Distribución de masa en cuerpos convexos isotrópicos en $\mathbb{R}^n$

Ester Landa Cillero
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: David Alonso Gutiérrez
Septiembre de 2017

Prólogo

La noción de convexidad es muy básica en geometría, pero aparece de manera natural en muchas otras ramas de las matemáticas. Un ejemplo de ello lo encontramos en el análisis funcional, dado que la bola unidad de cualquier normal en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo centralmente simétrico y que, recíprocamente, todo conjunto convexo centralmente simétrico define una norma en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, en el estudio de los espacios de Banach n-dimensionales, las técnicas propias de la geometría y las técnicas propias del análisis interaccionan para dar lugar al Análisis Geométrico Convexo, que es el estudio de las propiedades geométricas de las bolas unidad de los espacios de Banach de dimensión finita.

Uno de los aspectos a tener en cuenta en dicho estudio es la distribución de volumen. Teniendo en cuenta que un cuerpo convexo (conjunto convexo, compacto y con interior no vacío) en $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$, se le puede dotar de una medida de probabilidad uniforme, restringiendo y normalizando la medida de Lebesgue. El estudio de la distribución de volumen es el estudio de dicha medida de probabilidad. De esta manera, las técnicas propias de la teoría de la probabilidad pasan a formar una parte importante en el estudio de la geometría de los espacios de Banach.

En este trabajo nos centraremos en el estudio de la distribución de volumen en cuerpos convexos en $\mathbb{R}^n$ y observaremos el efecto que tiene la convexidad en la medida de probabilidad anteriormente mencionada. Más concretamente, veremos que la convexidad fuerza un decaimiento subexponencial en función de la distribución de las marginales 1-dimensionales y que dicho decaimiento subexponencial es equivalente a un cierto crecimiento de los momentos, dando lugar a una desigualdad de Hölder inversa.

Íntimamente relacionado con el comportamiento de las marginales 1-dimensionales aparece el concepto de isotropía, que estudia la posibilidad de que todas las marginales 1-dimensionales se comporten de igual manera en algún sentido o, dicho de otra manera, que el volumen de un cuerpo convexo se distribuya por igual en todas las direcciones. Más concretamente, se estudia la posibilidad de que todas las marginales 1-dimensionales tengan la misma esperanza y la misma varianza. En este trabajo indagaremos más en dicha idea y observaremos que la isotropía es algo que se puede conseguir en cualquier cuerpo convexo mediante transformaciones afines.

Finalmente, teniendo en cuenta que una de las familias más importantes de espacios de Banach n-dimensionales es la familia de los espacios ℓ_p^n, estudiaremos la noción de isotropía en dichos espacios, veremos que sus bolas unidad son cuerpos isotrópicos (previa normalización de volumen) y calcularemos exactamente el valor de su constante de isotropía.

Abstract

The objective of this work is the study of the volume distribution in convex bodies on $\mathbb{R}^n$. We will focus on the effect of convexity on the uniform probability measure, restricting and normalizing the Lebesgue measure. Particularly, we will study that the convexity forces a subesponential decay on the distribution function of the 1-dimensional marginals.

First, we are going to introduce basic notions that will serve in the study of the distribution of volume in convex bodies. We will also study how the unit ball of any norm in $\mathbb{R}^n$ is a convex and centrally symmetric set, and that, conversely, from any centrally symmetric convex set we can define a norm in $\mathbb{R}^n$.

Once the above concepts are defined, our main objective will be to study the inverse Hölder inequality expressed in the form

Theorem. Let K be a convex body in $\mathbb{R}^n$ and μ the uniform probability measure on K. Then, there are absolute constants C_1, C_2 such that $\forall \theta \in S^{n-1}$, we have the following equivalent statements:

1. $(\mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 p \mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|$
2. $\mu\{x \in K : |\langle X,\theta\rangle| \geq C_2 t \mathbb{E}|\langle X,\theta\rangle|\} \leq 2e^{-t} \quad \forall t > 0.$

Before doing the proof of the previous theorem, we will have to introduce the inequalities of Prékopa-Leindler, Brunn-Minkowski and Borell. Then, we will give several equivalent ways of expressing the decay rate of random variables.

After that, we will introduce the notion of isotropic position and we will give several equivalent forms.

