



**Universidad**  
Zaragoza

# Trabajo Fin de Grado

Estudio del tamaño y potencia del contraste de autocorrelación de Breusch-Godfrey

Autor

Mario Serrano García

Director/es

María Teresa Aparicio Aspas

Inmaculada Villanúa Martín

Facultad de Economía y Empresa/ Universidad de Zaragoza

Año 2017

## **RESUMEN**

El presente trabajo constituye un análisis del comportamiento del test de Breusch-Godfrey bajo diferentes condiciones. Para ello, utilizaremos los experimentos de Monte Carlo con el objetivo, por un lado, de corroborar el comportamiento asintótico del estadístico de contraste y, por otro, de determinar la capacidad del test ante los diferentes patrones de autocorrelación a los que será sometido. Se comienza por analizar estructuras autocorrelacionadas puras de orden uno y, a partir de ahí, se repite el experimento aumentando el orden de autocorrelación e introduciendo estructuras mixtas, quedando los resultados en cada apartado recogidos en forma de tablas. Finalmente, se comparan los resultados y se exponen las conclusiones extraídas atendiendo especialmente a las particularidades encontradas en cada caso, así como a las posibles consecuencias de trasladar los resultados obtenidos a situaciones empíricas.

## **ABSTRACT**

The present work constitutes an analysis of the behaviour of the Breusch-Godfrey test under different conditions. With this purpose, we will use the Monte Carlo experiments with the aim, on the one hand, to corroborate the asymptotic behaviour of the contrast statistic and, on the other hand, to determine the test power in front of the different autocorrelation patterns to which it will be subjected. The work starts by analysing pure autocorrelated structures of order one, and from there, the experiment is repeated, increasing the order of autocorrelation and introducing mixed structures, leaving the results in each section collected in tabular form. Finally, the results are compared, and the founded conclusions are presented, paying special attention to the particularities of each case, as well as to the possible consequences of transferring the obtained results to empirical situations.

# ÍNDICE

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN.....	4
CAPÍTULO II: EL PROBLEMA DE LA AUTOCORRELACIÓN.....	5
1. NATURALEZA .....	5
2. CAUSAS FRECUENTES DE LA AUTOCORRELACIÓN .....	6
3. CONSECUENCIAS DE LA AUTOCORRELACIÓN .....	8
4. MÉTODOS DE DETECCIÓN .....	9
4.1. MÉTODOS GRÁFICOS.....	10
4.2 CONTRASTES DE AUTOCORRELACIÓN .....	12
5. SOLUCIONES AL PROBLEMA DE LA AUTOCORRELACIÓN .....	17
5.1. SESGO EN LA ESPECIFICACIÓN DEL MODELO.....	17
5.2. PRESENCIA DE AUTOCORRELACIÓN PURA.....	18
CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE ANÁLISIS.....	20
1. CONCEPTOS DE INTERÉS .....	20
2. INTRODUCCIÓN A LOS EXPERIMENTOS DE MONTE CARLO.....	20
3. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO.....	21
CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE COMPORTAMIENTO DEL TEST DE BREUSCH-GODFREY .....	22
1. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA .....	22
2. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.....	23
2.1 AUTOCORRELACIÓN DE PRIMER ORDEN .....	23
2.2 AUTOCORRELACIÓN DE SEGUNDO ORDEN EN ESTRUCTURAS PURAS .....	29
2.3 AUTOCORRELACIÓN EN ESTRUCTURAS MIXTAS.....	37
3.4 NO AUTOCORRELACIÓN.....	40
CAPÍTULO V. CONCLUSIONES.....	41
BIBLIOGRAFÍA.....	43

## CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN

El objeto del presente trabajo es el estudio de la capacidad del test Breusch-Godfrey para la detección de autocorrelación bajo diferentes condiciones. Este contraste es frecuentemente utilizado en la práctica en muchos modelos para determinar la existencia o no de correlación serial que, si se presenta y no ha sido considerada, puede llevar a conclusiones y predicciones incorrectas. Por tanto, es de capital importancia que los resultados ofrecidos por el test se ajusten a la realidad.

En este trabajo se tratará precisamente de determinar si las conclusiones extraídas a partir del contraste son válidas para todas situaciones o si, por el contrario, existen factores que puedan alterar la capacidad del contraste para detectar correctamente la autocorrelación. Más concretamente, se tratará de responder a preguntas como si el patrón de autocorrelación influye en el comportamiento del estadístico, si es indiferente el orden del estadístico utilizado o, por el contrario, sólo es válido que se corresponde con el orden real de la autocorrelación, o si el contraste funciona bien tanto en muestras grandes como en muestras pequeñas.

El cuerpo del trabajo queda estructurado en cuatro apartados o capítulos. En la sección segunda se trata de introducir al lector en el problema de la autocorrelación, una característica que presenta el término de error o perturbación en algunos modelos econométricos. Tras un primer apartado en el que se explicará la naturaleza del problema y sus causas, se tratará de esclarecer las consecuencias de su aparición sobre los modelos estudiados, trasladando el interés que tiene el estudio de esta problemática. Finalmente se pretende exponer un conjunto de métodos para su identificación y posterior solución, centrándonos en último término en una explicación más detallada del contraste de Breusch-Pagan, objeto del presente trabajo. En la sección tercera el trabajo se centra en explicar la metodología que las simulaciones de Monte Carlo, herramienta que utilizaremos para realizar el análisis sobre el contraste. Finalmente, en la sección cuarta se presentan los resultados del experimento, así como las particularidades encontradas, mientras que las conclusiones serán presentadas en la quinta sección.

## CAPÍTULO II: EL PROBLEMA DE LA AUTOCORRELACIÓN

### 1. NATURALEZA

El concepto de autocorrelación<sup>1</sup> se define formalmente como la “correlación entre miembros de series de observaciones ordenadas en el tiempo” (Buckland, 1971), es decir, es un fenómeno que surge como consecuencia de la existencia de un orden lógico entre los datos, lo que se traduce en que el término de error en el modelo está correlacionado consigo mismo a través del tiempo. Es por ello que este problema aparece mucho más frecuentemente en datos de series temporales. Para que la perturbación presente autocorrelación no es necesario que esta se extienda a todos los periodos, basta con que abarque algunos de ellos. En términos del modelo lineal general (MLG), esto significa que se viola el siguiente supuesto:

$$\text{Cov}(u_i, u_j | X_i, X_j) = 0 \quad i \neq j$$

Su interpretación es que las desviaciones que presentan las observaciones de su valor esperado están incorrelacionadas. Esto significa que, para un  $X_i$  dado, las desviaciones de  $Y$  de su valor promedio no muestran patrones o tendencias positivas ni negativas. Para entender más claramente el concepto es útil la utilización de un ejemplo. Supongamos que una empresa adquiere una nueva maquinaria en el momento  $t$  que produce un efecto positivo e inesperado sobre la productividad. Dicho efecto no sólo estará presente en el periodo  $t$ , sino que se extenderá en el tiempo a través de los siguientes periodos, lo cual implica que las perturbaciones en dichos periodos estarán autocorrelacionadas (Uriel, 1990). Las perturbaciones aleatorias de la variable productividad estarán pues, correlacionadas en el tiempo. En cuanto a la forma en la que esta se puede presentar, se distinguen tres tipos de esquemas básicos:

- a) Procesos autorregresivos [AR(p)]: cuando se presenta de esta forma, la autocorrelación es de tipo global, es decir, el presente de la perturbación aleatoria depende de todo su pasado.
- b) Procesos de medias móviles [MA(q)]: cuando presenta este esquema, la autocorrelación es sólo de tipo local, es decir, el presente de la perturbación aleatoria depende exclusivamente de su pasado más reciente (hasta  $q$ ).

---

<sup>1</sup> Si bien es cierto que los términos autocorrelación y correlación serial aparecen diferenciados en algunos manuales, de aquí en adelante se usarán de forma indistinta en el presente trabajo

- c) Procesos mixtos autorregresivos de medias móviles [ARMA(p,q)]: La autocorrelación es de tipo global por la presencia del AR(p), pero presenta irregularidades en algún tramo por la existencia del MA(q).

## 2. CAUSAS FRECUENTES DE LA AUTOCORRELACIÓN

El fenómeno de la autocorrelación es una característica intrínseca a la mayoría de los datos de series temporales, y no tiene porqué darse necesariamente entre términos consecutivos de la perturbación, sino que puede aparecer entre dos observaciones cualesquiera de  $u_t$ .

Las razones de la aparición de este suceso son variadas. Por un lado, es posible que en el modelo de trabajo no se hayan incluido de forma explícita variables de periodos anteriores, sean endógenas o exógenas, cuya influencia se extiende en el tiempo. Como resultado, el efecto de dichas variables omitidas se encontrará recogido en el término de error. Por otro lado, también es posible que los factores que causan la correlación serial no sean directamente observables por motivos técnicos o de otra índole. En cualquier caso, la consecuencia siempre será que la perturbación recogerá estas relaciones y, por tanto, estará relacionada consigo misma a través del tiempo.

No obstante, es de interés señalar algunas de las causas específicas que lo ocasionan, para entender mejor la naturaleza del problema, y derivar algunas soluciones a él de forma natural. Las causas más frecuentes se pueden clasificar en: (ver Novales, 1993 y Gujarati, 2010)

- a) Existencia de ciclos y tendencias (inercia). Se presenta el caso de que la perturbación del modelo en cuestión presenta correlación positiva. Esto se traducirá en que la serie en el momento  $t$  nos devolverá valores positivos de  $u$ , causando a su vez, valores de  $y$  por encima del promedio. En dicha situación los valores subsecuentes de las perturbaciones  $u$  ( $u_{t+1}$ ,  $u_{t+2}$ , ...) tienen una alta probabilidad de presentar también valores positivos en línea con el valor  $u_t$ , lo que a su vez se volverá a traducir en valores de  $y$  por encima de su media y viceversa. Para el caso de la autocorrelación negativa la situación es la inversa: valores negativos de la perturbación tendrán una alta probabilidad de ir seguidos de valores positivos en los siguientes periodos y viceversa. Así, se generará un impulso o tendencia entre las diferentes observaciones de la variable que, si no es

explicado adecuadamente por las variables explicativas del modelo, quedará recogido en el término de error.

- b) Sesgo de especificación: el error de especificación se produce cuando una de las variables explicativas está correlacionada con el término de error.

Las causas más probables para explicar este suceso son:

- i. Variables omitidas: en el caso de que al especificar el modelo se obvie introducir alguna variable explicativa relevante, de forma que, si el modelo de trabajo es:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + u_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

Mientras que el modelo real es:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + v_t, \quad t = 1, 2, \dots, T$$

El resultado es que en nuestro modelo el término de error será igual a  $u_t = \beta_3 X_{3t} + v_t$ . Entonces, el término de error del modelo que hemos especificado incorrectamente incluirá los efectos de la variable omitida  $X_{3t}$ , por lo que, si esta presenta autocorrelación, dicho efecto quedará reflejado en la perturbación aleatoria de dicho modelo. El resultado es que nuestro modelo infravalorará o sobrevalorará los resultados reales, ya que dispone de una información limitada.

- ii. Forma funcional incorrecta (relaciones no lineales): Suponiendo que se especificamos un modelo explicativo del coste marginal que depende del valor de la producción de forma lineal:

$$\text{Coste marginal} = \beta_1 + \beta_2 * \text{producción} + u_t$$

Cuando en realidad, este también depende del valor de la producción al cuadrado, por lo que:

$$\text{Coste marginal} = \beta_1 + \beta_2 * \text{producción} + \beta_3 * \text{producción}^2 + v_t$$

El resultado es análogo al caso de la variable omitida: el modelo especificado sobrestimaré o subestimaré los resultados reales. Esto es así, ya que el término de error de este modelo recoge la relación no especificada explícitamente [ $\beta_3 * \text{producción}^2 + v_t$ ] y, por tanto, capta el efecto sistemático del cuadrado de la producción. Ello generará autocorrelación en el término de error.

