



Universidad
Zaragoza

Trabajo de Fin de Grado:
Técnicas de simulación numérica en
Relatividad General

Autor:

Enrique Antón Fuertes

Director:

Eduardo Follana Adin

Facultad de ciencias

2016/2017

Índice

1. Introducción	1
2. Separación 3+1 de las ecuaciones de Einstein	2
2.1. Las ecuaciones de campo de Einstein	2
2.2. Foliación del espaciotiempo y funciones de gauge	3
2.3. La curvatura extrínseca	5
2.4. El sistema de ecuaciones en 3+1	6
2.5. Evolución libre y evolución restringida	7
3. Condiciones de gauge	8
3.1. Foliación geodésica	8
3.2. Foliación maximal	9
3.3. Condiciones de foliación de Bona-Masso	9
4. Formulaciones alternativas e hiperbolicidad	11
4.1. Hiperbolicidad de un sistema de ecuaciones	11
5. Ejemplos de simulaciones en relatividad numérica	13
5.1. Espaciotiempo 1+1 ‘de juguete’	13
5.1.1. Ejemplos de simulación: Choques de gauge	14
5.2. Espaciotiempo 3+1 con simetría esférica	16
5.2.1. Agujero negro de Schwarzschild	17
5.2.2. Simulación de un agujero negro de Schwarzschild	19
6. Conclusiones	24
Bibliografía	25

1. Introducción

La teoría de la Relatividad General es, junto con la mecánica cuántica, uno de los pilares de la física moderna. Desde su publicación en 1915 hasta la actualidad ha sido capaz de predecir correctamente numerosos fenómenos y ha supuesto un antes y un después en nuestra comprensión de la gravitación.

En Relatividad General, la interacción gravitatoria queda descrita en las llamadas ecuaciones del campo de Einstein, que relacionan la geometría del espaciotiempo con la distribución de materia-energía del Universo. Estas constituyen un sistema de 10 ecuaciones en derivadas parciales no lineales, lo que llevó a Einstein a pensar que nunca podría encontrarse una solución exacta. Pese a que, sorprendentemente para Einstein, se encontraron soluciones exactas para algunos casos con alto grado de simetría, para casos más generales no existe una solución analítica, y es aquí donde cobran importancia los métodos numéricos. A la disciplina que estudia y desarrolla los métodos numéricos necesarios para la resolución de las ecuaciones de Einstein se le llama *relatividad numérica*.

En las últimas dos décadas, el desarrollo de técnicas numéricas más robustas y el aumento de la capacidad de cálculo de los supercomputadores han hecho que la relatividad numérica haya ido cobrando cada vez más importancia en campos como la astrofísica relativista, la cosmología e incluso en el estudio de cuestiones puramente teóricas en relatividad general. Como ejemplo reciente, cabe destacar su papel fundamental en la detección de ondas gravitacionales, donde la realización de catálogos de señales obtenidos mediante simulaciones (que no habrían podido calcularse de forma analítica) permitió a la colaboración científica LIGO la identificación de señales procedentes de una colisión de dos agujeros negros.

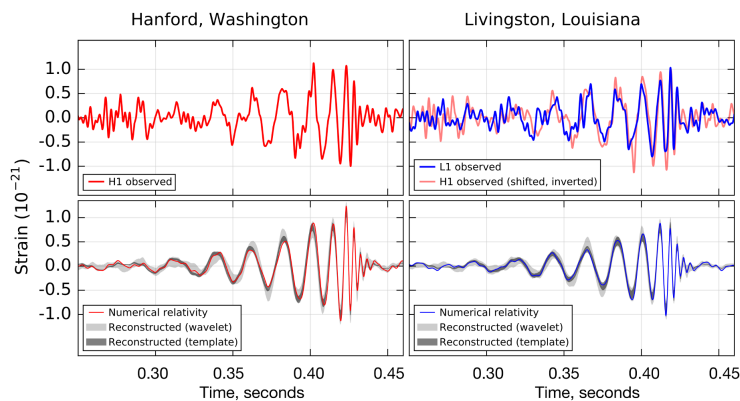


Figura 1.1: Arriba: señales de la onda gravitacional detectada por LIGO en Hanford y Livingston. Abajo: ondas predichas por la relatividad numérica, consistentes con las señales detectadas. [1]

Comenzaremos el presente trabajo con un resumen en el que introduciremos algunos conceptos clave de la relatividad general. Tras eso, introduciremos el *formalismo 3+1* de la relatividad numérica y comentaremos sus aspectos más importantes. Finalmente, mostraremos algunos ejemplos sencillos de simulaciones numéricas basadas en dicho formalismo.

2. Separación 3+1 de las ecuaciones de Einstein

2.1. Las ecuaciones de campo de Einstein

En 1915, Albert Einstein publicó una teoría relativista que incluía la gravedad: la teoría de la *Relatividad General*. En ella, se modeliza el espaciotiempo como una variedad cuatridimensional y el campo gravitatorio como la curvatura del espaciotiempo. La teoría podría resumirse, en palabras de J.A. Wheeler, como:

El espacio-tiempo le dice a la materia cómo moverse; la materia le dice al espacio-tiempo cómo curvarse.

Sabemos por la gravedad newtoniana que la fuente de la gravedad es la masa de los cuerpos. Pero esta no es la única fuente de curvatura en relatividad general. La gravedad se acopla a cualquier tipo de energía y momento del espaciotiempo. Resulta conveniente describir esto como un fluido, caracterizado por funciones continuas en el espaciotiempo que son magnitudes macroscópicas (velocidad del fluido, densidad, presión, etc). La energía y el momento de este fluido viene descrito por el *tensor de energía-momento* $T_{\mu\nu}$.

La expresión tensorial que describe cuantitativamente la relación entre la materia-energía y el espaciotiempo se conoce como *ecuaciones de Einstein*, y tiene la forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

En el lado derecho se describe la materia-energía en el espaciotiempo a través de $T_{\mu\nu}$, y G_N es la constante de la gravitación de Newton. El lado izquierdo, que a veces se representa como un tensor $G_{\mu\nu}$ conocido como *tensor de Einstein*, contiene únicamente términos geométricos. Tenemos el *tensor métrico* $g_{\mu\nu}$, que es el objeto que nos permite calcular distancias y ángulos en una variedad. Tenemos también el *tensor de Ricci* $R_{\mu\nu}$, que es una contracción del *tensor de Riemann* $R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda$ (objeto que describe la curvatura de la variedad) de la forma $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}{}^\rho$, y el *escalar de Ricci* o *escalar de curvatura* R , que se obtiene contrayendo los dos índices del tensor de Ricci con $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$. En el Anexo A se describen con más detalle todos estos conceptos y su relación con la relatividad general.

Las ecuaciones de Einstein forman un sistema de 10 ecuaciones en derivadas parciales no lineales acopladas de segundo orden. Sin embargo, la condición $\nabla_\mu G_{\mu\nu} = 0$,¹ que proviene de la conservación de la energía y el momento, impone cuatro ligaduras, así que solo 6 ecuaciones son independientes y las otras 4 componentes están relacionadas con la libertad de elección del sistema de coordenadas. En la práctica, salvo en casos de mucha simetría, la resolución de estas ecuaciones no puede realizarse de forma analítica, siendo imprescindible la utilización de métodos numéricos y la potencia de cálculo que proporcionan los ordenadores.

Otro problema de las ecuaciones de Einstein es que las tres dimensiones espaciales y la temporal aparecen mezcladas sin una distinción clara. Desde un punto de vista geométrico no supone ningún problema trabajar con un espaciotiempo de cuatro dimensiones, pero a menudo

¹El símbolo ∇_μ representa la *derivada covariante*, definida en el Anexo A.

nos puede resultar más útil e intuitivo describir un sistema como la evolución de un campo gravitatorio en el tiempo. El *formalismo 3+1* nos permite realizar esto, separando el espacio tridimensional y el tiempo de las ecuaciones de Einstein y obteniendo así un problema de evolución de condiciones iniciales. Dicho formalismo es el más empleado en la actualidad y en el que se basará este trabajo.

2.2. Foliación del espaciotiempo y funciones de gauge

Para realizar la separación del espaciotiempo según el formalismo 3+1, tenemos que suponer que el espaciotiempo es *globalmente hiperbólico*. Esto significa que nuestro espaciotiempo \mathcal{M} admite una *superficie de Cauchy*, esto es, una hipersuperficie Σ tal que cada curva causal atraviesa a Σ una sola vez (no hay curvas nulas o de tipo tiempo cerradas en \mathcal{M}). Se cree que todos los espaciotiempos físicamente relevantes son globalmente hiperbólicos, y en esta asunción se basan las distintas formulaciones en relatividad numérica.

Esto es importante porque un espaciotiempo globalmente hiperbólico admite una *foliación*, es decir, que puede “laminarse” en un conjunto de hipersuperficies tridimensionales de tipo espacio. Estas hipersuperficies pueden considerarse los conjuntos de nivel de un determinado parámetro temporal t que puede ser considerado como una *función tiempo universal*, por lo que la foliación es también llamada *sincronización*. Intuitivamente, puede pensarse en estas hipersuperficies como “fotografías” del espacio tomadas por un observador en distintos instantes de tiempo, pero hay que hacer notar que en una foliación arbitraria el parámetro t no tiene porque corresponderse con el tiempo propio de ningún observador.

