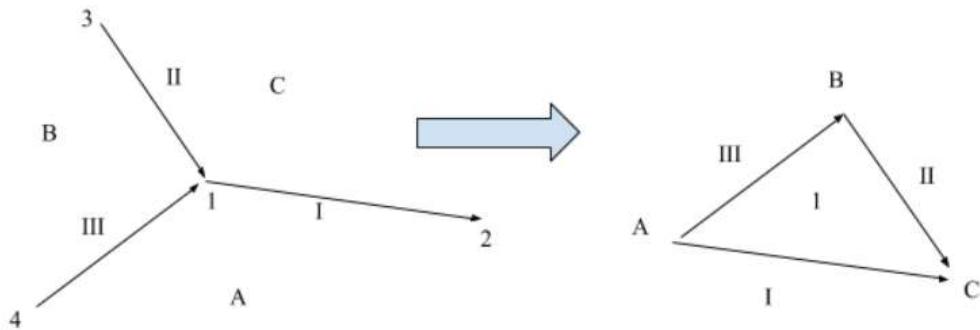


Figura 18. Representación de un nudo de la malla en el diagrama dual como un polígono.

La matriz tendrá dimensión  $n \times m$ , siendo  $n$  el número total de puntos y  $m$  el número de ramas. Cada fila representa una rama, la cual une dos de los puntos representados en las columnas. Al nudo de cabeza le corresponderá un 1, al nudo de cola un -1, y el resto de elementos de esa columna tendrán valor 0. En el ejemplo anterior, para la rama I, el punto 2 sería el nudo de cabeza y el punto 1 el nudo de cola.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \text{I} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \text{II} & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \text{III} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

La matriz puede separarse entre los nudos internos y los externos. Dicha descomposición se empleará en el cálculo de las alturas.

$$(C_i | C_b)$$

La matriz C tiene su homóloga dual  $C^*$  y también se empleará en la aplicación del método. Igual que la primera, representa las relaciones entre los puntos de la malla dual teniendo en cuenta que los polígonos de la malla primal han pasado a ser puntos de la recíproca, y los puntos de la original son polígonos en la dual.

A pesar del cambio, la matriz  $C^*$  se construye fácilmente comparando las ramas de cada polígono de la malla primal con el giro antihorario: si siguen esa dirección, le corresponderá un 1 en la matriz dual y, en caso contrario, se le asignará un -1. El resto de elementos serán nulos.

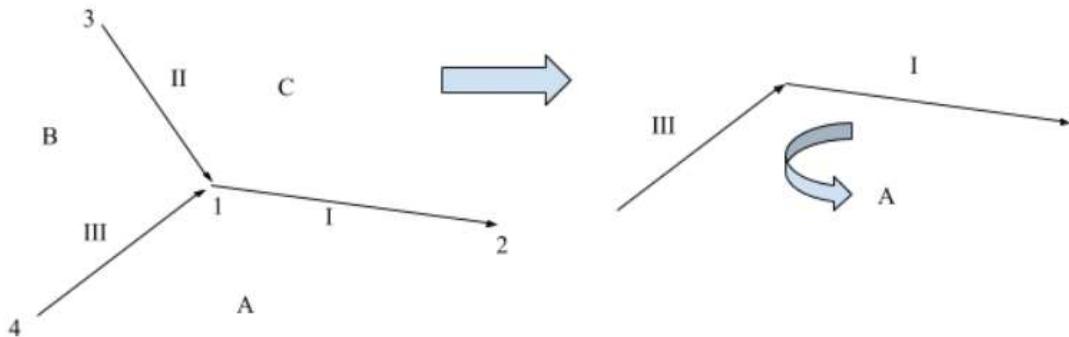


Figura 19. Criterio para la elaboración de la matriz de relaciones de la malla dual  $C^*$ .

Dado el criterio anterior, la matriz  $C^*$  para la red propuesta sería la mostrada a continuación. Se puede comprobar que llega al mismo resultado aplicando el método impuesto para obtener  $C$  desde la malla primal sobre la figura 22 propuesta como opción de diagrama dual.

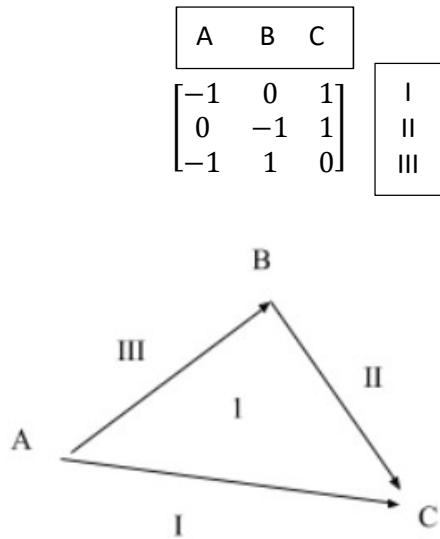


Figura 20. Propuesta de polígono para la malla dual del ejemplo.

Con las coordenadas de ambas mallas primal y dual y las matrices  $C$  y  $C^*$  se pueden obtener los vectores de coordenadas de las ramas de ambos diagramas y calcular las longitudes para obtener un sistema análogo al que se empleaba en el caso de aplicación a un único punto. Las matrices  $U$ ,  $U^*$ ,  $V$  y  $V^*$  son los vectores de coordenadas diagonalizados.

$$u = Cx = C_i x_i + C_b x_b$$

$$v = Cy = C_i y_i + C_b y_b$$

$$u^* = C^* x^*$$

$$v^* = C^* y^*$$

$$L_H = \sqrt{U^t U + V^t V}$$

$$L_H^* = \sqrt{U^{*t} U^* + V^{*t} V^*}$$

De la teoría de Schek [1974] para la formulación de la ecuación de equilibrio y aplicando el concepto de densidad de fuerza de Linkwitz y Schek [1971] se obtiene el sistema final para la resolución del problema en función del factor de escala. El vector P de la ecuación representa las cargas verticales aplicadas en cada nodo y tiene dimensiones  $n_i \times 1$ .

$$C_i^t (L_H^{-1} L_H^*) C z - P \frac{1}{\zeta} = 0$$

Separando la ecuación en nudos internos y externos y agrupando los términos conocidos se obtiene una formulación similar a la del apartado anterior.

$$C_i^t (L_H^{-1} L_H^*) C_i z_i + C_i^t (L_H^{-1} L_H^*) C_b z_b - P \frac{1}{\zeta} = 0$$

$$D_i = C_i^t (L_H^{-1} L_H^*) C_i$$

$$D_b = C_i^t (L_H^{-1} L_H^*) C_b$$

La matriz  $D_i$  tiene dimensiones  $n \times n_i$  y  $D_b$  tiene dimensiones  $n \times n_b$ .

$$D_i z_i + D_b z_b - P \frac{1}{\zeta} = D z - P \frac{1}{\zeta} = 0$$

Despejando el vector de alturas de la ecuación, el sistema a implementar queda como:

$$z_i = D_i^{-1} \left( P \frac{1}{\zeta} - D_b z_b \right)$$



### 3. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO

#### PRIMER EJEMPLO

##### Resolución lineal

La primera cúpula propuesta presenta una planta rectangular de 2x1 metros discretizada en cuatro elementos triangulares que convergen en un único punto interno. Al ser una planta sencilla, se puede emplear el análisis simple y prescindir de la implementación matricial con las matrices C y C\*. Siguiendo el criterio expuesto en el apartado anterior, sobre esta figura se deben nombrar los puntos, primero los internos y luego los externos, y proponer un patrón de flujo de fuerzas. Los puntos 1, 2, 3 y 4 son los puntos de contorno y todos ellos tienen cota 0. Para este ejemplo se ha escogido una carga puntual de 500 N aplicada sobre el punto interno 1, del cual queremos conocer su altura.

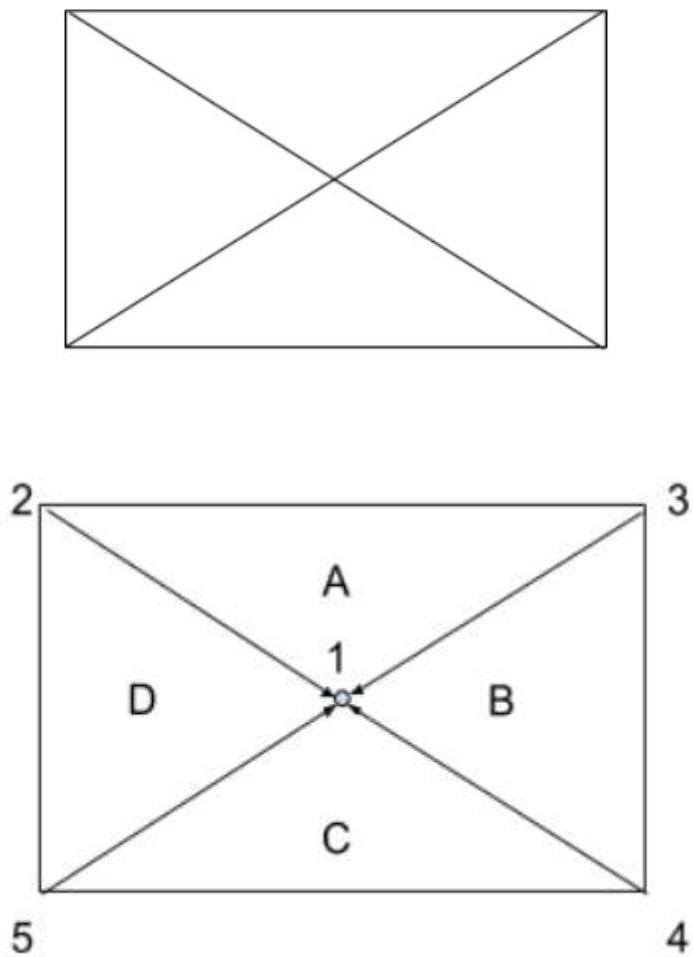


Figura 21. Representación de la planta propuesta y numeración de sus elementos.

