



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Modelos dinámicos de haces de fibras.
Comparación entre dos métodos de cálculo
Dynamical fiber-bundle models. Comparison
between two approaches

Autor/es

Miguel Ángel Clemente Salvador

Director/es

Amalio Fernández-Pacheco Pérez
Javier Gómez Jiménez

Facultad / Escuela

Facultad de Ciencias

Año 2017

Índice

1. Introducción	2
2. El modelo	5
2.1. Reparto local de cargas	5
2.2. Método estándar de Monte Carlo	8
2.3. Nuevo método de Monte Carlo o método “radiactivo”	10
3. Resultados y discusión	11
3.1. Comprobación de la validez de los programas	11
3.2. Comparación entre los dos métodos de cálculo	12
3.2.1. Medias y varianzas del tiempo de rotura	12
3.2.2. Comparación de la eficiencia de ambos métodos	14
3.3. Distribución de tiempos de rotura	16
3.4. Punto crítico	19
3.5. Dinámica de los modelos	21
4. Conclusión	23
Referencias	24

1. Introducción

En el presente trabajo se estudia la rotura de un conjunto de elementos interconectados e interactuantes, cada uno de los cuales soporta una cierta carga σ . Partiendo de una descripción microscópica (que distingue los elementos individualmente), se estudian las propiedades de rotura de la totalidad del sistema, que dependen de las dimensiones del mismo y del valor de ciertos parámetros, relacionados con las propiedades mecánicas del material que se quiere simular.

El interés de este trabajo reside en la modelización de la rotura de materiales reales intrínsecamente heterogéneos sometidos a esfuerzos, como puede ser el caso de un estrato o roca durante un seísmo, una capa de nieve antes de un alud, un tejido muscular (natural o artificial) o la vela de un barco. De hecho, los primeros trabajos llevados a cabo en este tipo de modelos [1] trataban de determinar las propiedades estadísticas de la resistencia de haces de fibras textiles a partir de las propiedades de las fibras individuales, por lo que a estos modelos se les conoce en la literatura como modelos de haces de fibras (FBM: fiber bundle models).

Los modelos de haces de fibras pueden describir tanto situaciones estáticas como dinámicas:

- Los **modelos estáticos** tratan de determinar la mínima carga necesaria para romper el haz. Por lo tanto, las simulaciones consisten en incrementar gradualmente la carga hasta que se produce la rotura completa del sistema, y el tiempo no interviene.
- Los **modelos dinámicos** o de fatiga suponen la rotura completa de la red en todos los casos, por lo que la variable de interés es el tiempo de rotura. En el proceso de rotura del sistema, la carga soportada por los elementos sanos (o algunos de ellos) evoluciona con el tiempo. En los casos más sencillos (como el presente trabajo), la carga total sobre el sistema permanece constante.

En este trabajo se utilizan los modelos dinámicos, de manera que el interés se va a centrar en computar el tiempo de rotura del haz de fibras para diferentes valores de los parámetros.

Una simulación típica de este tipo de modelos supone que inicialmente todos los elementos están intactos (sin romper). Tanto en el caso estático como en el dinámico, cuando en un momento dado de la simulación se rompe un elemento, la carga que éste estaba soportando se transfiere a otros elementos sanos. Esta transferencia, aspecto esencial de este tipo de modelos, puede parametrizarse de varias formas, lo que permite distinguir tres casos extremos de modelos de haces de fibras [2]:

- (a) **Reparto equitativo de carga (ELS, equal-load sharing)**: la carga del elemento roto se transfiere al resto de elementos de la red, de forma equitativa. El modelo ELS fue propuesto por Peirce [3], aunque el primer trabajo riguroso fue el de Daniels [1], que trataba con el modelo ELS estático. La solución analítica para el límite termodinámico, que consistía en una expresión que permitía calcular exactamente la probabilidad de rotura de un haz infinito, fue obtenida por Phoenix [4] y McCartney-Smith [5]. Respecto al modelo ELS dinámico, fue estudiado por primera vez por Coleman [6–11]; aunque fue Phoenix [12, 13] quien desarrolló una teoría general de la dinámica de un haz de fibras de tipo ELS.

- (b) **Reparto local de carga (LLS, local-load sharing)**: la rotura de un elemento implica que su carga se reparte sólo entre los elementos contiguos al mismo. Para añadir realismo a este caso, se trabaja simetrizando la carga, es decir, imponiendo que la carga soportada por todos los elementos que son límites de una grieta (conjunto de elementos rotos en contacto) sea la misma. Los primeros trabajos que trataron el modelo estático con transferencia LLS son los de Scop y Argon [14], Harlow y Phoenix [15–18] y Smith [19]. Phoenix [15] proporciona, para el caso unidimensional, expresiones analíticas que muestran cómo disminuye el tiempo de rotura del sistema conforme su tamaño aumenta, tanto para los modelos estáticos como los dinámicos [4].
- (c) **Reparto jerárquico de carga (HLS, hierarchical load-sharing)**: la carga del elemento roto se redistribuye de forma jerárquica (fractal) entre los elementos cercanos, en una región del mismo orden que el tamaño de la grieta. Este reparto fue introducido por Turcotte et al. [20], en el ámbito de los terremotos.

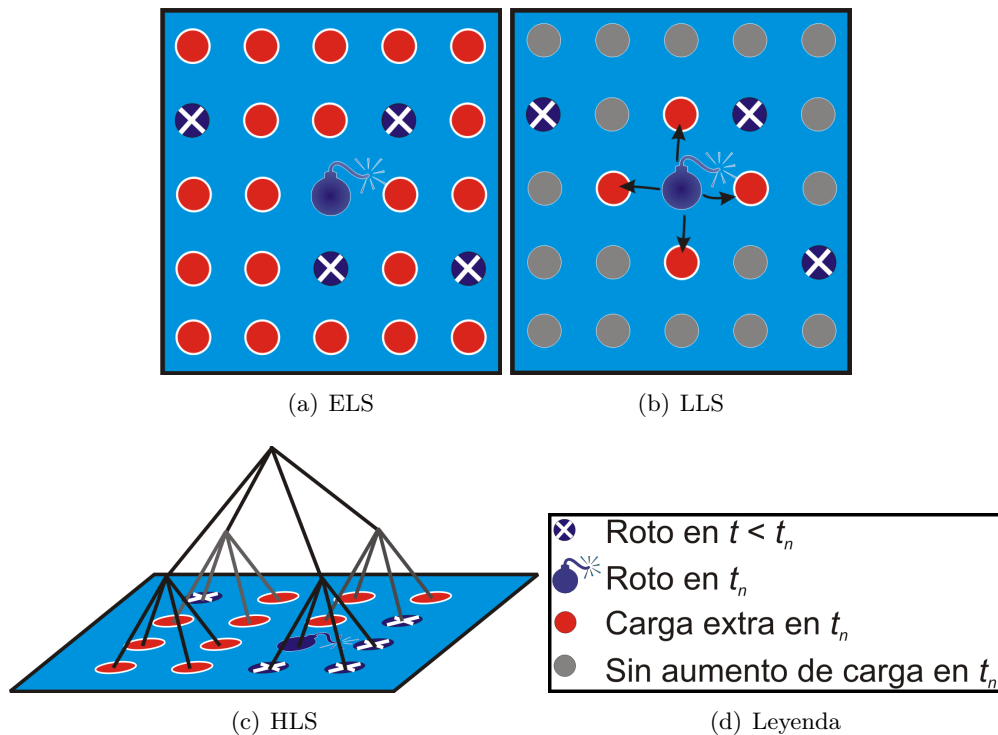


Figura 1: Modos de transferencia de la carga del elemento roto en t_n . En el modelo ELS la carga se reparte por igual entre todos los elementos supervivientes. En el modelo LLS la carga se reparte entre los elementos adyacentes (aunque como veremos, el tratamiento riguroso es más complejo). Finalmente, en el modelo HLS la carga se reparte entre los elementos del mismo nodo (en el caso del esquema, como ya están rotos es necesario remontarse a un nivel superior).

El objetivo de este trabajo es profundizar en el comportamiento de los modelos LLS dinámicos, que se simulan a su vez mediante dos algoritmos diferentes: el método estándar de Monte Carlo (*Sección 2.2*) y el nuevo método de Monte Carlo o método “radiactivo” (*Sección 2.3*).

Como se verá en la *Sección 3*, ambos métodos conducen a resultados idénticos respecto a la media de la distribución de tiempos de rotura, pero tanto la varianza (y el número de iteraciones para alcanzar la convergencia) como los tiempos de simulación son menores, lo que permite calcular con mayor precisión el tiempo de rotura de un sistema LLS dinámico con el nuevo método radiactivo.

Otro objetivo de este trabajo es comprobar la existencia o ausencia de puntos críticos [2]. En el contexto de los modelos dinámicos de haces de fibras, cuando hay un tiempo de rotura finito y no nulo para una red infinitamente grande, se dice que existe un punto crítico. Para los modelos estáticos, el punto crítico es el valor de la carga aplicada a partir de la cual una red de infinitas fibras se rompe con probabilidad 1, y por debajo de la cual la red nunca se rompe.

El comportamiento crítico puede aparecer para dimensionalidades altas y desaparecer para dimensionalidades bajas. En tal caso, la dimensión más baja a la que aparece el comportamiento crítico se denomina dimensión crítica.

En el caso de los modelos LLS (tanto estáticos como dinámicos), se sabe [21] que en 1D no hay punto crítico, mientras que en el caso ELS, que corresponde a una generalización a infinitas dimensiones del LLS (aproximación de campo medio), sí que aparece punto crítico. Por lo tanto, los modelos LLS presentan una dimensión crítica mayor o igual que 2. En este trabajo se pretende, haciendo simulaciones en más de una dimensión, encontrar la dimensión crítica del modelo LLS dinámico.