Definition. A convex body K in $\mathbb{R}^n$ is called isotropic if it has volume $|K| = 1$, center of mass at the origin, and there is a constant $\alpha > 0$ such that

$$\int_K \langle x,y\rangle^2 dx = \alpha^2 |y|^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

We will call the number α that appears in the definition of isotropy, the isotropic constant of K and denote by L_K.

We will show that the isotropic position of a convex body is uniquely determined (if we ignore orthogonal transformations) and arises as a solution of a minimization problem.

Theorem. Let K be a convex body in $\mathbb{R}^n$ with volume $|K| = 1$ and center of mass at the origin. Define

$$B(K) = inf\left\{\int_{TK} |x|^2 dx : T \in SL(n)\right\}.$$

Then, a position K_1 of K is isotropic if and only if

$$\int_{K_1} |x|^2 dx = B(K).$$

If K_1 and K_2 are isotropic positions of K, there exist $U \in O(n)$ such that $K_2 = U(K_1)$.

We will also show that the Euclidean ball is the body with the smallest isotropic constant of all convex bodies. In addition, we will show that this value is bounded lower by a constant that is independent of the dimension.

Theorem. For every isotropic convex body K in $\mathbb{R}^n$,

$$L_K \geq L_{B_2^n} \geq c,$$

where c > 0 in an absolute constant.

Finally, we will compute the volume and the value of the isotropic constant in a very important family of convex bodies, what are the p-balls.

Theorem. Let $p \in [1, \infty]$. The value of the isotropic constant of B_p^n is

$$L_{B_p^n}^2 = \begin{cases} \frac{2}{p} \frac{|B_p^{n-1}|}{|B_p^n|^{1+\frac{2}{n}}} \frac{\Gamma(\frac{3}{p})\Gamma(1+\frac{n-1}{p})}{\Gamma(1+\frac{n+2}{p})} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \frac{1}{12} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo presentaremos los conceptos básicos con los que vamos a tratar en el estudio de la distribución de volumen en cuerpos convexos. Para ello, primero introduciremos conceptos y resultados que nos serán útiles después, como es el caso de conjuntos y cuerpos convexos, su relación con los espacios normados y una familia importante de normas, como es el caso de las normas p.

Definición 1.1. Un conjunto A en $\mathbb{R}^n$ es convexo si $\forall x, y \in A$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, se tiene que $(1-\lambda)x + \lambda y \in A$.

Definición 1.2. La suma de Minkowski de dos conjuntos A, B en $\mathbb{R}^n$ se define como $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ y el producto por un escalar $\mu \in \mathbb{R}$ como $\mu A := \{\mu a : a \in A\}$.

A continuación, vamos a ver que la bola unidad de cualquier norma en $\mathbb{R}^n$, es un conjunto convexo centralmente simétrico y que, recíprocamente, a partir de cualquier conjunto convexo centralmente simétrico podemos definir una norma en $\mathbb{R}^n$. Esta norma viene dada mediante la expresion $\|x\|_K = inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$.

Definición 1.3. Decimos que A es un conjunto simétrico si $x \in A$ implica $-x \in A$.

Definición 1.4. Un cuerpo convexo K es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ que es compacto y de interior no vacío.

Definición 1.5. Una norma en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ que cumple :

1. $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

Si no se exige la condición $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$, la aplicación $\|\cdot\|$ se llama seminorma.

Proposición 1.1. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Su bola unidad cerrada $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ es un cuerpo convexo y simétrico.

Demostración. Veamos primero la convexidad. Para ello tomamos $x, y \in \mathbb{B}$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Sabemos que $\|x\| \leq 1$ y $\|y\| \leq 1$. Así, aplicando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| \leq (1-\lambda)\|x\| + \lambda\|y\| \leq (1-\lambda) + \lambda = 1.$$

Luego, $(1-\lambda)x + \lambda y \in \mathbb{B}$ y $\mathbb{B}$ es convexo.
La simetría de $\mathbb{B}$ viene dada por la propiedad de la norma $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, tomando $\alpha = -1$. Luego si $x \in \mathbb{B}$, tenemos que $-x \in \mathbb{B}$. Por otro lado, como $0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} \subseteq \mathbb{B}$, que es un conjunto abierto en $\mathbb{B}$, por ser la preimagen de $[0, 1)$, abierto en $[0, \infty)$, mediante la aplicación continua $\|\cdot\|$, tenemos que 0 es un punto interior de $\mathbb{B}$. □

La siguiente proposición, nos da el resultado recíproco de la proposición anterior.

