Universidad Zaragoza

1542

Trabajo de Fin de Grado

Dinámica en el modelo de Hotelling con costes cuadráticos y empresas multiproducto

Autor

Isabel Moreno Puyuelo

Director/es

Gloria Jarne Jarne

Joaquín Andaluz Funcia

Facultad de Economía y Empresa

2017

Dinámica en el modelo de Hotelling con costes cuadráticos y empresas multiproducto

Isabel Moreno Puyuelo

Resumen

El modelo de Hotelling es un referente en el estudio de la competencia, ya que muchos modelos microeconómicos tradicionales de competencia perfecta, han prescindido del espacio para describir el mercado. Pero cuando observamos la realidad vemos que la mayoría de los mercados son de naturaleza dispersa, ni los vendedores ni los consumidores se encuentran todos concentrados en el mismo punto, sino que se encuentran repartidos a lo largo el mercado. Recientemente numerosos autores han hecho estudios sobre este modelo abordando el análisis dinámico en mercados oligopolísticos. Siguiendo esta línea, en el presente trabajo se desarrolla el modelo de Hotelling con costes cuadráticos y empresas multiproducto en un contexto dinámico atendiendo a diferentes formulaciones de expectativas , en concreto a las expectativas adaptativas y a la regla del gradiente, y a las diferentes posibilidades que tienen las empresas a la hora de distribuir sus sucursales en el espacio. Con el objeto de ilustrar el comportamiento del modelo son presentadas una serie de simulaciones, las cuales nos permitirán comprender mejor la evolución temporal de las variables, sobre todo en el último caso, donde el desarrollo formal se vuelve complejo y necesitamos ayuda para sacar conclusiones.

Lo que motivo mi elección hacia este ámbito fue mi interés por la teoría microeconómica, las matemáticas, y en especial por la teoría de juegos y el equilibrio de Nash.

Abstract

The Hotelling model is a benchmark in the study of competition, since many traditional microeconomic models of perfect competition have dispensed with the space to describe the market, when we observe the reality we see that most markets are dispersed in nature, neither the sellers nor the consumers are all concentrated in the same point, but they are distributed throughout the market. Recently, many authors have done studies on this model, approaching the dynamic analysis in oligopolistic markets. Following this line, the present work develops the Hotelling model with quadratic costs and multiproduct companies in a dynamic context, attending to different formulations of expectations, specifically to the adaptive expectations and to the gradient rule, and the different possibilities that the companies to distribute their branches in space. In order to illustrate the behavior of the model, a series of simulations are presented, which will allow us to better understand the temporal evolution of the variables, especially in the latter case, where development becomes complex and we need help to draw conclusions.

What motivated my choice in this area was my interest in microeconomic theory, mathematics theory, and especially in game theory and Nash equilibrium.

Índice

1. INTRODUCCIÓN A LA COMPETENCIA ESPACIAL

Los modelos microeconómicos de competencia perfecta no han tenido en cuenta el espacio a la hora de describir la realidad económica, entendiendo el mercado como un lugar de intercambio en el que un elevado número de compradores y vendedores se concentran con el fin de realizar transacciones libremente.

Sin embargo, si observamos la realidad, vemos que la mayoría de los mercados son de naturaleza dispersa. En ellos, los agentes que intervienen en las actividades económicas no se encuentran concentrados en un solo punto, sino que tanto consumidores como productores se hallan distribuidos a lo largo del espacio geográfico, aún en el caso de realizar intercambios del mismo producto.

En definitiva, el reconocimiento de la naturaleza dispersa de los mercados pone en duda la relevancia de algunos de los supuestos y propiedades del modelo tradicional de competencia perfecta, viéndose sustituido por un conjunto de teorías alternativas, tradicionalmente aisladas de la corriente económica principal, pero capaces de ofrecer una aproximación más adecuada de la realidad. De entre ellas podemos destacar la Teoría de la Competencia Espacial.

Uno de los rasgos más significativos de los modelos espaciales es la existencia de costes de transporte, implícitos en todas las relaciones de intercambio, los cuales permiten dividir el mercado en áreas sobre las que cada empresa goza de una posición cuasi monopolista. En otras palabras, si los consumidores adquieren una cantidad de producto finita y existiendo costes de transporte en el proceso de intercambio, cada unidad productiva se enfrenta a una curva de demanda con pendiente negativa.

Por tanto, podemos decir que cuando los mercados se caracterizan por la dispersión geográfica y los costes de transporte son lo suficientemente relevantes, el modelo de competencia espacial surge como una aproximación analítica más adecuada que el modelo competitivo basado en la concentración del mercado.

La importancia adquirida por los modelos de competencia espacial dentro de la teoría económica se debe, en gran medida, a su extendida utilización en el terreno propio de la diferenciación del producto, esencialmente a partir de la aparición del enfoque de características introducido por Lancaster (1979).

La diferencia entre mercados concentrados e industrias dispersas tienen una clara equivalencia con la distinción entre mercados con producto homogéneo y aquellos en los que los bienes están diferenciados.

En un mercado con producto perfectamente homogéneo, podemos entender que todos los bienes son sustitutivos entre sí, se concentran en un solo punto dentro del espacio de características, siendo muy numerosas las empresas oferentes. Por el contrario, en una industria con bienes diferenciados, las distintas variedades sustitutas se hallan dispersas sobre el espacio de características, existiendo pocos vendedores, por lo que cada una de las empresas oferentes ejerce un grado de monopolio sobre los consumidores que prefieren la variedad ofrecida.

Esta analogía ha caracterizado a los modelos de localización como una de las principales aproximaciones en el análisis de la diferenciación del producto.

Siguiendo a Gabszewic y Thisse (1986), puede admitirse que los modelos tradicionales de microeconomía no son adecuados para analizar la dispersión en los mercados y, por extensión, las industrias con productos diferenciados. Por un lado, el modelo de equilibrio parcial analiza soluciones de mercados en los que el producto es perfectamente homogéneo. En el otro extremo, el modelo de equilibrio general está diseñado para explicar la determinación de los precios considerando las interdependencias entre todos los bienes existentes.

Entre ambas configuraciones existe un grado intermedio de complejidad, representado por los modelos de competencia espacial. A diferencia del equilibrio parcial, dichos modelos permiten la sustitución entre bienes. Por otro lado, en contraposición al modelo de equilibrio general, sólo considera un conjunto de productos pertenecientes a una misma industria.

Objetivo del trabajo

En este contexto, el objetivo del presente trabajo es analizar en un marco dinámico la estabilidad local del equilibrio de Nash en precios en el modelo de Hotelling (1929), con costes cuadráticos y empresas multiproducto. En concreto, analizaremos si se tiende asintóticamente al equilibro en precios o si por el contrario se aleja de él cuando se produce alguna perturbación.

El análisis dinámico exige introducir supuestos sobre el comportamiento de las empresas a lo largo del tiempo. En este trabajo el estudio se realiza considerando distintas expectativas, en concreto, las expectativas adaptativas y las basadas en la regla del gradiente.

Materias y asignaturas relacionadas con el trabajo:

Este trabajo combina conocimientos de Economía Industrial y Análisis dinámico. Por tanto, permite poner en práctica habilidades adquiridas en asignaturas como Microeconomía IV, Matemáticas II, y Decisión y Juegos.

Si bien es cierto que en otras asignaturas tales como Microeconomía II y Economía Publica es presentado el modelo de Hotelling, en Microeconomía IV y Decisión y Juegos se profundiza más en él, dando conceptos tales como la función de mejor respuesta y el equilibrio de Nash.

En Matemáticas II se estudian las ecuaciones diferenciales, que son instrumentos propios de la dinámica en tiempo continuo. En este trabajo consideramos el tiempo como una variable discreta, por lo que ha sido necesario ampliar estos conocimientos adquiridos en tiempo continuo y extenderlos a discreto. Las herramientas matemáticas son fundamentalmente las ecuaciones en diferencias, en particular, las técnicas de análisis cualitativo de la estabilidad del equilibrio. Además para la obtención de las figuras se han simulado los modelos se han simulado los modelos correspondientes utilizando el software Mathematica.

Estructura

Este trabajo se desarrolla en dos bloques, en el primero se presenta el modelo original de Hotelling.

En el segundo bloque se modela y resuelve, primero en un contexto estático y luego dinámico, el modelo de Hotelling con costes cuadráticos y empresas multiproducto, atendiendo a diferentes especificaciones a la hora de generar expectativas, en particular, se resuelve con expectativas adaptativas, y con la regla del gradiente.

Finalmente se exponen las conclusiones derivadas del análisis dinámico

.

2. EL MODELO DE HOTELLING

2.1 Definición

La literatura sobre competencia espacial podemos decir que comienza en 1929 con el famoso artículo de Hotelling, “Stability in Competition”.

En él se consideran dos empresas A, B, que se sitúan a lo largo de una calle representada por el segmento $[0, l]$. La primera decisión que deben tomar las empresas es decidir la localización a lo largo de la calle.

Para llevar a cabo la distribución del producto, cada una de ellas cuenta con un punto de venta en el mercado. Denotamos la localización de la empresa A por a, $a \in [0, l]$ que es la distancia desde el origen del segmento hasta el punto A, $a = d(0, A)$. Denotamos la localización de la empresa B por b, $b \in [0, l]$, donde b representa la distancia desde el punto B hasta el extremo final del segmento $b = d(B, l)$. Ambas empresas comercializan un producto homogéneo a lo largo del mercado representado por el segmento $[0, l]$.