- c) Omisión de la dinamicidad del modelo: En el estudio de variables temporales no es extraño encontrar que el valor actual de éstas está relacionado con su propio valor en periodos anteriores, tanto más cuanto menor es el espacio de tiempo entre observaciones consecutivas.

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + u_t$$

Por ejemplo, el consumo de una familia en el año  $t$  está probablemente relacionado con el del año  $t-1$ , ya que es razonable pensar que, en media, *ceteris paribus*, sus preferencias de consumo no cambian de forma inmediata. También es posible que dicho consumo se vea afectado, no solamente por la renta de ese año, sino también por la renta de años anteriores.

Por ello, si no se incluye de forma explícita la influencia de estas variables sobre la variable objetivo, la perturbación aleatoria del modelo recogerá un patrón sistemático, reflejo de la información omitida, que generará problemas de autocorrelación.

### 3. CONSECUENCIAS DE LA AUTOCORRELACIÓN

En este apartado se analizarán las consecuencias sobre los estimadores MCO cuando se viola el supuesto de autocorrelación, y cómo afecta este hecho a sus propiedades, a fin de determinar si bajo estas condiciones siguen conservando las mismas características que hacían de ellos los estimadores óptimos bajo los supuestos del modelo general.

Como se ha expuesto anteriormente, la presencia de autocorrelación se traduce en una correlación serial entre los sucesivos términos de error del modelo. Para estudiar cómo funciona este proceso resulta útil utilizar, sin pérdida de generalidad, un esquema autorregresivo de orden uno o AR(1):<sup>2</sup>

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad -1 < \rho < 1$$

Donde  $u_{t-1}$  es el valor del término de error en el periodo anterior,  $\rho$  es el llamado coeficiente de autocorrelación (de primer orden) y  $\varepsilon_t$  es una variable ruido blanco<sup>3</sup>. La restricción de  $\rho$  de ser menor que la unidad en valor absoluto se conoce como supuesto de estacionariedad, y garantiza que la varianza de  $u$  es todavía constante y finita. El proceso puede entenderse como la regresión de  $u$  sobre sí misma con un periodo de

<sup>2</sup> La elección de este esquema AR(1) responde principalmente a criterios de simplicidad, ya que procesos más complejos que éste son normalmente difíciles de analizar

<sup>3</sup> Se conoce por este nombre a un término de error que satisface los siguientes supuestos:

$$E(\varepsilon_t) = 0; \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2; \text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+s}) = 0 \quad s \neq 0$$

retardo. Sin embargo, es imprescindible notar que cada término de la perturbación recoge toda la información pasada de sí misma, aunque de tal forma que el peso de las perturbaciones pasadas sobre su valor actual va disminuyendo progresivamente conforme estas se alejan en el tiempo. Así, mediante sustituciones sistemáticas se obtiene:

$$u_t = \varepsilon_t + \rho\varepsilon_{t-1} + \rho^2\varepsilon_{t-2} + \dots$$

En el contexto de un modelo de regresión con dos variables  $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$ , la varianza del estimador  $\beta_2$  viene dada por:

$$\text{var}(\beta_2) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

Ahora, aplicando el esquema AR(1), obtenemos:

$$\text{var}(\beta_2)_{\text{AR1}} = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \left[ 1 + 2\rho \frac{\sum x_t x_{t-1}}{\sum x_t^2} + 2\rho^2 \frac{\sum x_t x_{t-2}}{\sum x_t^2} + \dots + 2\rho^{n-2} \frac{\sum x_1 x_n}{\sum x_t^2} \right]$$

Al comparar ambas, se aprecia a primera vista que existen diferencias: la varianza que tiene en cuenta el proceso autorregresivo es igual que la otra más un término que depende de  $\rho$ , así como de las autocorrelaciones muestrales entre los valores tomados por el regresor X, por lo que sólo serán iguales cuando este término sea igual a cero. Como resultado, aunque no se pueda medir la magnitud del error de forma precisa<sup>4</sup>, el uso de los estimadores MCO llevará muy probablemente a conclusiones erróneas sobre la varianza, lo que invalidará la efectividad en el uso de contrastes e intervalos de confianza.

Los estimadores MCO son, por tanto, ineficientes, aunque siguen siendo lineales e insesgados, ya que no se viola ninguno de los demás supuestos del modelo. Además, presenta el problema de que la estimación de la matriz de covarianzas de los estimadores calculada por las fórmulas usuales de MCO está sesgada y, por consiguiente, las pruebas de hipótesis basadas en los estadísticos t y F ya no son válidas.

#### 4. MÉTODOS DE DETECCIÓN

Los métodos para la detección de la correlación serial se dividen entre métodos gráficos y contrastes estadísticos. Los primeros basan su criterio para determinar o no la autocorrelación en el estudio del gráfico de los residuos en función del tiempo y en los correlogramas de los residuos, dado que las perturbaciones reales no son directamente

---

<sup>4</sup> Es complicado establecer resultados generales acerca del grado de ineficiencia porque se requiere información concreta del proceso generador de la perturbación (Greene, 2000)

observables. Suponen una primera y sencilla primera aproximación al problema, que deberá afianzarse a través de los contrastes. En este sentido, se espera no encontrar ningún comportamiento sistemático en el gráfico de los residuos que pueda indicar la presencia de autocorrelación, mientras que los correlogramas deben mostrar un perfil en el que todos coeficientes se encuentren dentro de las bandas. En este capítulo, aunque se explican brevemente los métodos gráficos, se centra la atención en el estudio de los principales contrastes estadísticos para la detección de la autocorrelación, abordando el contraste Durbin-Watson, su extensión, el contraste  $h$  de Durbin, y el contraste de Breusch-Godfrey, objeto del presente trabajo.

#### 4.1. MÉTODOS GRÁFICOS

Los métodos gráficos para la detección de la autocorrelación ofrecen una sencilla primera aproximación al problema, ya que no requieren especificar el tipo de distribución que siguen los datos. Aun así, constituyen una poderosa herramienta para detectar tanto la presencia o no de ésta como su posible estructura. El análisis gráfico pasa principalmente por el estudio de los correlogramas de los residuos:

- Función de autocorrelación simple (FAC): mide la correlación entre dos variables separadas por  $k$  periodos.
- Función de autocorrelación parcial (FACP): proporciona información acerca de la correlación entre dos momentos del tiempo, después de eliminar el efecto de momentos intermedios. Más concretamente recoge el efecto que tienen los retardos de los residuos sobre los mismos residuos, aislados los efectos de los posibles restantes retardos o considerando éstos como constantes.

También es de utilidad el estudio del gráfico de los residuos frente al tiempo, que permite detectar a primera vista si existen patrones de algún tipo. Sin embargo, siempre debe ir acompañado del estudio de los correlogramas. A continuación, se ilustra el perfil de estas funciones sobre una serie que presenta autocorrelación generada por un AR(1) con parámetro 0.7. La figura 2.1 corresponde a los correlogramas de la serie, mientras que la figura 2.2 muestra el gráfico de los residuos frente al tiempo.

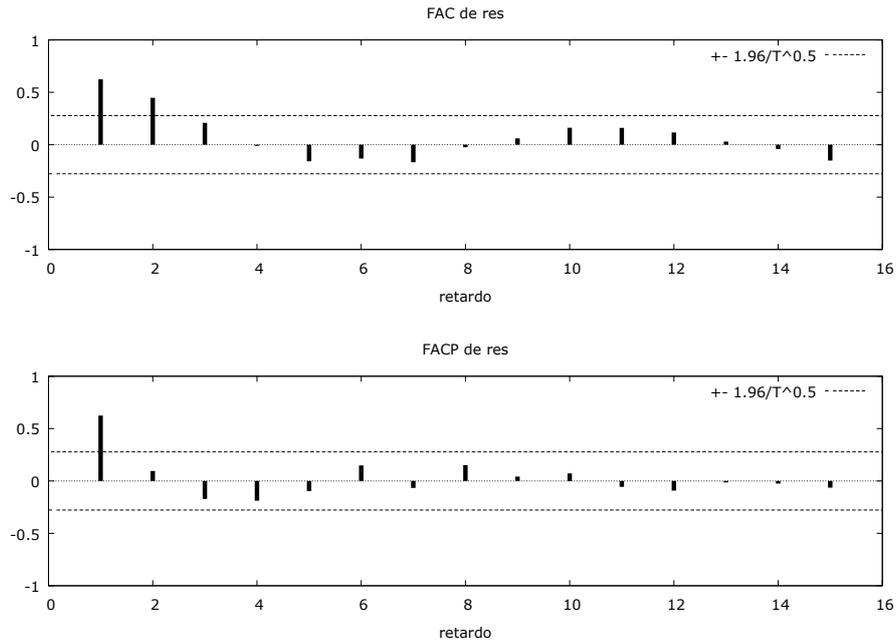


FIGURA 2.1 – Representación de los correlogramas de los residuos cuando la serie presenta autocorrelación generada por un AR(1) con parámetro 0.7

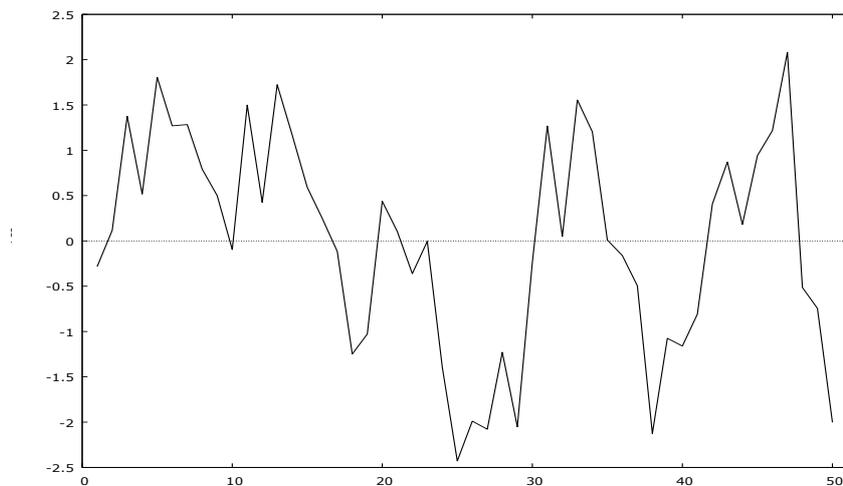


FIGURA 2.2 – Representación l gráfico de los residuos frente al tiempo cuando la serie presenta autocorrelación generada por un AR(1) con parámetro 0.7

Respecto a los correlogramas, se concluirá que existe autocorrelación cuando alguno los coeficientes de autocorrelación estén fuera de las bandas en ambas funciones, tal y como se aprecia en la figura 2.1, mientras que el gráfico de los residuos ayuda a identificar si existen tendencias en la serie como se muestra en la figura 2.2. A la inversa, se concluirá que no existe autocorrelación cuando todos los coeficientes caigan dentro de las bandas y no se observen tendencias en el gráfico. Dicha situación queda reflejada en las figuras 2.3 y 2.4, respectivamente.