Proposición 1.2. Si K es un conjunto convexo simétrico en $\mathbb{R}^n$, tal que contiene el origen en el interior, entonces $\|x\|_K = inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Por definición, $\|x\|_K \geq 0$, ya que $\|x\|_K$ es el ínfimo de un conjunto en $(0,\infty)$. Si $x \neq 0$, existe un $\alpha > 0$ tal que la semirecta que pasa por x y tiene origen en 0 intersecada con K es un segmento de la forma $[0, \alpha x]$.
Luego $\alpha x \in K \Rightarrow x \in \frac{1}{\alpha}K$ y así $\|x\|_K \leq \frac{1}{\alpha}$.
Además, si $\beta > \alpha$, $\beta x \notin K$, luego $x \notin \frac{1}{\beta}K$, por lo que $inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\} = \frac{1}{\alpha}$ y por tanto $\|x\|_K > 0$.
Si $x = 0$, tenemos que $\|x\|_K = inf\{\lambda > 0 : 0 \in \lambda K\} = 0$.
Veamos ahora la propiedad $\|\beta x\|_K = |\beta|\|x\|_K$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Se sigue de la definición y de la simetría de K.
Sea $\beta \neq 0$:

$$\|\beta x\|_K = inf\{\lambda > 0 : \beta x \in \lambda K\} = inf\left\{\lambda > 0 : x \in \frac{\lambda}{\beta}K\right\}$$
$$= inf\{|\beta|\lambda > 0 : x \in \lambda K\} = |\beta| inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\} = |\beta|\|x\|_K.$$

Si $\beta = 0$, la propiedad es trivial.
Queda por probar que $\|x+y\|_K \leq \|x\|_K + \|y\|_K, \forall x,y \in \mathbb{R}^n$. En primer lugar si $x = 0$ ó $y = 0$, se verifica la igualdad. Para $x, y \neq 0$, tomamos

$$x' = \frac{x}{\|x\|_K}, \quad y' = \frac{y}{\|y\|_K}$$

puntos de la frontera de K y como sabemos que K es cerrado, están en K. Entonces definimos

$$z := \frac{\|x\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K}x' + \frac{\|y\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K}y' = (\|x\|_K + \|y\|_K)^{-1}(x+y)$$

y ya que K es convexo, se tiene que $z \in K$, es decir, $\|z\|_K \leq 1$. Como $z = \dfrac{x+y}{\|x\|_K + \|y\|_K}$, tomando normas, obtenemos la desigualdad buscada

$$\left\|\frac{x+y}{\|x\|_K + \|y\|_K}\right\|_K \leq 1 \Longrightarrow \|x+y\|_K \leq \|x\|_K + \|y\|_K.$$

□

Una familia de normas muy importante son las normas p, definidas como :

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad para \quad p \geq 1.$$

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Denotaremos su bola unidad por B_p^n.
En el caso en que $p = 2$ obtenemos la norma Euclídea. A menudo denotaremos $\|x\|_2 = |x|$. También denotaremos $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

A continuación vamos a introducir el concepto de centro de masas y el resultado de cambio a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, que nos serán muy útiles a la hora de estudiar los resultados obtenidos a partir del concepto de isotropía.

Definición 1.6. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Se define su baricentro como

$$bar(K) = \frac{1}{|K|}\int_K x dx.$$

Notar que la integral anterior, es una integral vectorial. Diremos que K es centrado si $bar(K) = 0$. Observar que en tal caso, esta condición es equivalente a $\int_K \langle x, \theta\rangle dx = 0$ para todo $\theta \in S^{n-1}$. Observar también que si K es simétrico esta condición se tiene automáticamente.

Definición 1.7. Llamaremos volumen de un cuerpo convexo $K \in \mathbb{R}^n$ a su medida de Lebesgue y lo denotaremos por $|K|$.