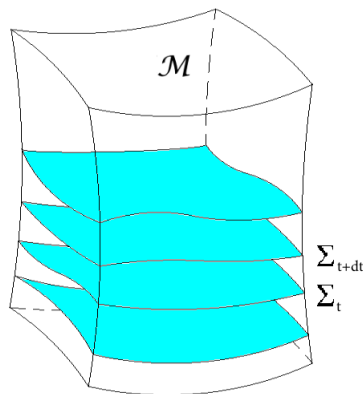


Figura 2.1: Foliación del espaciotiempo \mathcal{M} en hipersuperficies tridimensionales espaciales.[2]

Consideremos una determinada foliación y tomemos dos hipersuperficies adyacentes Σ_t y Σ_{t+dt} . La geometría de la región de espaciotiempo entre ambas hipersuperficies está determinada por tres elementos básicos:

- La métrica tridimensional γ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), que mide distancias dentro de la propia hipersuperficie espacial:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.2)$$

- El lapso de tiempo propio $d\tau$ medido por los llamados *observadores eulerianos*, que son aquellos observadores que se mueven por el espaciotiempo a lo largo de la dirección normal a las hipersuperficies:

$$d\tau = \alpha(t, x^i) dt, \quad (2.3)$$

donde a α se le llama *función lapso*.

- La velocidad relativa β^i entre los observadores eulerianos y las líneas de coordenadas espaciales constantes:

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i(t, x^i) dt, \quad (2.4)$$

donde al vector β^i se le llama *vector de desplazamiento*.

Debe notarse aquí que la forma en que se folia el espaciotiempo y la forma en que se propaga el sistema de coordenadas de una hipersuperficie a otra no son únicas. Esto significa que las funciones α y β^i son funciones de elección libre que contienen información sobre nuestra elección del sistema de coordenadas, por lo que las conoce como *funciones de gauge*.

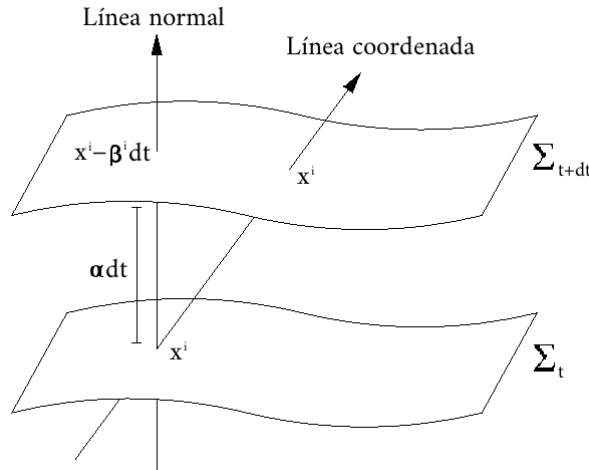


Figura 2.2: Funciones de lapso α y desplazamiento β^i en dos hipersuperficies adyacentes.[3]

Puede escribirse la métrica del espaciotiempo en función de α , β^i y γ_{ij} de la siguiente forma:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.5)$$

de donde puede obtenerse que

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_k \beta^k & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Como ya hemos dicho, las hipersuperficies espaciales Σ son conjuntos de nivel de un parámetro temporal t . Por lo tanto, el vector $\nabla^\mu t$ es normal a Σ , y es un vector de tipo tiempo al ser las Σ de tipo espacio. Podemos normalizar este vector para hacerlo unitario de la forma:

$$n^\mu = -\frac{\nabla^\mu t}{\sqrt{-\nabla^\nu t \cdot \nabla_\nu t}} = -\alpha \nabla^\mu t, \quad (2.7)$$

donde definimos la función lapso como

$$\alpha = (-\nabla^\mu t \cdot \nabla_\mu t)^{-1/2} \quad (2.8)$$

y donde el signo negativo asegura que el vector n^μ apunta hacia el futuro. El vector n^μ se corresponde por definición con la cuadrivelocidad de los observadores eulerianos.

Si llamamos t^μ al vector tangente a las líneas de tiempo (líneas de coordenadas espaciales constantes), el vector de desplazamiento es simplemente la proyección de t^μ sobre la hipersuperficie espacial, y queda definido como

$$\beta_\mu = \gamma_{\mu\nu} t^\nu. \quad (2.9)$$

2.3. La curvatura extrínseca

Al hablar de la curvatura de las hipersuperficies en que foliamos el espaciotiempo, debemos hacer distinción entre la curvatura intrínseca debida a su geometría interna y la *curvatura extrínseca* asociada con la forma en que las hipersuperficies están embebidas en el espaciotiempo completo. La curvatura intrínseca viene dada por el tensor de Riemann tridimensional, definido en términos de la métrica interna γ_{ij} . La curvatura extrínseca, en cambio, se define según cómo cambia el vector normal n^μ al ser transportado paralelamente de un punto a otro de la hipersuperficie. El *tensor de curvatura extrínseca* $K_{\mu\nu}$ es una medida del cambio del vector normal bajo dicho transporte paralelo.

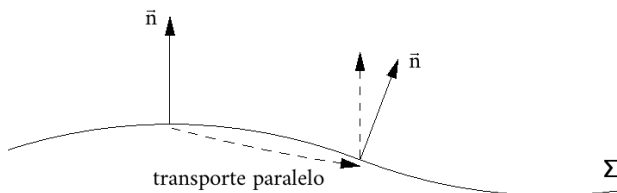


Figura 2.3: Definimos la curvatura extrínseca como una medida del cambio del vector normal bajo transporte paralelo en la hipersuperficie.[3]

Para definir la curvatura extrínseca necesitamos introducir el operador de proyección sobre las hipersuperficies espaciales

$$P_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha + n^\alpha n_\beta. \quad (2.10)$$

El tensor $K_{\mu\nu}$ lo definimos como la proyección sobre las hipersuperficies espaciales de la derivada covariante del vector n^μ :

$$K_{\mu\nu} = -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu = -(\nabla_\mu n_\nu + n_\mu n^\alpha \nabla_\alpha n_\nu). \quad (2.11)$$

Definido de esta manera, el tensor $K_{\mu\nu}$ es un tensor puramente espacial. Esto implica que en un sistema de coordenadas adaptado a la foliación tenemos que $K^{00} = K^{0i} = 0$, así que normalmente solo consideraremos sus componentes espaciales K_{ij} . Además, es un tensor simétrico: $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$. Definimos también la traza de la curvatura extrínseca como

$$K = K_\mu^\mu. \quad (2.12)$$

Es conveniente remarcar que la curvatura extrínseca depende solo del comportamiento del vector n^μ dentro de la hipersuperficie espacial dada, por lo que es una propiedad geométrica de dicha hipersuperficie.

2.4. El sistema de ecuaciones en 3+1

Con lo visto en este capítulo, tenemos definidas unas funciones de gauge α y β^i que fijan la forma en que foliamos del espaciotiempo. Tenemos también definida la geometría de las hipersuperficies que conforman la foliación, a partir de su métrica espacial γ_{ij} y su curvatura extrínseca K_{ij} .

El objetivo es encontrar un conjunto de ecuaciones que describan la evolución temporal de γ_{ij} y K_{ij} en función de los $\{\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}, K_{ij}\}$ y sus derivadas covariantes.

La obtención de dicho sistema de ecuaciones se basa en la proyección de las ecuaciones de Einstein (2.1) sobre las hipersuperficies espaciales, empleando para ello una serie de relaciones geométricas que describen como se proyecta el tensor de Riemann sobre dichas hipersuperficies.

En estas ecuaciones emplearemos los símbolos D_i , ${}^{(3)}R_{ij}$ y ${}^{(3)}R$ para distinguir la derivada covariante y el tensor y el escalar de Ricci dentro de la hipersuperficie tridimensional de sus homólogos en el espaciotiempo completo.

El sistema que se obtiene está formado por dos ecuaciones de evolución:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= \beta^k \partial_k K_{ij} + K_{ki} \partial_j \beta^k + K_{kj} \partial_i \beta^k - D_i D_j \alpha \\ &+ \alpha \left[{}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k \right] + 4\pi \alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}], \end{aligned} \quad (2.14)$$

y dos ecuaciones de ligadura:

$${}^{(3)}R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi \rho, \quad (2.15)$$

$$D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) = 8\pi j^i, \quad (2.16)$$

donde hemos definido:

$$\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}, \quad j^i = -P^{i\mu} n^\nu T_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta}, \quad S = S_\mu^\mu. \quad (2.17)$$

Estas ecuaciones tienen una serie de características muy importantes, y de las que se hablará en los próximos apartados de este capítulo.

Tenemos por una parte las ecuaciones (2.15) y (2.16), conocidas como *ligadura hamiltoniana* o *de la energía y ligadura del momento*, respectivamente. En ellas no aparecen ni derivadas temporales ni las funciones de gauge α y β^i , por lo que que son ecuaciones referidas únicamente a una hipersuperficie dada. Esto significa que todas las hipersuperficies de la foliación deberán cumplir estas dos ecuaciones.

Puede demostrarse que si la hipersuperficie inicial cumple las ligaduras, las hipersuperficies resultantes de la evolución según las ecuaciones (2.13) y (2.14) también las cumplirán (para una

solución exacta, no así con métodos numéricos), así que una parte importante a la hora de realizar una simulación será el encontrar unos datos iniciales que cumplan las ecuaciones de ligadura. Esto significa que en general no es posible elegir arbitrariamente las 12 cantidades dinámicas $\{\gamma_{ij}, K_{ij}\}$ como datos iniciales, sino que habrá que resolver el sistema de cuatro ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico que constituyen las expresiones (2.15) y (2.16). Para casos generales esto es muy difícil de resolver, si bien existen numerosos procedimientos para ello en algunas circunstancias, siendo el método del *sándwich delgado conforme*[4] uno de los más populares en los últimos años.