Los consumidores se distribuyen uniformemente a lo largo del mercado. Estos tendrán que soportar un coste de transporte lineal c por unidad de distancia, por lo que el precio se definirá como la suma entre el precio de fabricación y coste de transporte, el cual será medido como la distancia entre la localización de la empresa y el consumidor. Por tanto el precio que soportaran será $p_1 + cx$ si son consumidores de la empresa A, y $p_2 + cy$ si son consumidores de la empresa B, x e y representan la distancia del consumidor hasta la empresa A y B respectivamente.

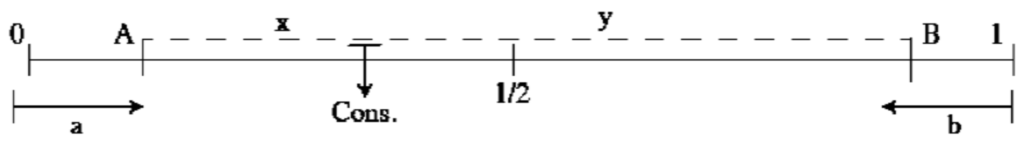

Figura 1

Cada empresa intentará maximizar su beneficio individual eligiendo secuencialmente su localización en el mercado y, posteriormente compitiendo en precios. Por tanto, la noción de equilibrio utilizada es la de Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos localización-precio.

2.2 Resolución

Para obtener el equilibrio de este juego utilizaremos la localización del consumidor al que le es indiferente comprar a una empresa o a otra, a este lo llamaremos consumidor marginal.

El consumidor marginal es aquel que cumple que $p_1 + cx = p_2 + cy$. Dado que $l = a + b + x + y$ este vendrá definido por las siguientes expresiones:

$$x = \frac{p_2 - p_1 + c(l - a - b)}{2c}$$

$$y = \frac{p_1 - p_2 + c(l - a - b)}{2c}$$

A partir de estas podemos obtener la función de demanda de cada una de las empresas:

$$D_1 = x + a$$

$$D_1 = \frac{p_2 - p_1 + c(l + a - b)}{2c} \tag{1}$$

$$D_2 = y + b$$

$$D_2 = \frac{p_1 - p_2 + c(l + a - b)}{2c} \tag{2}$$

Si una empresa sube el precio por encima de la de su rival, no tiene por qué perder a todos sus clientes. Habría consumidores que, aún así, preferirán comprarle a ella simplemente por su ubicación. Solo si la diferencia en precios es muy elevada podría ocurrir que: $D_1 < 0$, en cuyo caso, $D_2 = 1$, o viceversa.

Suponemos que ambas empresas tienen costes marginales constantes y nulos. El beneficio para cada empresa será $\Pi_i = p_i q_i,\ i = 1,2$, dado q_i en (1) y en (2).

La resolución del juego se hace por inducción hacia atrás, primero se calcula el precio óptimo de cada empresa y después se calcula la localización óptima dado el precio. Las funciones de beneficio de cada empresa son por tanto:

$$\Pi_1 = p_1\left(\frac{p_2 - p_1 + c(l + a - b)}{2c}\right)$$

$$\Pi_2 = p_2\left(\frac{p_1 - p_2 + c(l - a + b)}{2c}\right)$$

De las condiciones de primer orden de maximización[1] $\left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial p_i} = 0, i = 1,2\right)$ se obtienen las funciones de reacción:

$$R_1\,(p_2) = \frac{p_2 + c(l + a - b)}{2} \tag{3}$$

$$R_2\,(p_1) = \frac{p_1 + c(l + b - a)}{2} \tag{4}$$

Resolviendo el sistema dado por (3) y (4) obtenemos los precios de equilibrio:

$$p_1^* = c\left(l + \frac{1}{3}(a - b)\right) \tag{5}$$

$$p_2^* = c\left(l + \frac{1}{3}(b - a)\right) \tag{6}$$

Sustituyendo p_1^* y p_2^* en las funciones de beneficio obtenemos el beneficio de cada una de las empresas en el equilibrio:

$$\Pi_1\,(p_1^*, p_2^*, a, b) = \frac{c}{2}\left(l + \frac{1}{3}(a - b)\right)^2 \tag{7}$$

$$\Pi_2\,(p_1^*, p_2^*, a, b) = \frac{c}{2}\left(l + \frac{1}{3}(b - a)\right)^2 \tag{8}$$

Las empresas deciden la localización en la primera etapa, en función del comportamiento óptimo de la segunda, por lo que dado el beneficio en (7) y (8) y que:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial a} = \frac{c}{3}\left(l + \frac{1}{3}(a - b)\right) > 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial b} = \frac{c}{3}\left(l + \frac{1}{3}(b - a)\right) > 0$$

Las empresas tenderán a colocarse lo más cerca posible de su rival, desplazándose hacia el centro del mercado, y alcanzaran su localización óptima en el centro de este, donde a*=b*= l/2.

Este resultado es lo que Boulding (1966) denominó Principio de mínima diferenciación, que nos ayuda a comprender muchos de los fenómenos de competencia que se dan en los mercados, como por ejemplo, por qué las tiendas que ofrecen productos similares se

[1]Dado que: $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i^2} = -\frac{1}{c} < 0, i = 1,2,$ se garantiza las condiciones de máximo

concentran a lo largo de la misma zona, o por qué los distintos bancos colocan sus sucursales una al lado de la otra a lo largo de la misma calle.

Extendiendo este principio más allá de un contexto espacial, podemos ver, por ejemplo, que si analizamos el comportamiento de las cadenas de televisión en una franja horaria determinada comprobaremos que la programación entre ellas es muy homogénea, si analizamos el mercado de automóviles, veremos que los coches son muy similares entre sí, o que por lo general, cuando un productor entra en un mercado, su estrategia consiste en lanzar productos similares a los ya existentes.

En otras disciplinas también se aplica el principio de mínima diferenciación; una que viene siendo muy comentada es el comportamiento de los partidos políticos, que a la hora de diseñar sus campañas electorales tratan de parecer moderados y menos extremistas, con el objetivo de alcanzar el mayor número posible de votantes.

Es necesario mencionar que Gabszeewicz y Thisse (1986) demostraron que le equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos en localización y precios no existe bajo condiciones de costes de transporte lineales.

La introducción de costes de transporte cuadráticos permite asegurar la existencia del equilibrio perfecto en subjuegos, si bien no reproduce el Principio de Mínima Diferenciación, todo lo contrario, consiste en diferenciarse al máximo de su rival, localizándose en los extremos del segmento: a=b=0.

3. EL MODELO: COMPETENCIA ESPACIAL CON EMPRESAS MULTIPRODUCTO.

3.1 Introducción

La teoría sobre empresas multiproducto en modelos de competencia espacial, tiene que cumplir dos requisitos, para que el espacio sea considerado un factor importante.

El primero es que los costes de transporte por unidad de distancia no sean irrelevantes, debe tener elevada importancia, de lo contrario el análisis espacial carecería de sentido. El segundo es que haya economías de escala o rendimientos crecientes de la producción, puesto que si no consideráramos los rendimientos crecientes las empresas producirían allí donde los consumidores se encuentran y la discusión de los efectos del espacio quedaría de nuevo vacía

Lo que da sentido a este análisis es la equivalencia que existe entre los modelos de localización espacial y los modelos de diferenciación del producto. El espacio físico, en una interpretación, es lo que equivale al espacio de características en la otra. Por otro lado, los costes de transporte equivalen a la pérdida de utilidad que experimentan los consumidores ante la imposibilidad de poder consumir la variedad preferida, teniendo que sopesar el beneficio que ésta les aportaría frente al coste de desplazamiento para adquirirla. Esto es lo que nos permite hablar indiferentemente de productos y puntos de venta, así como de empresas multiproducto.

Martínez Giralt y Neven (1988) consideran un modelo en el que dos empresas localizan dos puntos de venta a lo largo de una calle. Utilizando costes cuadráticos, distribución uniforme de los consumidores y que los costes marginales de producción son constantes, demuestran que el único equilibrio perfecto en los subjuegos consiste en la concentración de los dos puntos de venta de cada empresa en un solo punto. Esto se debe a la función de costes de transporte utilizada. Cuando las empresas eligen de forma secuencial precios y localización, la competencia en precios es tan intensa que las empresas tienden a situar sus puntos de venta lo más lejos posible la una de la otra para disminuirla.

En el presente trabajo, sobre un mercado lineal y con los mismos supuestos, vamos a considerar que una de las empresas ha concentrado sus puntos de venta, en este caso la empresa B, mientras que su rival, la empresa A sigue manteniendo dos sucursales. Posteriormente, analizaremos los resultados valorando cuál es la estrategia óptima de la distribución de las sucursales de la empresa A a lo largo de la calle. Consideraremos dos alternativas, según estén dispuestas las dos sucursales de la empresa A.