En este trabajo dotaremos a un cuerpo convexo K de la medida de probabilidad en $\mathbb{R}^n$ uniforme sobre él, que viene dada por $d\mu(x) = \dfrac{\chi_K(x)dx}{|K|}$. A partir de ahí, nos dedicaremos a estudiar el comportamiento de las variables aleatorias $\langle X, \theta\rangle$, donde X es un vector aleatorio distribuido según la probabilidad μ y $\theta \in S^{n-1}$. Es decir, estudiaremos el comportamiento de las marginales 1-dimensionales de la medida y el comportamiento que la convexidad fuerza sobre ellas. De esta manera, obtendremos información sobre cómo el volumen de un cuerpo convexo K se distribuye en una dirección $\theta \in S^{n-1}$ dada.

Observación 1.1. Dada una variable aleatoria X, denotaremos por $\mathbb{E}[X]$ o $VarX$ su esperanza y su varianza respectivamente.

Definición 1.8. La función radial $\rho_K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de un cuerpo convexo K está definida por la expresión

$$\rho_K(x) = max\{\lambda > 0 : \lambda x \in K\}.$$

Ahora vamos a enunciar un resultado para poder expresar el volumen de un conjunto en términos de la función radial. Este resultado es la integración en coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$. Si f es una función integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1} f(r\theta)d\sigma(\theta)dr$$

donde σ es la medida uniforme en la esfera definida por $\sigma(A) = n|C(A)|$, donde $C(A) := conv\{0, A\}$ es el menor conjunto convexo que contiene a $A \subseteq S^{n-1}$ y al origen.

Denotaremos por $L(\mathbb{R}^n)$ a la familia de todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. La clase de las matrices invertibles $T \in L(\mathbb{R}^n)$, es denotada por $GL(n)$, y $SL(n)$ denota la subclase que preserva el volumen. También denotaremos por $O(n)$ al conjunto de las matrices ortogonales.

Definición 1.9. Dado un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ diremos que K_1 es una posición de K si existe $T \in GL(n)$, y $a \in \mathbb{R}^n$ tal que $K_1 = a + TK := \{a + Tx : x \in K\}$.

Este trabajo está dividido en 4 capítulos. Vamos a hacer un breve comentario sobre cada uno de ellos.
En este primer capítulo hemos introducido las nociones y conceptos básicos que usaremos para realizar los resultados posteriores.
El capítulo 2 está dedicado al estudio de la distribución de las marginales 1-dimensionales de un vector aleatorio uniformemente distribuido sobre un cuerpo convexo K. Para estudiar su función de distribución necesitaremos demostrar previamente las desigualdades de Prékopa-Leindler, Brunn-Minkowski y Borell. Daremos varias formas equivalentes de expresar la velocidad de decaimiento de variables aleatorias y demostraremos que las marginales 1-dimensionales que estudiamos tienen un decaimiento exponencial.

En el capítulo 3 introduciremos el concepto de isotropía, veremos la existencia de una posición de isotropía para un cuerpo convexo y que además está únicamente determinada salvo transformaciones ortogonales. También veremos que la bola Euclidea es el cuerpo con menor constante de isotropía.
Por último en el capítulo 4, realizaremos algunos cálculos en una familia muy importante de cuerpos convexos, como es el caso de las bolas p. Calcularemos su volumen y su constante de isotropía.

Capítulo 2

Distribución de los funcionales lineales

El objetivo de este capítulo es estudiar el decaimiento de la masa en un cuerpo convexo dada una dirección. En concreto, si K es un cuerpo convexo, estudiaremos el decrecimiento de la función $F_\theta(t) = |\{x \in K : |\langle x, \theta \rangle| \geq t\}|$, donde $\theta \in S^{n-1}$. Esto es equivalente a considerar la medidad de probabilidad en $\mathbb{R}^n$ dada por $d\mu(x) = \dfrac{\chi_K(x)dx}{|K|}$ y estudiar la función de distribución de la variable aleatoria $|\langle X, \theta \rangle|$, donde X es un vector aleatorio distribuido según la probabilidad μ. Sabemos por la desigualdad de $H\ddot{o}lder$ que $(\mathbb{E}|\langle X, \theta \rangle|^p)^{\frac{1}{p}}$ es creciente en p. En este capítulo veremos además que el decrecimiento de la función $F_\theta(t)$ está relacionado con el hecho de que se pueda obtener una desigualdad de $H\ddot{o}lder$ inversa del tipo $(\mathbb{E}|\langle X, \theta \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \leq Cp\mathbb{E}|\langle X, \theta \rangle|$. Concretamente, este capítulo está dirigido a demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.1. *Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ y μ la medida de probabilidad uniforme sobre K. Entonces, existen constantes absolutas C_1, C_2 tales que $\forall \theta \in S^{n-1}$, se tienen las siguientes afirmaciones equivalentes:*