Por otra parte, puede observarse que en (2.13), (2.14), (2.15) y (2.16) no hay ninguna relación que nos diga cómo deben evolucionar las funciones de gauge. Esto es consistente con que la elección de dichas funciones es completamente libre. Sin embargo, la forma en que elijamos estas funciones influirá enormemente en la evolución del sistema y en el comportamiento de la simulación, por lo que la elección del gauge más adecuado para cada problema será un aspecto a tener muy en cuenta. En el capítulo 3 veremos algunos de los ejemplos más empleados en relatividad numérica.

Las expresiones (2.13) y (2.14) son conocidas como *ecuaciones ADM*. Sin embargo, esta no es la forma original obtenida por Arnowitt, Deser y Misner, sino una reescritura no trivial realizada años después por York y que resultó ser más estable numéricamente. Una característica importante de las ecuaciones de evolución es que son altamente no únicas, y las distintas formas de reescribirlas llevan a ecuaciones con distinto comportamiento matemático, pese a tener las mismas soluciones físicas. Hablaremos un poco más de este tema en el capítulo 4.

2.5. Evolución libre y evolución restringida

Hemos comentado antes que, si la hipersuperficie inicial satisface las ligaduras, estas seguirán cumpliéndose durante toda la evolución. Sin embargo, esto es solo cierto para una resolución exacta, y nosotros estamos interesados en ver cómo se comporta una simulación numérica. Hasta la fecha no existe ninguna discretización de las ecuaciones de evolución 3+1 que mantenga el cumplimiento exacto de las ligaduras durante la evolución.

En la práctica, esto lleva a dos formas distintas de elegir qué conjunto de ecuaciones resolver numéricamente. El primero es conocido como *evolución libre*, que consiste en, partiendo de unos datos iniciales que cumplan las ligaduras, resolver las 12 ecuaciones de evolución ((2.13) y (2.14)) para γ_{ij} y K_{ij} . Las ligaduras simplemente se monitorizan para ver cuánto se violan durante la evolución.

El otro procedimiento consiste en resolver, en cada paso de tiempo, algunas o todas las ecuaciones de ligadura para obtener un subconjunto de las 12 componentes de γ_{ij} y K_{ij} , obteniendo las restantes mediante las ecuaciones de evolución. Este procedimiento se conoce como *evolución restringida*. Este procedimiento es ideal para casos con alto grado de simetría, si bien el hecho de que envuelva la solución de ecuaciones elípticas hace más lento y complicado el código numérico.

3. Condiciones de gauge

Como ya hemos mencionado, la elección de un sistema de coordenadas en el formalismo 3+1 viene dado en términos de las funciones de gauge α y β^i . Estas pueden elegirse con total libertad, lo que nos obliga a plantearnos cuál es la mejor elección para cada caso concreto. A ser posible, una buena elección de gauge debería estar adaptada a las simetrías del problema, de tal forma que esas simetrías del espaciotiempo sean manifiestas en la evolución. También debe elegirse de tal forma que se evite la formación de singularidades coordenadas y, en el caso de agujeros negros, que evite también alcanzar la singularidad física. Además, deben comportarse bien matemáticamente y, a ser posible, ser fáciles de implementar numéricamente.

Para encontrar condiciones de gauge con estas propiedades, lo más natural es relacionar la elección de gauge con la evolución de ciertas combinaciones de cantidades geométricas, de forma que se “congele” o retrase la evolución de esas cantidades bajo unas determinadas circunstancias.

En la mayoría de las simulaciones, la evolución funciona bien tomando $\beta^i = 0$, por lo que es una opción muy extendida y simple. Por ello, la elección de las condiciones de desplazamiento está mucho menos estudiada que la del lapso.

En lo que sigue, describiremos brevemente algunas de las elecciones de la función de lapso más empleadas. El lapso α determina el intervalo de tiempo propio entre hipersuperficies espaciales en la dirección normal, es decir, determina como está foliado el espaciotiempo. Por esta razón, a la elección del lapso se le llama también *condición de foliación*.

3.1. Foliación geodésica

La foliación más simple consiste en hacer coincidir en todos los puntos el tiempo coordinado t con el tiempo propio de los observadores inerciales, lo que se consigue con

$$\alpha = 1. \tag{3.1}$$

A esta elección de α se le llama *foliación geodésica*, debido a que con este gauge los observadores eulerianos siguen geodésicas de tipo tiempo (están en caída libre).

El principal problema de esta foliación es que en campos no uniformes, diferentes observadores caerán en distintas direcciones sin nada que prevenga una posible colisión entre ellos. Cuando sucede esto, nuestro sistema de coordenadas (que está asociado a estos observadores) deja de ser uno a uno: tenemos un mismo punto con más de un valor de las coordenadas asociado a él, es decir, el sistema de coordenadas se vuelve singular. En la foliación geodésica los observadores en caída libre están “focalizados” por el campo gravitatorio. Esto significa que la distancia entre ellos se va reduciendo, por lo que los elementos de volumen disminuyen hasta hacerse cero. Debido a este problema aparecen singularidades en la simulación en poco tiempo, lo que hace que la foliación geodésica apenas se utilice excepto para la comprobación de códigos numéricos.

3.2. Foliación maximal

Para evitar este problema podemos buscar una foliación en la que los elementos de volumen permanecen constantes. Puede demostrarse que eso implica imponer la condición

$$K = \partial_t K = 0 \quad (3.2)$$

durante toda la evolución. Exigiendo esta condición y a partir de las ecuaciones de evolución (2.13) y (2.14), obtenemos que el lapso debe satisfacer la ecuación elíptica

$$D^2 \alpha = \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S)], \quad (3.3)$$

donde $D^2 = D_i D^i$ es el operador laplaciano. Esta condición se conoce como *foliación maximal*.

Una propiedad muy importante de la foliación maximal es la de evitar las singularidades, tanto coordenadas como físicas. Esto es particularmente útil en la simulación de agujeros negros, donde la función lapso se hace exponencialmente cero dentro del agujero negro al acercarse a la singularidad, efecto conocido como *colapso del lapso*. El colapso del lapso resulta útil porque de otro modo las hipersuperficies llegarían rápidamente a la singularidad, donde se encontrarían con valores infinitos del campo gravitatorio, lo que arruinaría la simulación computacional. De esta forma podemos cubrir una región grande del espaciotiempo exterior sin llegar a la singularidad, lo que es ideal para las simulaciones numéricas.

Sin embargo, esto tiene un inconveniente. Al avanzar el tiempo en el exterior y congelarse en el interior, las hipersuperficies van deformándose cada vez más, dando lugar al fenómeno conocido como *estiramiento de la hipersuperficie*. Este fenómeno produce un crecimiento muy rápido de la componente radial de la métrica y el desarrollo de grandes gradientes, lo que puede hacer que falle el código numérico. El estiramiento de las hipersuperficies es consecuencia de dos efectos. Por una parte la mera presencia del agujero negro produce una diferencia en la velocidad de caída de los observadores normales hacia la singularidad. La aceleración con la que caen los más cercanos es mayor, lo que resulta en un aumento de la separación radial entre observadores a distintas distancias del centro y el crecimiento de la componente radial de la métrica. Esto significa que este fenómeno ocurrirá incluso en la foliación geodésica. El segundo efecto es una consecuencia del colapso del lapso, por el que las hipersuperficies “envuelven” la singularidad.

Pero el principal problema de la foliación maximal es que la resolución numérica de la ecuación elíptica en tres dimensiones (3.3) es muy lenta. En la práctica, más de un 90 % del tiempo de computación en simulaciones con este gauge es destinado a resolver la ecuación de la foliación maximal. Debido a esto, se buscaron nuevas condiciones de foliación con características similares a la maximal pero más fáciles de resolver.

3.3. Condiciones de foliación de Bona-Masso

La búsqueda de condiciones de foliación que eviten las singularidades y con un menor coste computacional que la foliación maximal llevó a mediados de los 90 a la familia de condiciones de foliación de *Bona-Masso*. Estas condiciones tienen la forma

$$\frac{d}{dt} \alpha = \partial_t \alpha - \beta^i \partial_i \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (3.4)$$

donde $f(\alpha)$ es una función positiva arbitraria de α .

Un ejemplo bastante conocido de este tipo de foliaciones es la *foliación armónica*, que se obtiene tomando $f = 1$ y que puede integrarse para obtener la condición

$$\alpha = h(x^i)\gamma^{1/2}, \quad (3.5)$$

donde $h(x^i)$ es una función independiente del tiempo y γ es el determinante de la métrica espacial.

Otra familia de foliaciones importante dentro de las de Bona-Masso es la que se obtiene tomando $f = N/\alpha$, con N constante. Un caso que se comporta especialmente bien en simulaciones numéricas es el de $N = 2$, que al integrarlo nos da

$$\alpha = h(x^i) + \ln \gamma. \quad (3.6)$$

A esta se le llama *foliación 1+log*, y en los últimos años es la que ha sustituido a la foliación maximal en la mayoría de simulaciones que involucran campos gravitacionales muy intensos, como agujeros negros y estrellas de neutrones.