A continuación se plantean las ecuaciones de equilibrio y, a primera vista, se puede intuir que debido a la simetría de la planta generada las cuatro fuerzas van a ser iguales. Primero se plantea el equilibrio vertical y luego se reformula en el plano horizontal a través de la geometría de la planta para tener como incógnita la altura de los puntos internos, en este caso sólo uno, en vez de las fuerzas, es decir, la geometría pasa a ser el objetivo de resolución del problema.

$$F_{21}^V + F_{31}^V + F_{41}^V + F_{51}^V = P$$

$$L_{21}^H = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$L_{31}^H = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$$

$$L_{41}^H = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}$$

$$L_{51}^H = \sqrt{(x_1 - x_5)^2 + (y_1 - y_5)^2}$$

$$F_{21}^H \frac{z_1 - z_2}{L_{21}^H} + F_{31}^H \frac{z_1 - z_3}{L_{31}^H} + F_{41}^H \frac{z_1 - z_4}{L_{41}^H} + F_{51}^H \frac{z_1 - z_5}{L_{51}^H} = P$$

Para determinar los límites de la sección se va a imponer un margen amplio ya que el objetivo no es encontrar una solución específica y, además, la discretización propuesta es muy pobre y no es posible encontrar una solución dentro de unos límites muy ajustados. Por tanto, se plantea que la magnitud del intradós sea 0.1 m y la del extradós 1.5 m para que, aplicando la teoría del núcleo central, la altura esté comprendida entre 0.567 y 1.03 metros.

$$z_1^I = 0.1 \text{ m}$$

$$z_1^E = 1.5 \text{ m}$$

$$z_1^{LB} = z_1^I + \frac{1}{3}(z_1^E - z_1^I) = 0.567 \text{ m}$$

$$z_1^{UB} = z_1^E - \frac{1}{3}(z_1^E - z_1^I) = 1.03 \text{ m}$$

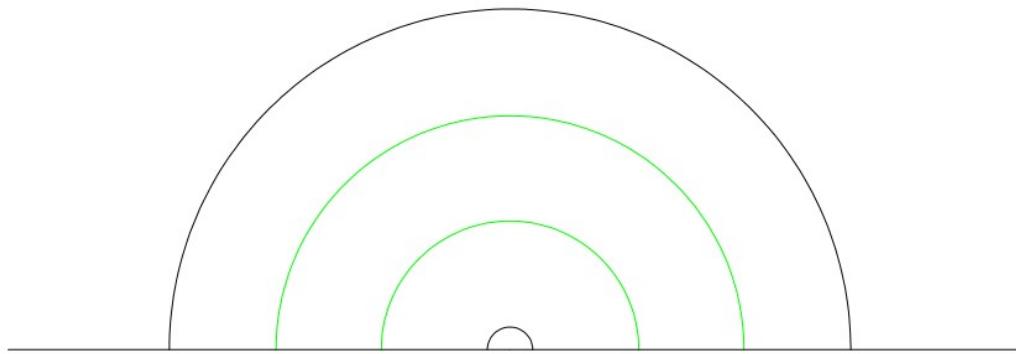


Figura 22. Representación del núcleo central de la sección de los límites impuestos.

Una vez definido todo el sistema real se pasa al plano dual, para el cual hay que proponer una malla cuyas ramas sean paralelas a las homólogas del diagrama original y que la orientación en los polígonos construidos con ellas siga el giro de las agujas del reloj si convergen en el punto que se reproduce en el diagrama dual. Cabe destacar que este problema es indeterminado por definición ya que entran cuatro líneas de fuerza al punto estudiado. Esta indeterminación se soluciona imponiendo que las cuatro fuerzas sean iguales. Con estas condiciones aplicadas, el diagrama dual obtenido es el representado con sus ejes en la figura 25. Una vez desarrollada la malla, se han asociado unas coordenadas a ésta para definirla y dar magnitud a las fuerzas. En este caso, las ramas son de longitud doble a las del diagrama original. Como la fuerza horizontal se define a través de la longitud de las ramas en el diagrama dual y el factor de escala, la ecuación se puede reformular en función de las longitudes de ambos diagramas para dejar la ecuación en función de  $z_5$  siendo el resto de parámetros conocidos.

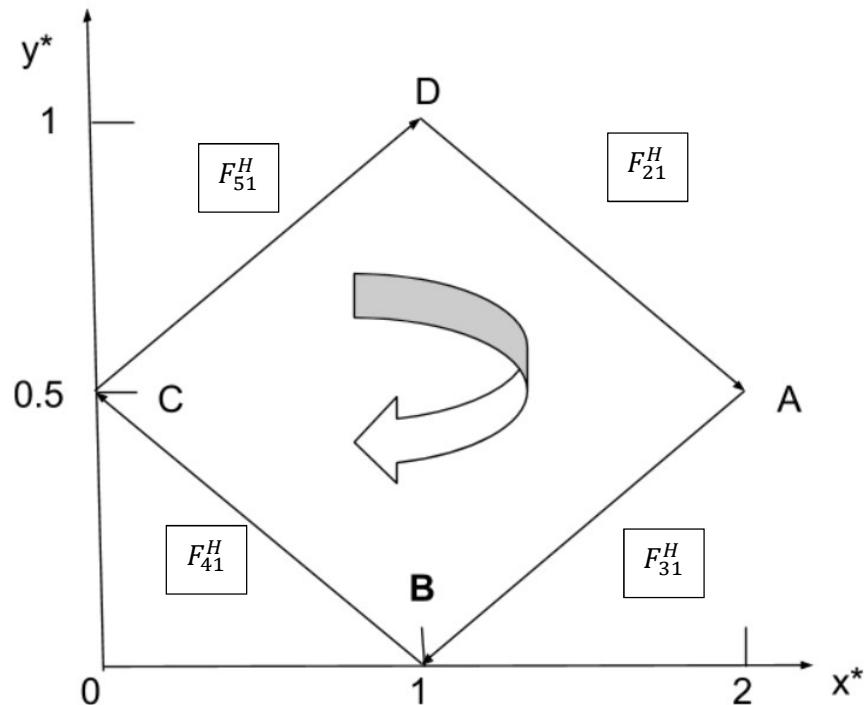


Figura 23. Malla dual propuesta para el primer ejemplo.

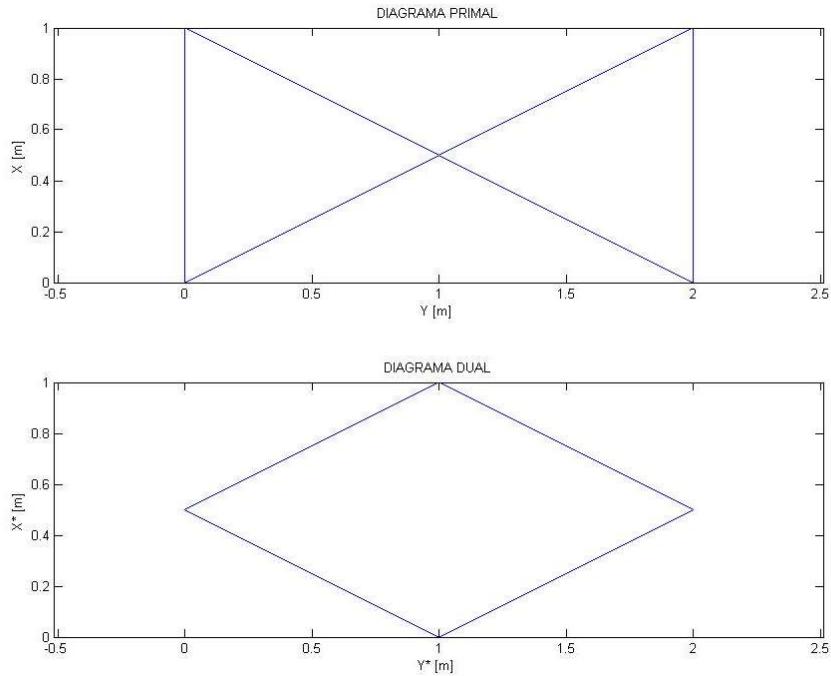


Figura 24. Representación de diagramas original y recíproco hechos con el código de resolución de Matlab.

$$F_{21}^H \frac{1}{\zeta} = L_{21}^{H*} = \sqrt{(x_D^* - x_A^*)^2 + (y_D^* - y_A^*)^2}$$

$$F_{31}^H \frac{1}{\zeta} = L_{31}^{H*} = \sqrt{(x_A^* - x_B^*)^2 + (y_A^* - y_B^*)^2}$$

$$F_{41}^H \frac{1}{\zeta} = L_{41}^{H*} = \sqrt{(x_B^* - x_C^*)^2 + (y_B^* - y_C^*)^2}$$

$$F_{51}^H \frac{1}{\zeta} = L_{51}^{H*} = \sqrt{(x_C^* - x_D^*)^2 + (y_C^* - y_D^*)^2}$$

$$\frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} (z_1 - z_2) + \frac{L_{31}^{H*}}{L_{31}^H} (z_1 - z_3) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} (z_1 - z_4) + \frac{L_{51}^{H*}}{L_{51}^H} (z_1 - z_5) = P \frac{1}{\zeta}$$

$$\left( \frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} + \frac{L_{31}^{H*}}{L_{31}^H} + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} + \frac{L_{51}^{H*}}{L_{51}^H} \right) z_1 = P \frac{1}{\zeta}$$

Sólo queda definir el factor de escala, al que se le da un valor de 15 ya que las longitudes son pequeñas y se estima que, para ese valor, se va a encontrar una solución en los rangos comprendidos. Para este caso, la altura del punto 1 será 0.833 metros y el polígono funicular se encontrará dentro de los límites obtenidos del cálculo de la sección central.

GEOMETRIA FINAL

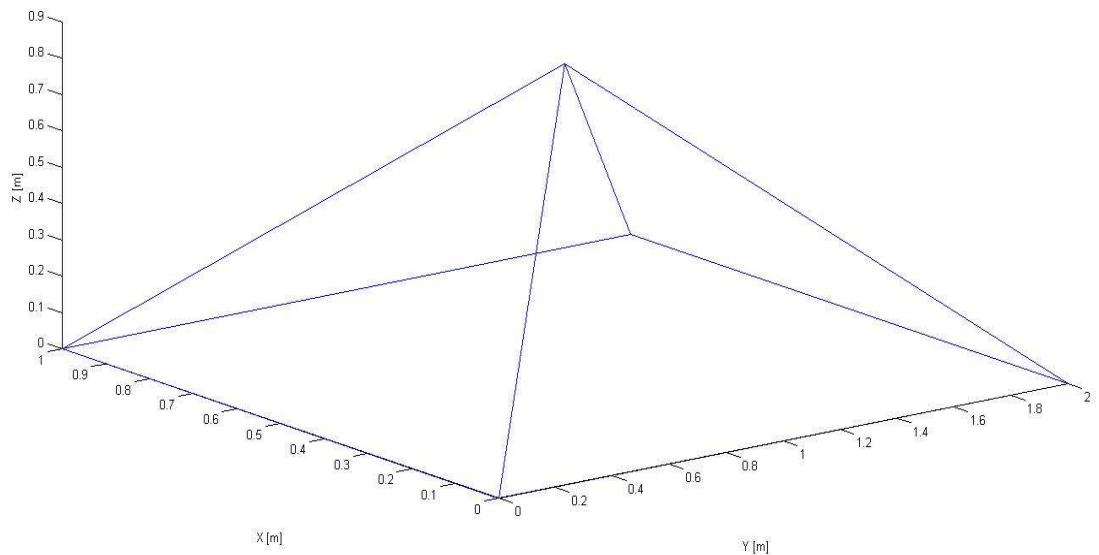


Figura 25. Geometría solución proporcionada por el código de Matlab.