1. $(\mathbb{E}|\langle X, \theta \rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 p\mathbb{E}|\langle X, \theta \rangle|$.
2. $\mu\{x \in K : |\langle X, \theta \rangle| \geq C_2 t\mathbb{E}|\langle X, \theta \rangle|\} \leq 2e^{-t} \quad \forall t > 0$.

Más adelante procederemos a realizar la demostración del teorema, pero antes vamos a ver algunos resultados previos. Uno de ellos es la Desigualdad de Prékopa-Leindler que nos servirá para dar una demostración de la desigualdad de Brunn-Minkowski, que relaciona el volumen de la suma de Minkowski de dos conjuntos con el volumen de los conjuntos.

Teorema 2.2. ***Desigualdad de Prékopa-Leindler**. Sean f,g,h: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones medibles no negativas y $0 \leq \lambda \leq 1$ tal que $f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \leq h(z)$ siempre que $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. Entonces*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy \right)^\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^n} h(z)dz.$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre la dimensión. Supongamos primero que $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$. Entonces para cualquier $0 \leq t < 1$, tenemos

$$\{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq t\} \supseteq (1-\lambda)\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\} + \lambda\{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\}.$$

En efecto, ya que dados $x \in \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}, y \in \{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\}$ entonces $z = (1-\lambda)x + \lambda y$, cumple que

$$h(z) = h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \geq t^{1-\lambda} t^\lambda = t.$$

En primer lugar, supongamos $n = 1$. Sean A, B dos conjuntos compactos no vacíos en $\mathbb{R}$. Veamos que

$$A + B \supseteq (minA + B) \cup (A + maxB)$$
$$(minA + B) \cap (A + maxB) = \{minA + maxB\}.$$

Sabemos que $A+B=\{a+b\in\mathbb{R}: a\in A, b\in B\}$.

Si $x\in(minA+B)\cup(A+maxB)$, entonces $x\in(minA+B)$ ó $x\in(A+maxB)$, esto es, $x=a_0+b$ ó $x=a+b_1$, siendo $a_0=minA\in A$ y $b_1=maxB\in B$. Luego $x\in A+B$, y por tanto, $A+B\supseteq(minA+B)\cup(A+maxB)$.
Por otro lado, si $x\in(minA+B)\cap(A+maxB)$, entonces $x\in minA+B$ y $x\in A+maxB$, esto es, $\exists\, b\in B$ tal que $x=a_0+b$ y $\exists\, a\in A$ tal que $x=a+b_1$.
Luego $a_0+b=a+b_1$ y tenemos que $a_0=a+b_1-b\leq a$, por ser a_0 el mínimo de A.
Hemos llegado a que $0\leq b_1-b\leq 0$, de donde concluimos que $b_1=b$ y $a_0=a$, esto es, $x=a_0+b_1=minA+maxB$.
Para el otro contenido, sabemos que $a_0+b_1=minA+b_1$ y $a_0+b_1=a_0+maxB$, luego $a_0+b_1\in(minA+B)\cap(A+maxB)$.
Por lo tanto, si $n=1$ tenemos que $|A+B|\geq|A|+|B|$.
Aplicando la desigualdad aritmético-geométrica obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h(x)dx &= \int_0^1 |\{x\in\mathbb{R}: h(x)\geq t\}|dt\\ \geq (1-\lambda)\int_0^1 |\{x\in\mathbb{R}: f(x)\geq t\}|dt &+ \lambda\int_0^1 |\{x\in\mathbb{R}: g(y)\geq t\}|dt\\ \geq \left(\int_0^1 |\{x\in\mathbb{R}: f(x)\geq t\}|dt\right)^{(1-\lambda)} & \left(\int_0^1 |\{x\in\mathbb{R}: g(y)\geq t\}|dt\right)^{\lambda}\\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)dx\right)^{(1-\lambda)}\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)dy\right)^{\lambda}.\end{aligned}$$