Derivando la ecuación (3.4), obtenemos que

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha = -\alpha^2 f \left[\frac{d}{dt}K - \alpha (2f + \alpha f') K^2 \right], \quad (3.7)$$

con $f' = df/d\alpha$. Podemos obtener la evolución de la traza de la curvatura extrínseca a partir de las ecuaciones ADM (2.13) y (2.14),

$$\partial_t K = \beta^i \partial_i K - D^2 \alpha + \alpha [K_{ij} K^{ij} + 4\pi(\rho + S)], \quad (3.8)$$

y sustituyéndola en (3.7), obtenemos (en el vacío) que:

$$\frac{d^2}{dt^2}\alpha - \alpha^2 f D^2 \alpha = -\alpha^3 f [K_{ij} K^{ij} - \alpha (2f + \alpha f') K^2]. \quad (3.9)$$

Esta ecuación muestra que el lapso cumple una ecuación de ondas con término de fuente cuadrático en la curvatura extrínseca, y cuya velocidad de propagación a lo largo de una determinada dirección x^i es

$$v_g = \alpha \sqrt{f \gamma^{ij}}. \quad (3.10)$$

Esta *velocidad de gauge* será real si $f(\alpha) \geq 0$, razón por la que hemos impuesto antes que la función $f(\alpha)$ fuera positiva.

4. Formulaciones alternativas e hiperbolicidad

Hemos comentado al final del apartado 2.4 que la reescritura de las ecuaciones de Einstein en el formalismo 3+1 no es única. Una forma de ver esto es que siempre podemos, por ejemplo, sumarles múltiplos de las ligaduras (de la forma $\mathcal{H} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} - 16\pi\rho = 0$). Podemos así obtener infinidad de sistemas distintos cuya solución física es la misma pero cuyas propiedades matemáticas son distintas por dos razones fundamentales.

La primera es que su espacio de soluciones solo coincide para soluciones físicas, es decir, las que cumplen las ecuaciones de ligadura. Para una resolución exacta de las ecuaciones de evolución esto sería irrelevante, pero en el caso de las simulaciones numéricas esto es de gran importancia, ya que siempre habrá un error que nos llevará fuera de las soluciones físicas. Entonces nos interesa saber cómo se comportará nuestra simulación en ese caso, es decir, si se mantendrá la solución numérica a una distancia pequeña o se alejará cada vez más rápido.

La segunda es que al contener la ligadura hamiltoniana derivadas de la métrica (escondidas en el escalar de Ricci), la propia estructura de las ecuaciones diferenciales cambia, pudiendo pasar de tener un sistema bien planteado a otro que no.

Pese a ser el punto de partida del formalismo 3+1, las ecuaciones ADM no son muy estables frente a violaciones de las ligaduras y desde principios de los 90 se han propuesto numerosas formulaciones alternativas. Sin entrar a discutir ninguna, cabe mencionar que en los últimos años se ha vuelto muy popular la formulación conocida como BSSN (Baumgarte y Shapiro [5], Shibata y Nakamura [6]) debido al muy buen comportamiento que ha demostrado en la práctica.

Un concepto muy útil a la hora de buscar formulaciones con buen comportamiento es la *hiperbolicidad* del sistema de ecuaciones a resolver.

4.1. Hiperbolicidad de un sistema de ecuaciones

Consideremos un sistema de evolución en una dimensión de la forma

$$\partial_t u_i + \partial_x F_i = q_i, \quad i \in \{1, \dots, N_u\}, \quad (4.1)$$

donde F_i y q_i son funciones arbitrarias de las u 's pero no de sus derivadas. Este sistema puede escribirse también como

$$\partial_t u_i + \sum_j M_{ij} \partial_x u_j = q_i, \quad i \in \{1, \dots, N_u\}, \quad (4.2)$$

donde $M_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j}$ es la matriz jacobiana. La mayoría de las ecuaciones diferenciales que encontramos en física pueden escribirse como (4.2), y en caso de haber derivadas de orden mayor, podemos definir variables auxiliares para obtener un sistema de primer orden como este.

Consideremos ahora los autovalores de la matriz \mathbf{M} , a los que llamaremos λ_i . Diremos que un sistema es *hiperbólico* si todas las λ_i son funciones reales. Dentro de este grupo, si la matriz M tiene un conjunto completo de vectores propios diremos que el sistema es *fuertemente hiperbólico*, y en caso contrario que es *débilmente hiperbólico*.

Para sistemas fuertemente hiperbólicos, definimos las *funciones propias* ω_i como

$$\vec{u} = \mathbf{R}\vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = \mathbf{R}^{-1}\vec{u}, \quad (4.3)$$

donde \mathbf{R} es la matriz cuyas columnas son los vectores propios de la matriz \mathbf{M} . Puede demostrarse entonces que las funciones propias ω_i cumplen ecuaciones de evolución de la forma

$$\partial_t \omega_i + \lambda_i \partial_x \omega_i = q'_i, \quad (4.4)$$

donde los q'_i son funciones de las ω 's pero no de sus derivadas. De esta forma, el sistema se convierte en un conjunto de ecuaciones de advección con velocidades características dadas por los autovalores λ_i , o lo que es lo mismo, tenemos una serie de perturbaciones que se propagan con velocidad λ_i .

El concepto de hiperbolicidad es fácilmente generalizable a tres dimensiones considerando ecuaciones del tipo

$$\partial_t u_i + \partial_x F_i^x + \partial_y F_i^y + \partial_z F_i^z = q_i, \quad i \in \{1, \dots, N_u\}, \quad (4.5)$$

y analizando las tres matrices jacobianas $M_{ij}^k = \frac{\partial F_i^k}{\partial u_j}$ ($k = x, y, z$).

La hiperbolicidad tiene una gran importancia en la resolución de problemas de Cauchy (ecuación diferencial de evolución de valores iniciales). Físicamente, la hiperbolicidad implica que el sistema de ecuaciones es causal y local, es decir, que la solución en un punto del espaciotiempo depende solo de información contenida en una región compacta en el pasado de ese punto (cono de luz pasado). Además, se puede demostrar matemáticamente que un sistema fuertemente hiperbólico está *bien planteado*, es decir, que sus soluciones existen y son únicas, y además sus soluciones son estables (en el sentido de que pequeños cambios en sus datos iniciales producen cambios también pequeños en la solución).

A la hora de realizar una simulación física, queremos que nuestro problema tenga todas estas características, por lo que al plantear formulaciones de las ecuaciones buscaremos que el sistema a resolver sea fuertemente hiperbólico.

En el caso de las ecuaciones ADM, puede demostrarse que generalmente son solo débilmente hiperbólicas, de ahí su poca estabilidad. Sin embargo, las ecuaciones BSSN son fuertemente hiperbólicas en un rango mucho más amplio de condiciones. En la actualidad, numerosos grupos trabajan en la búsqueda de criterios que nos digan qué formulaciones hiperbólicas son mejores para cada problema.

5. Ejemplos de simulaciones en relatividad numérica

5.1. Espaciotiempo 1+1 ‘de juguete’

En este primer caso, vamos a simular una situación de vacío en un spaciotiempo 1+1 (una dimensión espacial y una temporal). Puede comprobarse que en una variedad de dos dimensiones el tensor de Riemann solo tiene una componente independiente (el escalar de Ricci) que es cero en el vacío, es decir, en el vacío en 1+1 dimensiones no hay gravedad. Sin embargo, vamos a ver que podemos simular una dinámica ficticia de nuestro gauge.

Usaremos condiciones de foliación de Bona-Masso (3.4), donde por simplicidad tomaremos vector desplazamiento nulo ($\beta^i = 0$):

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f(\alpha) K, \quad (5.1)$$

y donde, al tener solo una dimensión, la traza de la curvatura extrínseca es simplemente $K = K_x^x$.

Podemos reescribir las ecuaciones ADM junto con la condición de foliación para obtener

$$\partial_t \alpha = -\alpha^2 f K, \quad (5.2)$$

$$\partial_t g = -2\alpha g K, \quad (5.3)$$

y tras varias operaciones podemos obtener un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\partial_t D_\alpha + \partial_x(\alpha f K) = 0, \quad (5.4)$$

$$\partial_t D_g + \partial_x(2\alpha K) = 0, \quad (5.5)$$

$$\partial_t (g^{1/2} K) + \partial_x(\alpha D_\alpha / g^{1/2}) = 0 \quad (5.6)$$

donde hemos definido $g = g_{xx}$, $D_\alpha = \partial_x \ln \alpha$ y $D_g = \partial_x \ln g$. Si definimos el vector $\vec{v} = (D_\alpha, D_g, \tilde{K})$, con $\tilde{K} = g^{1/2} K$, podemos escribir este sistema como

$$\partial_t \vec{v} + \partial_x(\mathbf{M} \vec{v}) = 0, \quad (5.7)$$

donde la matriz \mathbf{M} es

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha f / g^{1/2} \\ 0 & 0 & 2\alpha / g^{1/2} \\ \alpha / g^{1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

y cuyos autovalores y autovectores son

$$\lambda_0 = 0, \quad \vec{e}_0 = (0, 1, 0), \quad (5.9)$$

$$\lambda_\pm = \pm \alpha (f/g)^{1/2}, \quad \vec{e}_\pm = (f, 2, \pm f^{1/2}). \quad (5.10)$$

Los autovalores son claramente reales para $f > 0$ y los autovectores son linealmente independientes, por lo que el sistema es fuertemente hiperbólico. Puede obtenerse que, normalizadas adecuadamente, las funciones propias de \mathbf{M} son

$$\omega_0 = D_\alpha / f - D_g / 2, \quad \omega_\pm = \tilde{K} \pm D_\alpha / f^{1/2}, \quad (5.11)$$

y las ecuaciones de evolución para las funciones propias ω_+ y ω_- vendrán dadas por

$$\partial_t \omega_{\pm} + \partial_x (\lambda_{\pm} \omega_{\pm}) = 0. \quad (5.12)$$

De este modo, podemos simular numéricamente la evolución de las funciones propias según (5.12) y recuperar las variables D_{α} , D_g y \tilde{K} a partir de (5.11) mediante las expresiones

$$\tilde{K} = \frac{\omega_+ + \omega_-}{2}, \quad D_{\alpha} = \frac{f^{1/2}(\omega_+ - \omega_-)}{2}, \quad D_g = \frac{\omega_+ - \omega_-}{f^{1/2}} - 2\omega_0, \quad (5.13)$$

y a partir de estas, podemos obtener g y K .