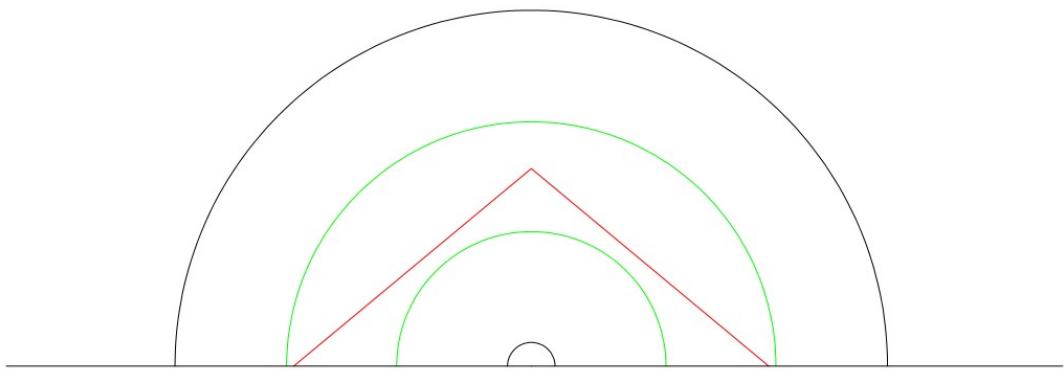


Figura 26. Representación de la solución dentro del núcleo central de la sección.

Efectivamente, todas las fuerzas son iguales y de valor 17.1391 N con componente horizontal de 16.7705 N.

Aunque se puede hacer el cálculo con otros factores de escala, el polígono funicular dejaría de encontrarse dentro de la sección central. Por ejemplo, con factor de escala 10 la fuerzas resultante y horizontal serían 11.7260 N y 11.1803N respectivamente, y la altura sería 1.25 metros, mayor que en el caso anterior.

### GEOMETRIA FINAL

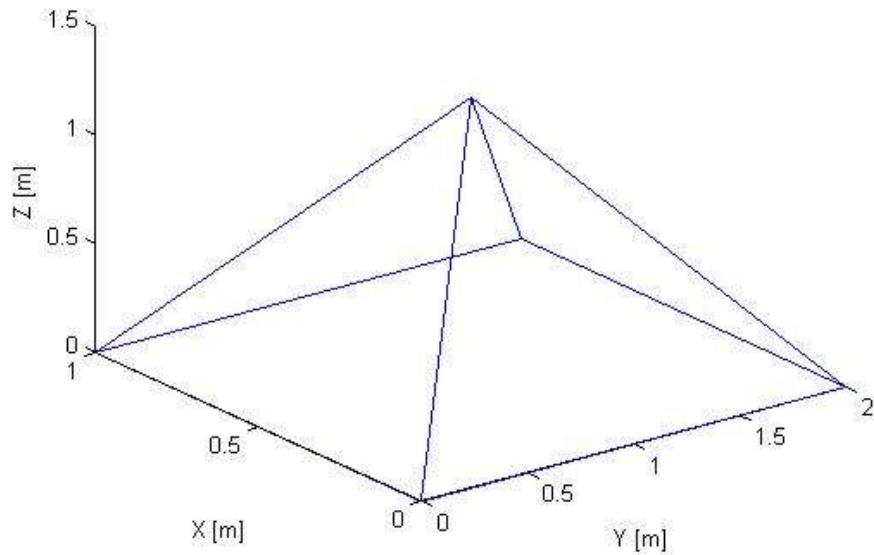


Figura 27. Geometría solución con factor de escala 10 proporcionada por el código de Matlab.

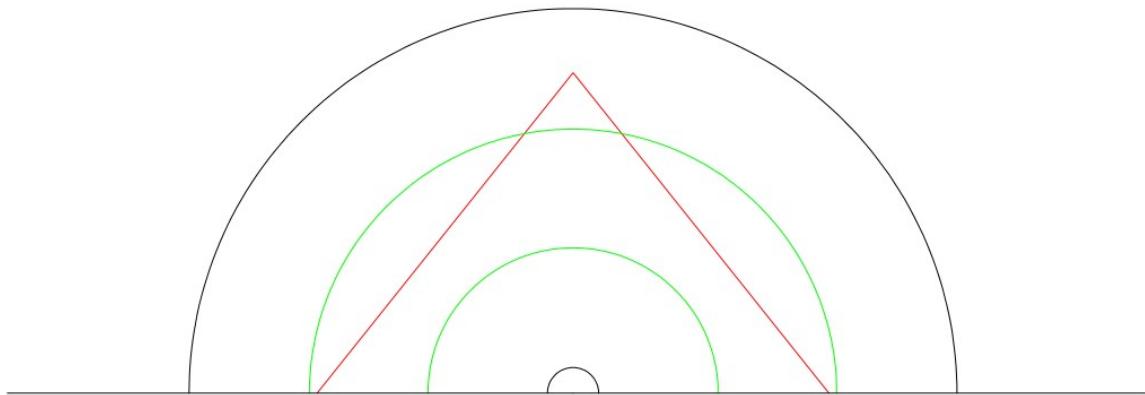


Figura 28. Representación de la solución con factor de escala 10 fuerza del núcleo central de la sección propuesta.

Reproducción del modelo en Rhinoceros

En primera instancia no se van a modificar los valores por defecto del plug-in, de los que destaca el factor de escala de la altura. Este parámetro no coincide con el factor de escala empleado en las ecuaciones, éste se implementó en el software para aumentar o disminuir la altura de la cúpula de una manera más intuitiva. Asimismo, tampoco se establecen límites de altura ya que el programa propone una solución optimizada en función de un peso aleatorio para la resolución del problema.

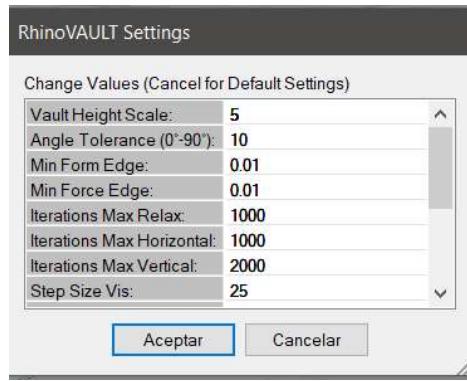


Figura 29. Valores por defecto de la configuración de cálculo de RhinoVAULT.

Siguiendo los pasos de resolución del método en Rhinoceros, después de haber iniciado el modelo en metros, hay que generar la malla primal y obtener una malla dual.

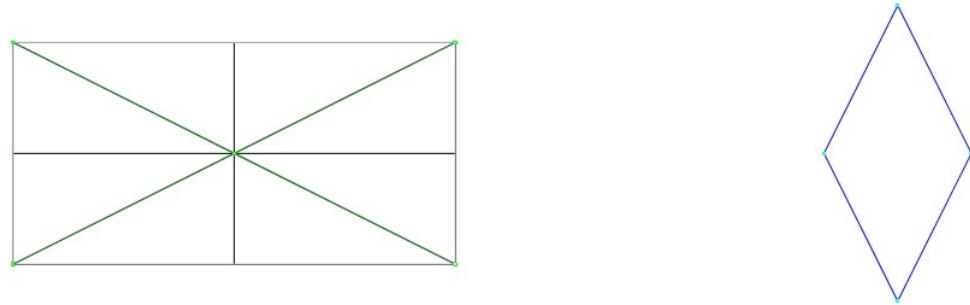


Figura 30. Malla primal y recíproca propuesta por RhinoVAULT.

Aún no se ha impuesto la condición de equilibrio horizontal en el diagrama dual. Al hacerlo, se elige mantener intacta la malla primal seleccionando la opción Force 100 en la cual se impone una prioridad del 100% al diagrama original. Como resultado se obtiene una malla recíproca muy similar a la obtenida de manera manual.



Figura 31. Opción para imponer condición de equilibrio manteniendo la malla primal.

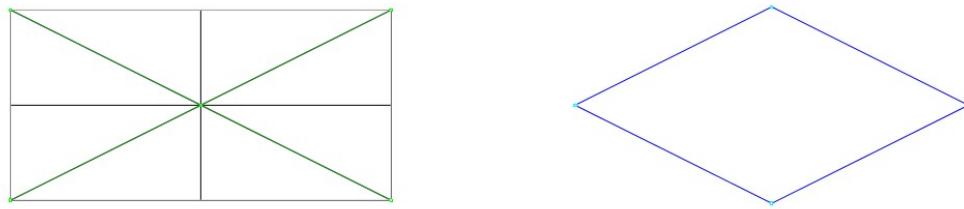


Figura 32. Diagrama dual tras imponer el equilibrio.

Como último paso se calcularía el equilibrio vertical y se obtendría la geometría final de la malla. Para los datos introducidos inicialmente se obtiene una solución en equilibrio para la que el punto central tiene una elevación de 0.46 m.

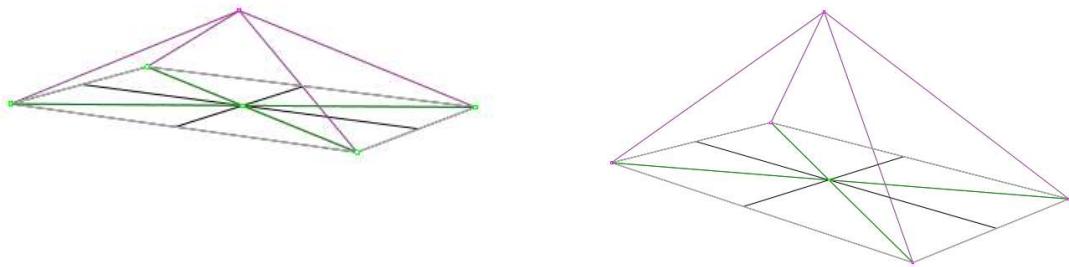


Figura 33. Solución de geometría con los valores por defecto a la izquierda, y a la derecha aplicando factor de escala 7.1.

Como no se ha obtenido la geometría deseada, se varía el factor de escala de la altura como parámetro de interacción con el usuario hasta alcanzar la altura objetivo. Se obtiene una altura de 0.86 metros para un factor de escala de la altura de 7.1. Para este caso, la resultante de la fuerza que proporciona el programa es 20 kN haciendo un redondeo. A pesar de cambiar el número de decimales de las cifras del programa, la herramienta hace el mismo redondeo. Otra conclusión que se extrae de los resultados es que el factor de escala del método y el factor de escala de la altura del plug-in no son parámetros directamente relacionados, simplemente se emplea el factor de escala de la altura para que sea más intuitivo el cambio de geometría.

## SEGUNDO EJEMPLO

### Resolución manual

La segunda cúpula propuesta presenta una planta rectangular de 1x1 metros discretizada en cinco elementos de cuatro barras. Al ser una planta sencilla, nuevamente, se puede emplear el análisis simple. El primer paso será numerar y nombrar a los puntos, los polígonos y las fuerzas siguiendo el criterio del método. Los puntos externos tienen cota 0 y se aplica una carga de 50 N sobre cada uno de los cuatro puntos internos.