3.2 Análisis Estático

3.2.1 Caso I

La primera alternativa considera que la empresa A tiene dos sucursales localizadas en los extremos del mercado mientras que la empresa B tiene un punto de venta situado en algún punto intermedio, es decir $a_1 = 0, a_2 = 1; 0 < b < 1$

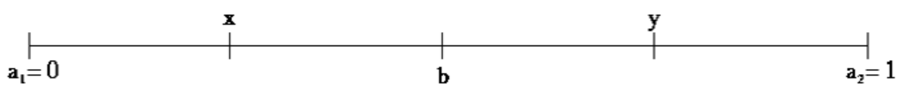

Figura 2

Ahora tendremos dos consumidores marginales, el primero estará indiferente entre consumir en a_1 o en b por lo que tendrá que cumplir:

$$p_{a1} + cx^2 = p_b + c(b-x)^2$$

$$x = \frac{p_b - p_{a1} + cb^2}{2cb}$$

El segundo estará indiferente entre consumir en b o en a_2 y tendrá que cumplir:

$$p_b + c(y-b)^2 = p_{a2} + c(1-y)^2$$

$$y = \frac{p_{a2} - p_b + c(1-b^2)}{2c(1-b)}$$

A partir de estas relaciones podemos obtener la función de demanda de cada empresa:

$$D_{a1} = x$$

$$D_{a2} = 1 - y$$

$$D_b = y - x$$

Y con ellas las funciones de beneficios para cada empresa bajo costes marginales nulos son:

$$\Pi_A = p_{a1}q_1 + p_{a2}q_2$$

$$\Pi_B = p_b q_b$$

Que sustituyendo las funciones de demanda quedarán:

$$\Pi_A = p_{a1}\left(\frac{p_b - p_{a1} + cb^2}{2cb}\right) + p_{a2}\left(1 - \frac{p_{a2} - p_b + c(1-b^2)}{2c(1-b)}\right) \quad (9)$$

$$\Pi_B = p_b\left(\frac{p_{a2} - p_b + c(1-b^2)}{2c(1-b)} - \frac{p_b - p_{a1} + cb^2}{2cb}\right) \quad (10)$$

Las condiciones de primer orden del problema de maximización serán[2]:

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial p_1} = \frac{p_b - 2p_{a1} + cb^2}{2cb} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial p_2} = 1 - \frac{2p_{a2} - p_b + c(1-b^2)}{2c(1-b)} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial p_b} = \frac{p_{a2} - 2p_b + c(1-b^2)}{2c(1-b)} - \frac{2p_b - p_{a1} + cb^2}{2cb} \quad (13)$$

De las condiciones de primer orden del problema de maximización se obtienen las funciones de reacción:

$$R_{A1}(p_b) = \frac{p_b + cb^2}{2} \quad (14)$$

$$R_{A2}(p_b) = \frac{p_b + c(1-b)^2}{2} \quad (15)$$

$$R_B(p_{a1,}p_{a2}) = \frac{p_{a1}(1-b) + b(c - cb + p_{a2})}{2} \quad (16)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones dado por (14), (15) y (16) se obtienen los precios de equilibrio[3]:

---

[2] Dado que: $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial p_i^2} < 0, i = a_1, a_2, b$ se garantiza las condiciones de máximo.

[3] Nótese que el supuesto de costes de transporte cuadráticos permite asegurar la existencia del equilibrio de Nash en precios

$$p_{a1}^* = \frac{cb}{2} \tag{17}$$

$$p_{a2}^* = \frac{c(1-b)}{2} \tag{18}$$

$$p_b^* = cb(1-b) \tag{19}$$

Sustituyendo p_{a1}^*, p_{a2}^* y p_b^* en las funciones de demanda, obtendremos la demanda capturada por cada sucursal:

$$D_{a1}(p^*) = \frac{1}{4} = D_{a2}(p^*) = \frac{1}{4}$$

$$D_b(p^*) = \frac{1}{2}$$

En consecuencia las funciones de beneficio evaluadas a los precios de equilibrio son:

$$\Pi_A(p^*) = \frac{c}{8} \tag{20}$$

$$\Pi_B(p^*) = \frac{cb(1-b)}{2} \tag{21}$$

La localización óptima de la sucursal b en este caso será $b^* = \frac{1}{2}$, por tanto esta empresa tendera a situarse en el punto medio del mercado, si sustituimos este valor en los precios de equilibrio (17) (18) y (19) obtendremos que $p_{a1}^* = p_{a2}^* = p_b^* = \frac{c}{4}$, dando lugar a unos beneficios $\Pi_A(p^*) = \Pi_B(p^*) = \frac{c}{8}$.

Este resultado no es un óptimo de Pareto, está estrictamente dominado por el modelo básico de Hotelling en que cada empresa tiene una sola sucursal en cada extremo del mercado, puesto que los beneficios obtenidos por cada empresa son superiores.

3.2.2 Caso II.

La segunda alternativa considera que cada empresa sitúa un punto de venta en cada extremo del mercado, y que además la empresa a tiene otra sucursal, colocada en algún punto intermedio, es decir $a_1 = 0, b = 1; 0 < a_2 < 1$

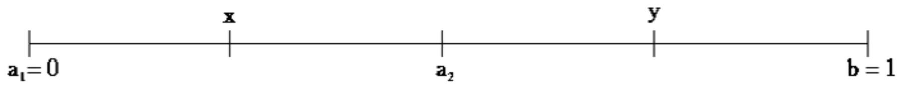

Figura 3

De nuevo tendremos dos consumidores marginales, el primero estará indiferente entre consumir en a_1 y a_2 por lo que tendrá que cumplir:

$$p_{a1} + cx^2 = p_{a2} + c(a_2 - x)^2$$

$$x = \frac{p_{a2} - p_{a1} + c{a_2}^2}{2ca_2}$$

El segundo estará indiferente entre consumir en a_2 o en b, y tendrá que cumplir:

$$p_{a2} + c(y - a_2)^2 = p_b + c(1 - y)^2$$

$$y = \frac{p_b - p_{a2} + c(1 - a_2^2)}{2c(1 - a_2)}$$

A partir de estas relaciones podemos obtener la función de demanda de cada empresa:

$$D_{a1} = x$$

$$D_{a2} = y - x$$

$$D_b = 1 - y$$

Y con ellas las funciones de beneficios para cada empresa son

$$\Pi_A = p_{a1}q_1 + p_{a2}q_2$$

$$\Pi_B = p_b q_b$$

Que sustituyendo las funciones de demanda quedarán:

$$\Pi_A = p_{a1}\left(\frac{p_{a2} - p_{a1} + c{a_2}^2}{2ca_2}\right) + p_{a2}\left(\frac{p_b - p_{a2} + c(1 - a_2^2)}{2c(1 - a_2)} - \frac{p_{a2} - p_{a1} + c{a_2}^2}{2ca_2}\right) \qquad (22)$$

$$\Pi_B = p_b\left(1 - \frac{p_b - p_{a2} + c(1 - a_2^2)}{2c(1 - a_2)}\right) \qquad (113)$$

Las condiciones de primer orden del problema de maximización serán[4]:

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial p_{a1}} = \frac{2p_{a2} - 2p_{a1} + c{a_2}^2}{2ca_2} \tag{24}$$

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial p_{a2}} = \frac{p_{a1}}{2ca_2} + \frac{p_b + c(1 - a_2^2) - 2p_{a2}}{2c(1 - a_2)} - \frac{2p_{a2} - p_{a1} + ca_2^2}{2ca_2} \tag{25}$$

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial p_b} = 1 - \frac{2p_b - p_{a2} + c(1 - a_2^2)}{2c(1 - a_2)} \tag{26}$$

De las condiciones de primer orden del problema de maximización se obtienen las funciones de reacción:

$$R_{A1}\,(p_{a2}) = p_{a2} + \frac{ca_2^2}{2} \tag{27}$$

$$R_{A2}\,(p_{a1}, p_b) = p_{a1} + \frac{(p_b + c - 2p_{a1} - ca_2)a_2}{2} \tag{28}$$

$$R_B\left(p_{a1,}p_{a2}\right) = \frac{c(1 - a_2)^2 + p_{a2}}{2} \tag{29}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones dado por (27), (28) y (29) se obtienen los precios de equilibrio:

$$p_{a1}^* = c\,\frac{(a_2 - 2)^2 + 2}{6} \tag{30}$$

$$p_{a2}^* = \frac{c(1 - a_2)(3 + a_2)}{3} \tag{31}$$

$$p_b^* = \frac{c(1 - a_2)(3 - a_2)}{3} \tag{32}$$

Sustituyendo p_{a1}^*, p_{a2}^* y p_b^* en las funciones de demanda, obtendremos la demanda capturada por cada sucursal:

$$D_{a1}(p^*) = \frac{a_2}{4}$$

$$D_{a2}(p^*) = \frac{3 + a_2}{6}$$

[4] La concavidad de las funciones de maximización permiten asegurar el cumplimiento de las condiciones suficientes de máximo

$$D_b(p^*) = \frac{6 - a_2}{12}$$

En consecuencia las funciones de beneficio evaluadas a los precios de equilibrio son:

$$\Pi_A(p^*) = c\,\frac{5a_2^3 - 20a_2^2 - 12a_2 + 36}{72} \tag{33}$$

$$\Pi_B(p^*) = c\,\frac{(3 - a_2)^2(1 - a_2)}{18} \tag{34}$$

La localización óptima de la sucursal a_2^* en el intervalo (0,1) será $a_2^* = 0$, puesto que si calculamos $\frac{\partial \Pi_i(p^*)}{\partial a_2}$ para $i = A, B$ obtenemos que el mínimo y el máximo de esta función están fuera del intervalo que nosotros consideramos como la longitud de nuestra calle, pero vemos que esta función en nuestro intervalo (0,1) es decreciente tanto para la empresa A como para la empresa B, por lo que el máximo beneficio se encontrara en el punto $a_2 = 0$ para ambas empresas.

A la vista de estos datos la empresa A tenderá a concentrar sus dos sucursales en el mismo punto, por lo que deducimos que no tendrá incentivos en tener varias sucursales.

Al sustituir este valor en los precios de equilibrio (30) (31) y (32) obtenemos que $p_{a1}^* = p_{a2}^* = p_b^* = c$, dando lugar a unos beneficios $\Pi_A(p^*) = \Pi_B(p^*) = \frac{c}{2}$, y a unas funciones de demanda $D_{a1} = D_b = \frac{1}{2}$ y $D_{a2} = 0$, resultados que coinciden con los obtenidos anteriormente en el análisis del modelo básico de Hotelling sin costes cuadráticos.

4. ANALISIS DINAMICO

En este apartado se realiza la dinamización de la segunda etapa de este juego siguiendo la metodología expuesta en Bischi (2010).