Por lo tanto, los objetivos de este trabajo son:

- Estudiar, mediante dos métodos diferentes, el **tiempo de rotura** de un haz de fibras con el modelo LLS dinámico y su dependencia con el tamaño del sistema y con los parámetros del material, comparándolo con los resultados de la literatura.
- **Comparar los dos métodos de cálculo**, centrándonos en la media y en la varianza de los tiempos de rotura, así como en la eficiencia de la simulación.
- Comprobar que en el modelo LLS dinámico no existe **punto crítico** para el caso unidimensional, y hallar la **dimensión crítica** de este modelo.

2. El modelo

Para simular la dinámica de un haz de fibras de tipo LLS, en los casos más sencillos (1D y 2D) podemos considerar una matriz de tamaño $N \times M$, siendo N el número de filas y M el número de columnas (para el caso unidimensional, $N = 1$ ó $M = 1$, por lo que tenemos un vector). La información almacenada en cada elemento de matriz (σ_{ij}) es la carga soportada por dicha fibra. Si ya está rota, asignamos el valor de 0 a dicho elemento.

Inicialmente todas las fibras soportan una carga σ_0 , que tomamos como la unidad sin pérdida de generalidad ($\sigma_0 = 1$). Dado que el reparto de cargas incrementa el valor de la que soportan los elementos supervivientes (la carga total se conserva), dichos elementos tienen $\sigma_{ij} \geq 1$ (la igualdad se da para los elementos intactos que no limitan con elementos ya rotos).

La secuencia de rotura de los elementos viene dada por un proceso aleatorio, que es distinto para cada uno de los dos métodos utilizados, como se describe en las *Secciones 2.2 y 2.3*. Para realizar las simulaciones se ha escrito un código en C, que está disponible en el Apéndice A.

2.1. Reparto local de cargas

Por simplicidad, comenzamos estudiando el caso unidimensional. Se tiene una cadena de N elementos, con cargas $\{\sigma_i\}$ ($i = 0, \dots, N - 1$). El elemento N y el elemento 0 coinciden, $\sigma_N = \sigma_0$ (se utilizan condiciones de contorno periódicas).

A medida que se rompen los elementos, el proceso de transferencia de la carga se desarrolla de manera que la carga soportada por todos los elementos sanos que limitan con la misma grieta sea la misma (se cumple la regla de simetría). Si un elemento sano es contiguo a dos grietas distintas, la carga que soporta corresponde a la contribución de ambas grietas. Como veremos, si un elemento soporta una carga mayor, es más probable que se rompa antes por fatiga, lo cual es físicamente razonable. Por tanto, un elemento que limite con dos grietas es más proclive a romperse antes, por lo que las grietas tienden a fusionarse. Para ilustrar el proceso de rotura, la *Figura 2* muestra de forma gráfica un ejemplo de secuencia de rotura con $N = 6$.

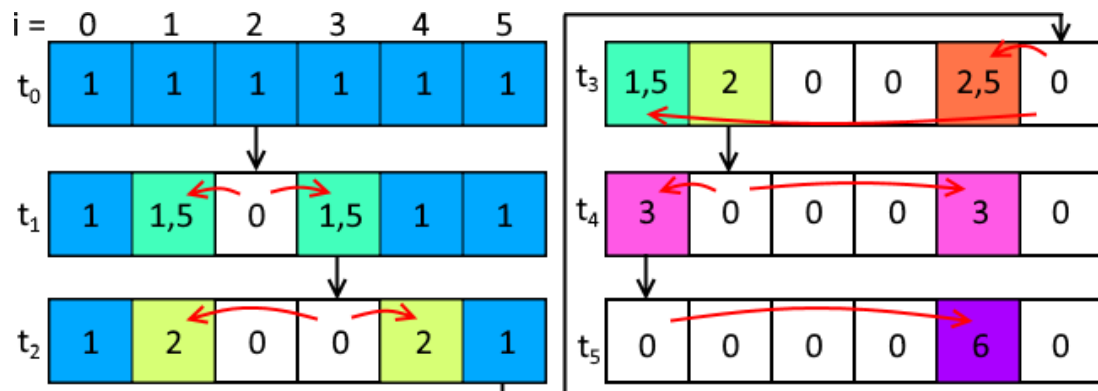


Figura 2: Ejemplo de secuencia de rotura de una cadena unidimensional con $N = 6$ y condiciones periódicas de contorno. Los números dentro de cada celda indican la carga soportada por dicho elemento. Las flechas negras indican la secuencia de rotura, y las rojas representan la transferencia de carga.

Inicialmente (en $t = t_0 \equiv 0$), se tiene que $\sigma_i = 1$ ($i = 0, \dots, 5$). Mediante uno de los dos algoritmos (estándar o radiactivo), se determina qué elemento será el primero en romperse. Sea éste el elemento 2 ($t = t_1$), como muestra la *Figura 2*. En términos del algoritmo, se forma una grieta de tamaño 1. La carga de dicho elemento se reparte por igual entre los dos elementos que limitan con la grieta (1 y 3). En un instante posterior ($t = t_2$) se rompe el elemento 3, de manera que la grieta tiene ahora tamaño 2. Como consecuencia de la regla de simetría, la carga soportada por los elementos que la limitan es la misma ($\sigma_1 = \sigma_4 = 2$).

En $t = t_3$, la rotura del elemento 5 da lugar a una nueva grieta. La carga se incrementa en 0,5 tanto en el elemento 4 como en el 0 (por las condiciones periódicas de contorno, los elementos 0 y 5 son adyacentes). Se observa que $\sigma_0 \neq \sigma_4$ a pesar de que ambos elementos limitan con la misma grieta. Esto se debe a que el elemento 4 limita con dos grietas diferentes, por lo que soporta la contribución de ambas y su carga es mayor (como hemos explicado anteriormente).

En $t = t_4$ se rompe el elemento 1. Como tanto el elemento 0 como el 4 limitan con las mismas grietas, soportan la misma carga. Finalmente, en $t = t_5$ se rompe el elemento 0, quedando toda la carga en el elemento 4. La simulación termina cuando se rompe este elemento (el instante $t = t_6$, en el que todos los elementos están rotos), y el tiempo de rotura del sistema (que es la variable de interés) es:

$$T = t_6 - t_0 = t_6 \equiv \sum_{i=0}^5 \delta_i,$$

donde $\delta_i \equiv t_{i+1} - t_i$ es la vida de la configuración i -ésima, cuyo cálculo es uno de los objetivos principales del algoritmo y depende del método utilizado (clásico o radiactivo).

Se observa que el estado del sistema en un instante dado (determinado por $\{\sigma_i\}$) no depende del pasado del material, sino que está completamente determinado por las grietas presentes en el sistema en ese momento. Por lo tanto, dados los índices de los elementos rotos en cualquier instante, se puede reconstruir el valor de las cargas que soportan todos los elementos sanos. Concretamente, si el elemento i -ésimo está sano en un cierto instante de tiempo, la carga que soporta es:

$$\sigma_i = 1 + \frac{r_l}{s_l} + \frac{r_r}{s_r}, \quad (1)$$

donde r_l y r_r son el número de elementos de las grietas de la izquierda y de la derecha del elemento i -ésimo, respectivamente (si no hay grietas, $r_l = r_r = 0$ y $\sigma_i = 1$, que es el valor de la carga que corresponde a un elemento intacto), y s_l y s_r , que sólo se evalúan para elementos sanos contiguos a alguna grieta, son el perímetro de la grieta o grietas contiguas ($s_l = s_r = 1$ si el elemento i -ésimo es el último elemento sano, pues las grietas de la izquierda y de la derecha son una sola, y sólo tiene un vecino; $s_l = s_r = 2$ en caso contrario).

De esta forma, para calcular la carga soportada por un elemento sano, basta con conocer con qué grieta o grietas limita dicho elemento, así como el número de vecinos sanos y el número de elementos de dichas grietas. Por ejemplo, para el caso de la *Figura 2* en $t = t_3$, se tienen 2 grietas, una de ellas con 2 elementos rotos (elementos 2 y 3) y la otra con 1 elemento roto (elemento 5). El cálculo de las cargas en este caso se detalla en la *Tabla 1*.

Elemento	Estado	r_l	s_l	r_r	s_r	σ
0	Sano	1	2	0	2	1,5
1	Sano	0	2	2	2	2
2	Roto	-	-	-	-	0
3	Roto	-	-	-	-	0
4	Sano	2	2	1	2	2,5
5	Roto	-	-	-	-	0

Tabla 1: Ejemplo de cálculo de las cargas para la simulación expuesta en la *Figura 2* en el instante $t = t_3$. Los elementos rotos tienen carga nula, mientras que la carga de los sanos se calcula con la *Ec.(1)*.

Con estas definiciones, la generalización a 2D es directa. En lugar de trabajar con un vector se utiliza una matriz de cargas. Cada elemento sano puede ser vecino de hasta cuatro grietas (correspondientes a los vecinos izquierdo, derecho, superior e inferior), por lo que su carga es:

$$\sigma_{ij} = 1 + \frac{r_l}{s_l} + \frac{r_r}{s_r} + \frac{r_u}{s_u} + \frac{r_d}{s_d}. \quad (2)$$

Esta expresión es muy similar a la obtenida para el caso unidimensional, *Ec.(1)*, pero con términos adicionales, correspondientes a las grietas superior (u) e inferior (d). Sin embargo, ahora los valores de s_l , s_r , s_u y s_d (que cuantifican el perímetro de la grieta) ya no son 1 ó 2, sino que pueden tomar cualquier valor, dependiendo de la forma y el tamaño de la grieta. En el caso bidimensional, las condiciones periódicas de contorno imponen, para una red de N filas y M columnas, que $\sigma_{iM} = \sigma_{i0}$ y $\sigma_{Nj} = \sigma_{0j}$.