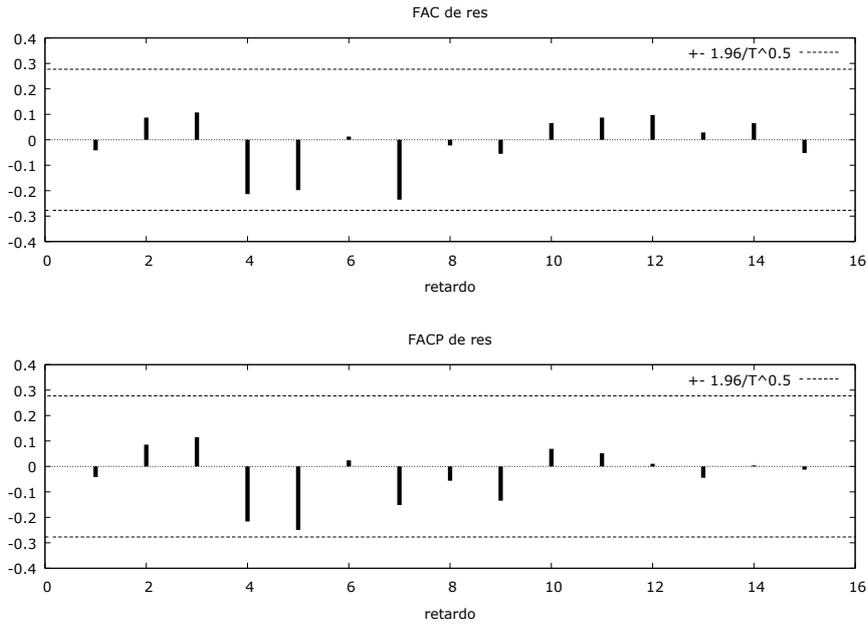


FIGURA 2.3 – Representación de los correlogramas de los residuos cuando la serie no presenta autocorrelación.

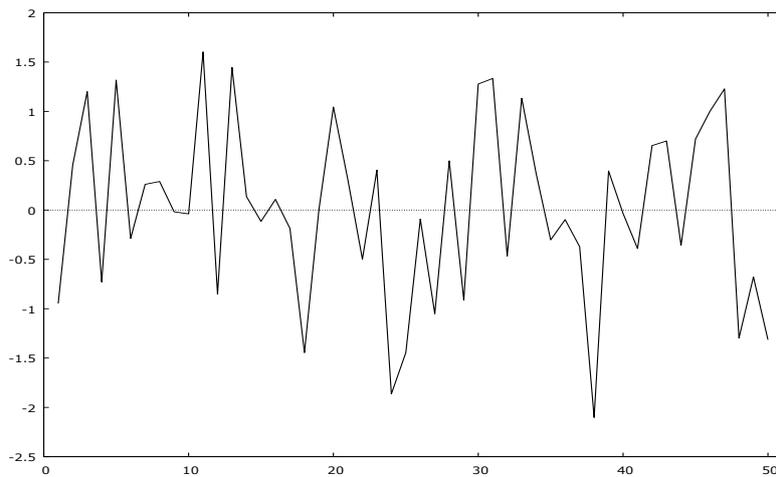


FIGURA 2.4 – Representación del gráfico de los residuos frente al tiempo cuando la serie no presenta autocorrelación.

## 4.2 CONTRASTES DE AUTOCORRELACIÓN

### 4.2.1 EL CONTRASTE DE DURBIN-WATSON<sup>5</sup>

Se trata de uno de los contrastes más utilizados, debido a su gran potencia para captar autocorrelación de orden uno (Greene, 2000). El contraste se basa en el análisis de los

<sup>5</sup> (Watson, 1951)

residuos estimados, utilizando para la caracterización de su proceso generador un esquema autorregresivo de orden uno o AR(1):

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad |\rho| < 1$$

Se establece la hipótesis nula de no autocorrelación, correspondiente a un valor nulo del parámetro  $\rho^6$ , y la hipótesis alternativa de autocorrelación positiva o negativa en caso contrario:

$$H_0: \rho = 0$$

$$H_A: \rho > 0 \text{ ó } \rho < 0$$

Bajo estas condiciones, Durbin y Watson definen el estadístico d, calculado a partir de los residuos de la regresión, mediante la siguiente expresión:

$$d = \frac{\sum_2^T (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_2^T \hat{u}_t^2}$$

Y en muestras razonablemente grandes se puede aproximar su valor mediante:

$$d \approx 2(1 - \rho), \quad \rho = \frac{\sum \hat{u}_t \hat{u}_{t-1}}{\sum \hat{u}_t^2}$$

Donde  $\rho$  es el coeficiente de autocorrelación estimado de primer orden. El tipo de correlación que presente el modelo dependerá de los valores que tome el parámetro  $\rho$  (Uriel, 1990). Así, tendremos que:

- a) Cuando  $\rho \approx 1$ , el estadístico d tomará valores próximos a cero. En este caso, el modelo presenta una alta correlación positiva: valores positivos (negativos) de la perturbación aleatoria irán seguidos con una alta probabilidad de también valores positivos (negativos) de dicha perturbación en el siguiente periodo
- b) Cuando  $\rho \approx -1$ , el estadístico d tomará valores próximos a cuatro. En este caso, el modelo presenta una alta autocorrelación negativa: valores positivos en la perturbación irán seguidos con una alta probabilidad por valores negativos y viceversa.
- c) Cuando  $\rho \approx 0$ , el estadístico d tomará valores próximos a dos. En este caso, el modelo no presenta problemas de autocorrelación

---

<sup>6</sup> Se utiliza el parámetro  $\rho$  como determinante de la autocorrelación porque su valor mide el grado de relación que tiene la perturbación con su valor pasado

Dado que el cálculo del estadístico se ha construido a partir de los residuos del modelo, y estos dependen a su vez de las X dadas, la conclusión es que la distribución de probabilidad del estadístico  $d$  depende de forma intensa de los valores de las variables explicativas. Por esta razón, no es posible derivar de una forma general la distribución de probabilidad del estadístico. Por lo que a diferencia de otras pruebas estadísticas fue imposible determinar un valor crítico único  $y$ , en vez de ello, Durbin y Watson definieron un intervalo entre dos estadísticos techo,  $d_U$  y  $d_L$ , que constituyen los límites superior e inferior respectivamente. El criterio de decisión de acuerdo con este contraste puede resumirse en la figura 2.5:

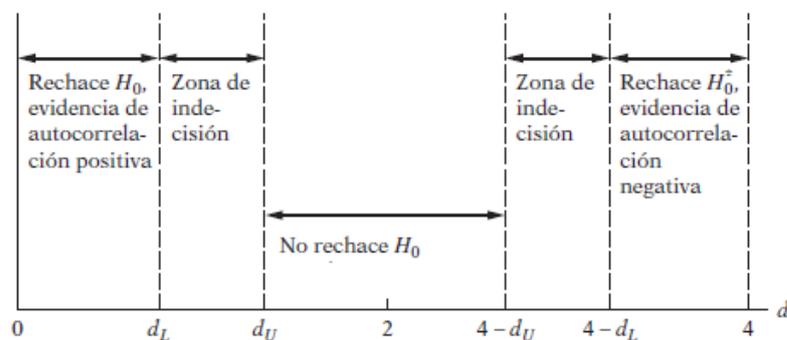


FIGURA 2.5<sup>7</sup> - Representación gráfica de los intervalos de decisión para la prueba  $d$  de Durbin

Es importante aclarar que este contraste se basa en ciertos supuestos  $y$ , por tanto, tiene ciertas limitaciones. Siguiendo a (Gujarati, 2010), los supuestos en los que se basa el contraste son:

1. El modelo de regresión tiene término independiente, por tanto, las conclusiones extraídas a partir de este contraste no son trasladables a un modelo que carezca de dicho término.
2. El modelo es estático, es decir, no presenta ningún retardo de la variable endógena como variable explicativa. Por tanto, el contraste no es aplicable a modelos del tipo:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \dots + \beta_k X_{kt} + \gamma Y_{t-1} + u_t$$

<sup>7</sup> (Gujarati, 2010)

En tales casos, el estadístico estará sesgado hacia 2, lo que muy probablemente nos llevará a aceptar la hipótesis nula de autocorrelación cuando en realidad se encuentra presente.

3. El esquema utilizado para modelizar la generación de la perturbación  $u$  es un esquema autorregresivo de primer orden  $y$ , por tanto, este método no puede utilizarse para detectar esquemas autorregresivos de orden superior o diferentes al autorregresivo. Dicho esto, si el modelo presenta autocorrelación de orden 2 o superior, generalmente también adolecerá de problemas de autocorrelación de orden 1, por lo que el contraste detectará dicha autocorrelación.
4. Se asume que el término de error  $u$  sigue una distribución normal.

Además, este procedimiento tiene una desventaja importante. Cuando el valor del estadístico cae dentro de la zona de indecisión, no es posible llegar a ninguna conclusión, si bien es cierto que dicha zona se hace más pequeña conforme aumenta el tamaño de la muestra.

#### 4.3. CONTRASTE $h$ DE DURBIN<sup>8</sup>

Para resolver el problema que surge cuando se viola el supuesto 2, Durbin propuso el siguiente estadístico:

$$h = \hat{\rho} \sqrt{\frac{T}{1 - T \widehat{Var}(\hat{\beta}_i)}}$$

Siendo  $\hat{\beta}_i$  el coeficiente que acompaña a la endógena retardada un periodo. Dicho estadístico presenta una distribución normal con media cero y varianza unitaria, cuando el tamaño muestral tiende a infinito. Sobre dicho estadístico cabe hacer las siguientes consideraciones (Uriel, 1990):

- a) Si la muestra de trabajo no es lo suficientemente grande, no es posible derivar la distribución del estadístico, por lo que el contraste carece de validez en muestras pequeñas, o lo que es lo mismo, sólo tiene validez asintótica.
- b) El contraste sólo es válido para contrastar autocorrelación generada por un esquema autorregresivo de orden 1 o AR(1).
- c) En el caso de que la  $\widehat{Var}(\hat{\beta}_i)$  fuese superior a la inversa de  $T$ , el estadístico  $h$  no se puede calcular, pues el radicando sería en este caso negativo.

---

<sup>8</sup> (Watson, 1951)

#### 4.4. CONTRASTE DE BREUSCH-GODFREY<sup>9</sup>

Este contraste se introduce con la intención de paliar algunos de los problemas que presenta el contraste de Durbin-Watson. Por ello, este constituye un contraste más general, aplicable a un abanico más amplio de situaciones, a saber:

- a) Permite trabajar con modelos dinámicos (que incluyan retardos de la variable endógena)
- b) Permite trabajar con modelos que presenten autocorrelación de orden superior a uno, así como con estructuras de generación de autocorrelación que no sean autorregresivas.

El contraste de BG<sup>10</sup> utiliza pues, un esquema más general que el resto de contrastes, de forma que se modeliza la generación de la correlación en la perturbación con un esquema, que permite tener en cuenta de forma directa la influencia de periodos anteriores al último en la perturbación aleatoria y es aplicable a un mayor número de estructuras generadoras (AR, MA o ARMA). Suponiendo un modelo de regresión con una variable explicativa:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

El proceso generador de orden p del término de error es:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \dots + \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$$

Donde  $\varepsilon_t$  es un ruido blanco, con las propiedades anteriormente enunciadas. La hipótesis a contrastar será:

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p = 0$$

Que indica influencia nula de todas las perturbaciones pasadas sobre su valor actual, frente a la hipótesis alternativa de no autocorrelación. Los pasos para realizar este contraste son los siguientes (Novales, 1993):

1. Estimar el modelo de regresión por MCO y obtener de este los residuos  $\hat{u}_t$ .
2. Realizar una regresión de los residuos  $\hat{u}_t$  sobre los p retardos ( $\hat{u}_{t-1}, \hat{u}_{t-2}, \dots, \hat{u}_{t-p}$ ), obtenidos previamente en el paso 1, así como sobre las variables explicativas  $X_t$ , es decir, sobre el siguiente modelo:

$$\hat{u}_t = \alpha_1 + \alpha_2 X_t + \rho_1 \hat{u}_{t-2} + \rho_1 \hat{u}_{t-2} + \dots + \rho_p \hat{u}_{t-p} + \varepsilon_t$$

---

<sup>9</sup> (Godfrey, 1978) (Breusch, 1978)

<sup>10</sup> También se le conoce como prueba LM, ya que el contraste se basa en el principio multiplicador de Lagrange

Y obtener el  $R^2$  de esta regresión, que denotaremos como  $R_{BG}^2$ .