La dinamización se realiza en tiempo discreto, es decir, los agentes toman sus decisiones en un periodo y las mantienen hasta el periodo siguiente.

El equilibrio es el concepto en torno al que se desarrolla este análisis dinámico. Entendemos como equilibrio aquellos valores para los cuales las variables del sistema se mantienen constantes, es decir, que en ausencia de shocks exógenos, las variables no varían, esto es lo que denominamos estado estacionario.

Un equilibrio dinámico es estable si, dada una perturbación, toda la secuencia de movimientos posteriores se mantiene en torno a una posición de equilibrio, de manera, que la distancia a ese punto sea tan pequeña como se quiera, en caso contrario es inestable.

Si partimos de un punto fuera del equilibrio y al final acabamos convergiendo a éste, el equilibrio no sólo será estable, sino que será asintóticamente estable

Como este modelo consta de dos empresas, y una de ellas tiene dos sucursales, el comportamiento del modelo ha de ser caracterizado mediante un sistema dinámico discreto tridimensional.

Dependiendo del tipo de expectativas nos encontraremos con que los sistemas dinámicos adoptarán formas diferentes, o bien sistemas dinámicos lineales tres por tres o sistemas dinámicos no lineales tres por tres.

Si el sistema dinámico es lineal, la estabilidad del equilibrio estacionario se realizará sobre los valores propios de la matriz jacobiana del sistema dado, que será constante.

Para que haya estabilidad asintótica del punto de equilibrio, se ha de cumplir que el módulo de los valores propios de la matriz jacobiana sean menores que uno. Si uno de estos valores es de modulo mayor que uno, el equilibrio será asintóticamente inestable.

Si nos encontráramos en el caso de que el sistema fuera no lineal, el análisis de la estabilidad se realizaría de forma indirecta. El procedimiento consiste en linealizar el sistema en torno al punto de equilibrio considerado a través del desarrollo de Taylor. Dada la rápida convergencia de los términos mayores que uno, estos pueden ser truncados, con lo que obtenemos la linealización del sistema en un entorno del equilibrio. Por tanto, es sobre la jacobiana del sistema no lineal evaluada en el punto de equilibrio sobre la que se realizará el análisis de estabilidad de forma análoga al caso lineal. Hay que señalar que si existe un valor propio de la matriz jacobiana de modulo uno, esta linealización no es válida.

4.1 Expectativas

Al incorporar la dinámica en la etapa de precios hay que establecer el comportamiento a seguir de los agentes económicos respecto al futuro. Ante la incertidumbre los agentes han de establecer mecanismos sobre cómo tomar decisiones. El comportamiento de los agentes está condicionado por las expectativas que proyectan sobre su futuro. Véase Bischi (2010).

Consideramos dos empresas que compiten en precios en tiempo discreto. Denotamos los precios lanzados por cada una de las empresas en el momento t como $p_i(t)$, y para el siguiente periodo, que será t +1, como $p_i(t+1)$, para $i = 1,2$.

El problema al que se enfrentan las empresas es decidir el precio al que lanzar el producto al mercado en el periodo siguiente:

$$p_i(t+1) = argmax_{pi} \Pi_i \, (p_i(t), p_j^e(t+1)$$

Donde Π_i denota el beneficio de la empresa i, y $p_j^e(t+1)$ representa las expectativas de la empresa i sobre el precio de la empresa $j(\, j \neq i)$. Si el problema de optimización tiene una única solución, se definirán las funciones de reacción o funciones de mejor repuesta como:

$$p_i(t+1) = f_i(p_j^e(t+1))$$

El caso más sencillo es el de las expectativas ingenuas. En este caso los agentes esperan que su rival se comporte en el periodo siguiente igual que en el presente. De tal manera que $p_j^e(t+1) = p_j(t),\ i = 1,2$ por lo que quedara:

$$p_i(t+1) = f_i(p_j(t))$$

El modelo básico de Hotelling desarrollado en un contexto estático proporcionaría el mismo resultado que el que se alcanzaría en un contexto dinámico en el que los agentes presenten expectativas ingenuas, sin embargo esta equivalencia no se daría bajo otro tipo de expectativas, como por ejemplo las expectativas adaptativas o regla del gradiente, que son con las que vamos a considerar en el presente trabajo las cuales pasaremos a exponer a continuación.

4.1.1 Expectativas adaptativas.

En estas expectativas los agentes intentan corregir el error que han cometido en t, estableciendo para eso una combinación lineal entre el precio en *t* y el precio resultante de la función de mejor respuesta una vez conocido el precio establecido por el rival. La forma que adoptara el modelo dinámico será el siguiente:

$$\begin{cases} p_1(t+1) = (1-\beta_1)p_1(t) + \beta_1 f_1\big(p_2(t)\big) & 0 < \beta_1 < 1 \\ \\ p_2(t+1) = (1-\beta_2)p_2(t) + \beta_2 f_2(p_1(t)) & 0 < \beta_2 < 1 \end{cases} \qquad (35)$$

Donde β_1, β_2, representan la ponderación que realizan las empresas entre un comportamiento miope y el comportamiento que realizarían bajo expectativas ingenuas. Si $\beta_i \to 1$ la empresa i tiende a comportarse bajo expectativas ingenuas, mientras que si $\beta_i \to 0$ el comportamiento tiende a ser miope. Entendemos un comportamiento miope como aquel en el que la empresa no incorpora la presencia de la empresa rival en la toma de decisiones.

4.1.2 Regla del gradiente.

Bajo estas expectativas los agentes intentan corregir el error que han cometido en *t*, de acuerdo con la variación del beneficio marginal. La forma que adoptara este modelo dinámico será la siguiente:

$$\begin{cases} p_1(t+1) = p_1(t) + \alpha_1 p_1(t)\left(\dfrac{\partial \Pi_1}{\partial p_1}\right) & 0 < \alpha_1 < 1 \\ \\ p_2(t+1) = p_2(t) + \alpha_2 p_2(t)\left(\dfrac{\partial \Pi_2}{\partial p_2}\right) & 0 < \alpha_2 < 1 \end{cases} \qquad (36)$$

Donde α_1, α_2, representan las ponderaciones de las velocidades de ajuste de las tasas de variación de los precios de un periodo al periodo siguiente. En la formulación (36) estas velocidades de ajuste se suponen constantes.

4.2 Caso I

A partir de las expectativas obtenidas en el análisis estático, la demanda a la que se enfrentan las empresas en el momento t queda determinada por las siguientes expresiones:

$$q_{a1}(t) = \frac{p_b(t) - p_{a1}(t) + cb^2}{2cb} \tag{37}$$

$$q_{a2}(t) = 1 - \frac{p_{a2}(t) - p_b(t) + c(1-b^2)}{2c(1-b)} \tag{38}$$

$$q_b(t) = \frac{p_{a2}(t) - p_b(t) + c(1-b^2)}{2c(1-b)} - \frac{p_b(t) - p_{a1}(t) + cb^2}{2cb} \tag{39}$$

Y las funciones de beneficio de las empresas en t son:

$$\Pi_A = p_{a1}(t)\left(\frac{p_b(t) - p_{a1}(t) + cb^2}{2cb}\right) + p_{a2}\left(1 - \frac{p_{a2}(t) - p_b(t) + c(1-b^2)}{2c(1-b)}\right) \tag{40}$$

$$\Pi_B = p_b(t)\left(\frac{p_{a2}(t) - p_b(t) + c(1-b^2)}{2c(1-b)} - \frac{p_b(t) - p_{a1}(t) + cb^2}{2cb}\right) \tag{41}$$

Donde los beneficios marginales quedan:

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial p_1} = \frac{p_b(t) - 2p_{a1}(t) + cb^2}{2cb} \tag{42}$$

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial p_2} = 1 - \frac{2p_{a2}(t) - p_b(t) + c(1-b^2)}{2c(1-b)} \tag{43}$$

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial p_b} = \frac{p_{a2}(t) - 2p_b(t) + c(1-b^2)}{2c(1-b)} - \frac{2p_b(t) - p_{a1}(t) + cb^2}{2cb} \tag{44}$$

Las funciones de mejor respuesta $p_{a1}(p_b), p_{a2}(p_b)$, para empresa A y $p_{a1}(p_b)$, para la empresa B, se obtienen resolviendo del sistema: $\left(\frac{\partial \Pi_A}{\partial p_{a1}}, \frac{\partial \Pi_A}{\partial p_{a2}}, \frac{\partial \Pi_B}{\partial p_b}\right) = (0,0,0)$ tal y como establecen las condiciones de primer orden del problema de optimización, por tanto las funciones de reacción de las empresas en el momento t serán:

$$p_{a1}\left(p_b(t)\right) = \frac{p_b(t) + cb^2}{2} \tag{45}$$

$$p_{a2}\left(p_b(t)\right) = \frac{p_b(t) + c(1-b)^2}{2} \tag{46}$$

$$p_b\left(p_{a1}(t), p_{a2}(t)\right) = \frac{p_{a1}(t)(1-b) + b(c - cb + p_{a2}(t))}{2} \tag{47}$$

4.2.1 Expectativas adaptativas

Tomando la formulación de las expectativas en (35), y sustituyendo las funciones de reacción dadas en (45), (46) y (47) el comportamiento de los agentes queda caracterizado por el siguiente sistema dinámico lineal:

$$\begin{cases} p_{a1}(t+1) = \beta_1 p_{a1}(t) + (1-\beta_1)\dfrac{p_b(t) + cb^2}{2} \\ \\ p_{a2}(t+1) = \beta_2 p_{a2}(t) + (1-\beta_2)\dfrac{p_b(t) + c(1-b)^2}{2} \\ \\ p_b(t+1) = \beta_3 p_b(t) + (1-\beta_3)\dfrac{b\left(p_{a2}(t) - p_{a1}(t)\right) + p_{a1}(t) + cb(1-b)}{2} \end{cases} \tag{48}$$

Suponemos por simplicidad que $\beta_i = \beta, \ i = 1,2,3 \ \ \beta \in [0,1)$

En el equilibrio ha de cumplirse que $p_i(t+1) = p_i(t) = p_i, \ i = 1,2$. Sustituyendo en (48) obtenemos que el equilibrio en precios es el mismo que en el modelo original estático, y resolviendo el sistema se obtiene:

$$p_{a1}^* = \frac{cb}{2}$$

$$p_{a2}^* = \frac{c(1-b)}{2}$$

$$p_b^* = cb(1-b)$$

Que constituye el equilibrio de Nash.