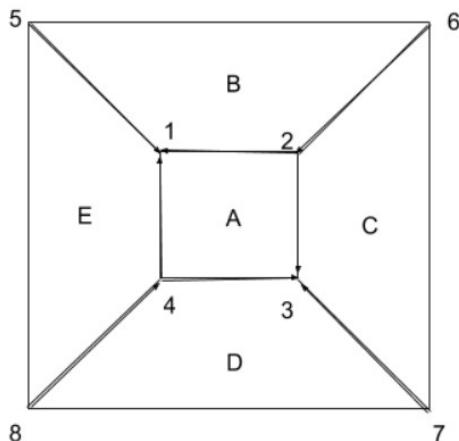
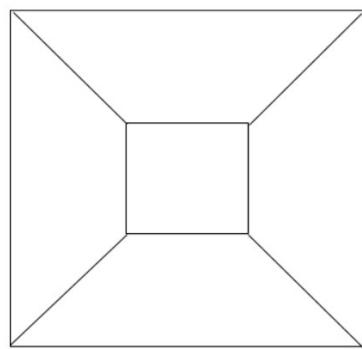


Figura 34. Diagrama original del segundo ejemplo simple (arriba) y numerado (abajo).

El siguiente paso es plantear el equilibrio vertical y reformularlo para referirlo al plano horizontal y poder trabajar con las figuras recíprocas.

Punto 1  $F_{51}^V + F_{41}^V + F_{21}^V = P$

Punto 2  $F_{62}^V + F_{21}^V + F_{32}^V = P$

Punto 3  $F_{32}^V + F_{73}^V + F_{43}^V = P$

Punto 4  $F_{43}^V + F_{84}^V + F_{41}^V = P$

$$L_{21}^H = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$L_{51}^H = \sqrt{(x_1 - x_5)^2 + (y_1 - y_5)^2}$$

$$L_{41}^H = \sqrt{(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2}$$

$$L_{62}^H = \sqrt{(x_2 - x_6)^2 + (y_2 - y_6)^2}$$

$$L_{32}^H = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$$

$$L_{73}^H = \sqrt{(x_3 - x_7)^2 + (y_3 - y_7)^2}$$

$$L_{43}^H = \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2}$$

$$L_{84}^H = \sqrt{(x_4 - x_8)^2 + (y_4 - y_8)^2}$$

Punto 1  $F_{21}^H \frac{z_1 - z_2}{L_{21}^H} + F_{51}^H \frac{z_1 - z_5}{L_{51}^H} + F_{41}^H \frac{z_1 - z_4}{L_{41}^H} = P$

Punto 2  $F_{21}^H \frac{z_2 - z_1}{L_{21}^H} + F_{32}^H \frac{z_2 - z_3}{L_{32}^H} + F_{62}^H \frac{z_2 - z_6}{L_{62}^H} = P$

Punto 3  $F_{32}^H \frac{z_3 - z_2}{L_{32}^H} + F_{73}^H \frac{z_3 - z_7}{L_{73}^H} + F_{43}^H \frac{z_3 - z_4}{L_{43}^H} = P$

Punto 4  $F_{43}^H \frac{z_4 - z_3}{L_{43}^H} + F_{84}^H \frac{z_4 - z_8}{L_{84}^H} + F_{41}^H \frac{z_4 - z_1}{L_{41}^H} = P$

Nuevamente, impondremos como límites de 0.1 m para el intradós y 1.5 m para el extradós. Por tanto, aplicando la teoría de la sección neutra, la altura estará comprendida entre 0.567 y 1.03 metros.

Una vez definido el sistema original se desarrolla la malla del sistema dual siguiendo una vez más los criterios de equilibrio y compresión pura. En este caso el flujo de fuerzas propuesto está compuesto por ramas saliente de nudos internos. Este síntoma aparece cuando la malla empieza a ser más compleja, y en este caso las ramas que salgan de los nudos formarán parte del polígono, pero siguiendo sentido antihorario. En los nudos convergen tres ramas y, consecuentemente, constituye un sistema determinado. Como primera prueba, las ramas de la malla dual tendrán la misma longitud que las homólogas del diagrama original.

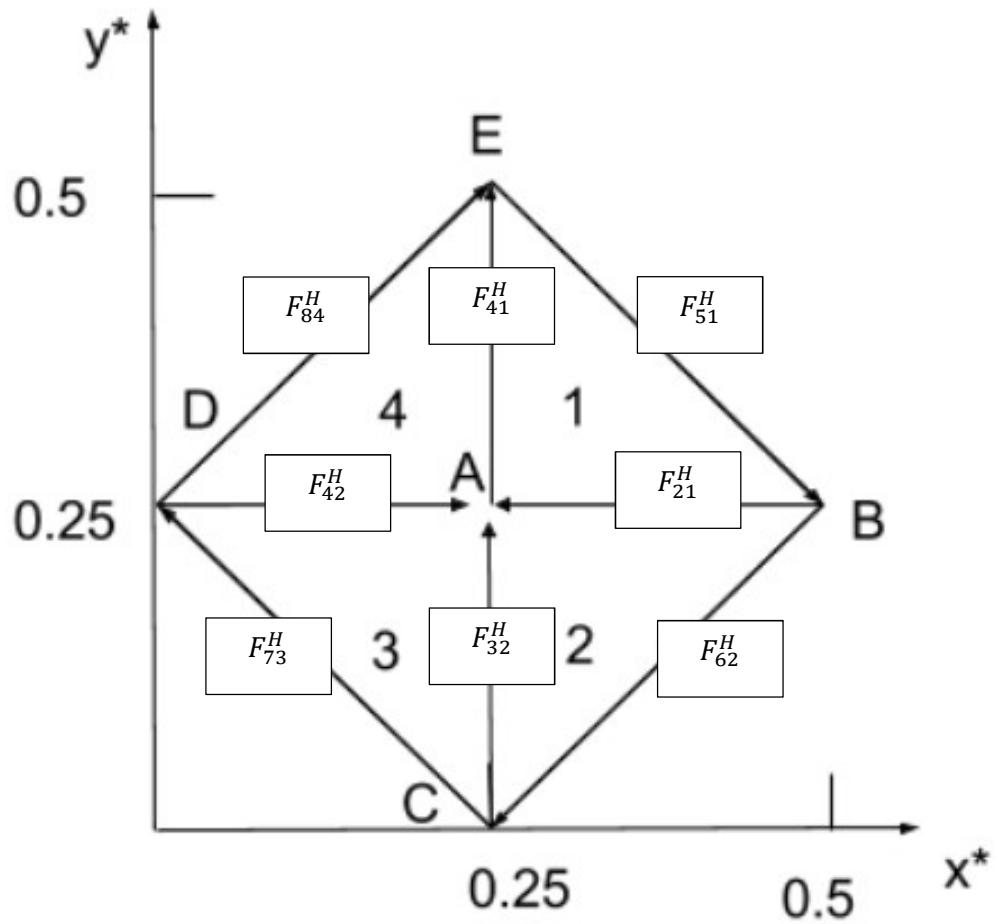


Figura 35. Propuesta de diagrama dual para el segundo ejemplo.

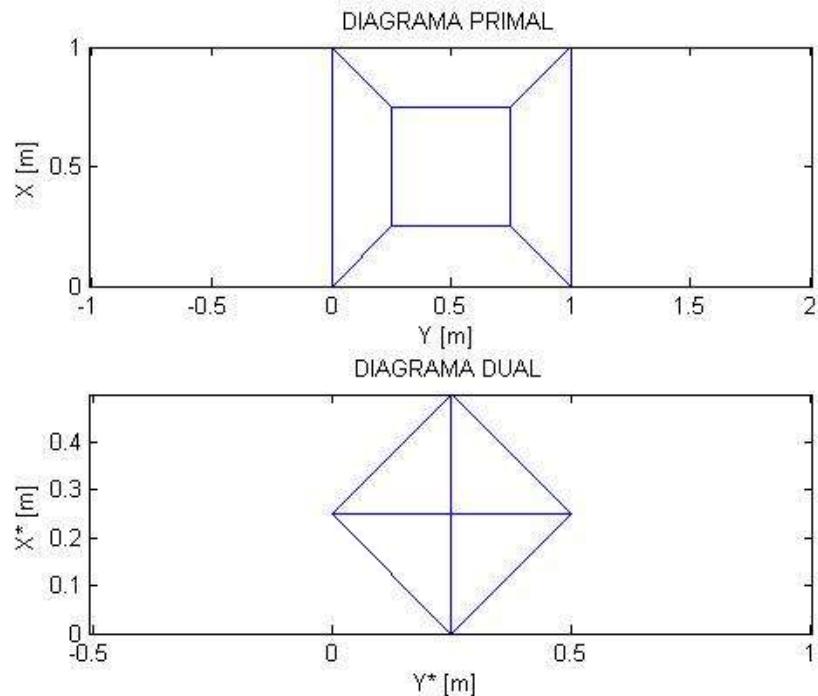


Figura 36. Representación de mallas original y recíproca reproducidas por el código desarrollado en el software Matlab.

$$F_{21}^H \frac{1}{\zeta} = L_{21}^{H*} = \sqrt{(x_B^* - x_A^*)^2 + (y_B^* - y_A^*)^2}$$

$$F_{41}^H \frac{1}{\zeta} = L_{41}^{H*} = \sqrt{(x_A^* - x_E^*)^2 + (y_A^* - y_E^*)^2}$$

$$F_{51}^H \frac{1}{\zeta} = L_{51}^{H*} = \sqrt{(x_E^* - x_B^*)^2 + (y_E^* - y_B^*)^2}$$

$$F_{62}^H \frac{1}{\zeta} = L_{62}^{H*} = \sqrt{(x_B^* - x_C^*)^2 + (y_B^* - y_C^*)^2}$$

$$F_{32}^H \frac{1}{\zeta} = L_{32}^{H*} = \sqrt{(x_C^* - x_A^*)^2 + (y_C^* - y_A^*)^2}$$

$$F_{73}^H \frac{1}{\zeta} = L_{73}^{H*} = \sqrt{(x_D^* - x_C^*)^2 + (y_D^* - y_C^*)^2}$$

$$F_{42}^H \frac{1}{\zeta} = L_{42}^{H*} = \sqrt{(x_D^* - x_A^*)^2 + (y_D^* - y_A^*)^2}$$

$$F_{84}^H \frac{1}{\zeta} = L_{84}^{H*} = \sqrt{(x_D^* - x_E^*)^2 + (y_D^* - y_E^*)^2}$$

Punto 1  $\frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} (z_1 - z_2) + \frac{L_{51}^{H*}}{L_{51}^H} (z_1 - z_5) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} (z_1 - z_4) = P \frac{1}{\zeta}$

Punto 2  $\frac{L_{21}^{H*}}{L_{21}^H} (z_2 - z_1) + \frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} (z_2 - z_3) + \frac{L_{62}^{H*}}{L_{62}^H} (z_2 - z_6) = P \frac{1}{\zeta}$

Punto 3  $\frac{L_{32}^{H*}}{L_{32}^H} (z_3 - z_2) + \frac{L_{73}^{H*}}{L_{73}^H} (z_3 - z_7) + \frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} (z_3 - z_4) = P \frac{1}{\zeta}$

Punto 4  $\frac{L_{43}^{H*}}{L_{43}^H} (z_4 - z_3) + \frac{L_{84}^{H*}}{L_{84}^H} (z_4 - z_8) + \frac{L_{41}^{H*}}{L_{41}^H} (z_4 - z_1) = P \frac{1}{\zeta}$

Las cotas de los puntos exteriores son conocidas de forma que las únicas incógnitas son las cuatro alturas de los puntos internos que, con las cuatro ecuaciones desarrolladas representan un sistema determinado. El único parámetro que queda por determinar es el factor de escala, para el que se le da un valor de 60 como magnitud de amplificación para conseguir una altura dentro del rango propuesto. Con esta condición definida se obtiene que los cuatro puntos se encuentran a una altura de 0.833 metros.