3. Si el tamaño de la muestra tomada es suficientemente grande, el estadístico  $BG_p = TR_{BG}^2$  seguirá una distribución  $\chi^2$  con  $p$  grados de libertad. Por tanto, una vez obtenido el valor del estadístico, se debe ir a las tablas de dicha distribución y comparar el valor obtenido con el valor crítico en las tablas, rechazando la hipótesis nula de autocorrelación en el caso de que dicho valor sea superior.

Una importante desventaja de este contraste es que la longitud del número de retardos del término de error o valor de  $p$ , no puede especificarse a priori, sino que es preciso realizar un proceso de tanteo en cada caso, partiendo de un supuesto de autocorrelación de orden 1, aumentando el grado desde ese punto mediante un proceso de iteraciones. Además, la prueba supone homocedasticidad en la varianza de las perturbaciones  $u_t$ .

## 5. SOLUCIONES AL PROBLEMA DE LA AUTOCORRELACIÓN

En base a las conclusiones obtenidas, parece claro que el uso de los estimadores MCO en presencia de autocorrelación llevará, en la mayoría de los casos, a cometer errores importantes en las etapas de estimación y validación del modelo. Si bien es cierto que, bajo ciertas circunstancias, los estimadores MCO pueden ser apropiados e incluso deseables a la utilización de otros estimadores<sup>11</sup>, normalmente será preferible aplicar alguna transformación al modelo o la utilización de otras herramientas diferentes a los MCO. Podemos dividir metodológicamente los modos de resolución del problema de la autocorrelación en dos tipos, dependiendo de si nos encontramos ante correlación pura o aquella producida por una mala especificación del modelo (Gujarati, 2010)

### 5.1. SESGO EN LA ESPECIFICACIÓN DEL MODELO

Se da en ocasiones que la presencia de autocorrelación es sólo un síntoma de una mala especificación del modelo, de forma que la perturbación aleatoria recoge el efecto de este error en la determinación de la relación entre variables, como se ha explicado en la sección 2 de este capítulo (variables omitidas, forma funcional incorrecta, ...). Si se sospecha que éste es el caso, se debe realizar una transformación del modelo, ya sea en su forma funcional, o incluyendo alguna variable que se considere relevante y no este previamente en el modelo. Se podrían considerar la introducción de variables omitidas, como los retardos de la variable endógena o de alguna otra de las variables explicativas,

---

<sup>11</sup> Por ejemplo, se dan situaciones en las que, trabajando con muestras pequeñas, las propiedades de los estimadores MCO son deseables frente al uso de los estimadores MCG.

así como la introducción de variables que recojan el efecto tendencia del modelo. Con esta nueva premisa, se vuelve a contrastar la presencia de autocorrelación. Los resultados indicarán si se ha conseguido extraer el efecto de la perturbación, incorporándolo al modelo, o si por el contrario el modelo sigue presentando correlación serial, en cuyo caso nos encontraríamos ante un caso de autocorrelación pura.

## 5.2. PRESENCIA DE AUTOCORRELACIÓN PURA

En el caso de que se presente un caso de autocorrelación pura o cuyas causas no sean directamente observables, se pueden tratar de corregir parcialmente los efectos indeseables de la estimación mediante MCO haciendo uso otros estimadores. Sin embargo, para aplicar el remedio es necesario conocer la estructura de la interdependencia entre las perturbaciones, por lo que su procedimiento concreto dependerá de la estructura que siga el proceso generador de la autocorrelación. Supóngase un modelo de regresión con dos variables:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$$

En el que la generación de la autocorrelación en el término de error sigue un esquema AR(1):

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad -1 < \rho < 1$$

Con este planteamiento, el procedimiento utilizado para corregir la correlación serial consta de dos pasos. Primero es necesario estimar el valor de  $\rho$  ya que, en la práctica, es poco común que su valor sea conocido a priori. Una vez obtenido dicho valor, se utiliza para transformar el modelo, y expresarlo en forma de diferencias.

Existen diversos métodos para estimar el valor del parámetro  $\rho$ , pero todos ellos se engloban en los que se conoce como métodos de mínimos cuadrados generalizados estimados o MCG estimados. La transformación posterior realizada sobre el modelo es la siguiente:<sup>12</sup>

$$\rho Y_{t-1} = \rho \beta_1 + \rho \beta_2 X_{t-1} + \rho u_{t-1}$$

De forma que se multiplican ambos términos por el coeficiente de autocorrelación de primer orden. Así, restándole la ecuación al modelo original:

$$(Y_t - \rho Y_{t-1}) = \beta_1(1 - \rho) + \beta_2 (X_t - \rho X_{t-1}) + \varepsilon_t^{13}$$

<sup>12</sup> Dado que el valor de  $\rho$ , si es válido para el periodo  $t$  también lo es para  $t-1$ .

<sup>13</sup> Dado que  $\varepsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$

Entonces el modelo en diferencias quedaría:

$$\Delta Y_t = \beta_1^* + \beta_2^* \Delta X_t + \varepsilon_t$$

Dicha regresión se conoce como ecuación en diferencias, y los estimadores obtenidos de esta forma conservan todas las propiedades óptimas, incluida la eficiencia. La regresión se realiza sobre las variables originales a las que se les sustrae la influencia de su valor en periodos anteriores expresada mediante una proporción  $\rho$ .

## CAPÍTULO III: METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

### 1. CONCEPTOS DE INTERÉS

El objeto de este trabajo es analizar la adecuación del contraste de Breusch-Godfrey a la hora de detectar la existencia de autocorrelación en un modelo, cuando tal autocorrelación puede venir generada por diferentes esquemas de comportamiento. Dicho análisis se basa fundamentalmente en dos conceptos:

- Tamaño del contraste o nivel de significación: también conocido como “probabilidad de cometer un error tipo I”, es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es verdadera. Es equivalente a un falso positivo.
- Potencia del contraste: es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es falsa, siendo igual a la probabilidad de que los valores del estadístico se encuentren en la región de rechazo bajo el supuesto de que la hipótesis alternativa sea verdadera.

Lo que se busca, por tanto, es que el tamaño del contraste sea lo más próximo al nivel de significación fijado a priori, y que la potencia sea elevada.

### 2. INTRODUCCIÓN A LOS EXPERIMENTOS DE MONTE CARLO

Muchos de los estimadores y contrastes de hipótesis utilizados en econometría presentan el problema de que sus propiedades son sólo conocidas para muestras grandes (asintóticamente), mientras que para muestras finitas la precisión de éstas se reduce o son directamente desconocidas. Sin embargo, los experimentos de Monte Carlo nos permiten estudiar las propiedades de dichos estimadores en muestras pequeñas, así como comprobar las asintóticas en situaciones concretas. Peter Kennedy define los experimentos de Monte Carlo como “un ejercicio de simulación diseñado para arrojar luz sobre las propiedades de los estimadores en muestras pequeñas” (Kennedy, 2003, pág. 24)

El método se basa en la determinación de los valores de la variable endógena objeto de estudio a partir de la generación artificial de conjuntos de datos pseudo-aleatorios<sup>14</sup>, que constituirán las variables explicativas y la perturbación aleatoria. Se realiza este paso

---

<sup>14</sup> Son números que, aunque no sean puramente aleatorios (dado que una computadora no puede generarlos), parecen haber sido extraídos de una distribución de probabilidad específica (MacKinnon, 1993)

repetidas veces, estimando los parámetros en función de los datos cada en cada una de las simulaciones, obteniendo finalmente el estadístico de contraste de interés.

### 3. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO

De manera general, el proceso para realizar los experimentos de Monte Carlo puede dividirse en las siguientes fases:

1. Especificar completamente un modelo econométrico o proceso generador de datos (PGD). Esto incluye especificar la distribución de probabilidad de todas las variables explicativas y de la perturbación aleatoria, así como determinar los valores de los coeficientes y el tamaño muestral.
2. Generar de forma artificial un conjunto de datos pseudo-aleatorios.
3. A partir de los datos generados, calcular el estimador o estadístico de contraste cuyas propiedades van a ser sometidas a estudio.
4. Repetir los pasos 2 y 3 un gran número de veces para obtener un número grande de observaciones del parámetro o estimador en diferentes situaciones. Cada nueva generación de datos es llamada replica.
5. Evaluar con qué frecuencia sobre el total de las réplicas las propiedades del estimador calculado son apropiadas o el estadístico acepta o rechaza la hipótesis de contraste
6. Presentar los resultados de forma clara y concisa. En ocasiones, esto puede representar un importante problema debido a la dimensión de los datos con los que se está trabajando.

Este es el esquema general a seguir para la realización de una simulación de Monte Carlo, cuya aplicación concreta al objeto del presente trabajo, el contraste de Breusch-Godfrey, se abordará en el capítulo IV.

## CAPÍTULO IV: ANÁLISIS DE COMPORTAMIENTO DEL TEST DE BREUSCH-GODFREY

### 1. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

El objetivo de las simulaciones aplicadas en este capítulo será analizar el comportamiento del contraste de BG y medir su capacidad para captar la autocorrelación. Con este propósito se utilizará el software informático Gretl, sobre el que se realizarán las simulaciones, tras lo cual se plasmarán los resultados a través del programa informático Excel.

Se llevarán a cabo las simulaciones de Monte Carlo sobre dicho contraste de BG. Así pues, siguiendo la línea del experimento, primero especificaremos nuestro PGD, que tendrá la forma:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{1t} + \beta_3 X_{2t} + u_t$$

En donde las variables explicativas son variables estocásticas generadas de manera aleatoria. La distribución de probabilidad de la variable  $X_1$  ha sido generada mediante una  $\chi^2$  con un número de grados de libertad igual a 5. A su vez, la variable  $X_2$  ha sido generada mediante una distribución uniforme con un intervalo dado de (0,11). Por último, para mayor simplicidad se establecerán los valores de los coeficientes todos igual a 1:

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$$

Por otro lado, para la perturbación aleatoria se construyen seis estructuras de generación diferentes:

1. La perturbación sigue una distribución de probabilidad normal con media 0 y varianza constante igual a 1:

$$u_t \sim N(0,1)$$

2. La perturbación sigue un proceso autorregresivo de orden 1 o AR(1):

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

3. La perturbación sigue un proceso autorregresivo de orden 2 o AR(2):

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \varepsilon_t$$

4. La perturbación sigue un proceso de medias móviles de orden 1 o MA(1):

$$u_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

5. La perturbación sigue un proceso de medias móviles de orden 2 o MA(2):

$$u_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

6. La perturbación sigue un proceso mixto autorregresivo-medias móviles de orden 1,1 o ARMA(1,1):

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Donde la perturbación  $\varepsilon_t$  constituye un ruido blanco en los tres casos. A continuación, se escogerán los valores para los parámetros en las estructuras generadoras de la autocorrelación en los tres casos en los que la perturbación presenta este problema. Los valores escogidos se pueden agrupar en tres categorías: ambos valores son positivos, ambos son negativos o una combinación de positivo y negativo. En todos los casos los parámetros cumplen las condiciones para asegurar la estacionariedad e invertibilidad del proceso. Se establecerán, así mismo, tres diferentes tamaños de la muestra (50, 100 y 1000), sobre los cuáles se realizarán simulaciones con cada una de las combinaciones de parámetros. Se realizarán 1000 simulaciones aplicando en cada una de ellas el estadístico de contraste BG. Este será nuestro estadístico, definido a partir de su fórmula,

$$LM_p = TR^2 \sim \chi^2(p)$$

que utilizaremos para contrastar autocorrelación de orden  $p$  en cada simulación (con  $p = 1, 2$  y  $3$ ). La hipótesis a contrastar será:

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p = 0$$

Frente a la hipótesis alternativa de existencia de autocorrelación de orden  $p$ . Una vez hecho esto extraeremos el porcentaje de rechazos de la hipótesis nula y presentaremos los resultados en forma de tabla.