Condiciones de estabilidad

Para que este equilibrio estacionario resulte asintóticamente estable debe cumplirse que los valores propios de la matriz jacobiana del sistema (48) evaluada en p_{a1}^*, p_{a2}^*, p_b^* tengan modulo menor que uno[5].

Los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vendrán determinados por la ecuación característica $|J - \lambda I| = 0$. Si finalmente hay convergencia al equilibrio, el signo de estos valores nos proporcionara también información de cómo es esa convergencia hacia el mismo, monótona u oscilante.

La matriz jacobiana de (48) es:

$$J(p_{a1}, p_{a2}, p_b) = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \frac{1-\beta}{2} \\ 0 & \beta & \frac{1-\beta}{2} \\ \frac{1-\beta}{2}(1-b) & \frac{1-\beta}{2}b & \beta \end{pmatrix} \tag{49}$$

En este caso la matriz jacobiana es constante, $J(p_{a1}, p_{a2}, p_b) = J(p_{a1}^*, p_{a2}^*, p_b^*)$, esto es así porque este sistema dinámico es lineal.

Para calcular los valores propios haremos:

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} \beta - \lambda & 0 & \frac{1-\beta}{2} \\ 0 & \beta - \lambda & \frac{1-\beta}{2} \\ \frac{1-\beta}{2}(1-b) & \frac{1-\beta}{2}b & \beta - \lambda \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz será:

$$|J - \lambda I| = (\beta - \lambda)\left[(\beta - \lambda)^2 - \frac{(1-\beta)^2}{4}\right] = 0$$

De aquí obtenemos directamente que $\lambda_1 = \beta \in (0,1)$ y nos quedará resolver la ecuación:

$$(\beta - \lambda)^2 - \frac{(1-\beta)^2}{4} = 0$$

$$\lambda = \beta \pm \frac{(1-\beta)}{2}$$

[5] Véase Fernández (2003)

$$\lambda_2 = \frac{1+\beta}{2} \in (0,1) \qquad \lambda_3 = \frac{3\beta - 1}{2} \in (-1,1)$$

Podemos ver que $|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3| < 1$, por lo tanto queda comprobado que el equilibrio de Nash con expectativas adaptativas es asintóticamente estable. Es decir, indistintamente de las localizaciones y para cualesquiera que fueran las condiciones iniciales, las trayectorias de los precios convergen a los precios de equilibrio. Así pues, cualquier perturbación exógena que modifique el equilibrio será corregida y los precios volverán a los valores de equilibrio.

La convergencia al equilibrio será monótona si los valores propios son positivos, de lo contrario podría ser oscilante. Sabemos que $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, por tanto la convergencia dependerá directamente de λ_3. Si $\beta > \frac{1}{3}$ la convergencia será monótona, de lo contrario será oscilante, dependiendo de las condiciones iniciales.

4.2.2 Regla del gradiente

Tomando la formulación de la regla del gradiente ya mencionado en (36), y sustituyendo las expresiones de los beneficios marginales dadas en (42), (43) y (44) el comportamiento de los agentes queda caracterizado por el siguiente sistema dinámico no lineal:

$$\begin{aligned}
p_{a1}(t+1) &= p_{a1}(t) + \alpha_1 p_{a1}(t)\left(\frac{p_b(t) - 2p_{a1}(t)}{2cb} + \frac{b}{2}\right) \\
p_{a2}(t+1) &= p_{a2}(t) + \alpha_2 p_{a2}(t)\left(\frac{p_b(t) - 2p_{a2}(t)}{2c(1-b)} + \frac{1-b}{2}\right) \\
p_b(t+1) &= p_b(t) + \alpha_3 p_b(t)\left(\frac{p_{a2}(t) - 2p_b(t)}{2c(1-b)} + \frac{p_{a1}(t) - 2p_b(t)}{2cb} + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned} \tag{50}$$

Supongamos para simplificar que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \alpha > 0$.

En el equilibrio ha de cumplirse que $p_i(t+1) = p_i(t) = p_i,\ i = 1{,}2$. Sustituyendo en (50) obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}
p_{a1}\left(\dfrac{p_b - 2p_{a1}}{2cb} + \dfrac{b}{2}\right) = 0 \\[2ex]
p_{a2}\left(\dfrac{p_b - 2p_{a2}}{2c(1-b)} + \dfrac{1-b}{2}\right) = 0 \\[2ex]
p_b\left(\dfrac{p_{a2} - 2p_b}{2c(1-b)} + \dfrac{p_{a2} - 2p_b}{2cb} + \dfrac{1}{2}\right) = 0
\end{cases} \tag{51}$$

Este sistema determina las combinaciones de precios que satisfacen el equilibrio, al resolverlo obtenemos varios equilibrios, pero solo uno de ellos es un equilibrio interior, el resto son equilibrios frontera inestables. Por tanto el equilibrio de Nash de este modelo será:

$$E_1^* = (p_1^*, p_2^*, p_b^*) = \left(\frac{cb}{2}, \frac{c(1-b)}{2}, cb(1-b)\right)$$

Este equilibrio es el mismo que obteníamos con expectativas adaptativas.

Condiciones de estabilidad

Para que este equilibrio estacionario resulte localmente, asintóticamente estable, debe cumplirse que los valores propios de la matriz jacobiana del sistema (50) evaluado en $p_{a1}^*,\ p_{a2}^*,\ p_b^*$ tengan modulo menor que uno[6].

Los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ vendrán determinados por la ecuación característica $|J - \lambda I| = 0$. Si finalmente hay convergencia al equilibrio, el signo de estos valores nos proporcionara también información de cómo es esa convergencia hacia el mismo, monótona u oscilante.

La matriz jacobiana de (50) evaluada en el punto de equilibrio es:

$$J(p_{a1}^*, p_{a2}^*, p_b^*) = \begin{pmatrix} 1-\frac{\alpha}{2} & 0 & \frac{\alpha}{4} \\ 0 & 1-\frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha}{4} \\ \alpha\frac{1-b}{2} & \frac{\alpha b}{2} & 1-\alpha \end{pmatrix} \tag{52}$$

Para calcular los valores propios haremos:

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\frac{\alpha}{2}-\lambda & 0 & \frac{\alpha}{4} \\ 0 & 1-\frac{\alpha}{2}-\lambda & \frac{\alpha}{4} \\ \alpha\frac{1-b}{2} & \frac{\alpha b}{2} & 1-\alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz será:

[6] Véase Fernández (2003)

$$|J-\lambda I| = \left(1-\frac{\alpha}{2}-\lambda\right)\left[\left(1-\frac{\alpha}{2}-\lambda\right)(1-\alpha-\lambda)-\frac{\alpha^2}{8}\right] = 0$$

De aquí obtenemos que $\lambda_1 = 1-\frac{\alpha}{2}$, como $\alpha > 0$ sabemos directamente que $\lambda_1 < 1$, por otra parte $\lambda_1 > -1$ siempre que $\alpha < 4$, por tanto el módulo de λ_1 será menor que uno siempre que $0 < \alpha < 4$.

Ahora nos queda resolver la ecuación:

$$\lambda^2 - \left(2-\frac{3\alpha}{2}\right)\lambda + 1 - \frac{3\alpha}{2} + \frac{3\alpha^2}{8} = 0$$

$$\lambda = \frac{2-\frac{3\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}}}{2}$$

De donde sacamos las expresiones de λ_2, λ_3:

$$\lambda_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3})\alpha \quad < \quad \lambda_3 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}(1-\sqrt{3})\alpha$$

Al ser $\alpha > 0$ obtendremos otra vez directamente que $\lambda_2 < \lambda_3 < 1$.Veamos cuando va a ser $\lambda_2 > -1$:

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{4}(1+\sqrt{3})\alpha > -1$$

$$\alpha < \frac{8}{(3+\sqrt{3})}$$

Si juntamos las restricciones obtenidas sobre el parámetro α para asegurar que el módulo de los valores propios es menor que uno, y tenemos en cuenta que $\frac{8}{(3+\sqrt{3})} < 4$ se obtiene que el umbral que asegura la estabilidad asintótica del equilibrio de Nash es:

$$\alpha = \frac{8}{(3+\sqrt{3})}$$

Por lo tanto, siempre que la velocidad de ajuste α sea menor que el umbral queda demostrado que el equilibrio de Nash es asintóticamente estable para cualquieras que sean las localizaciones. Así pues, cualquier perturbación exógena suficientemente pequeña que modifique el equilibrio será corregida y los precios volverán a los valores de equilibrio.

Esta convergencia será monótona si los valores propios son positivos, de lo contrario podría ser oscilante. En este caso, el valor que tarda más en pasar a ser positivo es λ_2, por tanto el tipo de convergencia dependerá de él, se convergerá de manera monótona siempre que $\alpha < \frac{4}{3+\sqrt{3}}$, y la convergencia podría ser oscilante si $\alpha > \frac{4}{3+\sqrt{3}}$.