Algoritmo para el reparto de cargas

El reparto de cargas en 1D es trivialmente abordable de muchas formas distintas. Sin embargo, el caso 2D es más complejo. Para aplicar la *Ec.(2)*, es necesario conocer dónde están las grietas, así como su tamaño y su perímetro. En la literatura existen varios algoritmos para identificar clústeres (y las grietas son un tipo especial de clúster), como el de Hoshen–Kopelman [22], que es el más eficiente. Dicho algoritmo lee un vector o matriz con elementos rotos y etiqueta las distintas grietas con diferentes índices. Con este algoritmo, el procedimiento sería el siguiente:

1. Escanear el vector (1D) o matriz (2D) para **encontrar las grietas**. Simultáneamente, guardar el número de elementos de cada grieta (tamaño).
2. Escanear el vector o matriz para encontrar los elementos que son **vecinos** de una o varias grietas. Simultáneamente, guardar el número de vecinos de cada grieta (**perímetro**).
3. Leer la matriz y **calcular la carga** de cada elemento sano, aplicando la *Ec.(1)* o la *Ec.(2)*.

Para evitar escanear tres veces el vector o matriz, se utiliza un algoritmo propio que va modificando una serie de vectores que almacenan distintos índices para el cálculo. Este algoritmo permite reducir de manera importante el tiempo de cálculo de cada simulación. El proceso de actualización simultánea de los vectores y matrices de trabajo se detalla en el Apéndice B.

2.2. Método estándar de Monte Carlo

Para el método estándar de Monte Carlo [21], la aleatoriedad se incluye al principio de cada simulación y no se modifica, lo cual se conoce como desorden “quenched”. Para ello, se asigna a cada elemento un tiempo inicial de rotura bajo carga unidad (t_{i0}), dado por la distribución de Weibull, que es la más utilizada en el ámbito de resistencia de materiales [23, 24]:

$$F(t_{i0}) = 1 - \exp \left[- \{ \nu(\sigma) t_{i0} \}^\beta \right], \quad (3)$$

donde β es el índice de Weibull (que tomaremos como la unidad, de manera que la distribución de tiempos de rotura es exponencial), y $\nu(\sigma)$ es la regla de rotura, que viene dada por la siguiente expresión:

$$\nu(\sigma) = \nu_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^\rho, \quad (4)$$

siendo ρ un exponente que parametriza el grado de homogeneidad o heterogeneidad de la muestra (si ρ es elevada, el material es más homogéneo), al que llamamos índice de heterogeneidad. También se puede elegir $\nu_0 = 1$ sin pérdida de generalidad. Por lo tanto, como inicialmente $\sigma_{ij} = \sigma_0 = 1 \forall ij$, la *Ec. (3)* se simplifica a:

$$F(t_{i0}) = 1 - \exp[-t_{i0}] \Rightarrow t_{i0} = -\ln[1 - F(t_{i0})]. \quad (5)$$

Esta expresión nos permite establecer la distribución inicial de tiempos de rotura (t_{i0}), asignando a F valores aleatorios entre 0 y 1 independientes y distribuidos uniformemente. Esta asignación se realiza al comienzo de la simulación por lo que el orden de rotura de los elementos queda fijado desde el principio (desorden “quenched”), que es la característica esencial del método estándar para resolver este tipo de modelos.

Durante el proceso de rotura del sistema, debido a la transferencia de carga de unos elementos a otros, el tiempo de rotura de los elementos se reduce progresivamente, de manera que el tiempo real de rotura del elemento i -ésimo (T_{iF}) viene dado por:

$$t_{i0} = \int_0^{T_{iF}} \left(\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} \right)^\rho dt = \int_0^{T_{iF}} [\sigma(t)]^\rho dt$$

Como $\sigma(t)$ es una función constante a tramos (los cambios se producen con la rotura de cada elemento, pero entre roturas es constante), la integral se puede reescribir como un sumatorio. Si llamamos δ_j al intervalo de tiempo entre roturas de los elementos j y $j+1$ y $\sigma_i(j)$ a la carga soportada por el elemento i -ésimo en ese mismo intervalo de tiempo, se tiene:

$$\begin{aligned} t_{i0} &= \sum_{j=0}^{j_{iF}} [\sigma_i(j)]^\rho \delta_j = [\sigma_i(0)]^\rho \delta_0 + \dots + [\sigma_i(j_{iF})]^\rho \delta_{j_{iF}} = \tau_i + [\sigma_i(j_{iF})]^\rho \delta_{j_{iF}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta_{iF} = \frac{t_{i0} - \tau_i}{[\sigma_i(j_{iF})]^\rho}, \text{ con: } \tau_i = \sum [\sigma_i(j)]^\rho \delta_j. \end{aligned} \quad (6)$$

De esta forma, para cada elemento podemos hablar del “tiempo transcurrido” τ_i , en cuya definición el sumatorio se extiende a todas las iteraciones anteriores a la actual (es el tiempo transcurrido para cada elemento, “pesado” con σ^ρ). En la iteración actual (j_{iF}), se calculan los “tiempos restantes” para cada elemento (δ_{iF}), que son los tiempos de rotura que tendría cada elemento en caso de que fuera el próximo en romperse. Por lo tanto, se calculan utilizando las cargas presentes en ese momento ($\{\sigma_i[j_{iF}]\}$), lo cual nos permite saber cuál sera el siguiente elemento en romperse (el de menor δ_{iF}).

Algoritmo utilizado para implementar el método estándar

Con las expresiones obtenidas en el apartado anterior, el algoritmo utilizado es el siguiente:

1. Obtener la distribución de tiempos iniciales (t_{i0}) con la *Ec.(5)*.
2. Buscar el elemento con mínimo tiempo de rotura ($\delta_0 = \min \{t_{i0}\}$) y romperlo.
3. Calcular los tiempos transcurridos para cada elemento: $\tau_i = [\sigma_i(0)]^\rho \delta_0 = \delta_0$ (ya que $\sigma_i(0) = 1$).
4. Repartir las cargas del elemento roto según el esquema LLS (ver *Sección 2.1*).

Y a partir de este momento, se itera el siguiente proceso hasta que se rompe todo el sistema:

1. Calcular los tiempos restantes en la iteración k ($\delta_{iF}(k)$), utilizando la *Ec.(6)*, con la distribución de cargas presente en ese instante de tiempo.
2. Buscar el elemento con mínimo tiempo de rotura ($\delta_k = \min \{\delta_{iF}(k)\}$) y romperlo.
3. Incrementar los tiempos transcurridos para cada elemento: $\tau_i(k) = \tau_i(k-1) + [\sigma_i(k)]^\rho \delta_k$
4. Repartir las cargas del elemento roto (ver *Sección 2.1*).

Cuando finaliza el proceso, el tiempo de rotura de todo el sistema es:

$$T = \sum_{k=0}^{k_{max}} \delta_k, \quad (7)$$

con $k_{max} = N - 1$, para el caso unidimensional, y $k_{max} = N \cdot M - 1$, en 2D (k_{max} es el número de elementos a romper, descontando el primero).

2.3. Nuevo método de Monte Carlo o método “radiactivo”

En el nuevo método de Monte Carlo o método “radiactivo” [21] [25] [26], la componente aleatoria viene dada directamente por la carga soportada por cada elemento: cuanto mayor sea ésta, mayor es la probabilidad de rotura (desorden “annealed”). Por analogía a los procesos radiactivos, podemos definir una anchura de desintegración para cada elemento (en el caso 2D, Γ_{ij}) como:

$$\Gamma_{ij} = \sigma_{ij}^p, \quad (8)$$

de forma que la anchura de desintegración del sistema en la iteración k es:

$$\Gamma(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \Gamma_{ij}(k), \quad (9)$$

y la probabilidad de que se rompa el elemento (ij) en dicha iteración es:

$$p_{ij}(k) = \frac{\Gamma_{ij}(k)}{\Gamma(k)}. \quad (10)$$

Por lo tanto, en cada paso temporal se calculan estas probabilidades y se elige el elemento a romper de acuerdo con ellas. Para ello, se divide el intervalo $[0,1)$ en segmentos, cada uno de una longitud igual a la probabilidad de rotura del elemento. Mediante un número aleatorio iid entre 0 y 1, se determina el segmento en el que cae, que corresponde al elemento que se rompe.

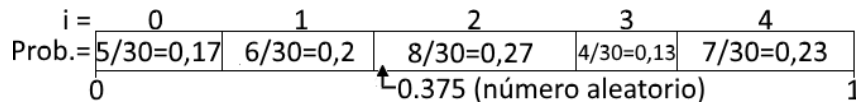


Figura 3: Ejemplo de elección del elemento a romper. En este caso, como el número aleatorio ha sido 0.375, el elemento que se rompe es el $i = 2$.

Además, a partir de $\Gamma(k)$, podemos obtener la vida media de la configuración (δ_k) y, una vez terminada la simulación, el tiempo de rotura de la red (T), utilizando la *Ec.(7)*:

$$\delta_k = \frac{1}{\Gamma(k)}. \quad (11)$$

Algoritmo utilizado

1. Dado el vector (o matriz) de cargas, se calcula la anchura de desintegración mediante las *Ecs. (8) y (9)*, así como la probabilidad de rotura de cada elemento, utilizando la *Ec.(10)*. Haciendo uso de la anchura de desintegración del sistema (Γ), se calcula el tiempo de vida de la configuración mediante la *Ec.(11)*.
2. A partir de las probabilidades de rotura se obtiene el elemento a romper (ver *Figura 3*).
3. Se rompe dicho elemento y se reparten las cargas, como se explica en la *Sección 2.1*.

3. Resultados y discusión

3.1. Comprobación de la validez de los programas

Una vez descrito el modelo, procedemos a presentar los resultados obtenidos a partir de las simulaciones, que se han realizado utilizando los programas que aparecen en el Apéndice A. Para el método clásico en el caso unidimensional podemos comparar los resultados obtenidos con los que aparecen en la literatura [27], con el fin de comprobar la validez del código escrito. Dicha comparación puede verse en la *Figura 4*, donde se aprecia que los resultados obtenidos mediante nuestro programa son consistentes con los de la literatura, tanto para el valor medio de T como para su desviación estándar.