## 2. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

A continuación, se exponen los resultados del experimento, empezando por estructuras de primer nivel, y continuando desde ahí.

### 2.1 AUTOCORRELACIÓN DE PRIMER ORDEN

Se comienza realizando el experimento considerando que la perturbación aleatoria presenta autocorrelación de orden 1. Se contemplarán dos casos: la autocorrelación está generada por un AR(1) o autorregresivo de primer orden, o por un MA(1) o medias móviles también de primer orden. Se pretende con esto analizar el efecto de forma aislada del coeficiente de la estructura generadora de la autocorrelación (ya que en este caso estamos trabajando con el caso más simple, en el que la autocorrelación sólo presenta un

retardo), así como comprobar si el estadístico BG1 es el que mejor capta la autocorrelación (por tener esta también orden uno) o, por el contrario, la captan todos por igual. Los parámetros escogidos cubren todo el abanico de valores desde el -0,9 hasta el 0,9 (trabajando con un único decimal), con el fin de medir el peso del coeficiente sobre la potencia del contraste, así como de su signo.

#### 2.1.1 ESTRUCTURA AUTORREGRESIVA DE ORDEN 1

La tabla 4.1 y la tabla 4.2 recogen los resultados del experimento cuando la perturbación aleatoria presenta autocorrelación generada por una estructura autorregresiva de primer orden con parámetro positivo y negativo respectivamente, para tamaños de muestra finitos.

TAMAÑO MUESTRAL	$\rho_1$	BG1	BG2	BG3
50	0.9	0.998	0.998	0.997
50	0.8	0.999	0.997	0.996
50	0.7	0.994	0.986	0.973
50	0.6	0.955	0.928	0.909
50	0.5	0.878	0.81	0.757
50	0.4	0.707	0.592	0.529
50	0.3	0.444	0.36	0.301
50	0.2	0.206	0.175	0.16
50	0.1	0.081	0.094	0.087
100	0.9	1	1	1
100	0.8	1	1	1
100	0.7	1	1	1
100	0.6	1	0.999	0.996
100	0.5	0.995	0.99	0.983
100	0.4	0.962	0.933	0.907
100	0.3	0.811	0.717	0.634
100	0.2	0.475	0.388	0.323
100	0.1	0.145	0.127	0.122

TABLA 4.1 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un AR(1) con coeficientes positivos en muestras pequeñas.

TAMAÑO MUESTRAL	$\rho_1$	BG1	BG2	BG3
50	-0.9	1	0.999	1
50	-0.8	0.999	1	0.999
50	-0.7	0.996	0.995	0.987
50	-0.6	0.986	0.982	0.969
50	-0.5	0.928	0.883	0.836
50	-0.4	0.76	0.67	0.608
50	-0.3	0.552	0.472	0.411
50	-0.2	0.32	0.254	0.214
50	-0.1	0.1	0.109	0.103
100	-0.9	1	1	1
100	-0.8	1	1	1
100	-0.7	1	1	1
100	-0.6	1	1	1
100	-0.5	0.998	0.997	0.992
100	-0.4	0.979	0.953	0.932
100	-0.3	0.867	0.799	0.718
100	-0.2	0.548	0.472	0.403
100	-0.1	0.186	0.167	0.137

TABLA 4.2 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un AR(1) con coeficientes negativos en muestras pequeñas.

En la primera columna se indica el tamaño muestral, mientras que en la segunda el valor escogido para  $\rho$  en la estructura generadora. La tercera, cuarta y quinta columna muestran la proporción de rechazos de  $H_0$  (no autocorrelación) cuando realmente es falsa, esto es, una aproximación a la potencia del contraste.

A partir de los resultados se pueden extraer diversas conclusiones. En primer lugar, y atendiendo sólo a BG de orden 1, se observa claramente la importancia del tamaño del coeficiente sobre la potencia del contraste, que decrece de forma acelerada cuando el valor de este cae por debajo de 0.5 (lo que se aprecia más claramente cuanto más pequeña es la muestra), ocasionando que el contraste pierda prácticamente toda su efectividad en los valores más bajos, en los que la probabilidad de detectar la autocorrelación se vuelve inoperativa, para ambas tablas. Este resultado era esperable, ya que el hecho de que  $\rho$  sea pequeño, implica también que la autocorrelación es más débil. Los resultados siguen la misma tendencia para el BG de orden 2 y 3.

En segundo lugar, se procede a comparar la potencia del BG de orden 1 frente a BG de órdenes superiores. Por un lado, se observa que en los casos de más elevados parámetros las diferencias son prácticamente nulas. Es, sin embargo, cuando el valor del coeficiente se reduce cuando estas diferencias comienzan a hacerse notables. En tales casos (aproximadamente por debajo de 0.7), la brecha entre las potencias comienza a hacerse más evidente de forma acelerada a favor del BG1. Por lo tanto, se corrobora en este caso

la hipótesis de partida, según la cual, el BG1 debía proporcionar mejores resultados, dado que la autocorrelación está provocada por un AR(1) .

En tercer lugar, respecto al uso de coeficientes negativos, en la tabla 3.2 se recogen resultados parecidos que para el caso de coeficiente positivo, presentando la potencia del contraste también aquí un decrecimiento acelerado conforme disminuye el valor del coeficiente, y con un peso del tamaño de este sobre dicha potencia también similar. Sin embargo, es interesante señalar que, aunque dicho peso sea similar en todos los casos, es también para todos los casos ligeramente superior para coeficiente negativo. También aquí mantienen los resultados arrojados por el BG1 mayor efectividad sobre el BG de órdenes superiores al igual que en caso anterior.

Finalmente, señalar que la potencia del contraste va aumentando a medida que aumenta el tamaño muestral, tal y como se muestra en la tabla 4.3, en la que se recogen los resultados para una muestra de tamaño 1000 para coeficientes positivos y negativos. Sólo cuando el coeficiente toma valores muy bajos la potencia no es uno, aunque sigue siendo alta, debido a la débil presencia de la autocorrelación en estos casos. Tales resultados eran esperables, ya que el Breuch-Godfrey es un contraste asintótico, por lo que su efectividad tiende a uno cuando el tamaño muestral se hace muy grande.

TAMAÑO MUESTRAL	$\rho_1$	BG1	BG2	BG3
1000	-0.9	1	1	1
1000	-0.8	1	1	1
1000	-0.7	1	1	1
1000	-0.6	1	1	1
1000	-0.5	1	1	1
1000	-0.4	1	1	1
1000	-0.3	1	1	1
1000	-0.2	1	1	1
1000	-0.1	0.895	0.832	0.776
1000	0.1	0.88	0.814	0.755
1000	0.2	1	1	0.999
1000	0.3	1	1	1
1000	0.4	1	1	1
1000	0.5	1	1	1
1000	0.6	1	1	1
1000	0.7	1	1	1
1000	0.8	1	1	1
1000	0.9	1	1	1

TABLA 4.3 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un AR(1) con coeficientes positivos y negativos en muestras grandes.

#### 2.1.1.2 ESTRUCTURA DE MEDIAS MÓVILES DE ORDEN 1

Se presentan ahora en las tablas 4.4 y 4.5 los resultados para un caso en el que la perturbación aleatoria presenta autocorrelación generada por una estructura de medias

móviles de primer orden, cuyo coeficiente es positivo y negativo respectivamente, para muestras de tamaño finito.

TAMAÑO MUESTRAL	$\rho_1$	BG1	BG2	BG3
50	0.9	0.96	0.98	0.975
50	0.8	0.93	0.975	0.97
50	0.7	0.895	0.94	0.925
50	0.6	0.84	0.91	0.875
50	0.5	0.785	0.785	0.74
50	0.4	0.555	0.535	0.445
50	0.3	0.37	0.41	0.355
50	0.2	0.24	0.185	0.16
50	0.1	0.035	0.075	0.07
100	0.9	1	1	1
100	0.8	1	1	1
100	0.7	0.995	1	1
100	0.6	0.995	1	1
100	0.5	0.995	0.995	0.99
100	0.4	0.925	0.905	0.865
100	0.3	0.755	0.65	0.615
100	0.2	0.5	0.38	0.315
100	0.1	0.105	0.12	0.085

TABLA 4.4 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un MA(1) con coeficientes positivos en muestras pequeñas.

TAMAÑO MUESTRAL	$\rho_1$	BG1	BG2	BG3
50	-0.9	0.98	1	1
50	-0.8	0.98	0.99	0.995
50	-0.7	0.93	0.97	0.965
50	-0.6	0.92	0.945	0.925
50	-0.5	0.835	0.845	0.815
50	-0.4	0.69	0.67	0.6
50	-0.3	0.555	0.475	0.47
50	-0.2	0.275	0.26	0.22
50	-0.1	0.11	0.11	0.115
100	-0.9	1	1	1
100	-0.8	1	1	1
100	-0.7	0.995	1	1
100	-0.6	1	1	1
100	-0.5	0.99	0.995	0.99
100	-0.4	0.95	0.935	0.9
100	-0.3	0.825	0.77	0.675
100	-0.2	0.525	0.455	0.38
100	-0.1	0.155	0.135	0.105

TABLA 4.5 – Proporción de rechazos de  $H_0$  del contraste de BG bajo un MA(1) con coeficientes negativos en muestras pequeñas.

Siguiendo ahora en líneas generales el análisis efectuado para el caso anterior se puede llegar a varias conclusiones. Primero, al igual que con la estructura autorregresiva el tamaño del coeficiente tiene una gran importancia sobre la potencia del contraste, que

decrece también de forma acelerada conforme disminuye el valor de este. De esta forma, cuando el tamaño del parámetro cae por debajo de cierto valor, que depende del tamaño de la muestra, la eficacia del contraste se ve fuertemente comprometida. Este patrón es seguido por los resultados arrojados por el contraste en el BG de orden 1, 2 y 3.

Segundo, al comparar la potencia del BG1 frente a la potencia del contraste de órdenes superiores se obtienen resultados opuestos al caso autorregresivo, y que no se corresponden con la hipótesis de partida, según la cual esperábamos una mayor potencia en el BG1, dado que la autocorrelación está generada únicamente con un periodo de retardo. En lugar de ello, el contraste arroja mejores resultados para el BG2 en algunos casos, incluso también para el BG3 frente a los resultados obtenidos para el BG1. Esta circunstancia parece producirse cuanto más grande es el coeficiente de la autocorrelación, mientras que, al ir disminuyendo el valor de este, los resultados se acercan más a lo esperado, especialmente cuando el tamaño de la muestra aumenta. Para comprobarlo realizamos el contraste sobre una muestra más grande, cuyos resultados se recogen en la tabla 4.6, que confirman que los resultados se normalizan al aumentar el tamaño de la muestra además de ser coherentes con la asintoticidad del contraste, al detectar la autocorrelación con una probabilidad igual a 1 en la mayoría de los casos. Únicamente los casos en los que se han utilizado coeficientes de menor valor presentan valores menores a uno, confirmando los resultados del apartado anterior.