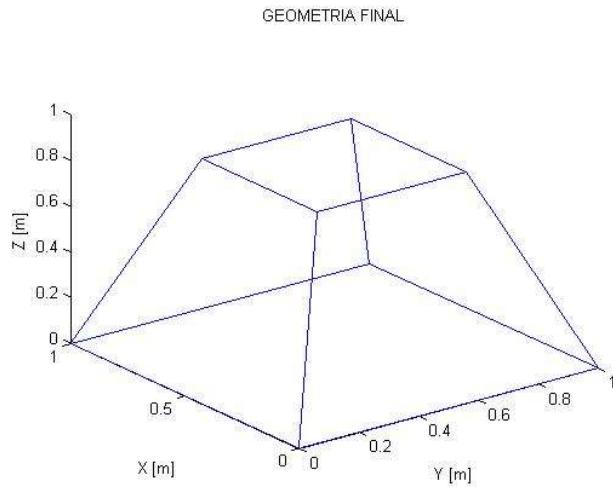


Figura 37. Geometría solución generada por el código desarrollado en Matlab.

Una vez conocida la geometría de la estructura se pueden obtener las fuerzas en los puntos de apoyo, de valor 54.32 N y componente horizontal 21.21 N, y en los puntos internos, de valor 15 N y misma componente horizontal ya que los puntos internos se encuentran a la misma cota. Asimismo, se puede comprobar que con ese factor de escala la estructura se encuentra dentro del núcleo central de la sección.

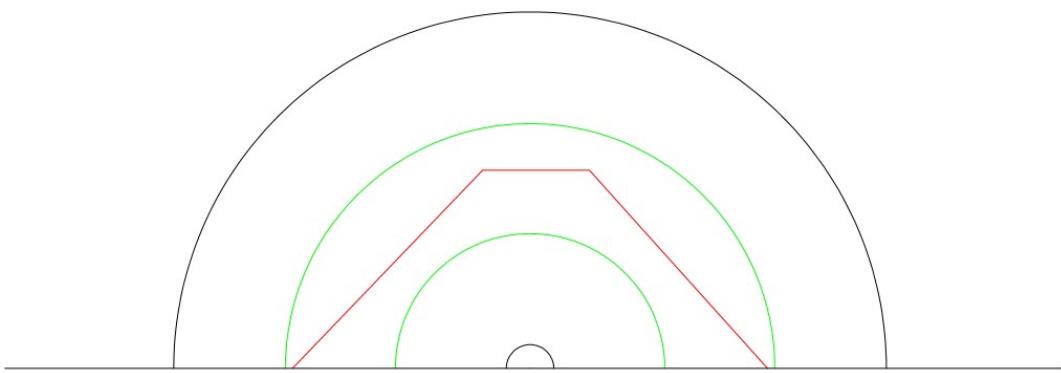


Figura 38. Representación de la solución dentro del núcleo central.

#### Reproducción del modelo en Rhinoceros

Como en el caso anterior, se inicia la creación del modelo empleando los valores definidos por defecto en el plug-in y cambiando las unidades a metros. Nuevamente, el factor de escala de la altura es 5 y, una vez se haya analizado el resultado tras aplicar el equilibrio vertical, se cambiará para conseguir la geometría deseada. A continuación, se generan las mallas primas y dual.

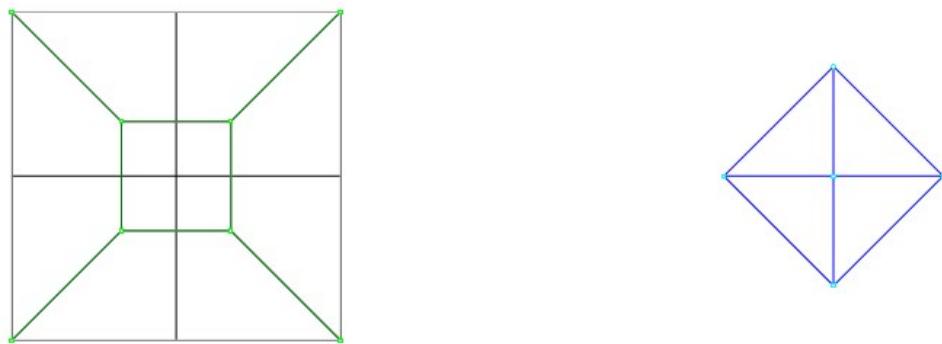


Figura 39. Representación de los diagramas original y recíproco antes del equilibrio.

Después de obtener ambos diagramas, se impone el equilibrio horizontal con la condición de que la malla original sea inmutable. En este ejemplo coinciden el diagrama de equilibrio y el generado originalmente, obteniéndose de nuevo una malla idéntica a la propuesta de manera manual.

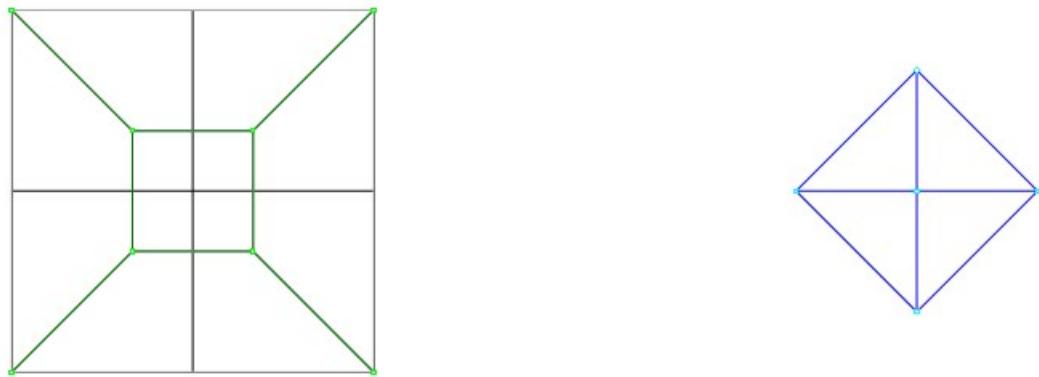


Figura 40. Representación de los diagramas original y recíproco después de imponer el equilibrio.

Con estos pasos finalizados se procede a aplicar el equilibrio vertical para desarrollar la estructura en tres dimensiones. En este caso la altura de la cumbre es de 1.09 m, un resultado muy cercano al calculado con Matlab. Adaptando ligeramente el factor de escala inicial hasta bajarlo a 4.75 se puede conseguir una altura 0.82.

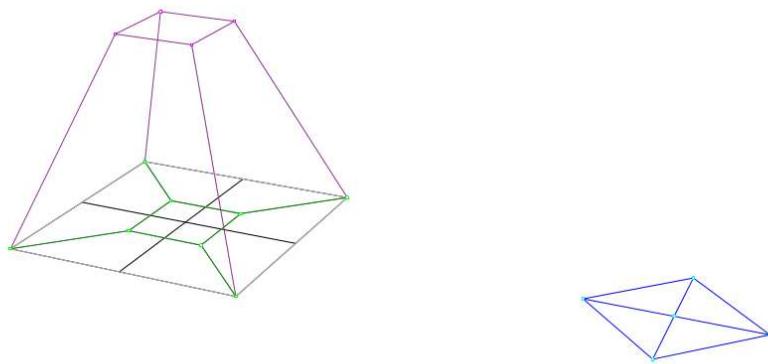


Figura 41. Estructura solución del software RhinoVAULT para el segundo ejemplo.

A la hora de comprobar la resultante de las fuerzas en los puntos de contorno se encuentra nuevamente el problema de redondeo que trunca el resultado, pero a pesar de ello el resultado es de 50 N, valor muy cercano al calculado sin el plug-in.

### TERCER EJEMPLO

#### Resolución matricial

La tercera propuesta está inspirada en la planta de la cubierta acristalada del Great Court en el British Museum de Londres, un área rectangular de 73 x 97 metros que contiene una circunferencia de 44 metros de diámetro desplazada con un offset de 3 metros en el eje x que representa la “sala de lectura” o *Reading Room*. Los datos geométricos se han obtenido de un estudio sobre el desarrollo de la cúpula de J.K.Williams (2001).

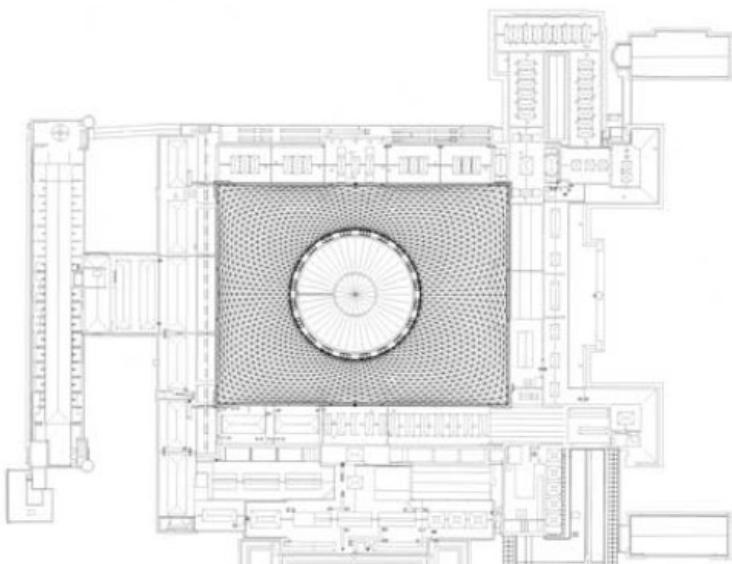


Figura 42. Dibujo de la vista en planta del British Museum.

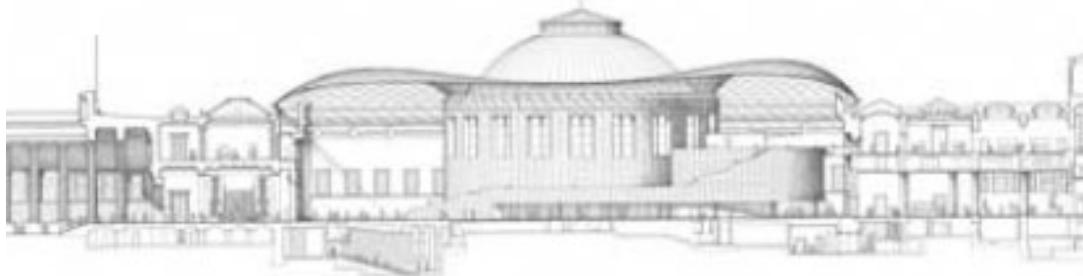


Figura 43. Dibujo del corte transversal del British Museum.