5.1.1. Ejemplos de simulación: Choques de gauge

A continuación vamos a reproducir los resultados de algunas simulaciones realizadas por M. Alcubierre en [7]. El objetivo de esta simulación es observar, en un caso sencillo, cómo varían nuestros resultados con la elección de distintas condiciones de gauge. En particular, queremos ver cómo, pese a haber elegido un sistema fuertemente hiperbólico, pueden aparecer singularidades en nuestras soluciones debidas únicamente a nuestra elección del gauge. Estas singularidades son similares a las ondas de choque que se producen en dinámica de fluidos, por lo que se les conoce como *choques de gauge*.

Dado que estamos en un espaciotiempo plano, necesitamos una hipersuperficie inicial no trivial si queremos una evolución no trivial. En coordenadas de Minkowski (x_M, t_M) , dicha hipersuperficie será una curva $t_M = h(x_M)$, donde para nuestros propósitos elegiremos para h una función que decaiga rápidamente. En concreto tomaremos una función gaussiana

$$h(x) = H \exp \left\{ -\frac{(x - x_c)^2}{\sigma^2} \right\}, \quad (5.14)$$

con $H = 5$, $\sigma = 10$ y $x_c = 150$.

Con estas condiciones, g y K tienen inicialmente la forma:

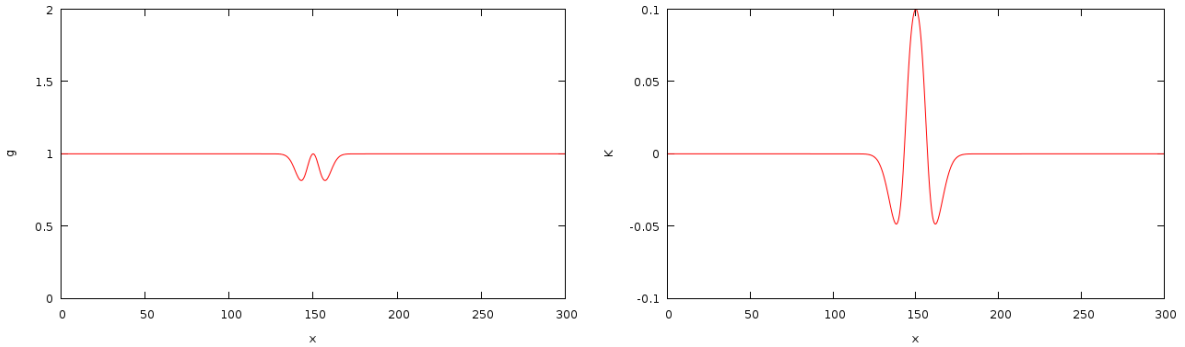


Figura 5.1: Funciones g y K en $t = 0$.

Para resolver las ecuaciones de evolución (5.12) emplearemos el método de Crank-Nicholson iterado de tres pasos, con una resolución en la discretización del espacio y el tiempo de $\Delta x = 0.25$ y $\Delta t = 0.125$.

En todas las simulaciones que siguen, la evolución se produce del mismo modo: una perturbación inicial en $x_c = 150$ produce dos pulsos que se propagan hacia ambos lados con velocidad $\sim \sqrt{f}$. Sin embargo, la forma de las funciones al evolucionar dependerá del valor de f escogido.

En [7], se demuestra analíticamente que la condición de no aparición de choques de gauge en este caso es

$$f(\alpha) = 1 + \kappa/\alpha^2, \quad (5.15)$$

con κ una constante arbitraria. Esto significa que en la llamada foliación armónica ($f = 1$) no aparecerán choques de gauge, pero sí en cualquier otro caso con f constante.

Veamos que sucede con nuestras simulaciones. Si tomamos $f = 1$, tenemos que para $t = 100$, los pulsos se han propagado manteniendo g y K una forma suave.

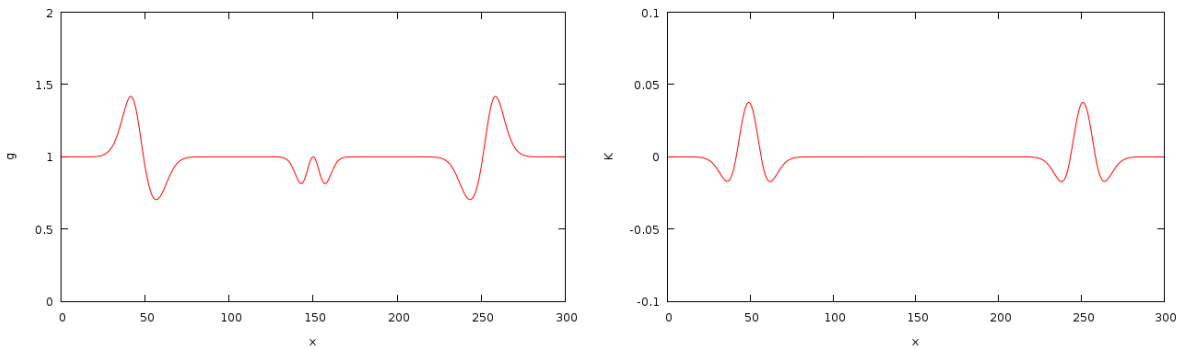


Figura 5.2: Funciones g y K con $f = 1$ en $t = 100$.

Sin embargo, no sucede lo mismo para otros valores de f . Tomando $f = 1.69$ y $f = 0.49$, tenemos que los pulsos van inclinándose durante la evolución, llegando a tener puntos de pendiente infinita en g y divergencias en K .

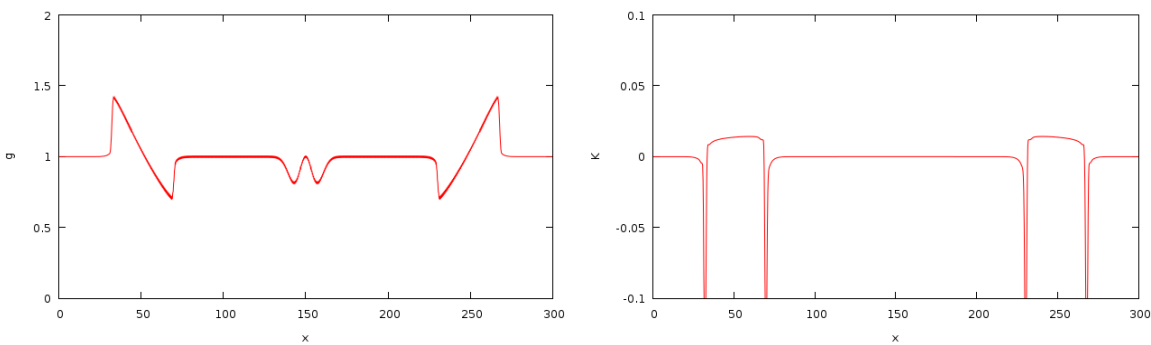


Figura 5.3: Funciones g y K con $f = 1.69$ en $t = 75$.

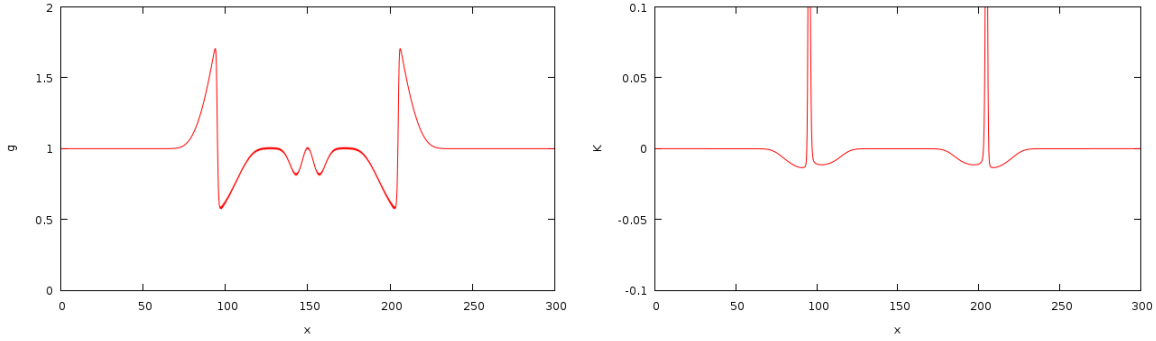


Figura 5.4: Funciones g y K con $f = 0.49$ en $t = 75$.

La aparición de estas singularidades tiene una explicación geométrica sencilla. Mientras el espaciotiempo 1+1 es una variedad diferenciable suave (Minkowski), las hipersuperficies no tienen por qué serlo. En este ejemplo, la hipersuperficie inicial era suave (gaussiana), pero la evolución puede llevar a la aparición de singularidades en la hipersuperficie, que serían la causa de las anomalías observadas.