Supongamos ahora $n>1$. Supongamos que es cierto para $n-1$ y vamos a ver que se cumple para n. Fijamos $x_1\in\mathbb{R}$ y definimos $f_{x_1}:\mathbb{R}^{n-1}\longrightarrow[0,+\infty)$ dada por $f_{x_1}(x_2,...,x_n)=f(x_1,...,x_n)$. Análogamente definimos g_{y_1} y h_{z_1} . Entonces para cualquier $(x_2,...,x_n),(y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$, cuando $z_1=(1-\lambda)x_1+\lambda y_1$, para algún $x_1,y_1\in\mathbb{R}$, tenemos

$$h_{z_1}((1-\lambda)(x_2,...,x_n)+\lambda(y_2,...,y_n))\geq f_{x_1}(x_2,...,x_n)^{1-\lambda}g_{y_1}(y_2,...,y_n)^{\lambda}$$

Así tenemos por hipótesis de inducción que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(\bar{z})d\bar{z}\geq\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{x_1}(\bar{x})d\bar{x}\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g_{y_1}(\bar{y})d\bar{y}\right)^{\lambda}.$$

Hemos visto que el resultado es cierto para $n=1$, y aplicando el teorema de Fubini, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{z_1}(\bar{z})d\bar{z}\right)dz_1\geq\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{x_1}(\bar{x})d\bar{x}\right)dx_1\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{y_1}(\bar{y})d\bar{y}\right)dy_1\right)^{\lambda}.$$

Asi queda probado para todo n.
Si las funciones no tienen $\|f\|_\infty=\|g\|_\infty=1$, tomamos $\tilde{f}(x)=\dfrac{f(x)}{\|f\|_\infty}$, $\tilde{g}(y)=\dfrac{g(y)}{\|g\|_\infty}$, $\tilde{h}(z)=\dfrac{h(z)}{\|f\|_\infty^{1-\lambda}\|g\|_\infty^{\lambda}}$.
De esta forma $\|\tilde{f}(x)\|_\infty=\|\tilde{g}(y)\|_\infty=1$,
Entonces

$$\left(\frac{f(x)}{\|f\|_\infty}\right)^{1-\lambda}\left(\frac{g(y)}{\|g\|_\infty}\right)^{\lambda}=\frac{f(x)^{1-\lambda}g(y)^{\lambda}}{\|f\|_\infty^{1-\lambda}\|g\|_\infty^{\lambda}}\leq\frac{h(z)}{\|f\|_\infty^{1-\lambda}\|g\|_\infty^{\lambda}}$$

Luego como hemos visto que se cumplen las hipótesis para $\tilde{f},\tilde{g}$ y $\tilde{h}$ podemos aplicar la desigualdad

$$\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx}{\|f\|_\infty}\right)^{1-\lambda}\left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy}{\|g\|_\infty}\right)^{\lambda}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{f}(x)dx\right)^{1-\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{g}(y)dy\right)^{\lambda}\leq\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{h}(z)dz=\frac{\int_{\mathbb{R}^n} h(z)dz}{\|f\|_\infty^{1-\lambda}\|g\|_\infty^{\lambda}}$$

Luego la desigualdad queda probada para funciones medibles cualesquiera.

$\square$

Si aplicamos esta desigualdad para $f = \chi_A$, $g = \chi_B$ y $h = \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}$ funciones características de A y B conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^n$ tales que $(1-\lambda)A+\lambda B$ es medible, tenemos que se cumplen las hipótesis de la desigualdad de Prékopa-Leindler, es decir, $f(x)^{1-\lambda}g(y)^{\lambda} \leq h(z)$ siempre que $z = (1-\lambda)x+\lambda y$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. En efecto, si $z \in (1-\lambda)A+\lambda B$, tenemos que $h(z) = 1 = 1^{1-\lambda}1^{\lambda} \geq f(x)^{1-\lambda}g(y)^{\lambda}$ por ser f y g funciones características $\forall x \in \mathbb{R}^n$. En otro caso si $z \notin (1-\lambda)A+\lambda B$, tenemos que $h(z) = 0$, luego $\nexists (x,y) \in A \times B$ tal que $z = (1-\lambda)x+\lambda y$. Es decir, si $z = (1-\lambda)x+\lambda y$, o bien $x \notin A$ o bien $x \notin B$, por lo que $f(x)^{1-\lambda}g(y)^{\lambda} = \chi_A(x)\chi_B(y) = 0$.
Así, aplicando la desigualdad de Prékopa-Leindler, obtenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)dx\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_B(y)dy\right)^{\lambda} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(1-\lambda)A+\lambda B}(z)dz$$