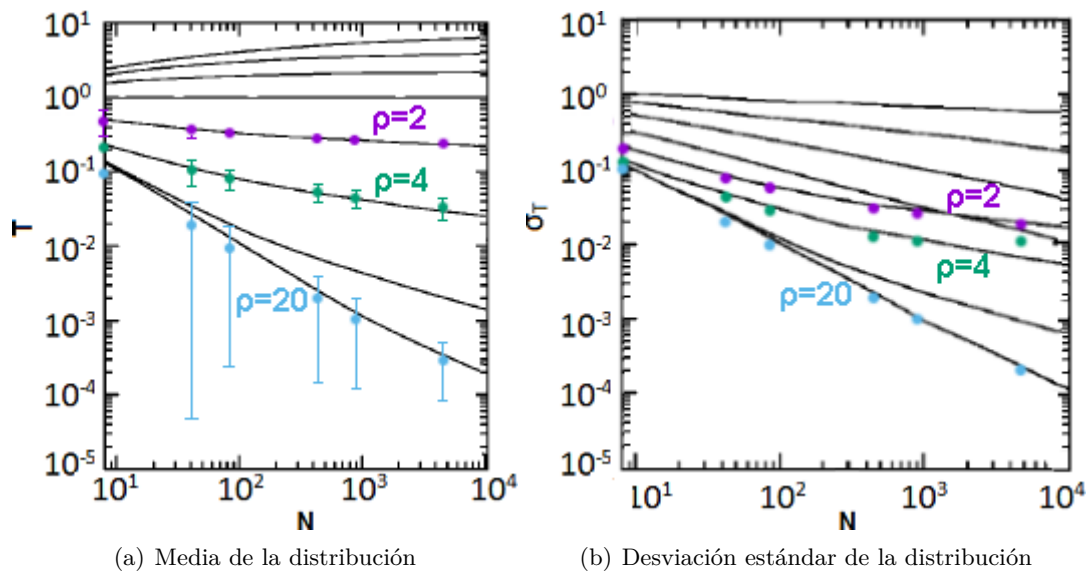


Figura 4: Comparación entre los resultados de la literatura (líneas negras) y los obtenidos con las simulaciones, utilizando el método clásico (puntos de colores). (a) muestra la media de distribución de tiempos de rotura, y (b), la desviación estándar de la distribución (obtenida como la raíz de la varianza). Se observan pequeñas discrepancias, especialmente en redes de gran tamaño, que se deben a la falta de estadística de las simulaciones realizadas.

En el Apéndice A se proporciona el listado de dos códigos diferentes, uno para el caso 1D y otro para 2D, pues de esta forma se puede optimizar el caso unidimensional, haciendo uso de funciones distintas, de ejecución más rápida. Sin embargo, el código utilizado para el caso 2D es capaz de simular también el modelo unidimensional (estableciendo $N = 1$ ó $M = 1$), o incluso redes con otras formas, no cuadradas (con $N \neq M$ en general). Realizando simulaciones con el modelo 2D tomando $N = 1$ (o $M = 1$) podemos comprobar si ambos códigos son coherentes entre sí. La *Figura 5* muestra el resultado de esta comprobación.

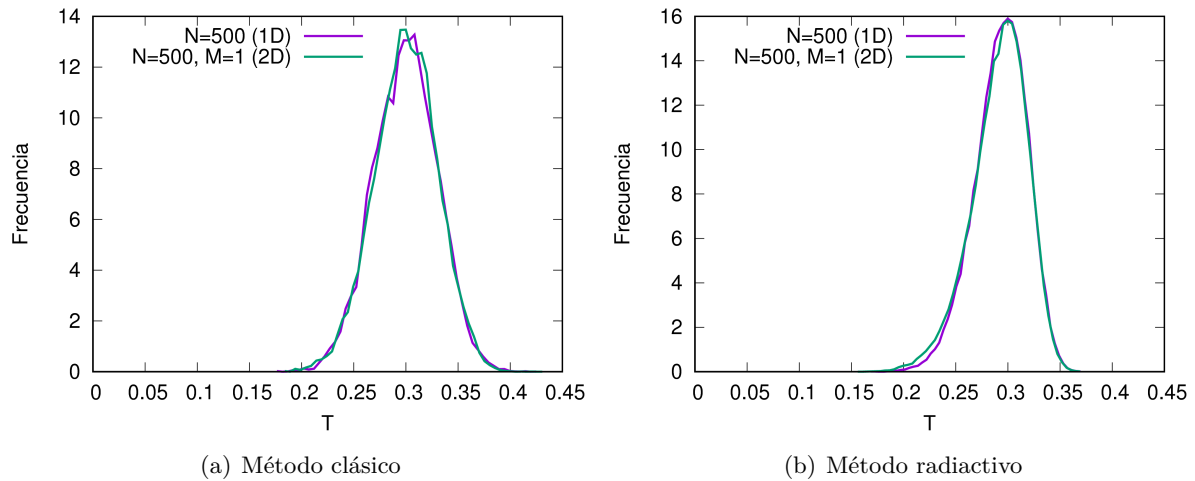


Figura 5: Comparación entre los resultados obtenidos con el código utilizado para 1D y el código utilizado para 2D (estableciendo $M=1$), para una cadena de 500 elementos y $\rho = 2$, utilizando el método clásico (a) y el radiactivo (b).

3.2. Comparación entre los dos métodos de cálculo

3.2.1. Medias y varianzas del tiempo de rotura

Como ya hemos comentado, en los modelos dinámicos uno de los “observables” más importantes es el tiempo de rotura del sistema, T , dados unos valores de ρ y N . Por tanto, para comparar los resultados de ambos métodos (el clásico y el radiactivo) nos vamos a fijar en la media y la desviación estándar de dicho observable.

Tanto en 1D como en 2D los resultados obtenidos para el valor medio del tiempo de rotura con los dos métodos de cálculo son prácticamente coincidentes, como muestra la *Tabla 2*. Sin embargo, la desviación estándar es diferente en ambos métodos, siendo menor en el método radiactivo. La *Figura 6* muestra la variación de la desviación estándar del tiempo de rotura con el tamaño del sistema para el modelo 1D (izquierda) y 2D (derecha) para ambos métodos. En el caso 1D se observa que la desviación estándar es menor para el método radiactivo cuando los sistemas simulados son pequeños, pero igual para sistemas más grandes. Por el contrario, en el caso 2D la desviación estándar del tiempo de rotura por el método radiactivo es siempre mucho menor, lo que permite obtener el valor de T con mucha mayor precisión que con el método estándar de Monte Carlo para una simulación de duración dada (*Figura 7*), como se muestra en el siguiente apartado.

ρ	1D			2D		
	N	T (clásico)	T (radiactivo)	$N \cdot M$	T (clásico)	T (radiactivo)
2	50	0,38278	0,38192	49	0,49549	0,49522
	100	0,34816	0,34816	100	0,48707	0,48704
	500	0,29459	0,29459	484	0,47995	0,47989
	1000	0,28161	0,27783	1024	0,47920	0,47866
	5000	0,25294	0,24317	5041	0,47806	0,47798
4	50	0,10920	0,10920	49	0,21910	0,21930
	100	0,08557	0,08557	100	0,20564	0,20576
	500	0,05575	0,05445	484	0,19138	0,19077
	1000	0,04591	0,04631	1024	0,18739	0,18746
	5000	0,03510	0,03290	5041	0,18423	0,18396
20	50	0,02016	0,02015	49	0,02383	0,02386
	100	0,01001	0,01015	100	0,01344	0,01329
	500	0,00212	0,00215	484	0,00486	0,00470
	1000	0,00114	0,00114	1024	0,00314	0,00319
	5000	0,00031	0,00032	5041	0,00171	0,00164

Tabla 2: Comparación de los resultados obtenidos mediante los dos métodos para la media de la distribución de los tiempos de rotura en 1D y en 2D.

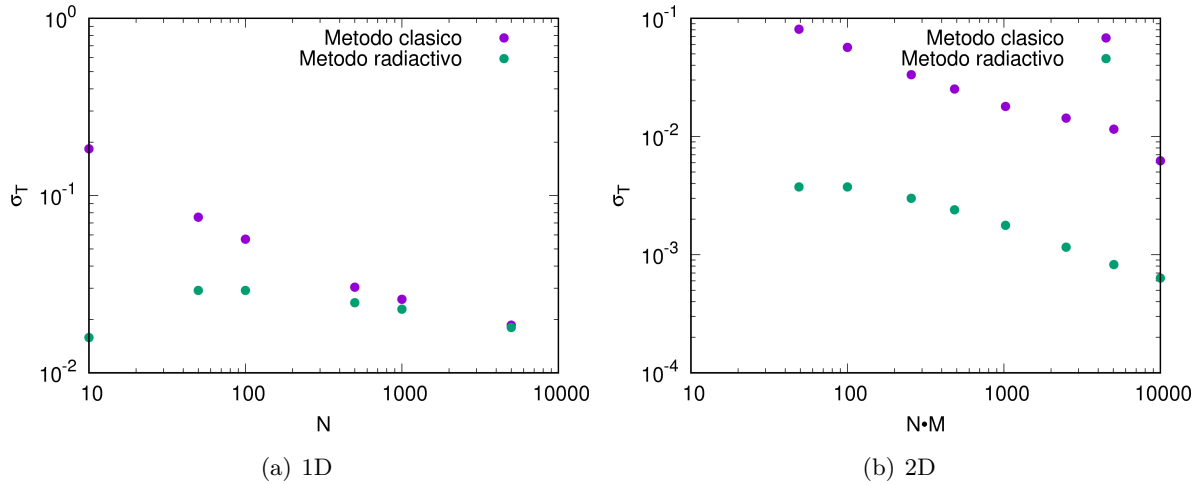


Figura 6: Comparación entre la desviación estándar (raíz cuadrada de la varianza) obtenida mediante los dos métodos de cálculo para distintos tamaños del sistema. (a) muestra el caso unidimensional, y (b) el caso bidimensional (con $N = M$). En ambos casos, la desviación estándar es inferior para el método radiactivo.