Un ejemplo de convergencia al equilibrio se puede ver en la simulación presentada en la figura 4:

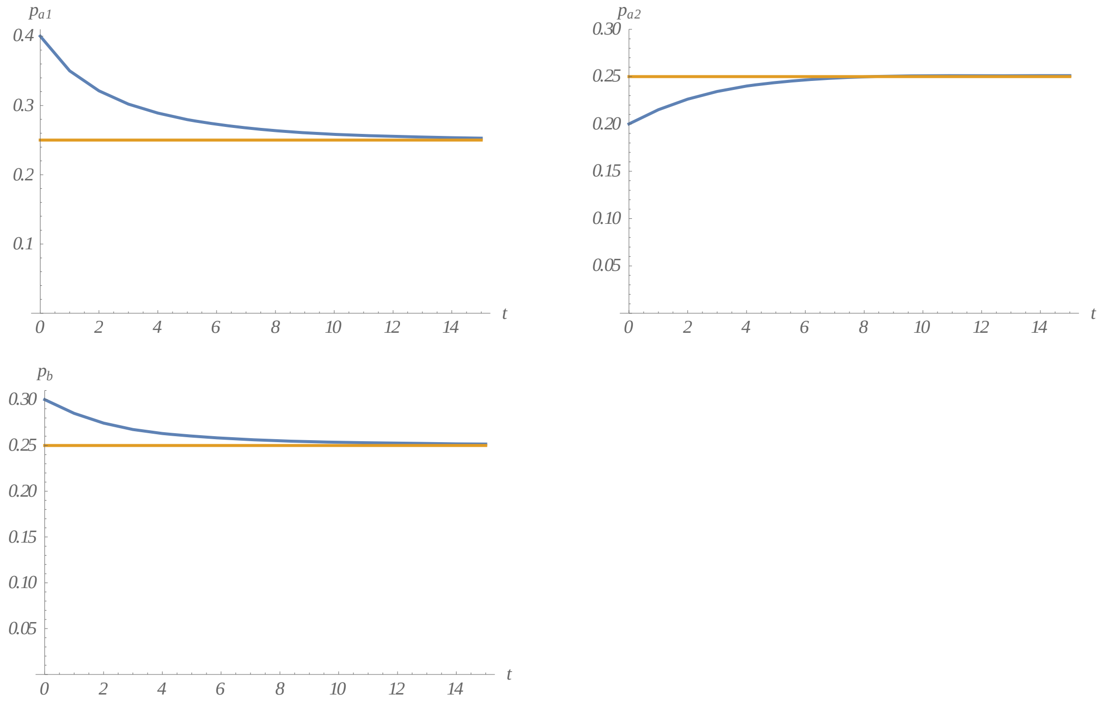

Figura 4. $\alpha = 0.5, b = 0.5, c = 1, p_{a1}(0) = 0.4, p_{a2}(0) = 0.2, p_b(0) = 0.3$

En el caso de que la velocidad de ajuste supere el umbral de estabilidad, las trayectorias de precios no convergerán a los precios de equilibrio pudiendo tener un comportamiento cíclico, como se ilustra en la figura 5, o incluso un comportamiento caótico como se puede ver en la figura 6.

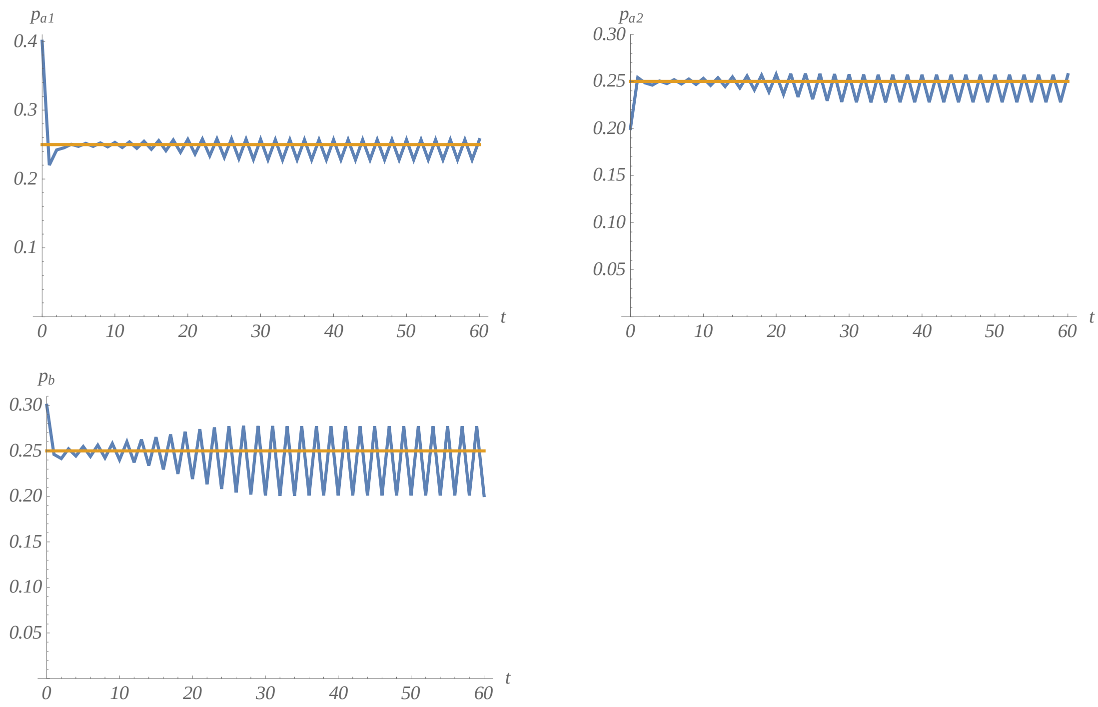

Figura 5. $\alpha = 1.8, b = 0.5, c = 1, p_{a1}(0) = 0.4, p_{a2}(0) = 0.2, p_b(0) = 0.3$

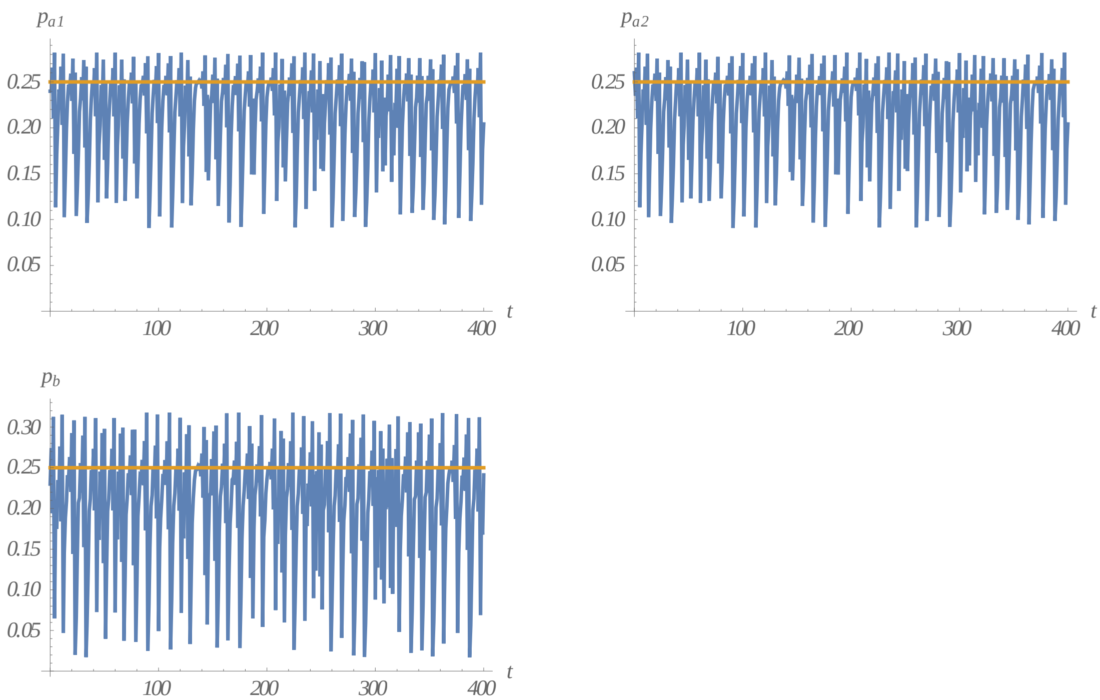

Figura 6. $\alpha = 2.4, b = 0.5, c = 1, p_{a1}(0) = 0.24, p_{a2}(0) = 0.26, p_b(0) = 0.23$

4.3 Caso II.

La demanda a la que se enfrentan las empresas en el momento t queda determinada por las siguientes expresiones:

$$q_{a1}(t) = \frac{p_{a2}(t) - p_{a1}(t) + ca_2^2}{2ca_2} \tag{53}$$

$$q_{a2}(t) = \frac{p_b(t) - p_{a2}(t) + c(1 - a_2^2)}{2c(1 - a_2)} - \frac{p_{a2}(t) - p_{a1}(t) + ca_2^2}{2ca_2} \tag{54}$$

$$q_b(t) = 1 - \frac{p_b(t) - p_{a2}(t) + c(1 - a_2^2)}{2c(1 - a_2)} \tag{55}$$

Y las funciones de beneficio de las empresas en t son:

$$\begin{aligned} \Pi_A &= p_{a1}(t)\left(\frac{p_{a2}(t) - p_{a1}(t) + ca_2^2}{2ca_2}\right) + p_{a2}(t)\left(\frac{p_b(t) - p_{a2}(t) + c(1 - a_2^2)}{2c(1 - a_2)}\right) \\ &\quad - p_{a2}(t)\left(\frac{p_{a2}(t) - p_{a1}(t) + ca_2^2}{2ca_2}\right) \end{aligned} \tag{56}$$

$$\Pi_B = p_b(t)\left(1 - \frac{p_b(t) - p_{a2}(t) + c(1 - a_2^2)}{2c(1 - a_2)}\right) \tag{57}$$