Figura 44. Proceso constructivo de la cúpula del Great Court.

El proceso se inicia planteando una discretización de la malla. A pesar de que la estructura original está compuesta por triángulos de cristal y estructura de acero, esta teselación provoca un alto grado de indeterminación en todos los nodos de la malla ya que en ellos convergen más de tres ramas. Por tanto, como el objetivo es encontrar una forma funicular óptima y que se pueda resolver sin aplicar el algoritmo de optimización para generar la malla dual, se propone una malla con elementos de cuatro barras. Ésta se extrae de la generación propuesta por el programa RhinoVault. El plug-in, además de permitir trabajar con mallas propuestas por el usuario, también incluye un algoritmo de teselación que intenta cumplir los requisitos de máxima adaptabilidad a la superficie propuesta para maximizar la precisión independientemente de elementos de la malla y criterios de economicidad relacionados con la construcción de la estructura. De ese proceso, se han obtenido las coordenadas para introducirlas en Matlab. Dada la complejidad de la propuesta, este cálculo se va a realizar a través del procedimiento matricial.

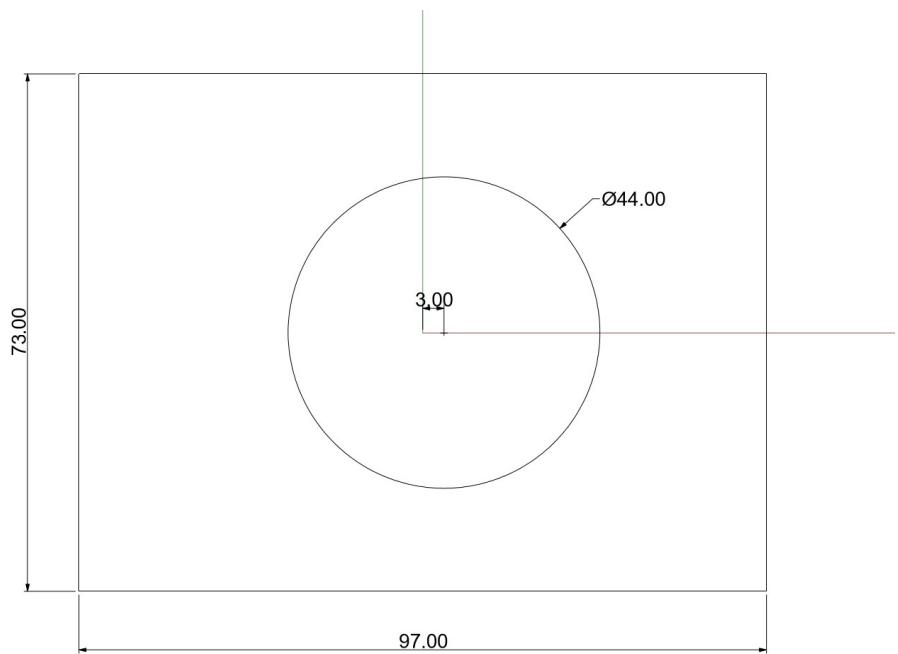


Figura 45. Medidas de la planta.

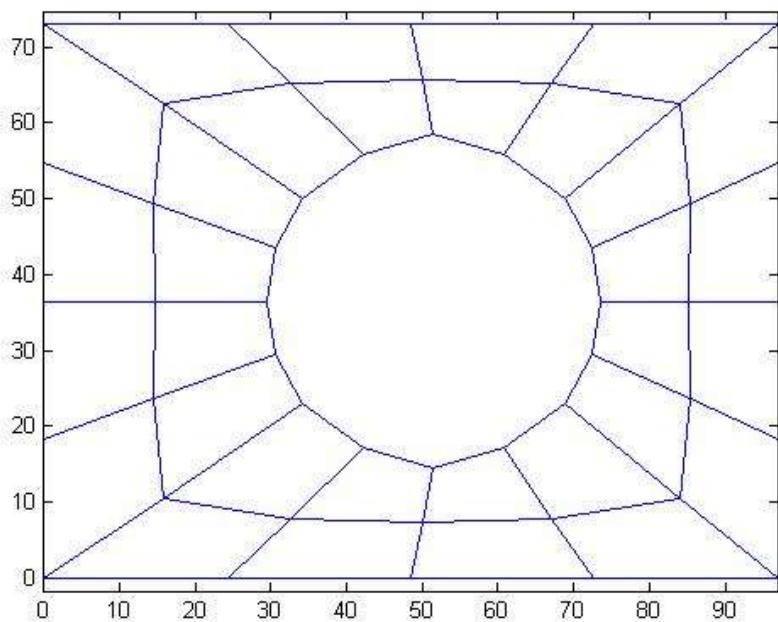


Figura 46. Representación del diagrama original de la planta discretizado.

La malla se compone de 16 puntos internos y 32 de contorno, haciendo un total del 48, 48 ramas y 32 polígonos.

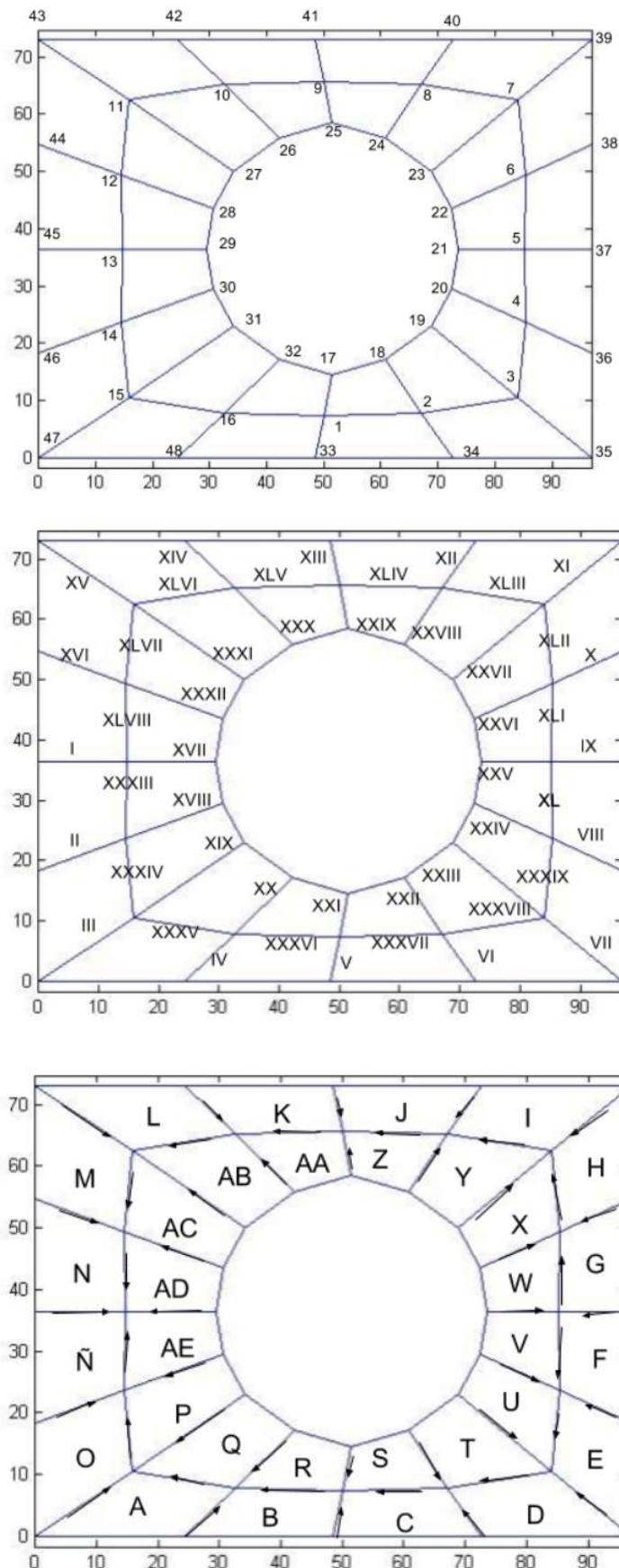


Figura 47. Denominación de los elementos de la malla para el procedimiento de cálculo.

Después de nombrar todos los elementos que componen el diagrama de la planta, se completa la matriz C de relaciones nodales. A partir del flujo de fuerzas propuesto, se completa la matriz con 1 si el punto representa la cabeza de la línea de fuerza, -1 si representa la cola de la línea de fuerza, ó 0 en el resto de los casos. Con este criterio y el orden definido se sigue el mismo procedimiento que el explicado en el apartado 3. 3 aplicándolo a todos los puntos para obtener una matriz de dimensiones n puntos x m ramas, en nuestro caso 48x48. En ANEXO I. CÓDIGOS Y RESULTADOS DESARROLLADOS EN MATLAB se puede consultar la matriz resultante.

Una vez queda definido el sistema original, se establecen los límites de altura. En este caso, como las cotas de la estructura final van a ser dispares, se impone simplemente que la altura de la estructura no sea superior a 13 metros. El objetivo de establecer estos límites es acotar el valor de la solución, el área transversal de la estructura no es fija y podría adaptarse para contener la figura antifunicular obtenida, la malla no es suficientemente fina como para encontrar una solución que cumpla los criterios de sección mínima posible de la estructura.

Para simplificar el problema, se impone que en todos los puntos actúe la misma carga vertical simulando el peso propio de la estructura. En este caso se le da un valor de 1000 N.

El siguiente paso es el desarrollo de la malla dual a partir de las ramas convergentes en cada punto orientadas en el sentido de las agujas del reloj las entrantes al nodo y en el opuesto las salientes. Este proceso ha tenido una dificultad añadida para su realización debido a que las ramas son muy irregulares y los ángulos complejos, pero finalmente se ha llegado a una malla como la mostrada en la figura 50. Todas las unidades están en metros.