TAMAÑO MUESTRAL	$\rho_1$	BG1	BG2	BG3
1000	-0.9	1	1	1
1000	-0.8	1	1	1
1000	-0.7	1	1	1
1000	-0.6	1	1	1
1000	-0.5	1	1	1
1000	-0.4	1	1	1
1000	-0.3	1	1	1
1000	-0.2	1	1	1
1000	-0.1	0.845	0.76	0.69
1000	0.1	0.855	0.755	0.72
1000	0.2	1	1	1
1000	0.3	1	1	1
1000	0.4	1	1	1
1000	0.5	1	1	1
1000	0.6	1	1	1
1000	0.7	1	1	1
1000	0.8	1	1	1
1000	0.9	1	1	1

TABLA 4.6 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un MA(1) con coeficientes positivos y negativos en muestras grandes.

Tercero, que las conclusiones anteriormente obtenidas para el caso de una estructura autorregresiva con parámetro negativo, en general, se mantienen, siendo incluso más evidente aquí el mejor comportamiento del test en con este tipo de coeficientes.

### 2.1.3 ANÁLISIS COMPARATIVO

A la luz de los resultados arrojados por el experimento, y comparando ahora entre ambas estructuras de autocorrelación utilizadas, las conclusiones extraídas se pueden resumir en las siguientes:

- Asumiendo para la perturbación aleatoria una estructura de autocorrelación de primer orden, el tamaño del coeficiente influye de manera importante sobre la potencia del contraste para ambos casos. En concreto, se observa un decrecimiento acelerado de la potencia del contraste conforme el valor de dicho coeficiente disminuye, comprometiendo seriamente su eficacia para los valores más bajos.
- Se observa también, para ambos casos, que la probabilidad de detectar autocorrelación por el contraste existiendo autocorrelación tiende a uno conforme aumenta el tamaño de la muestra, tal y cómo era esperable dado que se trata de un contraste asintótico.
- En el caso de la estructura autorregresiva, los resultados obtenidos por el BG1 presentan mayor fuerza de detección que sus homónimos de órdenes superiores, en línea con la hipótesis de partida. Sin embargo, para el caso de estructura de medias móviles el contraste arroja resultados que no van en línea con esta idea, sino que en algunos casos la potencia obtenida es más alta para el BG2 y el BG3, especialmente para valores altos del coeficiente.
- No se observa para ninguno de los dos casos diferencias notables entre el uso de coeficientes positivos o negativos.

## 2.2 AUTOCORRELACIÓN DE SEGUNDO ORDEN EN ESTRUCTURAS PURAS

Realizado el experimento sobre una estructura que presentaba autocorrelación de orden uno, se repetirá ahora para estructuras autocorrelacionadas dos periodos que presenten una estructura pura, con objeto de verificar si las conclusiones extraídas son también extensibles a órdenes superiores. En concreto, se realizará el experimento sobre un AR(2) y un MA(2), sobre los que se seguirá el mismo esquema de análisis que el realizado en el apartado anterior. La elección de los parámetros, en cuanto a no incluir todas las combinaciones desde 0,1 a 0,9 con un decimal de diferencia como en el apartado anterior,

obedece a razones de sencillez y simplicidad, ya que resulta engorroso la interpretación de los datos debido a su densidad. Se respetan además para todos los casos las condiciones de estacionariedad e invertibilidad. Los resultados se quedan ordenados en las tablas ahora, dando un mayor peso al primer coeficiente primero, dando un mayor peso al segundo después, y finalmente con valores bajos en ambos.

### 2.2.1 ESTRUCTURA AUTORREGRESIVA DE ORDEN 2

Se recoge en la tabla 4.7 los resultados obtenidos cuando la perturbación aleatoria presenta autocorrelación de tipo autorregresivo de segundo orden con coeficientes positivos y para tamaños de muestra finitos.

TAMAÑO DE LA MUESTRA	$\rho_1$	$\rho_2$	BG1	BG2	BG3
50	0.8	0.1	0.998	0.997	0.996
50	0.7	0.2	0.991	0.993	0.988
50	0.6	0.3	0.981	0.982	0.97
50	0.6	0.1	0.969	0.944	0.925
50	0.5	0.4	0.953	0.967	0.955
50	0.5	0.2	0.928	0.919	0.891
50	0.4	0.5	0.906	0.962	0.948
50	0.2	0.5	0.478	0.838	0.797
50	0.3	0.6	0.793	0.974	0.959
50	0.1	0.6	0.355	0.922	0.896
50	0.2	0.7	0.675	0.981	0.974
50	0.1	0.8	0.491	0.996	0.992
50	0.3	0.1	0.501	0.428	0.372
50	0.1	0.3	0.203	0.396	0.354
100	0.8	0.1	1	1	1
100	0.7	0.2	1	1	1
100	0.6	0.3	1	1	1
100	0.6	0.1	1	1	0.999
100	0.5	0.4	1	1	1
100	0.5	0.2	1	1	1
100	0.4	0.5	0.999	1	1
100	0.2	0.5	0.805	0.998	0.997
100	0.3	0.6	0.984	1	1
100	0.1	0.6	0.519	1	1
100	0.2	0.7	0.933	1	1
100	0.1	0.8	0.67	1	1
100	0.3	0.1	0.844	0.787	0.746
100	0.1	0.3	0.294	0.743	0.696

TABLA 4.7 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un AR(2) con coeficientes positivos en muestras pequeñas.

Del análisis de las mismas se pueden extraer las siguientes conclusiones. La primera que, al igual que en el caso anterior, el tamaño de los coeficientes afecta de forma muy directa a la potencia del contraste. Destacar que el BG2 es el que mejor se comporta ante el contraste, tal y como era de esperar, dado que estamos contrastando correlación de orden 2, que es la que efectivamente presenta la perturbación, conservando su efectividad incluso en niveles más bajos de los parámetros que en el apartado anterior. Parece,

además, que dichos resultados se producen con independencia de cuál de los parámetros sea más grande, tal y cómo muestran, por ejemplo, las parejas (0.3, 0.1) y (0.1, 0.3) que arrojan resultados muy parecidos. Las conclusiones ahora citadas son extensibles también al BG3.

Segundo, al comparar el BG2 con el BG1, se aprecian unos mejores resultados del primero sobre el segundo, especialmente cuando el primero de los parámetros presenta un valor bajo. Esto parece indicar que la efectividad del contraste para detectar autocorrelación de orden 1 depende más fuertemente del primer parámetro que del segundo, lo que tiene sentido si se piensa que en la estructura generadora es el primer parámetro el que afecta a la autocorrelación con un periodo de retardo. El BG3, por el contrario, ofrece unos resultados parecidos al BG2, aunque ligeramente peores.

Teniendo esto en cuenta pasamos a analizar el caso análogo para una estructura generadora con coeficientes negativos. La tabla 4.8 recoge los resultados.

TAMAÑO DE LA MUESTRA	$\rho_1$	$\rho_2$	BG1	BG2	BG3
50	-0.8	-0.1	0.998	0.997	0.997
50	-0.7	-0.2	0.976	0.974	0.969
50	-0.6	-0.3	0.951	0.96	0.928
50	-0.6	-0.1	0.981	0.97	0.936
50	-0.5	-0.4	0.781	0.949	0.923
50	-0.5	-0.2	0.869	0.863	0.815
50	-0.4	-0.5	0.451	0.968	0.959
50	-0.2	-0.5	0.056	0.914	0.877
50	-0.3	-0.6	0.114	0.983	0.97
50	-0.1	-0.6	0.005	0.96	0.948
50	-0.2	-0.7	0.011	0.996	0.992
50	-0.1	-0.8	0	0.998	0.997
50	-0.3	-0.1	0.495	0.461	0.402
50	-0.1	-0.3	0.039	0.501	0.464
100	-0.8	-0.1	1	1	1
100	-0.7	-0.2	1	1	1
100	-0.6	-0.3	1	1	1
100	-0.6	-0.1	1	1	1
100	-0.5	-0.4	0.989	1	1
100	-0.5	-0.2	0.993	0.991	0.986
100	-0.4	-0.5	0.874	1	0.999
100	-0.2	-0.5	0.16	0.996	0.995
100	-0.3	-0.6	0.438	0.999	0.997
100	-0.1	-0.6	0.005	1	1
100	-0.2	-0.7	0.033	1	1
100	-0.1	-0.8	0	1	1

TABLA 4.8 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un AR(2) con coeficientes positivos en muestras pequeñas.

A la vista de los resultados, se puede afirmar que las conclusiones extraídas anteriormente siguen siendo válidas. Respecto al BG2 y BG3 se aprecia en este caso una mayor potencia del contraste que para el experimento realizado con valores positivos, que se hace más

evidente cuanto menor es el tamaño de los parámetros. Sin embargo, para el BG1 la situación se invierte en algunos casos: aquellos en los que el primer coeficiente toma un valor pequeño. Para comprobar si esta diferencia reside en la negatividad del primero o del segundo de los parámetros se realiza otro experimento para un tamaño de muestra de 50, que reúne casos de ambos tipos. Los resultados obtenidos quedan recogidos en la tabla 4.9:

TAMAÑO DE LA MUESTRA	$\rho_1$	$\rho_2$	BG1	BG2	BG3
50	-0.8	0.1	1	1	0.999
50	-0.6	0.3	0.998	0.997	0.998
50	-0.6	0.1	0.99	0.983	0.976
50	-0.5	0.4	0.99	0.99	0.991
50	-0.4	0.5	0.978	0.99	0.989
50	-0.3	0.6	0.935	0.986	0.984
50	-0.1	0.6	0.5	0.946	0.923
50	-0.1	0.8	0.719	0.997	0.996
50	0.8	-0.1	0.997	0.993	0.993
50	0.6	-0.3	0.89	0.932	0.892
50	0.6	-0.1	0.948	0.92	0.891
50	0.5	-0.4	0.692	0.901	0.88
50	0.4	-0.5	0.328	0.953	0.921
50	0.3	-0.6	0.079	0.987	0.976
50	0.1	-0.6	0.002	0.97	0.945
50	0.1	-0.8	0	0.999	0.998

TABLA 4.9 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un AR(2) con coeficientes positivos y negativos en una muestra pequeña.

A la vista de los resultados obtenidos, se puede afirmar que los problemas detectados anteriormente para captar la autocorrelación de primer orden vienen explicados únicamente por la negatividad del segundo parámetro, tanto más cuanto mayor es el peso relativo de este parámetro sobre el primero en la estructura generadora (de hecho, si el segundo coeficiente es muy pequeño, no aparecen anomalías). Por tanto, ante un caso como este, el contraste falla estrepitosamente a la hora de detectar autocorrelación. Por contra, la negatividad del primer parámetro no parece tener ningún efecto negativo sobre la potencia del contraste, antes al contrario, los resultados aquí obtenidos por el BG1 son los mejores de entre todos los experimentos realizados.

Cuarto, que los resultados siguen siendo coherentes son la asintoticidad del contraste en cuanto a que la probabilidad se aproxima a uno conforme aumenta el tamaño muestral, lo que nos confirman los resultados de la tabla 4.10, en la que se han seleccionado unos pocos casos de cada tipo.

TAMAÑO DE LA MUESTRA	$\rho_1$	$\rho_2$	BG1	BG2	BG3
1000	0.7	0.2	1	1	1
1000	0.5	0.4	1	1	1
1000	0.4	0.5	1	1	1
1000	0.2	0.7	1	1	1
1000	0.3	0.2	1	1	1
1000	0.2	0.3	1	1	1
1000	-0.7	-0.2	1	1	1
1000	-0.5	-0.4	1	1	1
1000	-0.4	-0.5	1	1	1
1000	-0.2	-0.7	1	1	1
1000	-0.3	-0.2	1	1	1
1000	-0.2	-0.3	1	1	1
1000	-0.7	0.2	1	1	1
1000	-0.5	0.4	1	1	1
1000	-0.4	0.5	1	1	1
1000	-0.2	0.7	1	1	1
1000	-0.3	0.2	1	1	1
1000	-0.2	0.3	1	1	1
1000	0.7	-0.2	1	1	1
1000	0.5	-0.4	1	1	1
1000	0.4	-0.5	1	1	1
1000	0.3	-0.2	1	1	1
1000	0.2	-0.3	1	1	1
1000	0.2	-0.2	1	1	1

TABLA 4.10 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un AR(2) en una muestra grande.