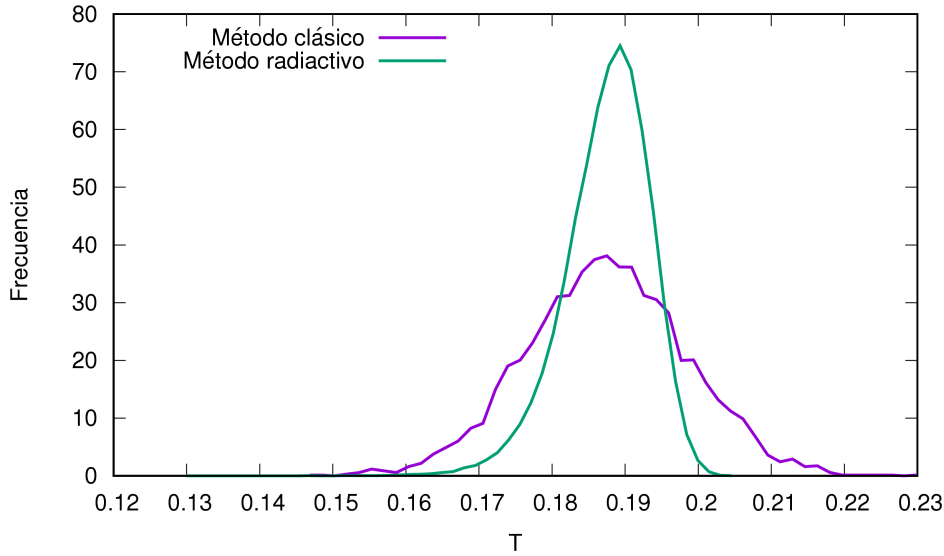


Figura 7: Histogramas de los tiempos de rotura obtenidos con el método clásico y con el método radiactivo para una red de tamaño 32×32 y $\rho = 4$. El valor medio es igual en ambos métodos, pero la varianza es mayor en el método clásico (la curva es más ancha). Además, a pesar de haber utilizado el mismo número de simulaciones en ambos métodos (10^5), con el método clásico la curva es más irregular (la estadística es más pobre), por lo que se requeriría un número mayor de simulaciones para obtener el tiempo de rotura con un número determinado de cifras significativas.

3.2.2. Comparación de la eficiencia de ambos métodos

La eficiencia de ambos algoritmos se ha comprobado midiendo el tiempo que cuesta realizar un número determinado de simulaciones para cada uno de ellos y para distintos tamaños del sistema. Los resultados han sido obtenidos en un ordenador con Windows 10, procesador Intel(R) Core(RM) i7-5500U CPU a 2.40 GHz y 6GB de memoria RAM.

Para el caso 1D, los tiempos de simulación se muestran en la *Tabla 3*, y en el caso bidimensional, en la *Tabla 4*. En ambos casos, se aprecia que el método radiactivo es más eficiente: las simulaciones se realizan en menor tiempo, y además, la diferencia aumenta con el tamaño del sistema, lo cual es esencial cuando se pretende conocer el comportamiento asintótico para sistemas muy grandes.

En el apartado anterior hemos visto que el método radiactivo calcula el valor de T de manera más precisa ya que la desviación estándar es menor. Esto quiere decir que, además de que el método radiactivo es más rápido que el estándar para el mismo número de simulaciones, como se requieren menos simulaciones para alcanzar una precisión dada en el valor de T el tiempo total de cálculo se reduce drásticamente.

N	Simulaciones	Método clásico		Método radiactivo		Cociente (v_{rad}/v_{clas})
		t (s)	v (sim./s)	t (s)	v (sim./s)	
10	10^6	94	10638	75	13333	1,25
50	10^6	781	1280	574	1742	1,36
100	10^6	2319	431	1643	609	1,41
500	10^5	3984	25,1	2624	38,1	1,52
1000	10^5	14078	7,10	8968	11,15	1,57
5000	10^4	35045	0,29	20879	0,48	1,68

Tabla 3: Valores de los tiempos de simulación y velocidades de simulación (número de simulaciones por segundo) para los dos métodos en distintos tamaños de cadena. Se muestra también el cociente entre la velocidad de simulación del método radiactivo y la del clásico. Como este cociente es mayor que 1 en todos los casos, el método radiactivo es más rápido. La diferencia se acentúa todavía más para cadenas grandes.

$N \cdot M$	Simulaciones	Método clásico		Método radiactivo		Cociente (v_{rad}/v_{clas})
		t (s)	v (sim./s)	t (s)	v (sim./s)	
49	10^6	726	1377	590	1695	1,23
100	10^6	2297	435	1734	577	1,32
256	10^6	10860	92,1	8031	125	1,35
484	10^5	3743	26,7	2391	41,8	1,57
1024	10^5	15722	6,36	9777	10,2	1,61
2500	10^4	9206	1,09	5882	1,70	1,57
5041	10^4	37915	0,26	25000	0,40	1,52
10000	10^4	148082	0,07	91160	0,11	1,62

Tabla 4: Valores de los tiempos de simulación y velocidades de simulación (número de simulaciones por segundo) para los dos métodos en distintos tamaños de red. Se aprecia que también en el caso 2D, el método radiactivo es más eficiente que el clásico.

Para decidir el número de simulaciones a realizar en cada ejecución (con los valores fijados de ρ y del tamaño del sistema), se ha tomado el siguiente criterio: que el número de simulaciones sea una potencia de 10 (pero no mayor que un millón), y que no se superen las 48 horas en cada ejecución. De esta manera, se consigue una estadística suficiente para obtener las variables de interés (media y varianza de los tiempos de rotura), sin realizar simulaciones excesivamente largas. Para ello, se han representado los inversos de las velocidades de simulación (segundos/simulación) frente al tamaño del sistema, para redes de tamaño pequeño. Extrapolando los datos mediante un polinomio de grado 2, se han estimado los tiempos de simulación para las ejecuciones con tamaño mayor, eligiendo consecuentemente el número de simulaciones a realizar.

3.3. Distribución de tiempos de rotura

En el caso unidimensional se observa que, al aumentar ρ , la distribución de tiempos de rotura se desplaza hacia la izquierda (disminuye la media) y se estrecha (disminuye la varianza), como se aprecia en la *Figura 8*. Esto es razonable desde el punto de vista del modelo: si ρ es grande, las interacciones entre los elementos son muy fuertes, de manera que lo más probable es que se forme una sola grieta que crece hasta que se rompe todo el sistema (como se verá en la *Sección 3.5*), que es la manera más rápida y eficiente de romperlo. Además, como prácticamente siempre se producirá de esta forma y el material es isótropo, el tiempo de rotura será muy similar entre simulaciones, por lo que la varianza será muy pequeña.

Desde el punto de vista del algoritmo, teniendo en cuenta la *Ec.(6)*, se aprecia que para ρ grande, el denominador crece rápidamente con cada simulación (pues σ_i aumenta), luego los valores de δ_{iF} son sucesivamente menores, por lo que en la suma total dominan los deltas de las primeras configuraciones. En otras palabras, la red empieza a romperse y da lugar a un proceso de rotura acelerado. El método radiactivo también puede explicar esta situación: en vista de las *Ecs. (8) y (9)*, se tiene que $\Gamma(k)$ aumenta con el tiempo, luego δ_k disminuye (ver *Ec.(11)*).

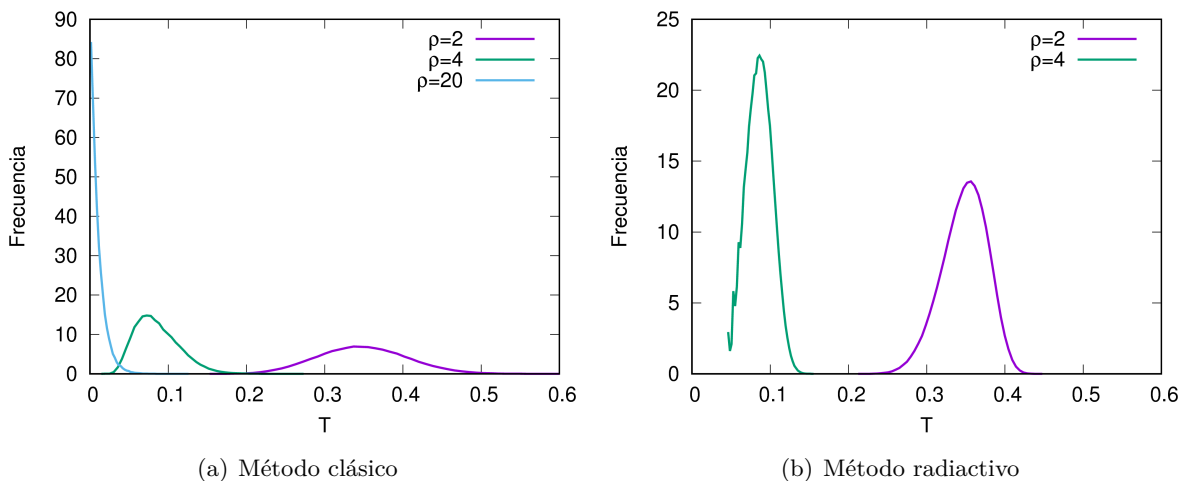


Figura 8: Histogramas de los tiempos de rotura obtenidos con el método clásico (a) y con el método radiactivo (b) para distintos valores de ρ , en una cadena de tamaño 100. Al aumentar ρ , las curvas se desplazan hacia tiempos de rotura menores. En el caso de (b) no se representa el histograma con $\rho = 20$, puesto que es muy estrecho y el máximo es muy elevado.

Lo mismo sucede cuando, manteniendo constante el valor de ρ , se consideran cadenas sucesivamente más largas (*Figura 9*).