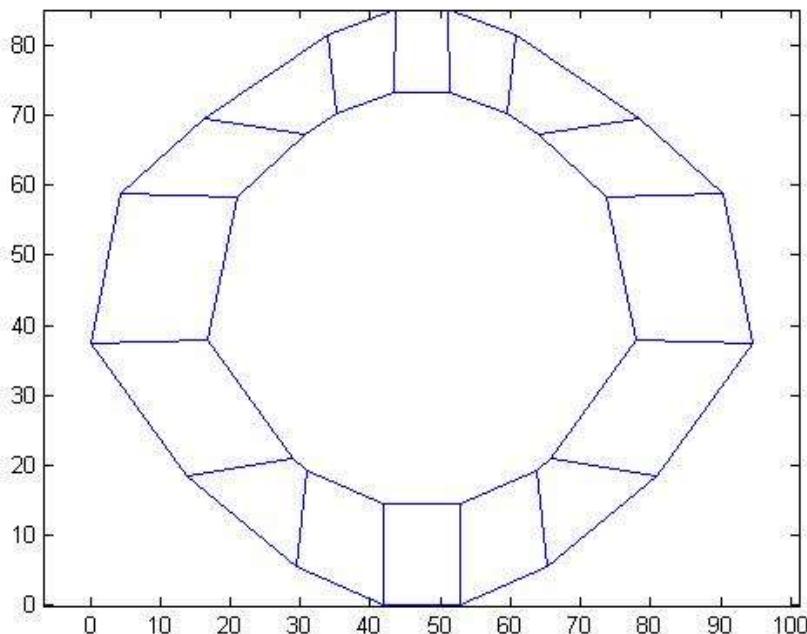


Figura 48. Malla dual propuesta.

A partir de esta malla se puede construir la matriz de relaciones del diagrama recíproco  $C^*$  de dimensiones  $m \times p$  siendo  $m$  el número de líneas de fuerza y  $p$  el número de polígonos de la malla original, que en la dual se han convertido en puntos. Nuevamente, esta matriz se puede encontrar en ANEXO I. CÓDIGOS Y RESULTADOS DESARROLLADOS EN MATLAB. Con esta representación se le asocia a cada fuerza una magnitud que se puede amplificar o reducir con el factor de escala.

Para conseguir una altura de estructura en los rangos propuestos se estima un valor de 70 para el factor de escala. Así el sistema queda totalmente definido y se tienen como únicas incógnitas las alturas de los puntos internos de la malla original.

$$u = Cx = C_i x_i + C_b x_b$$

$$v = Cy = C_i y_i + C_b y_b$$

$$u^* = C^* x^*$$

$$v^* = C^* y^*$$

$$L_H = \sqrt{U^t U + V^t V}$$

$$L_H^* = \sqrt{U^{*t} U^* + V^{*t} V^*}$$

Se diagonalizan las matrices, se calculan las longitudes de las ramas en ambos diagramas y se aplican la ecuación para la resolución del problema.

$$D_i = C_i^t (L_H^{-1} L_H^*) C_i$$

$$D_b = C_b^t (L_H^{-1} L_H^*) C_b$$

$$z_i = D_i^{-1} \left( P \frac{1}{\zeta} - D_b z_b \right)$$

El resultado final obtenido es el mostrado en la figura 51. Se obtiene un resultado simétrico respecto al eje horizontal que evoca a la forma original del Great Court.

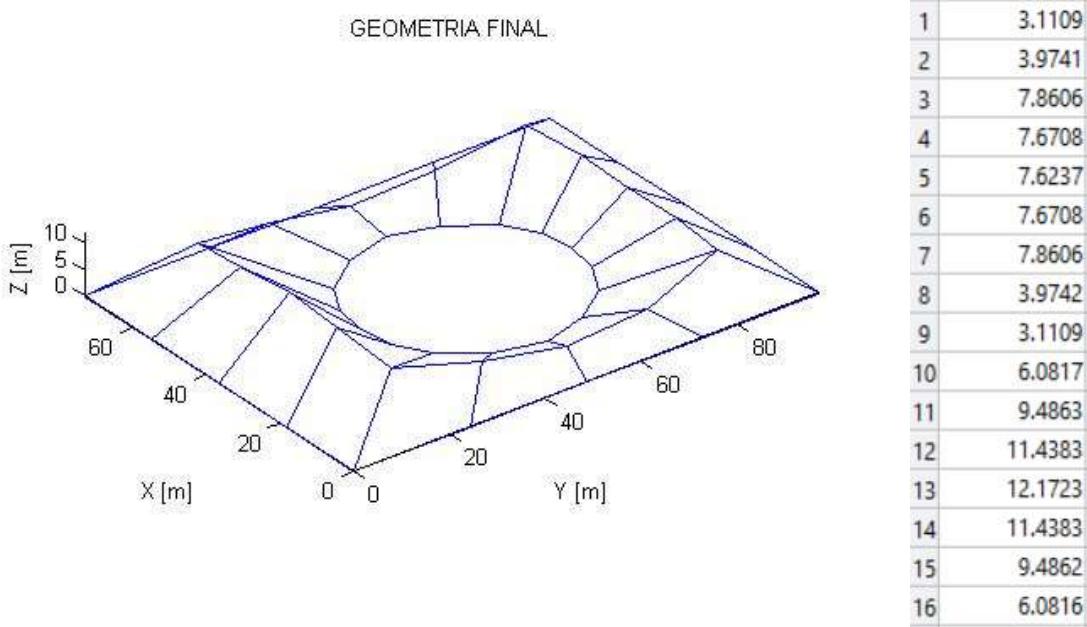


Figura 49. Geometría final de la cúpula generada con el código desarrollado en Matlab.

Los resultados están dentro del rango propuesto inicialmente.

Cabe destacar que este resultado no fue el conseguido inicialmente. Para la primera malla propuesta, el resultado fue el siguiente:

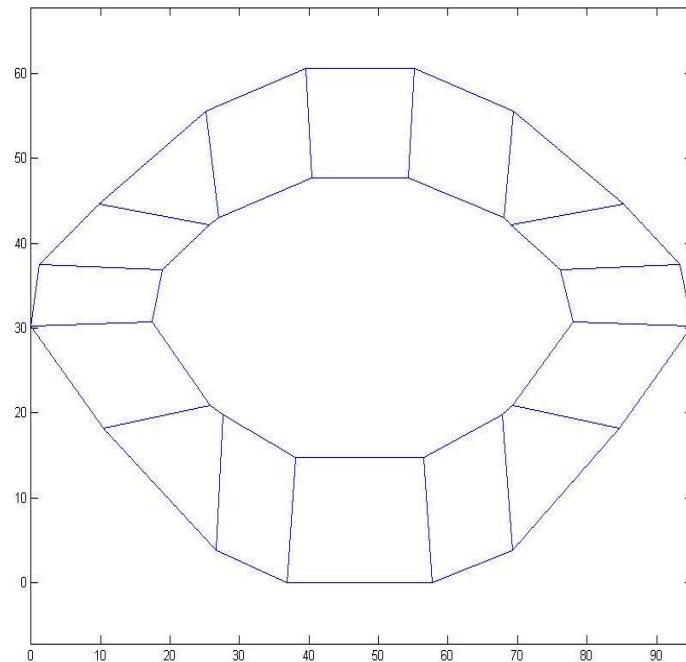


Figura 50. Figura recíproca inicial, antes de incluir modificaciones para conseguir la figura deseada.

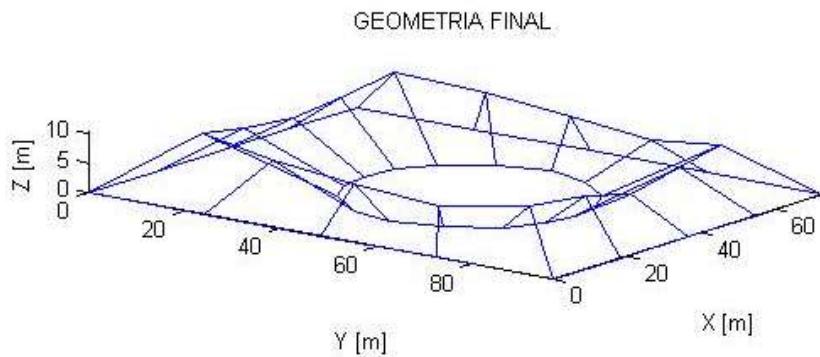


Figura 51. Estructura tridimensional inicial sin incluir las modificaciones para conseguir la geometría deseada.

Aunque la figura resulte extraña, no quiere decir que la malla fuese incorrecta, ya que las ramas son paralelas a las de la figura original y forman polígonos cerrados bien orientados. Para las longitudes y proporciones asociadas a las fuerzas, que crean correlaciones con las circundantes, se originan mallas diferentes, y con ellas sus correspondientes estructuras tridimensionales. La modificación de la malla dual también lleva a explorar multitud de formas distintas, y ésta debe modificarse hasta encontrar el resultado deseado, como se ha hecho en este tercer ejemplo.

#### Reproducción del modelo en Rhinoceros

Como siempre, se inicia un nuevo modelo en metros y se reproduce la malla empleada en el ejemplo, que en este caso ha sido producida por el algoritmo de teselación del plug-in RhinoVault. Asimismo, se dejan los valores por defecto para la generación de la geometría 3D que se aplicarán en el equilibrio vertical.

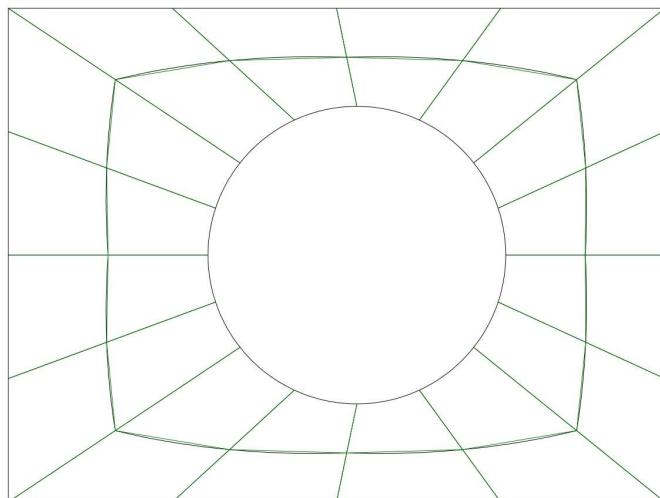


Figura 52. Diagrama original generado por RhinoVAULT.

El siguiente paso es la generación de la malla dual e imposición del equilibrio horizontal para que la estructura final cumpla los criterios de compresión pura. El diagrama de equilibrio es muy parecido al conseguido a mano, teniendo en cuenta que el criterio para establecer la longitud de las ramas ha sido ligeramente diferente. Por ejemplo, mientras en RhinoVault se emplea un algoritmo de optimización, a mano se ha establecido el criterio de seguir la forma que marquen las ramas más cortas con ligeras variaciones.

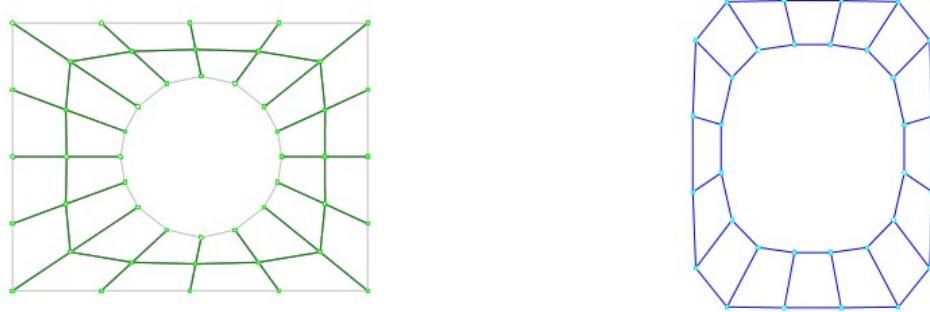


Figura 53. Diagramas original y dual antes de imponer el equilibrio.