Así, con respecto a los resultados obtenidos por el contraste cuando se aplicaba sobre una estructura autocorrelacionada un periodo se puede concluir:

- Que los resultados obtenidos en el primer experimento son extensibles en cuanto a importancia del tamaño y asintoticidad
- Que en el caso de una estructura autorregresiva, el orden del BG que presenta mejores resultados es aquel que corresponde con el orden de autocorrelación.
- Que aparece una anomalía en la captación de autocorrelación de orden 1 cuando la perturbación presenta correlación de orden superior y el segundo coeficiente es negativo.

#### 2.2.2 ESTRUCTURA DE MEDIAS MÓVILES DE ORDEN 2

La tabla 4.11 recoge los resultados del experimento, realizado ahora sobre una perturbación cuya estructura generadora sigue un proceso de medias móviles de segundo orden, con coeficientes positivos y para un tamaño finito de la muestra.

TAMAÑO DE LA MUESTRA	$\rho_1$	$\rho_2$	BG1	BG2	BG3
50	0.8	0.1	0.96	0.99	0.985
50	0.7	0.2	0.97	0.99	0.955
50	0.6	0.3	0.945	0.905	0.895
50	0.6	0.1	0.885	0.88	0.85
50	0.5	0.4	0.885	0.87	0.86
50	0.5	0.2	0.885	0.79	0.755
50	0.4	0.5	0.67	0.77	0.855
50	0.2	0.5	0.335	0.69	0.71
50	0.3	0.6	0.515	0.81	0.825
50	0.1	0.6	0.22	0.76	0.73
50	0.2	0.7	0.365	0.845	0.87
50	0.1	0.8	0.21	0.835	0.82
50	0.3	0.1	0.38	0.29	0.28
50	0.1	0.3	0.19	0.335	0.305
100	0.8	0.1	1	1	1
100	0.7	0.2	1	1	1
100	0.6	0.3	0.995	0.99	0.995
100	0.6	0.1	1	0.995	0.995
100	0.5	0.4	0.995	0.995	0.995
100	0.5	0.2	1	0.985	0.985
100	0.4	0.5	0.975	0.98	1
100	0.2	0.5	0.53	0.955	0.965
100	0.3	0.6	0.81	0.995	1
100	0.1	0.6	0.295	0.985	0.98
100	0.2	0.7	0.475	0.99	0.99
100	0.1	0.8	0.23	1	0.995
100	0.3	0.1	0.82	0.725	0.665
100	0.1	0.3	0.205	0.63	0.63

TABLA 4.11 - Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un MA(2) con coeficientes positivos en muestras pequeñas.

Atendiendo primero únicamente a los resultados arrojados por el BG2, parece que el tamaño del primer coeficiente tiene una influencia mayor sobre la potencia del contraste que el del segundo, tal y como muestran, por ejemplo, los resultados de las parejas (0.7, 0.2) y (0.2, 0.7). Algo similar ocurre en caso del BG3. Sin embargo, es en el caso del BG1 cuando esta característica se agrava notablemente, comprometiendo seriamente la potencia del contraste (llegando la pareja (0.1, 0.8) a arrojar un resultado de 0,22, frente a un 0,96 de su homóloga inversa).

Pasando ahora a comparar los distintos órdenes del contraste, encontramos que el BG2 y 3 ofrecen parecidos resultados, mientras que el BG1 arroja resultados notablemente peores en los casos en los que se dan las condiciones anteriormente citadas. Se comprueba también la asintoticidad de los resultados.

Una vez analizados estos datos, pasamos a repetir el experimento con parámetros negativos y alternando negativos y positivos para una muestra de 50 para determinar si el problema detectado para el caso de la estructura autorregresiva persiste también aquí. Los resultados quedan recogidos en la tabla 4.12 y 4.13 alternativamente.

TAMAÑO DE LA MUESTRA	$\rho_1$	$\rho_2$	BG1	BG2	BG3
50	-0.8	-0.1	0.905	0.975	0.975
50	-0.7	-0.2	0.78	0.9	0.94
50	-0.6	-0.3	0.515	0.79	0.83
50	-0.6	-0.1	0.805	0.905	0.875
50	-0.5	-0.4	0.255	0.795	0.8
50	-0.5	-0.2	0.58	0.795	0.8
50	-0.4	-0.5	0.115	0.76	0.755
50	-0.2	-0.5	0.04	0.725	0.665
50	-0.3	-0.6	0.05	0.795	0.755
50	-0.1	-0.6	0.02	0.82	0.75
50	-0.2	-0.7	0.025	0.815	0.78
50	-0.1	-0.8	0.01	0.925	0.88
50	-0.3	-0.1	0.395	0.515	0.485
50	-0.1	-0.3	0.035	0.475	0.42

TABLA 4.12 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un MA(2) con coeficientes negativos en una muestra pequeña.

Los resultados de la tabla 4.12 no arrojan diferencias significativas respecto al caso de parámetros positivos en el BG2 y BG3. Sin embargo, el BG1 vuelve a presentar problemas para captar la autocorrelación en algunos casos.

TAMAÑO DE LA MUESTRA	$\rho_1$	$\rho_2$	BG1	BG2	BG3
50	-0.8	0.1	0.995	0.995	0.995
50	-0.6	0.3	0.995	0.965	0.95
50	-0.6	0.1	0.935	0.95	0.91
50	-0.5	0.4	0.9	0.865	0.865
50	-0.4	0.5	0.82	0.88	0.92
50	-0.3	0.6	0.65	0.83	0.885
50	-0.1	0.6	0.28	0.785	0.755
50	-0.1	0.8	0.295	0.85	0.83
50	0.8	-0.1	0.81	0.945	0.935
50	0.6	-0.3	0.42	0.825	0.83
50	0.6	-0.1	0.745	0.865	0.84
50	0.5	-0.4	0.225	0.77	0.775
50	0.4	-0.5	0.05	0.77	0.695
50	0.3	-0.6	0.02	0.83	0.775
50	0.1	-0.6	0.015	0.83	0.75
50	0.1	-0.8	0.015	0.91	0.875

TABLA 4.13 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un MA(2) con coeficientes positivos y negativos en una muestra pequeña.

Los datos de la tabla 4.13 parecen reforzar la hipótesis extraída para el caso autorregresivo, mientras que no se detectan problemas cuando el primer de los coeficientes es negativo, siendo los resultados muy similares al caso de ambos positivos. Por tanto, también en el caso de una estructura de medias móviles de orden 2 el contraste falla al detectar autocorrelación de nivel 1. Finalmente se realiza de nuevo el experimento para un tamaño de muestra grande, cuyos resultados quedan recogidos en la tabla 4.14, que nos permite confirmar la asintoticidad del contraste en casi todos los casos. Sin embargo, aparecen dos parejas de casos que presentan muy malos resultados: se

corresponden con aquéllos que presentan negatividad en el segundo coeficiente con un valor alto de éste y un valor pequeño en el primer coeficiente.

TAMAÑO DE LA MUESTRA	$\rho_1$	$\rho_2$	BG1	BG2	BG3
1000	0.7	0.2	1	1	1
1000	0.5	0.4	1	1	1
1000	0.4	0.5	1	1	1
1000	0.2	0.7	1	1	1
1000	0.3	0.2	1	1	1
1000	0.2	0.3	1	1	1
1000	-0.7	-0.2	1	1	1
1000	-0.5	-0.4	1	1	1
1000	-0.4	-0.5	1	1	1
1000	-0.2	-0.7	0.15	1	1
1000	-0.3	-0.2	1	1	1
1000	-0.2	-0.3	0.995	1	1
1000	-0.7	0.2	1	1	1
1000	-0.5	0.4	1	1	1
1000	-0.4	0.5	1	1	1
1000	-0.2	0.7	1	1	1
1000	-0.3	0.2	1	1	1
1000	-0.2	0.3	1	1	1
1000	0.7	-0.2	1	1	1
1000	0.5	-0.4	1	1	1
1000	0.4	-0.5	1	1	1
1000	0.2	-0.7	0.175	1	1
1000	0.3	-0.2	1	1	1
1000	0.2	-0.3	1	1	1

TABLA 4.14 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un MA(2) en una muestra grande.

Recapitulando ahora y tomando como referencia las conclusiones extraídas para el análisis de una estructura correlacionada un periodo, se puede concluir:

- Que los mejores resultados no se dan para el nivel de autocorrección que presenta la perturbación en cada caso, sino que para ambas situaciones lo constituyen los datos arrojados por el BG2 y el BG3, que presentan resultados similares.
- Que aparece una anomalía en la captación de autocorrelación de orden 1 cuando la perturbación presenta correlación de orden superior y el segundo coeficiente es negativo, tanto más cuanto mayor es el peso relativo de este sobre el primero.
- Que los resultados obtenidos en el primer experimento son extensibles en cuanto a importancia del tamaño y asintoticidad. Sin embargo, el contraste presenta graves problemas en algunos casos en cuanto a asintoticidad cuando cumplen las condiciones anteriormente citadas en cuanto a parámetros negativos.

### 2.2.3 ANÁLISIS COMPARATIVO

Obtenidos los resultados para cada estructura de forma aislada, se procede ahora a realizar un análisis comparativo, con objeto de detectar las peculiaridades de cada caso. Las conclusiones más notables son:

- En línea con los resultados obtenidos en el primer apartado, se confirma aquí la importancia del tamaño del coeficiente sobre la capacidad del contraste para ambas estructuras, siendo en este caso menor la desaceleración de dicha efectividad conforme se disminuye el valor de los parámetros.
- Que bajo una estructura AR se comportan asintóticamente mejor que para una estructura MA, cuando el segundo de los coeficientes es negativo y su peso relativo sobre el primero es alto.
- Los resultados parecen indicar para ambos casos que para detectar autocorrelación de un determinado orden  $p$ , se puede utilizar un BG que sea del mismo orden o superior, pero no inferior.
- Se detecta, para ambas estructuras, un fallo del contraste a la hora de detectar autocorrelación de nivel 1 cuando el segundo de los coeficientes de la estructura generadora es de signo negativo. Dicha pérdida de efectividad se agrava conforme aumenta el peso relativo del segundo coeficiente sobre el primero, resultando prácticamente en la inoperatividad del contraste para detectar autocorrelación de este orden.

### 2.3 AUTOCORRELACIÓN EN ESTRUCTURAS MIXTAS

Analizados los resultados del contraste para el caso de estructuras puras, se procede ahora a realizar lo propio para el caso de una estructura mixta de orden 1, en concreto un ARMA(1,1), para comprobar si los resultados arrojan las mismas conclusiones o, por el contrario, se detectan variaciones en el comportamiento del contraste. La elección de los parámetros es la misma y responde a las mismas razones que en el apartado anterior, respetando los parámetros como siempre las condiciones de estacionariedad e invertibilidad necesarias para la validez de los resultados.