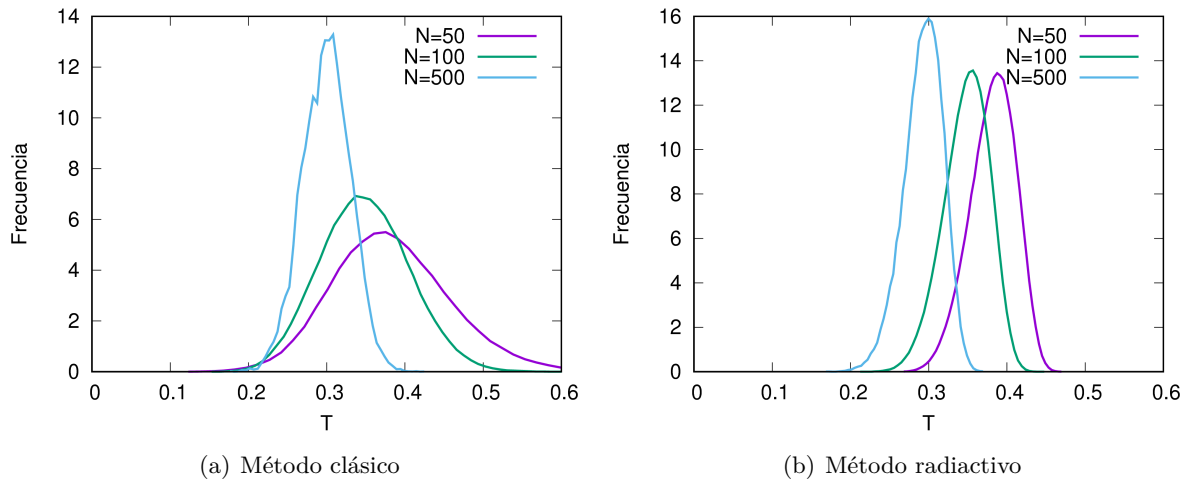


Figura 9: Histogramas de los tiempos de rotura obtenidos con el método clásico (a) y con el método radiactivo (b) para distintos tamaños de cadena, con $\rho = 4$. Las curvas se desplazan hacia tiempos de rotura menores al aumentar el tamaño del sistema.

Similarmente, en el caso bidimensional se aprecia que al aumentar ρ disminuye el tiempo de rotura y la varianza, como se aprecia en la *Figura 10*. Lo mismo sucede cuando, para un valor de ρ fijo, se aumenta el tamaño del sistema (*Figura 11*). Sin embargo, en el caso 2D la diferencia entre el método clásico y el radiactivo es mucho más exagerada, ya que la desviación estándar de T se reduce de manera muy apreciable. Esto, como ya hemos dicho, permite calcular el valor del tiempo de rotura con mucha mayor precisión que con el método clásico, lo cual va a ser de enorme utilidad para poder precisar el comportamiento asintótico de los modelos LLS dinámicos en dos dimensiones y estimar, de esa forma, si en dos dimensiones tienen punto crítico o no, como se va a ver en el siguiente apartado.

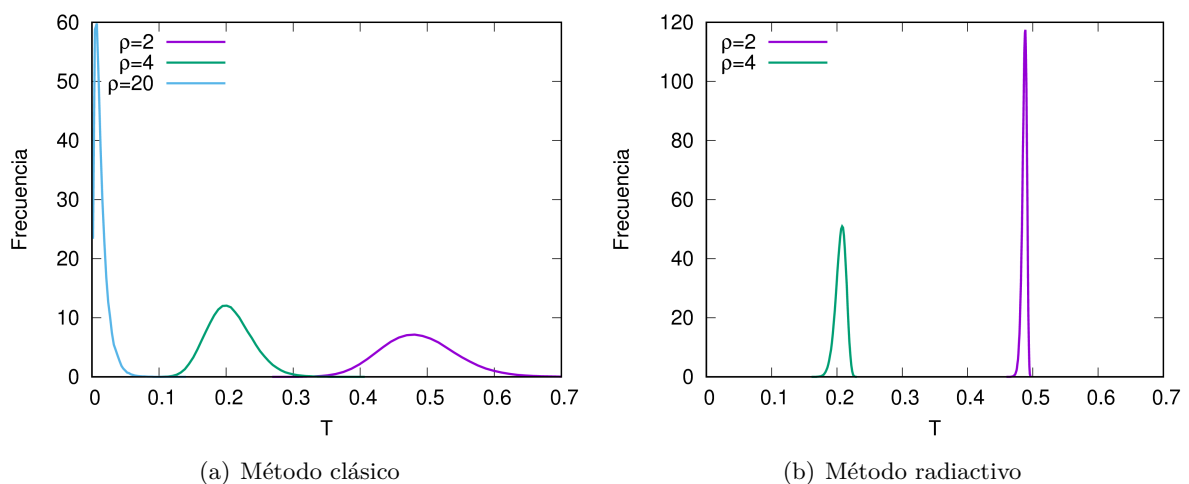
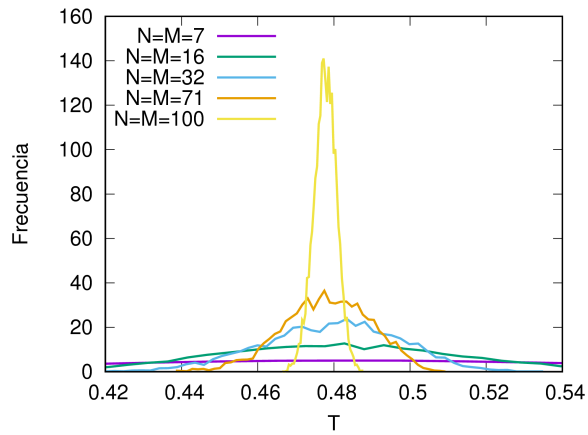
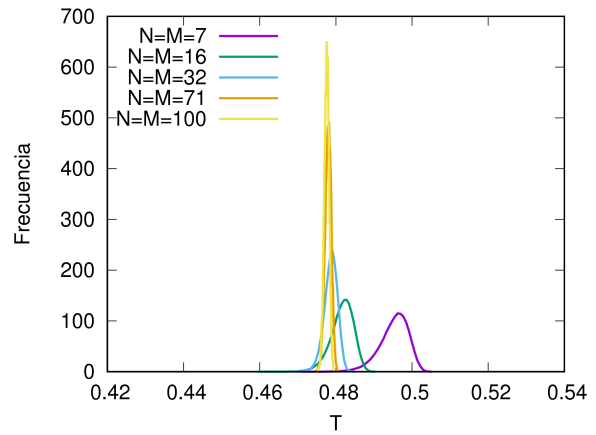


Figura 10: Histogramas de los tiempos de rotura obtenidos con el método clásico (a) y con el método radiactivo (b) para distintos valores de ρ , en una red de tamaño 10×10 .



(a) Método clásico



(b) Método radiactivo

Figura 11: Histogramas de los tiempos de rotura obtenidos con el método clásico (a) y con el método radiactivo (b) para $\rho = 2$ y distintos tamaños de red. Conforme aumenta el tamaño, disminuye el tiempo de rotura y la varianza. Sin embargo, las variaciones son cada vez menores conforme el tamaño es mayor, lo que puede indicar que se está llegando a una situación límite y que el tiempo de rotura de un sistema muy grande no es cero, como veremos en el siguiente apartado. En el caso de (a), la disminución del tiempo de rotura apenas se aprecia, ya que la varianza es muy elevada.

3.4. Punto crítico

Como hemos explicado en la introducción, se sabe que el modelo LLS dinámico en 1D no tiene punto crítico, puesto que el tiempo de rotura tiende a cero al aumentar el tamaño del sistema [12]. La *Figura 12* muestra el valor de T para sistemas progresivamente más grandes. La manera en que disminuye T con N es compatible con la ausencia de punto crítico.

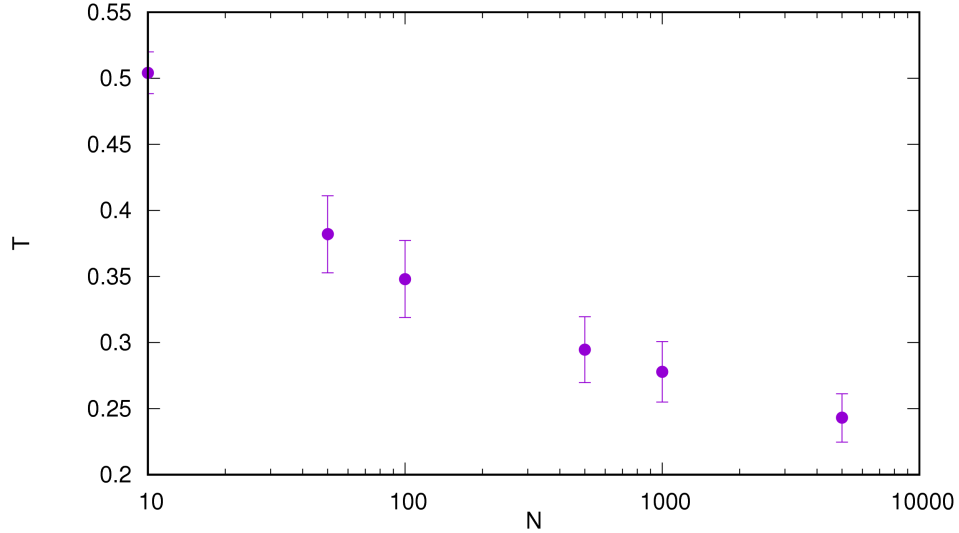


Figura 12: Tiempos de rotura para cadenas con distinto tamaño con $\rho = 2$ y utilizando el método radiactivo.