Donde los beneficios marginales quedan:

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial p_1} = \frac{2p_{a2}(t) - 2p_{a1}(t) + ca_2^2}{2ca_2} \tag{58}$$

$$\frac{\partial \Pi_A}{\partial p_2} = \frac{p_{a1}(t)}{2ca_2} + \frac{p_b(t) - 2p_{a2}(t) + c(1 - a_2^2)}{2c(1 - a_2)} - \frac{2p_{a2}(t) - p_{a1}(t) + ca_2^2}{2ca_2} \tag{59}$$

$$\frac{\partial \Pi_B}{\partial p_b} = 1 - \frac{2p_b(t) - p_{a2}(t) + c(1 - a_2^2)}{2c(1 - a_2)} \tag{60}$$

Las funciones de mejor respuesta $p_{a1}(p_b), p_{a2}(p_b)$, para empresa A y $p_{a1}(p_b)$, para la empresa B, se obtienen resolviendo del sistema: $\left(\frac{\partial \Pi_A}{\partial p_1}, \frac{\partial \Pi_A}{\partial p_2}, \frac{\partial \Pi_B}{\partial p_b}\right) = (0,0,0)$ tal y como establecen las condiciones de primer orden del problema de optimización.

Por tanto las funciones de reacción de las empresas en el momento t serán:

$$p_{a1}\,(p_{a2}(t)) = p_{a2}(t) + \frac{ca_2^2}{2} \tag{61}$$

$$p_{a2}\,(p_b(t)) = p_{a1} + \frac{(p_b(t) - 2p_{a1}(t) + c - ca_2)a_2}{2} \tag{62}$$

$$p_b\,(p_{a1}(t), p_{a2}(t)) = \frac{p_{a2}(t) + c(1-a_2)^2}{2} \tag{63}$$

4.3.1 Expectativas adaptativas

Tomando la formulación de las expectativas en (35), y sustituyendo las funciones de reacción dadas en (61), (62) y (63) el comportamiento de los agentes queda caracterizado por el siguiente sistema dinámico lineal:

$$\begin{cases} p_{a1}(t+1) = \beta_1 p_{a1}(t) + (1-\beta_1)\left[p_{a2}(t) + \frac{ca_2^2}{2}\right] \\ p_{a2}(t+1) = \beta_2 p_{a2}(t) + (1-\beta_2)\left[p_{a1} + \frac{(p_b(t) - 2p_{a1}(t) + c - ca_2)a_2}{2}\right] \\ p_b(t+1) = \beta_3 p_b(t) + (1-\beta_3)\left[\frac{p_{a2}(t) + c(1-a_2)^2}{2}\right] \end{cases} \tag{64}$$

Suponemos por simplicidad que $\beta_i = \beta, \ i = 1,2,3 \ \ \beta \in [0,1)$

En el equilibrio ha de cumplirse que $p_i(t+1) = p_i(t) = p_i, \ i = 1,2$. Sustituyendo en (64) obtenemos que el equilibrio en precios es el mismo que en el modelo original estático:

$$p_{a1}^* = c\,\frac{(a_2-2)^2 + 2}{6}$$

$$p_{a2}^* = \frac{c(1-a_2)(3+a_2)}{3}$$

$$p_b^* = \frac{c(1-a_2)(3-a_2)}{3}$$

Que constituye el equilibrio de Nash.

Condiciones de estabilidad

La matriz jacobiana de (64) es:

$$J(p_{a1}, p_{a2}, p_b) = \begin{pmatrix} \beta & 1-\beta & 0 \\ (1-\beta)(1-a_2) & \beta & \frac{(1-\beta)a_2}{2} \\ 0 & \frac{1-\beta}{2} & \beta \end{pmatrix} \tag{65}$$

En este caso la matriz jacobiana es constante, $J(p_{a1}, p_{a2}, p_b) = J(p_{a1}^*, p_{a2}^*, p_b^*)$, esto es así porque este sistema dinámico es lineal.

Para calcular los valores propios haremos:

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} \beta-\lambda & 1-\beta & 0 \\ (1-\beta)(1-a_2) & \beta-\lambda & \frac{(1-\beta)a_2}{2} \\ 0 & \frac{1-\beta}{2} & \beta-\lambda \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz será:

$$|J - \lambda I| = (\beta-\lambda)\left[(\beta-\lambda)^2 - (1-\beta)^2(1 - \frac{3a_2}{4}\right] = 0$$

De aquí obtenemos directamente que $\lambda_1 = \beta \in (0,1)$ y nos quedara que:

$$(\beta-\lambda)^2 - (1-\beta)^2(1 - \frac{3a_2}{4}) = 0$$

$$\lambda = \beta \pm (1-\beta)\sqrt{1 - \frac{3a_2}{4}}$$

$$\lambda_2 = \beta - (1-\beta)\sqrt{1 - \frac{3a_2}{4}} \;<\; \lambda_3 = \beta + (1-\beta)\sqrt{1 - \frac{3a_2}{4}}$$

Sin más que operar se demuestra que para los valores paramétricos considerados se verifica que $-1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 1$, por tanto, queda comprobado que el equilibrio de Nash con expectativas adaptativas es asintóticamente estable, es decir, indistintamente de las localizaciones y para cualesquiera que fueran las condiciones iniciales, las trayectorias de los precios convergen a los precios de equilibrio. Así pues cualquier perturbación exógena que modifique el equilibrio será corregida y los precios volverán a los valores de equilibrio.

La convergencia será monótona si todos los valores propios son positivos, de lo contrario podría ser oscilante. Sabemos que $\lambda_1, \lambda_3 > 0$, por tanto el tipo de convergencia dependerá de λ_2. Se demuestra que si $a_2 > \frac{4}{3}\frac{(1-2\beta)}{(1-\beta)^2}$ entonces $\lambda_2 > 0$, y la convergencia seria monótona, y en caso contrario podría ser oscilante. Observar que si $\beta > \frac{1}{2}$ la convergencia monótona está garantizada.

4.3.2 Regla del gradiente

Tomando la formulación de la regla del gradiente ya mencionada en (36), y sustituyendo los beneficios marginales dados en (58), (59) y (60) el comportamiento de los agentes queda caracterizado por el siguiente sistema dinámico no lineal:

$$
\begin{aligned}
p_{a1}(t+1) &= p_{a1}(t) + \alpha_1 p_{a1}(t)\left(\frac{2p_{a2}(t) - 2p_{a1}(t) + ca_2^2}{2ca_2}\right) \\
p_{a2}(t+1) &= p_{a2}(t) + \alpha_2 p_{a2}(t)\left(\frac{p_{a1}(t)}{2ca_2} + \frac{p_b(t) - 2p_{a2}(t) + c(1-a_2^2)}{2c(1-a_2)} - \frac{2p_{a2}(t) - p_{a1}(t) + ca_2^2}{2ca_2}\right) \\
p_b(t+1) &= p_b(t) + \alpha_3 p_b(t)\left(1 - \frac{2p_b(t) - p_{a2}(t) + c(1-a_2^2)}{2c(1-a_2)}\right)
\end{aligned}
\tag{66}
$$

Supongamos para simplificar que $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = \alpha > 0$

En el equilibrio ha de cumplirse que $p_i(t+1) = p_i(t) = p_i,\ i = 1{,}2$. Sustituyendo en (66) obtenemos el siguiente sistema:

$$
\left\{
\begin{aligned}
& p_{a1}\left(\frac{2p_{a2}(t) - 2p_{a1}(t) + ca_2^2}{2ca_2}\right) = 0 \\
& p_{a2}\left(\frac{p_{a1}(t)}{2ca_2} + \frac{p_b(t) - 2p_{a2}(t) + c(1-a_2^2)}{2c(1-a_2)} - \frac{2p_{a2}(t) - p_{a1}(t) + ca_2^2}{2ca_2}\right) = 0 \\
& p_b\left(1 - \frac{2p_b(t) - p_{a2}(t) + c(1-a_2^2)}{2c(1-a_2)}\right) = 0
\end{aligned}
\right.
\tag{67}
$$

Este sistema determina las combinaciones de precios que satisfacen el equilibrio, al resolverlo obtenemos varios equilibrios, pero solo uno de ellos es un equilibrio interior, el resto son equilibrios frontera inestables. Por tanto el equilibrio de Nash único interior de este modelo será:

$$E_1 = (p_1^*, p_2^*, p_b^*) = \left(c\frac{(a_2-2)^2+2}{6}, \frac{c(1-a_2)(3+a_2)}{3}, \frac{c(1-a_2)(3-a_2)}{3}\right)$$

Este equilibrio es el mismo que obteníamos con expectativas adaptativas.

Condiciones de estabilidad

La matriz jacobiana de (64) evaluada en el equilibrio de Nash es:

$$J(p_{a1}^*, p_{a2}^*, p_b^*) = \begin{pmatrix} 1-\alpha\left[\frac{(a_2-2)^2+2}{6a_2}\right] & \alpha\left[\frac{(a_2-2)^2+2}{6a_2}\right] & 0 \\ \alpha\frac{(1-a_2)(3+a_2)}{3a_2} & 1-\alpha\left[\frac{(3+a_2)}{3a_2}\right] & \alpha\left[\frac{(3+a_2)}{6}\right] \\ 0 & \alpha\frac{3-a_2}{6} & 1-\alpha\left[\frac{(3-a_2)}{3}\right] \end{pmatrix} \tag{68}$$

En este caso, el cálculo de los valores propios de (68) se complica y también la obtención de resultados formales sobre la existencia de un umbral de la velocidad de ajuste α por debajo del cual la estabilidad asintótica del equilibrio de Nash esté asegurada.