Pese a ser un espaciotiempo ficticio 1+1, los choques de gauge también pueden aparecer en casos físicos más complejos y arruinar simulaciones de mucho tiempo de computación. Esto es una prueba de la importancia de una correcta elección de gauge y, en concreto, del buen comportamiento de la foliación armónica frente a otras foliaciones de la misma familia.

5.2. Espaciotiempo 3+1 con simetría esférica

Ahora vamos a considerar un caso de espaciotiempo con simetría esférica. Este caso es de mayor interés que el anterior, ya que muchos sistemas astrofísicos reales, como estrellas y agujeros negros, se aproximan muy bien a dicha simetría y permiten estudiar problemas como la estabilidad de la estrellas y el colapso gravitacional.

Aquí las variables dinámicas dependen solo de la coordenada radial, por lo que los códigos numéricos siguen siendo unidimensionales y nos permiten estudiar eventos interesantes sin la necesidad de una excesiva complejidad.

La forma general de la métrica espacial en simetría esférica es

$$dl^2 = A(r, t)dr^2 + r^2B(r, t)d\Omega^2, \quad (5.16)$$

con A y B funciones positivas de la métrica y $d\Omega$ el diferencial de ángulo sólido.

Para obtener una forma de las ecuaciones de evolución de primer orden, definimos las variables auxiliares $D_A = \partial_r \ln A$ y $D_B = \partial_r \ln B$. También llamaremos a las componentes de la curvatura extrínseca $K_A = K_r^r$ y $K_B = K_\theta^\theta = K_\varphi^\varphi$. Tomando $\beta^i = 0$, a partir de las ecuaciones

de evolución ADM obtenemos, tras una serie de operaciones, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\partial_t A = -2\alpha AK_A, \quad (5.17)$$

$$\partial_t B = -2\alpha BK_B, \quad (5.18)$$

$$\partial_t D_A = -2\alpha [K_A D_\alpha + \partial_r K_A], \quad (5.19)$$

$$\partial_t D_B = -2\alpha [K_B D_\alpha + \partial_r K_B], \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_A = & -\frac{\alpha}{A} \left[\partial_r (D_\alpha + D_B) + D_\alpha^2 - \frac{D_\alpha D_A}{2} + \frac{D_B^2}{2} - \frac{D_A D_B}{2} \right. \\ & \left. - AK_A(K_A + 2K_B) - \frac{1}{r}(D_A - 2D_B) \right] + 4\pi\alpha M_A, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & -\frac{\alpha}{2A} \left[\partial_r D_B + D_\alpha D_B + D_B^2 - \frac{D_A D_B}{2} - \frac{1}{r}(D_A - 2D_\alpha - 4D_B) \right. \\ & \left. - \frac{2(A-B)}{r^2 B} \right] + \alpha K_B(K_A + 2K_B) + 4\pi\alpha M_B, \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde hemos introducido $D_\alpha = \partial_r \ln \alpha$ y los términos de masa M_A y M_B como:

$$M_A = 2S_B - S_A - \rho, \quad M_B = S_A - \rho, \quad (5.23)$$

donde hemos definido $S_A = S_r^r$ y $S_B = S_\theta^\theta$. De estas seis ecuaciones de evolución, las ecuaciones (5.17) y (5.18) se obtienen de (2.13), las (5.19) y (5.20) son la evolución de las variables auxiliares D_A y D_B que permiten reescribir nuestro sistema en primer orden, y las ecuaciones (5.21) y (5.22) se obtienen de (2.14). Si bien hemos dicho que en general las ecuaciones ADM constituyen un sistema solo débilmente hiperbólico, puede demostrarse que para el caso con simetría esférica sí que son fuertemente hiperbólicas.

Además, las ligaduras hamiltoniana (2.15) y de momento (2.16) toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H = & -\partial_r D_B + \frac{1}{r^2 B}(A-B) + AK_B(2K_A + K_B) + \frac{1}{r}(D_A - 3D_B) \\ & + \frac{D_A D_B}{2} - \frac{3D_B^2}{4} - 8\pi A\rho = 0, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$M = -\partial_r K_B + (K_A - K_B) \left[\frac{1}{r} + \frac{D_B}{2} \right] - 4\pi j_A = 0, \quad (5.25)$$

donde $j_A = j_r$.

El problema de las coordenadas esféricas es la singularidad coordenada en el origen, lo que puede ocasionar problemas numéricos. El principal problema aparece en las ecuaciones de evolución (5.21)-(5.22), donde tenemos términos $1/r$ que divergen en el origen. La regularidad de la métrica (suponiendo que no haya una singularidad física) garantiza la cancelación de dichos términos en el origen, sin embargo, en el caso de soluciones numéricas dichos términos pueden no cancelarse, dando lugar a simulaciones inestables. Algunas formas de resolver este problema pueden encontrarse en [8].

5.2.1. Agujero negro de Schwarzschild

Una aplicación importante de la relatividad general es el estudio del campo gravitacional externo de objetos estáticos y con simetría esférica. En ese caso, la métrica del espaciotiempo

tendrá la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + R(r)^2d\Omega^2, \quad (5.26)$$

donde r es una coordenada radial y f , h y R son funciones solo de r . Esto puede simplificarse eligiendo una coordenada radial r' tal que $r' = R(r)$, teniendo entonces

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (5.27)$$

donde por simplicidad omitimos la prima de r' . A las coordenadas (r, θ, ϕ) se les llama *coordenadas de Schwarzschild*, y en particular a r se le llama *radio areal* debido a que el área de una esfera en estas coordenadas viene dada siempre por $4\pi r^2$. Empleando las ecuaciones de Einstein en el vacío pueden encontrarse las funciones f y h , obteniendo que la métrica debe tener la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (5.28)$$

con M la masa del objeto, lo que se conoce como *solución de Schwarzschild*. Esta solución es *asintóticamente plana* (se aproxima a Minkowski cuando $r \rightarrow \infty$). Pero lo más interesante es que aparecen dos singularidades en la métrica en $r = 0$ y $r = 2M$, conociéndose esta última como *radio de Schwarzschild*. Para la mayoría de objetos astrofísicos, el radio de Schwarzschild es mucho menor que el radio del propio objeto. Dado que la solución de Schwarzschild es una solución de vacío, no es válida para radios menores que el del objeto y no tenemos que preocuparnos de las singularidades de la métrica.

Si consideramos la solución de Schwarzschild correspondiente a una partícula puntual, debemos lidiar con las singularidades en $r = 0$ y $r = 2M$. Para estudiar su naturaleza calculamos las componentes del tensor de Riemann para este espaciotiempo, obteniendo que sus únicas componentes no nulas son

$$R_{trtr} = -2M/r^3, \quad R_{t\theta t\theta} = R_{t\phi t\phi} = M/r^3, \quad R_{\theta\phi\theta\phi} = 2M/r^3, \quad R_{r\theta r\theta} = R_{r\phi r\phi} = -M/r^3. \quad (5.29)$$

Todas estas componentes son singulares en $r = 0$, pero ninguna en $r = 2M$. Esto significa que el campo gravitatorio es singular en $r = 0$ pero regular en $r = 2M$. Esto significa que en $r = 0$ la singularidad es física, pero la de $r = 2M$ es una singularidad debida a la elección de las coordenadas. Además, para $r < 2M$, las coordenadas r y t intercambian sus roles: r pasa a ser una coordenada de tipo tiempo ($g_{rr} < 0$) y t de tipo espacio ($g_{tt} > 0$). Esto implica que una vez que un cuerpo atraviesa $r = 2M$, el cuerpo debe continuar necesariamente hacia valores menores de r del mismo modo que el tiempo avanza hacia el futuro en el exterior. Los sucesos en $r < 2M$ no pueden afectar causalmente al exterior, de forma que el radio de Schwarzschild representa una superficie de no retorno que llamamos *horizonte* del agujero negro.

Dado que las singularidades pueden producir problemas a la hora de realizar una simulación numérica, nos interesa emplear unas coordenadas que nos faciliten las cosas lo máximo posible. Un sistema de coordenadas usado frecuentemente en relatividad numérica es el de las *coordenadas isotrópicas*. Este sistema se basa en la definición de una nueva coordenada radial \tilde{r} relacionada con el radio areal de las coordenadas estándar de Schwarzschild por

$$r = \tilde{r} \left(1 + \frac{M}{2\tilde{r}}\right)^2, \quad (5.30)$$

obteniendo que la métrica toma la forma

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - M/2\tilde{r}}{1 + M/2\tilde{r}} \right)^2 dt^2 + \psi^4 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2), \quad (5.31)$$

donde $\psi = 1 + M/2\tilde{r}$. Nótese que la parte espacial de la métrica es la métrica plana multiplicada por una función escalar ψ^4 . Las transformaciones de la métrica del tipo $g_{ij} \rightarrow \bar{g}_{ij} = \Phi g_{ij}$ preservan los ángulos entre vectores y se llaman *transformaciones conformes*. Podemos decir entonces que en coordenadas isotrópicas la parte espacial de la métrica es *conformemente plana*.

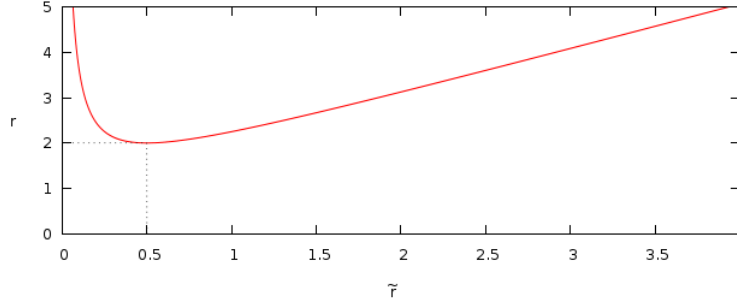


Figura 5.5: Relación entre el radio areal r y el radio isotrópico \tilde{r} con $M = 1$.