#### 2.3.1 ESTRUCTURA MIXTA ARMA(1,1)

La tabla 4.15 muestra los resultados de del experimento cuando la perturbación presenta autocorrelación de tipo mixto de orden dos para ambas partes, con coeficientes positivos y para tamaños de muestra finitos:

TAMAÑO DE LA MUESTRA	$\rho_1$	$\rho_2$	BG1	BG2	BG3
50	0.8	0.1	0.992	0.985	0.974
50	0.6	0.3	0.492	0.418	0.367
50	0.6	0.1	0.891	0.833	0.786
50	0.5	0.4	0.103	0.1	0.079
50	0.4	0.5	0.105	0.129	0.107
50	0.3	0.6	0.384	0.435	0.413
50	0.1	0.6	0.763	0.828	0.796
50	0.1	0.8	0.895	0.95	0.954
50	0.3	0.1	0.215	0.181	0.154
50	0.1	0.3	0.258	0.251	0.215
100	0.8	0.1	1	1	1
100	0.6	0.3	0.837	0.798	0.763
100	0.6	0.1	0.996	0.995	0.993
100	0.5	0.4	0.153	0.136	0.122
100	0.4	0.5	0.154	0.145	0.124
100	0.3	0.6	0.725	0.768	0.753
100	0.1	0.6	0.98	0.995	0.991
100	0.1	0.8	0.997	0.999	1
100	0.3	0.1	0.458	0.367	0.319
100	0.1	0.3	0.468	0.425	0.364

TABLA 4.15 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un ARMA(1,1) con coeficientes positivos en muestras pequeñas.

En este caso, no se perciben grandes diferencias entre los resultados arrojados por los diferentes niveles del contraste en cada caso, por lo que se concluye que no existe un nivel que arroje resultados superiores a los demás. Sin embargo, los datos arrojados por la tabla no siguen una estructura homogénea respecto a la progresiva disminución del contraste, es decir, que el tamaño de coeficiente ya no se relaciona en este caso tan estrechamente con los resultados del contraste como en los casos anteriores. Prueba de ello son, por ejemplo, la pareja (0.5, 0.4) que aunque presenta valores mayores de ambos coeficientes que la pareja (0.3, 0.1) arroja, sin embargo, resultados mucho peores.

Por otro lado, analizaremos ahora lo que ocurre con coeficientes negativos y si existe alguna diferencia notable respecto del caso anterior. Los resultados quedan recogidos en la tabla 4.16 donde se repite el experimento para una muestra de tamaño 50.

TAMAÑO DE LA MUESTRA	ALFA1	ALFA2	BG1	BG2	BG3
50	-0.8	-0.1	0.996	0.992	0.991
50	-0.6	-0.3	0.64	0.546	0.523
50	-0.6	-0.1	0.944	0.917	0.883
50	-0.5	-0.4	0.146	0.139	0.141
50	-0.4	-0.5	0.055	0.097	0.081
50	-0.3	-0.6	0.269	0.331	0.294
50	-0.1	-0.6	0.683	0.78	0.735
50	-0.1	-0.8	0.819	0.928	0.915
50	-0.3	-0.1	0.323	0.246	0.231
50	-0.1	-0.3	0.189	0.178	0.173

TABLA 4.16 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un ARMA(1,1) con coeficientes negativos en una muestra pequeña.

A la vista de los resultados se puede afirmar que se repite aquí de nuevo el patrón detectado anteriormente en cuanto a heterogeneidad de los resultados en función del tamaño, así como que todos los niveles del contraste presentan resultados similares. Atendiendo ahora a la comparación respecto a la tabla anterior, no se perciben resultados notablemente significativos. Tampoco se aprecian diferencias en función cuál de los dos de los coeficientes sea negativo. Por lo tanto, el problema detectado con anterioridad para estructuras puras cuando el segundo de los coeficientes era negativo no aparece aquí.

Finalmente, se puede afirmar para ambas tablas que los resultados del contraste siguen siendo asintóticos, aunque de forma más débil que para el caso de las estructuras puras, como muestra la tabla 4.17 que recoge unos pocos casos únicamente con coeficientes positivos o negativos.

TAMAÑO DE LA MUESTRA	$\rho_1$	$\rho_2$	BG1	BG2	BG3
1000	0.7	0.2	1	1	1
1000	0.5	0.4	0.913	0.883	0.841
1000	0.4	0.5	0.881	0.903	0.873
1000	0.2	0.7	1	1	1
1000	0.3	0.2	0.885	0.83	0.786
1000	0.2	0.3	0.894	0.85	0.793
1000	-0.7	-0.2	1	1	1
1000	-0.5	-0.4	0.915	0.909	0.877
1000	-0.4	-0.5	0.84	0.845	0.834
1000	-0.2	-0.7	1	1	1
1000	-0.3	-0.2	0.884	0.835	0.796
1000	-0.2	-0.3	0.877	0.841	0.777

TABLA 4.17 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta falsa, del contraste de BG bajo un ARMA(1,1) con coeficientes positivos en una muestra grande.

### 3.3.2. ANÁLISIS COMPARATIVO

Realizado el análisis aislado, se proceden a comparar los resultados con aquellos obtenidos para estructuras puras, llegándose a las siguientes conclusiones:

- Al igual que en los casos anteriores, los resultados siguen siendo asintóticos, aunque de forma más débil que para el caso de estructuras puras
- Al contrario que en el análisis de estructuras puras, la importancia del tamaño del coeficiente aquí sobre la potencia del contraste ya no está tan directamente relacionada, presentado resultados extraños en algunos casos.
- El problema que aparecía en el apartado anterior al introducir un segundo parámetro negativo desaparece en este caso. Los resultados obtenidos para la

estructura ARMA(1,1) parecen no ser sensibles ante este hecho, siendo independientes ante la negatividad del primer parámetro, el segundo o ambos.

### 3.4 NO AUTOCORRELACIÓN

Estudiada la potencia del contraste ante series que presentaban autocorrelación siguiendo diferentes tipos de estructuras, procedemos ahora a estudiar la situación en la que la serie objeto no presenta autocorrelación. Los resultados quedan recogidos en la tabla 2.18, en la que se dan la proporción de rechazos, pero en este caso siendo  $H_0$  cierta.

TAMAÑO DE LA MUESTRA	BG1	BG2	BG3
50	0.056	0.056	0.055
100	0.06	0.051	0.052
1000	0.048	0.052	0.052

TABLA 4.18 – Proporción de rechazos de  $H_0$ , siendo ésta cierta, del contraste de BG sobre una serie no autocorrelacionada.

La probabilidad de rechazar  $H_0$  siendo cierta es el tamaño de error tipo I, o nivel de significación. Como para realizar el contraste hemos fijado un nivel de 0,05 (5%), lo que debe ocurrir es que el valor de los resultados se aproxime a él. Esto es lo que efectivamente ocurre, como vemos en los datos, tanto más conforme aumenta T. Por lo tanto, se concluye que el contraste no presenta problemas a la hora de detectar autocorrelación cuando en realidad no existe. Únicamente cabe destacar que el BG1 presenta un comportamiento más irregular en  $T=50$  y  $T=100$ .

## CAPÍTULO V. CONCLUSIONES

Una vez expuesto el problema y realizados los experimentos se procede, a modo de cierre del presente trabajo, a exponer las conclusiones parciales obtenidas, tras lo cual, se extraerán las conclusiones generales, evaluando si se han conseguido lograr los objetivos propuestos al comienzo de éste.

Primeramente, se planteó la naturaleza del problema de la autocorrelación y se trató de trasladar su importancia al lector. Se enumeraron y explicaron las posibles soluciones, centrándonos finalmente en el contraste de Breusch-Godfrey. Se realizaron, a continuación, una serie de pruebas sobre éste siguiendo el proceso de los experimentos de Monte Carlo, para muestras pequeñas y grandes. Se comenzó por contrastar autocorrelación generada por estructuras puras de nivel uno, y después se realizó también sobre estructuras de nivel dos y se introdujo estructuras mixtas. Finalmente, se contrastó una estructura que no presentaba autocorrelación.

En el proceso, se extrajeron importantes conclusiones. Primero, los resultados pusieron de relevancia la importancia del tamaño del coeficiente sobre el tamaño del contraste sobre la potencia del contraste en estructuras puras, no siendo este hecho tan claro en estructuras mixtas, donde aparecían resultados anómalos. Segundo, apareció otra diferencia entre ambas estructuras al comparar la asintoticidad de los resultados, que resultaba más fuerte en el caso de estructuras puras. Por tanto, una de las conclusiones más importantes del presente trabajo es que el contraste de BG parece comportarse con mayor homogeneidad y ser asintóticamente más potente ante estructuras puras.

Segundo, que se detecta un fallo del contraste en estructuras puras autocorrelacionadas de orden 2 cuando el segundo de sus coeficientes es negativo, volviéndolo prácticamente inoperativo para los casos en los que su peso relativo sobre el primer coeficiente es mayor. Este problema, sin embargo, desaparece en estructuras mixtas. Finalmente, el contraste no presenta problemas para detectar autocorrelación cuando en realidad no existe.

Siendo el objetivo del presente trabajo evaluar el comportamiento del test de BG ante diferentes situaciones, se ha logrado confirmar satisfactoriamente que el test funciona de forma general para muestras grandes. Además, se ha logrado detectar las particularidades que el test presenta en diferentes situaciones ante muestras pequeñas. Se ha detectado un importante problema cuando la autocorrelación presenta negatividad en el segundo

coeficiente en estructuras puras, y se han observado diferencias en su potencia ante la diferencia de ser sometido a estructura puras o mixtas. Además, se confirmó que no presenta problemas ante un caso de no autocorrelación. Por lo tanto, se puede concluir de forma general que el test es efectivo para contrastar empíricamente autocorrelación en muestras grandes, mientras que, para muestras pequeñas, se ha de tener en cuenta las particularidades anteriormente citadas, teniendo especial cuidado al analizar estructuras mixtas.

Para finalizar, señalar que, aunque los resultados extraídos son válidos dentro del marco establecido, no son extrapolables a cualquier situación y, sería interesante, contrastar los resultados ante casos en los que el orden de autocorrelación fuera mayor, materia que queda más allá del presente trabajo.

## BIBLIOGRAFÍA

- Breusch, T. (1978). *Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models*. Australian Economic Papers.
- Buckland. (1971). *A Dictionary of Statical Terms*. Hafner Publishing Company.
- Godfrey, L. (1978). *Testing Against General Autoregressive and Moving Average Error Models When the Regressor include Lagged Dependent Variable*. *Econometrica*.
- Greene, W. H. (2000). *Econometric Analysis 4a. ed.* Nueva Jersey: Prentice Hall.
- Gujarati, D. N. (2010). *Econometría*. McGraw-Hill.
- Kennedy, P. (2003). *A Guide to Econometrics*. MIT Press.
- Kmenta, J. (1971). *Elemental of Econometrics*. Macmillian.
- MacKinnon, D. (1993). *Estimation and Inference in Econometrics*.
- Novales, A. C. (1993). *Econometría*. McGraw-Hill.
- Uriel, E. J. (1990). *Econometría. El modelo lineal*. Alfa Centauro.
- Watson, J. D. (1951). *Testing for Serial Correlation in Least-Square Regression*. *Biometrika*.
- Mamani, Y. (en línea) “Autocorrelación – Econometría” disponible en:  
[https://www.academia.edu/7388732/AUTOCORRELACI%C3%93N-ECONOMETR%C3%8DA\\_Contentido](https://www.academia.edu/7388732/AUTOCORRELACI%C3%93N-ECONOMETR%C3%8DA_Contentido)
- Crego, A. (09/06/2013) “Un problema estadístico: tamaño de la muestra y potencia de la prueba” en el blog psy’n’thesis (en línea), disponible en:  
<https://psynthesis.wordpress.com/2013/06/09/un-problema-estadistico-tamano-de-la-muestra-y-potencia-de-la-prueba/>
- Arranz, J.M.y Zamora, M.M. (en línea) “Análisis de autocorrelación”, disponible en:  
<http://ciberconta.unizar.es/Leccion/autocorrelacion/analisis%20de%20autocorrelacion.PDF>
- Esteban, M.V., Modroño, J.I. y Régulez, M. (en línea) “Métodos econométricos y análisis de datos”, disponible en:  
<https://ocw.ehu.eus/file.php/23/PRESENTACION.pdf>  
<https://es.scribd.com/>  
<https://scholar.google.es/>