Optamos por presentar alguna simulación del modelo que parece sugerir que en este caso la localización de la sucursal a_2 de la empresa A influye en la estabilidad del equilibrio de Nash. Manteniendo el mismo valor del parámetro α, en la figura 7 se muestra una situación de convergencia al equilibrio de Nash, sin embargo, en la figura 8, para un valor menor del parámetro a_2, se observa una situación de inestabilidad del equilibrio de Nash, las trayectorias de precios fluctúan alrededor del equilibrio de Nash pero sin converger a dichos valores.

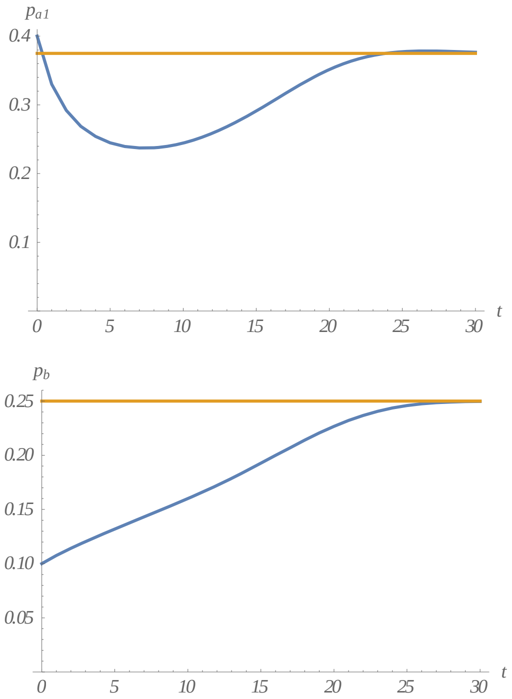

Figura 7. $\alpha = 0.5, a_2 = 0.5, c = 1, p_{a1}(0) = 0.4, p_{a2}(0) = 0.1, p_b(0) = 0.1$

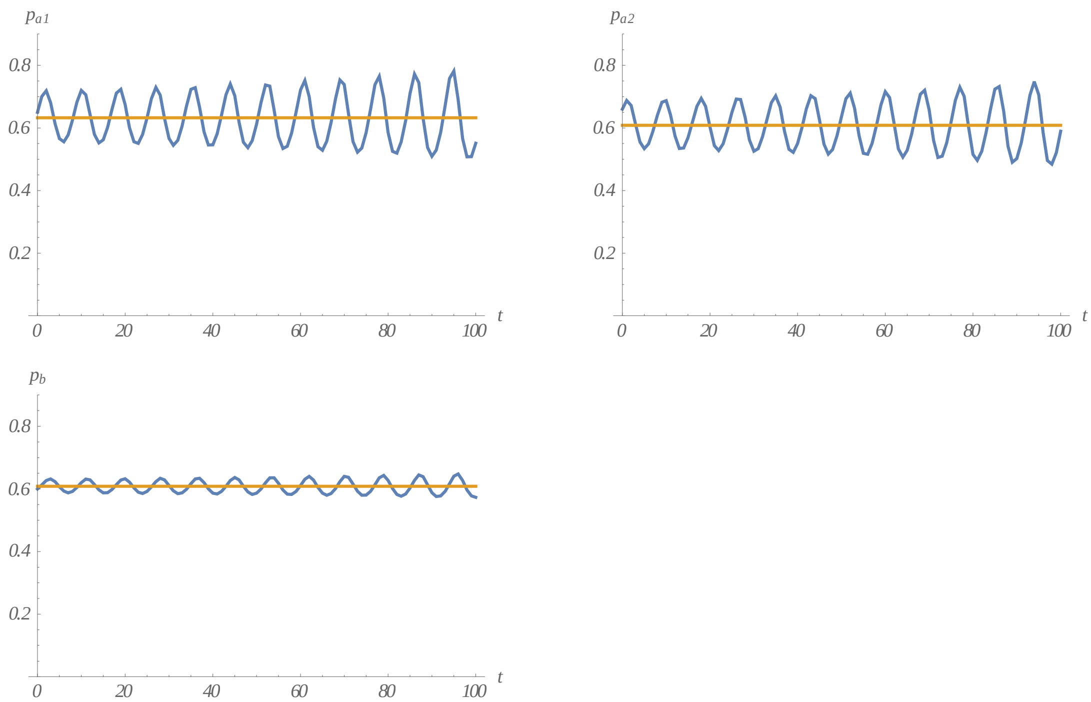

Figura 8. $\alpha = 0.5, a_2 = 0.22, c = 1, p_{a1}(0) = 0.65, p_{a2}(0) = 0.66, p_b(0) = 0.6$

5 CONCLUSIONES

A lo largo de los diferentes apartados se trabaja el modelo dinámico de Hotelling con costes cuadráticos y empresas multiproducto, obteniendo diferentes resultados en función de la formulación empleada en las expectativas de precios y la localización de las empresas en cada uno de los casos.

En el primer modelo trabajado al que nos referimos en este estudio como caso I obtenemos que las condiciones de estabilidad no dependen de la localización de la empresa B, bajo ninguna de las expectativas estudiadas. En concreto, el equilibrio en precios siempre es asintóticamente estable con expectativas adaptativas y bajo expectativas basadas en la regla del gradiente, la estabilidad está asegurada por debajo de un umbral de la velocidad de ajuste que es independiente de la localización de la empresa B.

En el caso II, la convergencia al equilibrio en precios, sí depende de la localización de las empresas, en concreto de la localización de la sucursal a_2 de la empresa A, pero esto no condiciona la estabilidad bajo expectativas adaptativas ya que se verifica que el equilibrio de Nash será asintóticamente estable siempre. Bajo la regla del gradiente el desarrollo se vuelve complejo, pero tras hacer varias simulaciones estas parecen sugerir que en este caso, el umbral que asegura la estabilidad del equilibrio de Nash sí que depende de la localización de la sucursal a_2.

En ambos modelos, si las expectativas se basan en la regla del gradiente como acabamos de decir existe umbral de la velocidad de ajuste por debajo del cual la convergencia al equilibrio está asegurada, pero si este umbral es superado las trayectorias de los precios se vuelven cíclicas e incluso más complejas como puede verse en las figuras presentadas a partir de las simulaciones.

Este trabajo no puede considerarse un trabajo completo sino un punto de partida, ya que incorpora la innovación de de incluir la dinámica al modelo de competencia espacial de Hotelling con empresas multiproducto.

Una posible ampliación de este estudio seria que las empresas tuvieran expectativas heterogéneas, o bien, añadir más tipos de expectativas bajo las que estudiar la estabilidad del equilibrio. También podría continuarse considerando que ambas empresas tuvieran dos sucursales a lo largo del mercado, e ir intercambiándolas de posición para analizar los distintos equilibrios, si estos son asintóticamente estables y de serlo como se tendería de nuevo a ellos tras alguna pequeña perturbación o cambio dentro del mercado, como se ha hecho en el presente trabajo, o incluso considerar un número de empresas mayor que dos.

Respecto a la especificación del modelo podría generalizarse la función de costes a una especificación mucho más general. También se podría jugar con los consumidores, suponiendo que en vez de estar repartidos uniformemente a lo largo del mercado se encuentran en grupos en puntos concretos.

Con la realización de este trabajo he tenido la oportunidad de afianzar y profundizar en muchos de los conocimientos adquiridos durante mi formación universitaria, además de tener la oportunidad de aprender hacer un análisis formal de un modelo económico, haciendo desarrollos y estudiando los resultados obtenidos.

Particularmente he aprendido a comprender el uso de las expectativas adaptativas y las basadas en la regla del gradiente a la hora de predecir en los modelos económicos, cómo se formulan y utilizan, y a cómo hacer un análisis de la dinámica de un modelo a partir del cálculo de los valores propios que nos permite conocer la estabilidad de asintótica de equilibrio y su tipo de convergencia, conceptos que no manejaba con soltura hasta la fecha, y que tengo claros después de haber realizado este trabajo.

Referencias

[1] BISCHI, G.I., CHIARELLA, C., KOPEL, M., SZIDAROVSKY, F (2010) *Nonlinear Oligopolies Stability and Bifurcations Springer*.

[2] BOULDING, K. (1966) << Economic Analysis >>. Vol. 1 *Microeconomics*, Harpers, New York.

[3] D¨ASPREMONT, C., GABSZEEWICZ, J.J., J.F. THISSE (1979) << On Hotelling´s Stability on Competition>> *Econometrica* Vol 47 nº 5 pp1145-1150.

[4] LANCASTER, K (1979) << Variety, Equity and Efficiency>> Oxford: Basil Blackwell.

[5] ANDALUZ, J (1995) << Competencia en localización y precios: influencia de los costes de transporte >> *Cuadernos aragoneses de economía*, Vol. 5, nº 2 pp 343-358.

[6] HOTELLING, H (1929) << Stability in Competition >> *The Economic Journal*, 39 pp 41-57.

[7] MARTINEZ GIRAL, X << Empresas multiproducto, competencia en precios y localización>> *Investigaciones económicas segunda época* Vol. XIV nº 3 (1990) pp 503-517

[8] PEREZ, I – MINGUILLÓN, E- JARNE, G (2001) << Matemáticas para la economía: programación matemática y sistemas dinámicos >> Mc Graw Hill, España.

[9] FERNANDEZ, P – VAZQUEZ, H- VEGAS, M (2003) << Ecuaciones diferenciales y en diferencias >> Thomson, Madrid.