La métrica en coordenadas isotrópicas es regular en el horizonte, que ahora corresponde a $\tilde{r} = M/2$. Además, a gran distancia del origen, r y \tilde{r} se aproximan cada vez más. También vemos que la métrica en (5.31) es claramente singular en $\tilde{r} = 0$, pero la transformación de coordenadas muestra que $\tilde{r} = 0$ corresponde a $r = \infty$, por lo que esta no es la singularidad física de $r = 0$. La región $\tilde{r} \in [0, M/2]$ representa el otro lado de un *punto de Einstein-Rosen* o *agujero de gusano*, es decir, que corresponde a otro universo que ha sido *compactificado* en dicha región. La singularidad en $\tilde{r} = 0$ es entonces una singularidad coordenada asociada a esta compactificación.

La ventaja de emplear las coordenadas isotrópicas en lugar de las de Schwarzschild en una simulación es que desaparece la singularidad del horizonte, y nos permite evolucionar el exterior del agujero negro ($\tilde{r} > M/2$) teniendo que lidiar únicamente con una singularidad coordenada en $\tilde{r} = 0$.

5.2.2. Simulación de un agujero negro de Schwarzschild

Vamos a emplear como ejemplo la evolución de un único agujero negro de Schwarzschild. El espaciotiempo de Schwarzschild es estático, por lo que podría pensarse que no habrá evolución. Sin embargo, como hemos visto en el apartado 5.1 podemos estudiar la evolución artificial inducida por una elección de gauge no trivial.

Como siempre, debemos empezar con la elección de los datos iniciales. Como hemos visto, la elección de coordenadas estándar de Schwarzschild en $t = 0$ no es buena, ya que producen una singularidad coordenada en el horizonte. Por esa razón vamos a emplear las coordenadas isotrópicas, de modo que la métrica espacial inicial será

$$dl^2 = \psi^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2), \quad (5.32)$$

donde el factor conforme es $\psi = 1 + M/2r$ y r está relacionada con el radio en coordenadas de Schwarzschild mediante $r_{Sch} = r\psi^2 = r(1 + M/2r)^2$.

Para evitar la singularidad (coordenada) en $r = 0$ existen numerosos métodos. En este caso vamos a emplear la técnica conocida como *evolución de la punción estática*, mediante la cual solo evolucionamos la parte no singular de la métrica. Esto lo conseguimos extrayendo el factor conforme y definiendo nuevas variables dinámicas:

$$\tilde{A} = A/\psi^4, \quad \tilde{B} = B/\psi^4, \quad (5.33)$$

$$\tilde{D}_A = D_A - 4\partial_r\psi, \quad \tilde{D}_B = D_B - 4\partial_r\psi. \quad (5.34)$$

Reescribiendo las ecuaciones (5.17)-(5.22) en función de las nuevas variables, tenemos

$$\partial_t \tilde{A} = -2\alpha \tilde{A} K_A, \quad (5.35)$$

$$\partial_t \tilde{B} = -2\alpha \tilde{B} K_B, \quad (5.36)$$

$$\partial_t \tilde{D}_A = -2\alpha [K_A D_\alpha + \partial_r K_A], \quad (5.37)$$

$$\partial_t \tilde{D}_B = -2\alpha [K_B D_\alpha + \partial_r K_B], \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_A = & -\frac{\alpha}{\tilde{A}} \left\{ \frac{16r^4}{(2r+M)^4} \left[\partial_r (D_\alpha + \tilde{D}_B) + D_\alpha^2 - \frac{D_\alpha \tilde{D}_A}{2} + \frac{\tilde{D}_B^2}{2} - \frac{\tilde{D}_A \tilde{D}_B}{2} \right] \right. \\ & \left. + \frac{16r^3}{(2r+M)^6} \left[8M + 2M(2r+M)(\tilde{D}_A - \tilde{D}_B + D_\alpha) - (2r+M)^2(\tilde{D}_A - 2\tilde{D}_B) \right] \right\} \\ & + \alpha K_A (K_A + 2K_B), \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_B = & -\frac{\alpha}{2\tilde{A}} \left\{ \frac{16r^4}{(2r+M)^4} \left[\partial_r \tilde{D}_B + D_\alpha \tilde{D}_B + \tilde{D}_B^2 - \frac{\tilde{D}_A \tilde{D}_B}{2} \right] + \frac{16r^3}{(2r+M)^6} \left[-8M \right. \right. \\ & \left. \left. + 2M(2r+M)(\tilde{D}_A - 3\tilde{D}_B - 2D_\alpha) - (2r+M)^2(\tilde{D}_A - 4\tilde{D}_B - 2D_\alpha) \right. \right. \\ & \left. \left. + -2(2r+M)^2 \frac{\tilde{A} - \tilde{B}}{\tilde{B}} \right] \right\} + \alpha K_B (K_A + 2K_B). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Estas seis ecuaciones de evolución serán las que emplearemos en nuestro código. En términos de estas nuevas variables, los datos iniciales serán

$$\tilde{A} = \tilde{B} = 1, \quad \tilde{D}_A = \tilde{D}_B = 0. \quad (5.41)$$

Y como la métrica de Schwarzschild es estática, la curvatura extrínseca inicial será

$$K_A = K_B = 0. \quad (5.42)$$

Nos falta elegir el gauge. Para el vector de desplazamiento tomaremos $\beta^i = 0$ y veremos los distintos resultados de la simulación al elegir diferentes foliaciones.

Utilizaremos de nuevo el método de Crank-Nicholson iterado de tres pasos y una red con 1000 puntos en la dirección radial a intervalos de $\Delta r = 0.01$ y 2000 pasos de tiempo a intervalos de $\Delta t = 0.005$. La masa del agujero negro se ha tomado como $M = 1$, por lo que la simulación alcanza un tiempo $t = 10M$.

Como hemos comentado en el apartado 3.1, la foliación geodésica no es adecuada para la simulación de agujeros negros, pues los observadores caen rápidamente a la singularidad física. Sin embargo, tiene utilidad como test del código, sabiendo en este caso que la simulación debería fallar en $t = \pi M$, que es el tiempo de caída libre de un observador que se encuentre inicialmente en reposo en el horizonte del agujero negro. Si el código funciona correctamente, podemos esperar que la simulación falle en ese tiempo.

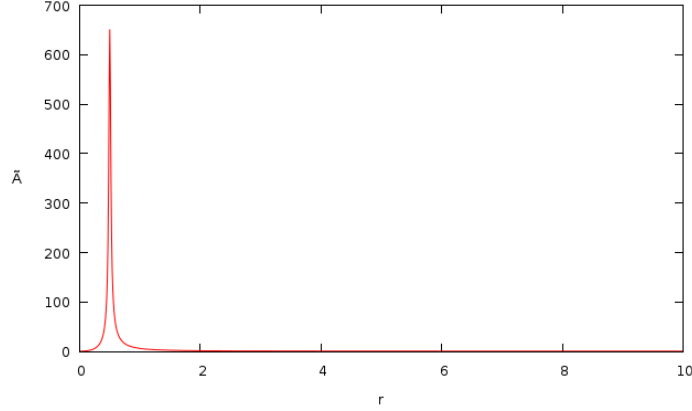


Figura 5.6: Componente radial de la métrica \tilde{A} con foliación geodésica en $t = 3.14M$.

Como podemos ver en la figura 5.6, la componente radial de la métrica aumenta enormemente en tiempos cercanos a $t = \pi M$. Por encima de dicho valor aparecen valores infinitos en las variables que arruinan la simulación, por lo que esta foliación nos permite simular muy poco tiempo.

Una foliación que evita este problema es la foliación maximal, que viene dada por la ecuación (3.3) y que en este caso se reduce a

$$\frac{1}{\tilde{A}\psi^4} \left[\partial_r^2 \alpha + \left(\frac{2}{r} + \tilde{D}_B - \frac{\tilde{D}_A}{2} + 2\partial_r \ln \psi \right) \partial_r \alpha \right] = \alpha (K_A^2 + 2K_B^2). \quad (5.43)$$

Esta ecuación debe integrarse numéricamente en cada paso de tiempo. Dado que es una ecuación de segundo orden en r necesitamos dos condiciones de contorno. Tomaremos como condición en el infinito que

$$\partial_r \alpha|_{r \rightarrow \infty} = \frac{1 - \alpha}{r}, \quad (5.44)$$

lo que implica que α se aproxima a 1 (su valor en el espacio plano) como $1/r$. Como segunda condición vamos a emplear

$$\partial_r \alpha|_{r=0} = 0. \quad (5.45)$$

Esta condición es la que nos dará una situación dinámica, además de permitirnos penetrar el horizonte del agujero negro.

En la figura 5.7 se muestra el lapso en función de r . Para $t = 0$ el lapso es $\alpha = 1$, pero se ve cómo evoluciona de tal forma que en la región cercana al origen el lapso va rápidamente a cero. Este es el llamado colapso del lapso del que hablamos en 3.2. Este se produce porque la foliación maximal no permite que los elementos de volumen cambien, lo que cerca de la singularidad solo se consigue “congelando” la evolución temporal.