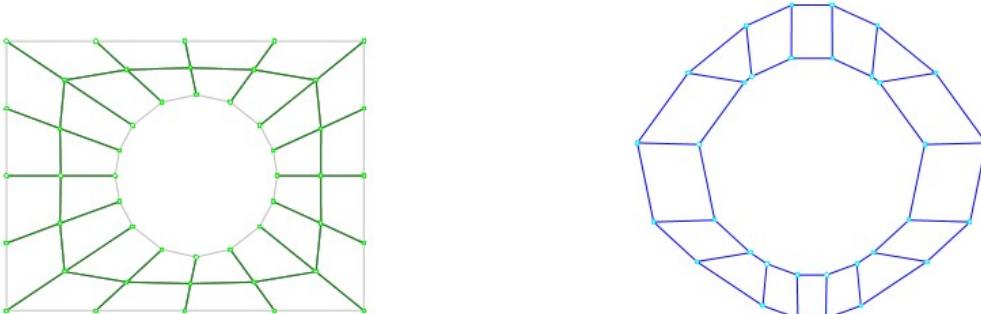


Figura 54. Diagramas original y dual después de imponer el equilibrio.

Una vez encontrada una solución en equilibrio se puede aplicar el equilibrio horizontal. Con la información dada por defecto, el pico más alto de la estructura está a 7.5 metros. Cambiando el factor de escala de la altura de 5 a 6.5 se obtiene una altura de 11.8 metros como resultado más cercano.

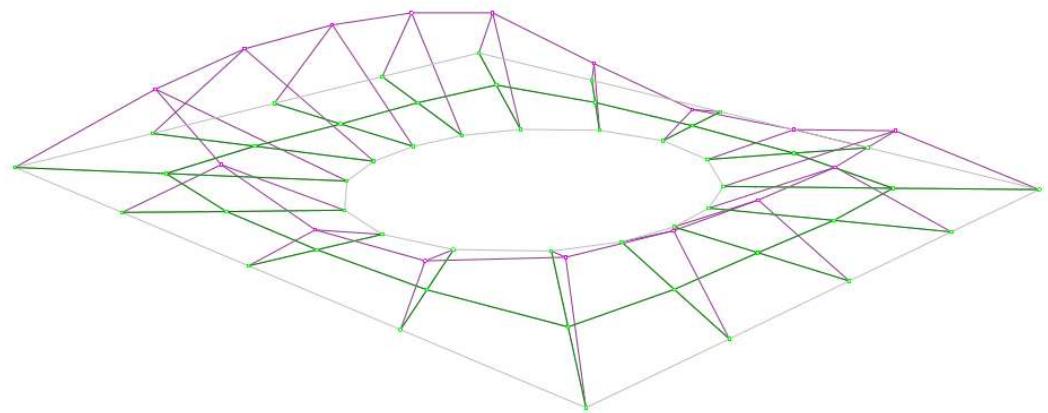
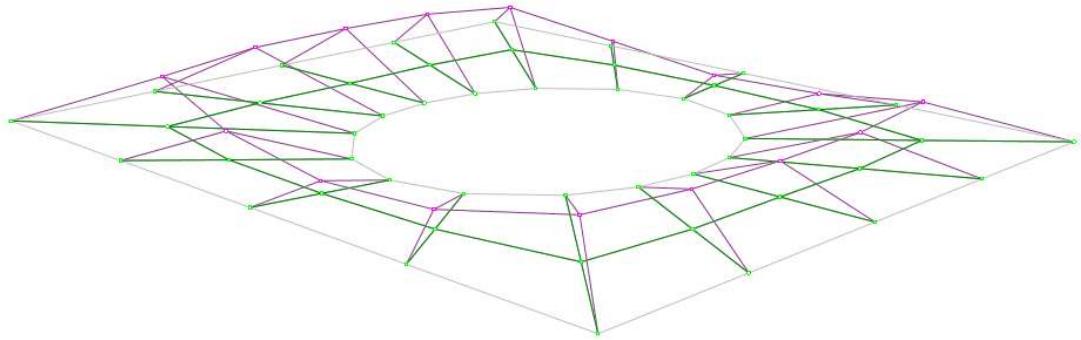


Figura 55. Estructuras tridimensionales con factor de escala 5 (arriba) y factor de escala 6.5 (abajo).

## 4. CONCLUSIONES

La teoría de redes de empujes es una metodología que explora las posibles configuraciones de equilibrio ante estados de cargas en un plano, entre las que se encuentra principalmente el peso propio, mediante el uso de métodos gráficos para profundizar en la búsqueda de la forma de estructura. Ésta supone una extensión de la teoría de redes de fuerza de O'Dwyer [1999], que empleaba las figuras recíprocas como medio para representar los esfuerzos internos de la estructura para encontrar una solución de equilibrio, y da el siguiente paso para relacionarlas con el equilibrio tridimensional que propone Williams [1986] con el fin de obtener figuras antifunicales en tres dimensiones. La solución gráfica es una potente herramienta para controlar las múltiples soluciones que se pueden obtener mediante el control de parámetros básicos elegidos por el usuario: la geometría de la planta de la estructura discretizada que representará la malla original o primal, las condiciones de contorno de la estructura, la distribución de fuerzas propuesta para asegurar el equilibrio en malla dual, los límites de altura de la solución, y el factor de escala para controlar la magnitud de las fuerzas y, con ellas, la altura solución de los puntos de la malla.

El objetivo del proyecto era aplicar esos pasos a ejemplos propuestos e implementar el método en Matlab para obtener soluciones funiculares para éstos. Por tanto, no sólo se ha codificado la teoría, sino que se han tomado las decisiones pertinentes para definir todos los parámetros y límites con lo que obtener una solución única de acuerdo a las especificaciones definidas. Finalmente, los tres ejemplos propuestos han sido verificados a través de su construcción en Rhinoceros, obteniendo de ellos formas similares

Para ello se han explorado dos enfoques de resolución: lineal, aplicable a configuraciones sencillas y determinadas, y el matricial, necesario para estructuras más complejas con un mayor número de elementos. Aunque este último es más complejo a nivel conceptual, simplifica el método para hacerlo más accesible y reducir el tiempo de resolución del problema. Además, en todos los casos se ha planteado inicialmente de manera manual no sólo el diagrama original, sino el patrón de la malla dual y el flujo de fuerzas en la malla. Una vez definidas las condiciones geométricas, los límites de altura y, en el caso matricial, los flujos de fuerzas, se han codificado los pasos y elementos de cálculo adaptados a cada ejemplo y, mediante el factor de escala, se ha definido la geometría final de la estructura.

De todas las fases del proceso, la malla dual supone el mayor punto de complejidad de la implementación ya que es la que requiere una mayor comprensión del método y de la forma de equilibrio de la estructura. En los dos primeros ejemplos, la construcción de la malla dual ha sido intuitiva pero, en el caso del tercer ejemplo, al ser una malla con un número de elementos mayor, irregular e indeterminada compuesta por elementos de cuatro barras, el diagrama recíproco ha sido un reto en el que, invirtiendo tiempo, se ha conseguido asegurar el equilibrio diseñando una solución en la que todas las ramas eran paralelas a las correspondientes del diagrama original, y formaban polígonos cerrados tanto en la representación de cada punto como en el resultado de malla dual en su conjunto. La experiencia hace que este proceso resulte más ágil permitiendo intuir la forma de la malla y reduciendo, por tanto, el número de iteraciones hasta lograr una solución viable.

Se puede concluir finalmente, tras la comparación con los modelos de RhinoVAULT, que este proceso ha resultado satisfactorio y se han implementado adecuadamente los tres ejemplos, obteniendo resultados de sistemas tridimensionales lógicos y viables para las plantas propuestas.

La representación gráfica ha facilitado la consecución de los pasos del método ya que, a simple vista, se podían interpretar para corregir posibles fallos e intuir cómo iba a evolucionar el resultado según la toma de decisiones que se iba realizando. Ante un cambio de geometría de la malla original se requiere el replanteamiento completo del método pero, una vez está definida, se tiene total control sobre la mayoría de parámetros de forma directa y hace que sea sencillo encontrar una solución óptima dentro del amplio espectro de opciones que se encuentran vinculadas a cada malla, aunque se cambien las restricciones de altura, y que un cambio suponga un simple recálculo desde la codificación ya elaborada.

Esta herramienta no implica mayor complejidad y tiempo para reproducir estructuras complejas que un modelo detallado de elementos finitos, y su utilidad radica en la obtención de figuras eficientes a nivel estructural en la fase de diseño. El objetivo del método no sólo se reduce a la búsqueda de una forma funicular para conseguir un cálculo satisfactorio, sino también en reforzar el vínculo entre diseño y cálculo estructural para obtener construcciones en las que no se pierda el compromiso entre belleza, eficiencia y sostenibilidad estructural.

## 5. BIBLIOGRAFIA

A continuación se detalla la información consultada sobre la teoría de redes de empujes y el software de diseño RhinoVAULT:

Block, P. (2009, June). Thrust Network Analysis Exploring Three-dimensional Equilibrium. MS thesis, Massachusetts Institute of Technology.

Rippmann M., Lachauer L. and Block P. (2012, December). Interactive Vault Design, International Journal of Space Structures, 27(4): 219-230.

Rippmann M. and Block P. (2013, September). Funicular Shell Design Exploration, Proceedings of the 33rd Annual Conference of the ACADIA, Waterloo/Buffalo/Nottingham, Canada.

Rippmann, M. (2016). Funicular Shell Design Geometric approaches to form finding and fabrication of discrete funicular structures. ETH Zurich.

Otras fuentes empleadas para consulta y elaboración del proyecto han sido:

Apuntes de la asignatura *Construcciones industriales y teoría de estructuras* impartida en el máster en ingeniería industrial de la Universidad de Zaragoza.

Apuntes de la asignatura *Estructuras* impartida en el grado de estudios en arquitectura de la Universidad de Zaragoza. “Lección 7. Arcos, bóvedas, cúpulas y láminas” (2009).

Maxwell, J. (1870). I.—On Reciprocal Figures, Frames, and Diagrams of Forces. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 26(1), 1-40. doi:10.1017/S0080456800026351

Williams, C.J.K. (2001) ‘The analytic and numerical definition of the geometry of the British Museum Great Court Roof’, 434-440, Mathematics & design 2001, Burry, M., Datta, S., Dawson, A., and Rollo, A.J. eds. Deakin University, Geelong, Victoria 3217, Australia.

Para la elaboración del código:

<https://es.mathworks.com/>

Tutoriales de descarga y uso de RhinoVAULT:

<http://www.block.arch.ethz.ch/brg/tools/rhinovault>