Phoenix y Newman [27] proporcionan una relación aproximada para estimar $T(N)$ para N suficientemente grande:

$$T = a\sigma_0^{-\rho} \left[\frac{\rho - 1}{\ln(\hat{C}N)(1 + \hat{\varepsilon}_N)} \right]^{\rho-1}, \quad (12)$$

siendo:

$$\hat{\varepsilon}_N = \frac{\hat{\phi} \{ \ln[\ln(\hat{C}N)] - \ln(\rho - 1) \}}{\ln(\hat{C}N) - \hat{\phi}}; \quad \hat{C} = (\sqrt{2\pi})^{\rho-1} \sqrt{\frac{\rho}{\rho-1}}; \quad \hat{\phi} = 3(\rho - 1)/2; \quad a = 2^{\rho-1} \quad (13)$$

La *Ec.(12)* tiende a 0 para $N \rightarrow \infty$, pues $\hat{\varepsilon}_N$ también tiende a 0 (debido a que en su definición, el numerador decrece más rápido que el denominador, al ser un doble logaritmo), de forma que la función se reduce a:

$$T \rightarrow a\sigma_0^{-\rho} \left[\frac{\rho - 1}{\ln(\hat{C}N)} \right]^{\rho-1}.$$

De esta manera, la *Ec.(12)* demuestra que el modelo LLS en 1D no tiene punto crítico, puesto que el tiempo de rotura tiende a cero cuando el tamaño del sistema tiende a infinito [12,27].

El caso 2D es mucho más interesante, por dos motivos principales: (1) no existen fórmulas analíticas, ni exactas ni aproximadas, que predigan la forma funcional de $T(N)$; y (2) la observación de la observación de la *Figura 11b* parece indicar que, en este caso, sí existe un punto crítico y que el tiempo de rotura de un sistema infinito no es cero. Esta hipótesis se sustancia en la *Figura 13*, que muestra cómo cambia T con el tamaño del sistema para el caso $\rho = 2$. En general, se comprueba que los puntos se ajustan muy bien a la siguiente expresión:

$$T = T_0 + \alpha \cdot \exp[-\beta \cdot \ln(NM)]. \quad (14)$$

Se trata de una función monótona decreciente con el tamaño, y tiende a T_0 cuando $N \cdot M \rightarrow \infty$.

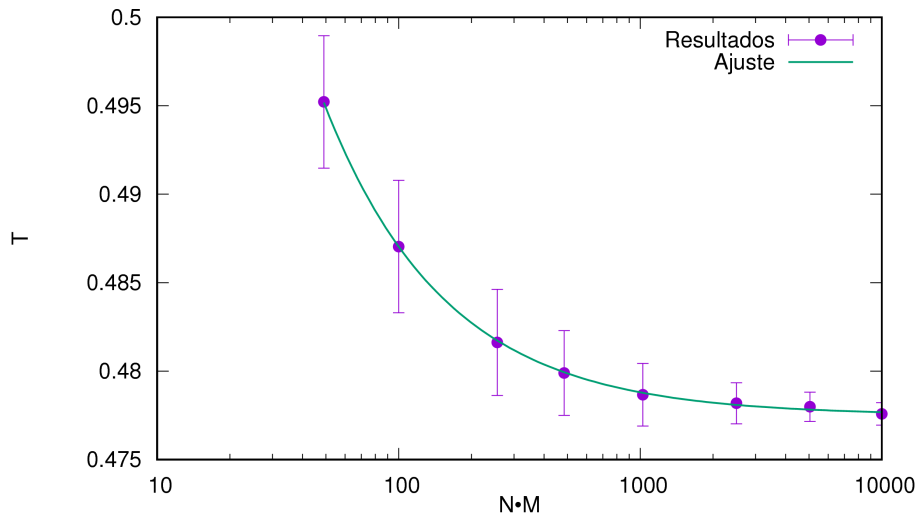


Figura 13: Tiempos de rotura para redes con distinto tamaño con $\rho = 2$ y utilizando el método radiactivo. Los puntos se ajustan a la *Ec.(14)*

En la *Tabla 5* se recogen los valores de los parámetros obtenidos con los ajustes en el modelo bidimensional en cada uno de los dos métodos.

ρ	Método	T_0	α	β
2	Clásico	$0,47788 \pm 0,00008$	$0,638 \pm 0,119$	$0,922 \pm 0,042$
	Radiactivo	$0,47788 \pm 0,00007$	$0,514 \pm 0,082$	$0,866 \pm 0,039$
4	Clásico	$0,18151 \pm 0,00036$	$0,371 \pm 0,064$	$0,593 \pm 0,037$
	Radiactivo	$0,18193 \pm 0,00003$	$0,430 \pm 0,003$	$0,628 \pm 0,002$
20	Clásico	$0,00087 \pm 0,00009$	$0,349 \pm 0,078$	$0,724 \pm 0,041$
	Radiactivo	$0,00118 \pm 0,00012$	$0,603 \pm 0,054$	$0,844 \pm 0,023$

Tabla 5: Valores de los parámetros del ajuste de los resultados obtenidos en las simulaciones 2D a la *Ec.(14)* ($\rho = 2$)

Los valores de T de la *Tabla 5* demuestran que el modelo LLS dinámico 2D tiene un tiempo asintótico de fallo finito. Por lo tanto, como el modelo LLS 1D no tiene punto crítico y el modelo LLS 2D sí, la dimensión crítica para este tipo de modelos es 2.

3.5. Dinámica de los modelos

Gracias a las variables auxiliares utilizadas en el programa de cálculo (ver Apéndice B), es muy sencillo obtener resultados gráficos sobre la dinámica del modelo. Concretamente, se puede observar cómo evoluciona el tamaño medio de las grietas ($\langle c \rangle$) para distintos valores de N , M y ρ :

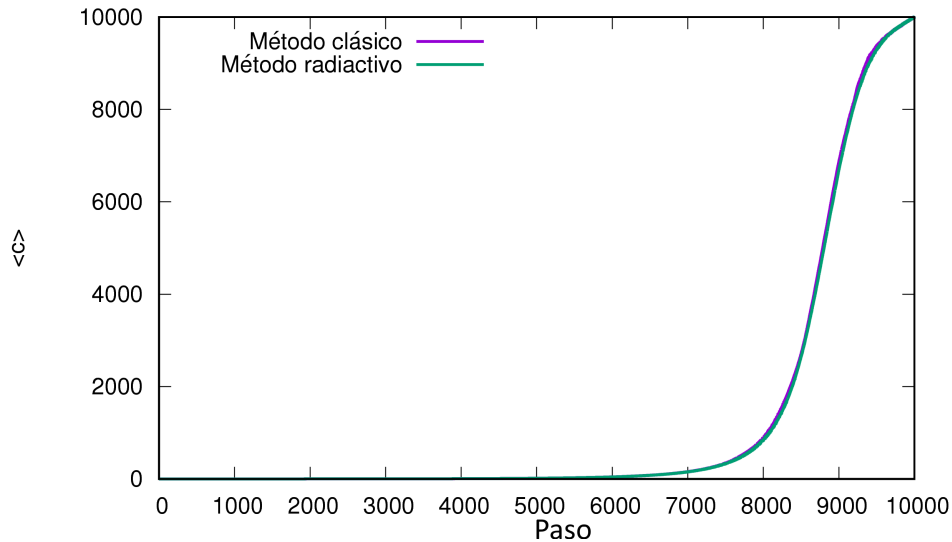


Figura 14: Evolución del tamaño medio de las grietas a medida que se rompe el sistema ($\rho = 2$, $N=M=100$). Se observa que las curvas obtenidas por ambos métodos son coincidentes. El eje horizontal marca el tiempo en unidades de pasos, siendo cada paso la rotura de un elemento.

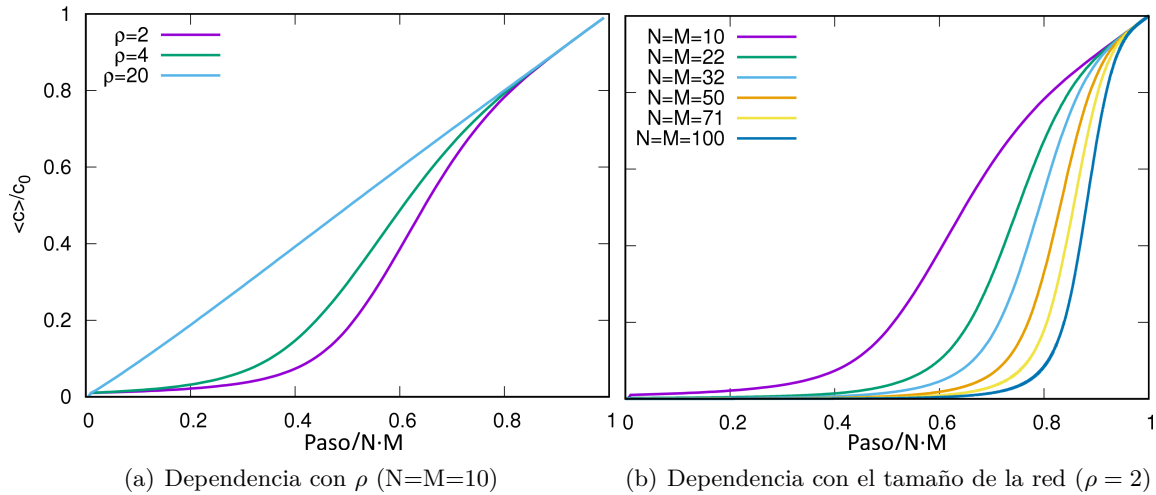


Figura 15: Dependencia del tamaño medio con ρ y con el tamaño de la red. Al aumentar ρ , la evolución tiende a una línea recta, debido a que en ese caso se forma una sola grieta que va aumentando hasta que se rompe todo el sistema. Si aumenta $N \cdot M$, $\langle c \rangle$ crece más lentamente, pues la unificación masiva de las mismas tiene lugar más tarde, al haber mayor espacio para que aparezcan grietas distintas. En las imágenes, los ejes están normalizados con el fin de comparar correctamente las curvas ($c_0 = N \cdot M$)

Otra manera de mostrar los resultados anteriores es por medio de una animación de la rotura del sistema (*Figura 16*). Si representamos los elementos rotos (amarillo), vecinos de rotos (rojo) e intactos (negro), se aprecia que, en efecto, para ρ elevada se forma una sola grieta que crece hasta romper todo el sistema, mientras que si ρ es baja, aparecen muchas grietas pequeñas que se van fusionando lentamente.