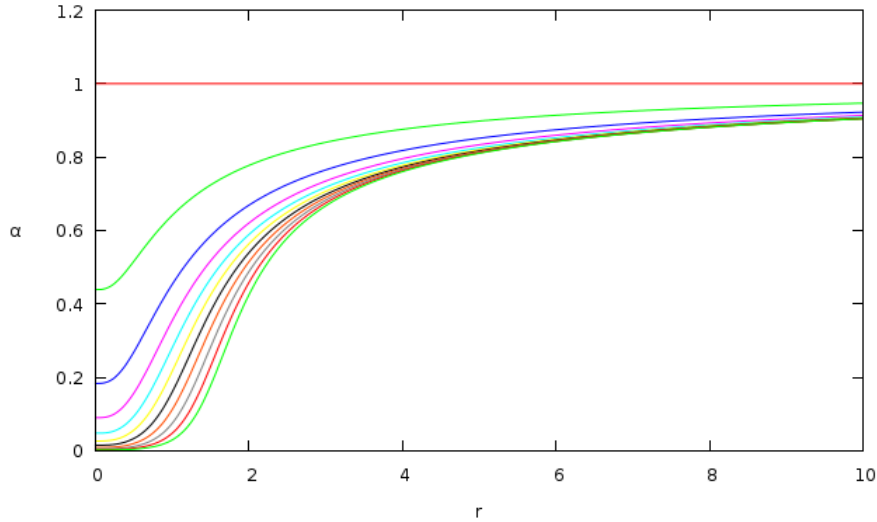


Figura 5.7: Evolución de la función lapso para Schwarzschild con foliación maximal. Se muestran valores cada $t = 1M$.

La figura 5.8 muestra la evolución de la componente radial de la métrica, \tilde{A} . Puede apreciarse cómo la métrica radial va aumentando en la región cercana al horizonte del agujero negro, consecuencia del llamado estiramiento de la foliación. Esto es consecuencia de que, por el colapso del lapso, el tiempo se congele en la región central mientras que en el exterior el tiempo sigue avanzando.

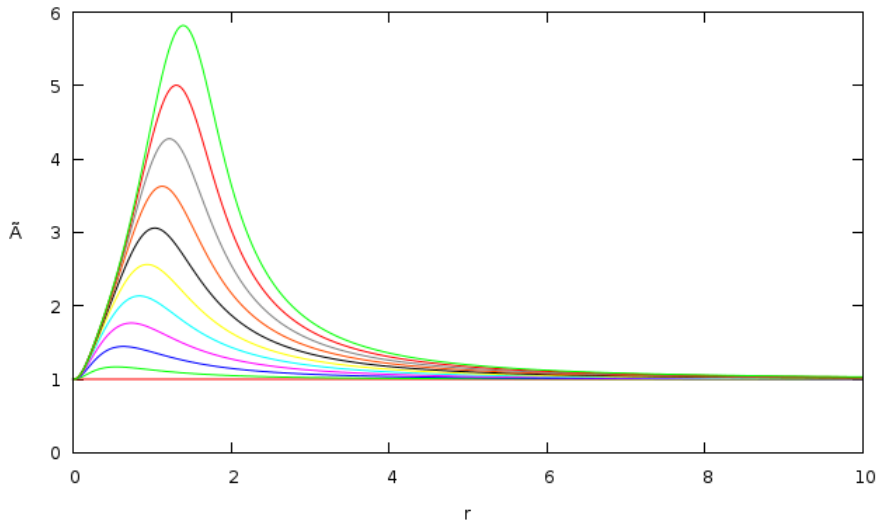


Figura 5.8: Evolución de la variable \tilde{A} para Schwarzschild usando la foliación maximal.

Finalmente, vamos a repetir la simulación con otro gauge del que hablamos en 3.3 la foliación 1+log, correspondiente a la expresión (3.4) con $f(\alpha) = 2/\alpha$. Tenemos entonces una ecuación de evolución del lapso,

$$\partial_t \alpha = -2\alpha K. \quad (5.46)$$

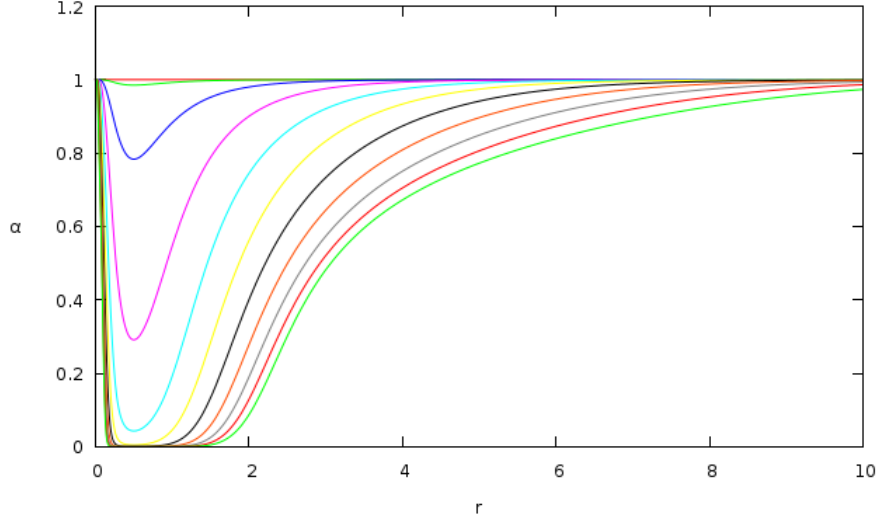


Figura 5.9: Evolución de la función lapso para Schwarzschild con foliación 1+log. Se muestran valores cada $t = 1M$.

Una propiedad interesante de este caso es que el lapso no colapsa en la punción. La razón de esto es que la velocidad de propagación, dada por la ecuación (3.10)

$$v_g = (2\alpha/A)^{1/2} = \left(2\alpha/\tilde{A}\psi^4\right)^{1/2}, \quad (5.47)$$

se anula en $r = 0$. La foliación 1+log mantiene el lapso igual a uno en ambos extremos. Este comportamiento puede mejorarse con la utilización de un lapso “precolapsado” que ya sea cero en la punción al inicio de la simulación. La utilización de un lapso precolapsado es típico en simulaciones de agujeros negros que usan el método de la punción en movimiento (distinto de la punción estática empleada aquí), ya que la aparición de gradientes muy grandes puede causar el fallo de la simulación muy rápidamente.

En cuanto a la velocidad de computación, principal ventaja de la foliación 1+log frente a la maximal, la diferencia en estas simulaciones no es tanta como en un caso general con tres dimensiones espaciales (sin simetría esférica). En este problema se ha observado que la utilización de la foliación 1+log frente a la maximal supone una reducción del tiempo de computación de cerca de un 21 %. Para casos generales, donde la ecuación (3.3) toma una forma más complicada, es de esperar que la diferencia de tiempos sea mayor, lo que es un factor muy a tener en cuenta en problemas que requieren la utilización de supercomputadores.

6. Conclusiones

Debido a la dificultad de resolución de las ecuaciones de campo de Einstein, es requerida la utilización de métodos numéricos. El objetivo de este trabajo era realizar una pequeña introducción a la relatividad numérica, presentando algunos de sus conceptos más relevantes.

Con el formalismo 3+1 podemos separar el espacio y el tiempo mediante una foliación, obteniendo así un conjunto de hipersuperficies espaciales separadas temporalmente. De esta manera, dicho formalismo nos permite separar el espaciotiempo de las ecuaciones de Einstein para obtener un sistema de ecuaciones de evolución que pueden resolverse numéricamente como un problema de valores iniciales. Este sistema nos deja una libertad en la elección de las coordenadas codificada en las llamadas funciones de gauge (función de lapso y vector de desplazamiento), cuya elección tiene una importancia fundamental en la obtención de buenos resultados. Por ello se ha dedicado un capítulo a la descripción breve de algunas de las condiciones de gauge más relevantes. Además, las ecuaciones en 3+1 no son únicas, y las distintas formulaciones tienen distinto comportamiento matemático. El concepto de hiperbolicidad de un sistema de ecuaciones nos sirve para saber si con una formulación dada el problema estará bien planteado.

Finalmente, se ha dedicado un capítulo a comentar los resultados de algunas simulaciones sencillas, pero que sirven para observar algunos de los conceptos introducidos anteriormente. El ejemplo en 1+1 nos ha permitido comprobar cómo distinta elección de gauge afecta de forma importante a la estabilidad de la simulación y en el caso en 3+1 con simetría esférica hemos podido ver algunas de las propiedades de los gauges más empleados en las simulaciones de agujeros negros.

Bibliografía

- [1] B. P. Abbott et al., *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. 116, 061102 (2016).
- [2] E.ourgoulhon, *3+1 Formalism in General Relativity*, Springer, Berlín (2012).
- [3] M. Alcubierre, *Introduction to 3+1 Numerical Relativity*, Oxford University Press, Oxford (2008).
- [4] J.W. York, *Conformal 'thin-sandwich' data for the initial-value problem of general relativity*, Phys. Rev. Lett., 82:1350-1353 (1999).
- [5] T.W. Baumgarte, S.L. Shapiro, *On the numerical integration of Einstein's field equations*, Phys. Rev. D., 59:024007 (1999).
- [6] M. Shibata, T. Nakamura, *Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case*, Phys. Rev. D., 52:5428 (1995).
- [7] M. Alcubierre, *The Appearance of coordinate shocks in hyperbolic formalisms of general relativity*, Phys. Rev. D55 (1997).
- [8] M. Alcubierre, J.A. González, *Regularization of spherically symmetric evolution codes in numerical relativity*, Computer Physics Communications 167, 2 (2005).
- [9] B. Janssen, *Teoría de la Relatividad General*, Apuntes de la Universidad de Granada (2013).