1. ANEXO I.

1.1. Recuperación del modelo de Lotka-Volterra para N especies.

Es fácil generalizar para N especies lo explicado hasta ahora, la forma general de las ecuaciones que representan a nuestro sistema, podemos escribirla como:

$$X_i[t+1] = X_i[t] + r_{x_i} \cdot X_i[t] - X_i[t] \cdot \left[1 - (1-\lambda_{ii})^{(X_i[t]-1)} \cdot \prod_{j \neq i}^{N-1} (1-\lambda_{ij})^{(X_j[t])}\right]. \tag{1.1}$$

Partiendo de nuestra ecuación, podemos recuperar la ecuación del modelo de Lotka-Volterra para N especies como demostramos a continuación. Realizaremos para empezar dos consideraciones, la primera es que todas las probabilidades de morir de un individuo son muy pequeñas, es decir $\lambda_{ij} \ll 1$. Con $i, j = 1, 2, ...N$. Esta hipótesis nos permite reescribir la ecuación (1.1) como:

$$X_i[t+1] = X_i[t] + r_{X_i} \cdot X_i[t] - X_i[t] \cdot \left[1 - (1 - \lambda_{ii} \cdot (X_i[t]-1)) \cdot \prod_{j \neq i}^{N-1} (1 - \lambda_{ij} \cdot X_j[t])\right].$$

La segunda hipótesis es que nuestra población es suficientemente grande, es decir $X_i(t) \gg 1$.

$$X_i[t+1] = X_i[t] + r_{X_i} \cdot X_i[t] - X_i[t] \cdot \left[\lambda_{ii} \cdot X_i[t] + \sum_{j \neq i}^{N-1} \lambda_{ij} \cdot X_j[t] + \cancelto{\approx 0}{\lambda_{ij} X_i[t] \cdot \sum_{j \neq i}^{N-1} \lambda_{ii} \cdot X_j[t]}\right],$$

donde hemos despreciado los términos de segundo orden en las probabilidades de muerte. Operando obtenemos:

$$X_i[t+1] - X_i[t] = r_{X_i} \cdot X_i[t] - \left[\lambda_{ii} \cdot X_i^2[t] + X_i[t] \cdot \sum_{j \neq i}^{N-1} \lambda_{ij} \cdot X_j[t]\right].$$

Si ahora pasamos a tiempo continuo $\dot{X} = X(t+1) - X(t)$:

$$\dot{X}_i = r_{X_i} \cdot X_i - \left[\lambda_{ii} \cdot X_i^2 + X_i \cdot \sum_{j \neq i}^{N-1} \lambda_{ij} \cdot X_j\right],$$

Por analogía con el modelo de Lotka-Volterra generalizado, podemos transformar nuestros parámetros como sigue: $r_{X_i} = r_{X_{i_0}}$, $r_{X_i} = r_{X_{i_0}}$, $\lambda_{ii} = \frac{r_{X_{i_0}}}{C_i}$, $\lambda_{ij} = \frac{r_{X_{i_0}} \alpha_{ij}}{C_i}$.

Obteniendo la ecuación general buscada:

$$\dot{X}_i = r_{X_{i_0}} \cdot X_i - \left[\frac{r_{X_{i_0}}}{C_i} \cdot X_i^2 + X_i \cdot \sum_{j \neq i}^{N-1} \frac{r_{X_{i_0}} \alpha_{ij}}{C_i} \cdot X_j\right]. \tag{1.2}$$