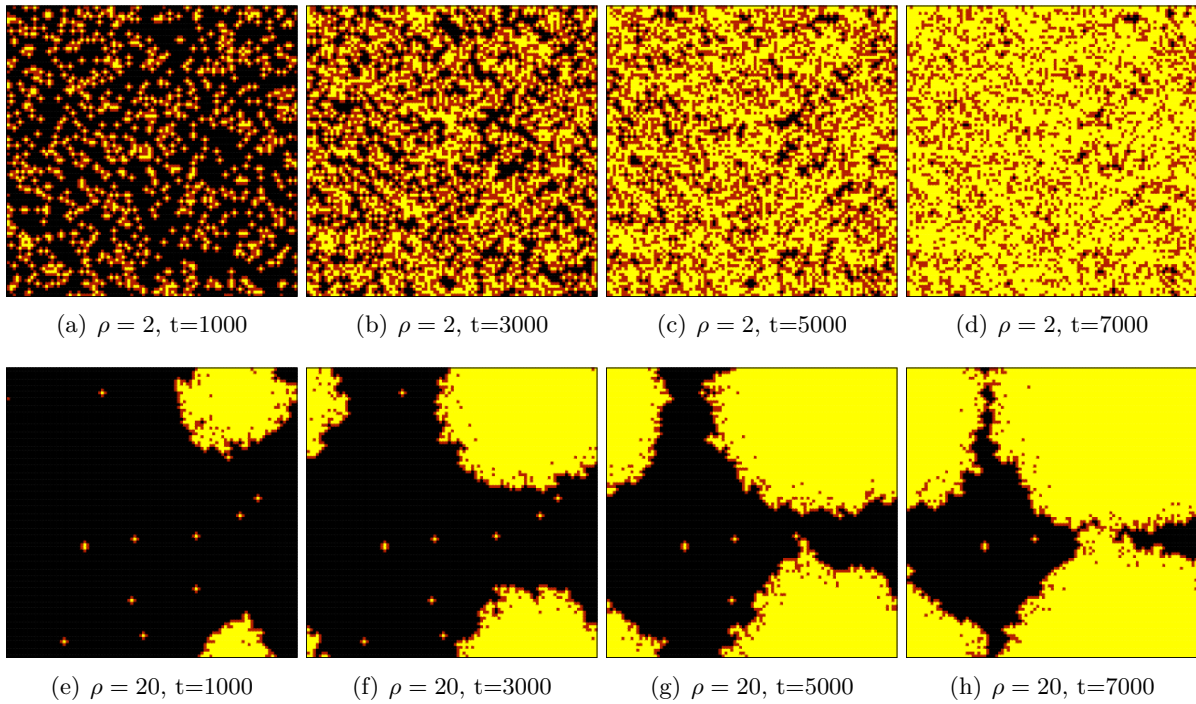


Figura 16: Animación de la rotura del material para $\rho = 2$ (a-d) y para $\rho = 20$ (e-h). Se representa la situación de la red a intervalos de 1000 pasos temporales. Los elementos rotos se representan en amarillo, los intactos en negro, y los que son vecinos de grietas, en rojo.

Tanto la *Figura 15* como la *Figura 16* se han obtenido mediante el método radiactivo, pero si se realizan mediante el método clásico los resultados son cualitativamente iguales. Por lo tanto, podemos concluir que, a pesar de tratarse de dos métodos diferentes (no equivalentes), la dinámica asociada a los mismos es la misma.

4. Conclusión

En este trabajo hemos estudiado los modelos dinámicos de haces de fibras con el reparto local de carga mediante dos algoritmos diferentes, que a pesar de no ser equivalentes (la formulación matemática el enfoque físico y la manera de implementar la aleatoriedad son diferentes), dan lugar a la misma dinámica. Consecuentemente, ambos algoritmos producen resultados idénticos respecto a la media de la distribución de tiempos de rotura, que es el resultado central de este tipo de estudios.

También hemos comprobado que el algoritmo radiactivo tiene varias ventajas respecto al clásico:

- La varianza de la distribución de tiempos de rotura es menor, lo cual se traduce en una mayor precisión en la estimación del tiempo de rotura.
- Requiere un menor número de simulaciones para obtener una estadística aceptable.
- Es más eficiente.

Por otra parte, los tiempos de rotura y sus varianzas son compatibles con los resultados obtenidos previamente por otros autores, disminuyendo ambos al aumentar ρ y el tamaño del sistema.

Finalmente, hemos comprobado que el tiempo de rotura en el modelo LLS unidimensional tiende a 0 para una cadena infinita (lo cual era ya conocido), y hemos mostrado por primera vez que en el caso bidimensional el tiempo de rotura tiende a un valor no nulo. Es decir, el modelo LLS dinámico tiene punto crítico y su dimensión crítica es 2.

Referencias

- [1] Daniels, H. E. (1945, June). *The statistical theory of the strength of bundles of threads. I.* In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* (Vol. 183, No. 995, pp. 405-435). The Royal Society.
- [2] Gómez, J. B.; Osácar, C. & Pacheco, A. F. (algún año, algún mes). *Discrete approach to the Equal Load-Sharing dynamical fiber-bundle model.* (No sé si se pone algo más),
- [3] Peirce, F.T. (1926). *Theorems on the strength of long and of composite specimens.* J. Textile Ind., 17, 355
- [4] Phoenix SL (1978). *Stochastic strength and fatigue of fiber bundles.* International Journal of Fracture 14: 153-187
- [5] McCartney LN & Smith RL (1983). *Statistical theory of the strength of fiber bundles.* J. Appl. Mech. 50: 601-608
- [6] Coleman BD (1957 a). *Time dependent of mechanical breakdown in bundles of fibers, I. Constant total load.* J. Appl. Phys. 28: 1058
- [7] Coleman BD (1957b). *Time dependent of mechanical breakdown in bundles of fibers, II. The infinite ideal bundle under linearly increasing loads.* J. Appl. Phys. 28: 1065
- [8] Coleman BD (1958a). *Time dependent of mechanical breakdown in bundles of fibers, III. The power-law breakdown rule.* Trans. Soc. Rheol. 2: 195
- [9] Coleman BD (1958b). *Statics and time dependence of mechanical breakdown in fibers.* J. Appl. Phys. 29: 968
- [10] Coleman BD & Marquardt (1958). *Time dependent of mechanical breakdown in bundles of fibers, IV. Infinite ideal bundle under oscillating loads.* J. Appl. Phys. 29: 1091
- [11] Coleman BD (1959). *Time dependent of mechanical breakdown in bundles of fibers, V. Fibers of Class A-2.* J. Appl. Phys. 30: 720
- [12] Phoenix SL (1978). *Stochastic strength and fatigue of fiber bundles.* International Journal of Fracture 14: 327-344
- [13] Phoenix SL (1979). *The asymptotic distribution of the time to failure of a fiber bundle.* Adv. Appl. Prob. 11: 153-187
- [14] Scop PM & Argon AS (1969). *Statistical theory of strength of laminated composites.* J. Composite Mat. 3: 30-47

- [15] Harlow DG & Phoenix SL (1978a). *The chain-of-bundles probability model for the strength of fibrous materials I: analysis and conjectures*. Journal of composite materials 12: 195-214
- [16] Harlow DG & Phoenix SL (1978a). *The chain-of-bundles probability model for the strength of fibrous materials II: a numerical study of convergence*. Journal of composite materials 12: 314-334
- [17] Harlow DG & Phoenix SL (1978a). *Probability distributions for the strength of composite materials I: two-level bounds*. International Journal of Fracture 17: 347-372
- [18] Harlow DG & Phoenix SL (1978a). *Probability distributions for the strength of composite materials II: a convergent sequence of tight bounds*. International Journal of Fracture 17: 601-630
- [19] Smith RL (1980). *A Probability Model for Fibrous Composites with Local Load Sharing*. Proc. R. Soc. London, Ser. A 372: 539-553
- [20] Turcotte DL, Smalley JR & Solla SA (1985). *Collapse of loaded fractal trees*. Nature 313: 671-672
- [21] Gómez, J. B., & Pacheco, A. F. (2006). *Monte Carlo results in time-dependent hierarchical fiber-bundle models of fracture*. Physical Review E, 73(4), 047104.
- [22] Wikipedia, The Free Encyclopedia. *Hoshen–Kopelman algorithm* (2017, 06 de septiembre). Disponible en:
https://en.wikipedia.org/wiki/Hoshen%E2%80%93Kopelman_algorithm
- [23] Chacrabarty, B.K. & Benguigui L.G (1997). *Statistical physics of fracture and breakdown in disordered systems*. Clarendon Press, 161 págs.
- [24] Herrmann H.J. & Roux, S (1990). *Statistical modelos for the fracture of disordered systems*. North Holland, 368 págs.
- [25] Gómez, J. B., Moreno, Y., & Pacheco, A. F. (1998). *Probabilistic approach to time-dependent load-transfer models of fracture*. Physical Review E, 58(2), 1528.
- [26] Gómez, J. B., Vazquez-Prada, M., Moreno, Y., & Pacheco, A. F. (1999). *Bounds for the time to failure of hierarchical systems of fracture*. Physical Review E, 59(2), R1287.
- [27] Newman, W. I., & Phoenix, S. L. (2001). *Time-dependent fiber bundles with local load sharing*. Physical Review E, 63(2), 021507.
- [28] Hansen, A. and Hemmer, P.C. and Pradhan, S. (2015). *The Fiber Bundle Model: Modeling Failure in Materials*. Weinheim, Alemania: Wiley.