o, equivalentemente,

$$|A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda} \leq |(1-\lambda)A+\lambda B|.$$

para todo A y B conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^n$ y para todo $0 \leq \lambda \leq 1$. Esta desigualdad se conoce como Desigualdad de Brunn-Minkowski.
En el siguiente teorema vemos que esta desigualdad se puede expresar de varias formas equivalentes.

Teorema 2.3. ***Desigualdad de Brunn-Minkowski.*** *Sean A,B dos conjuntos de Borel en $\mathbb{R}^n$. Para cualquier $0 \leq \lambda \leq 1$*

$$|A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda} \leq |(1-\lambda)A+\lambda B|.$$

Equivalentemente,

$$|A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}} \leq |A+B|^{\frac{1}{n}}$$

siempre que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

Demostración. Hemos visto que la primera desigualdad es una consecuencia directa de la desigualdad de Prékopa-Leindler. Veamos ahora que son equivalentes las dos desigualdades. En primer lugar vamos a ver que la primera desigualdad implica la segunda. Sean A y B dos conjuntos de Borel no vacíos. Si tomamos $A' = \dfrac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}}$, $B' = \dfrac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}}$ y $\lambda = \dfrac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}}$, entonces sustituyendo en la primera expresión obtenemos que

$$|(1-\lambda)A'+\lambda B'| \geq |A'|^{1-\lambda}|B'|^{\lambda} = \left|\frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}}\right|\left|\frac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}}\right| = \frac{|A|}{(|A|^{1/n})^n}\frac{|B|}{(|B|^{1/n})^n} = 1.$$

Por otro lado,

$$(1-\lambda)A'+\lambda B' = \frac{|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}-|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{A}{|A|^{\frac{1}{n}}} + \frac{|B|^{\frac{1}{n}}}{|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{B}{|B|^{\frac{1}{n}}} = \frac{A+B}{|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}}.$$

Por tanto ,

$$1 \leq |(1-\lambda)A'+\lambda B'| = \left|\frac{A+B}{|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}}\right| = \frac{|A+B|}{(|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}})^n} \Rightarrow |A+B| \geq (|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}})^n.$$

Tomando raíces n-ésimas en ambos lados de la desigualdad obtenemos que $|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}$.
A continuación vamos a obtener la implicación inversa.
Dado cualquier $0 \leq \lambda \leq 1$, utilizando la desigualdad aritmético-geométrica,

$$|(1-\lambda)A+\lambda B|^{\frac{1}{n}} \geq |(1-\lambda)A|^{\frac{1}{n}}+|\lambda B|^{\frac{1}{n}} = (1-\lambda)|A|^{\frac{1}{n}}+\lambda|B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1-\lambda}{n}}|B|^{\frac{\lambda}{n}}.$$

Así, tomando potencias n-ésimas en ambos lados de la desigualdad, obtenemos

$$|(1-\lambda)A+\lambda B| \geq |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda}.$$

$\square$

A continuación, vamos a utilizar la desigualdad de Brunn-Minkowski para demostrar un resultado que será fundamental para estudiar el comportamiento de los funcionales lineales sobre un cuerpo convexo.

Teorema 2.4. ***Desigualdad de Borell***. *Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ y μ la medida de probabilidad uniforme sobre K en $\mathbb{R}^n$ y sea $\frac{1}{2} \leq \theta < 1$. Entonces, para cada conjunto convexo simétrico $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mu(A) \geq \theta$, tenemos que*

$$\mu((tA)^c) \leq \theta \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{\frac{1+t}{2}}$$

para cada t>1.

Demostración. Sean los conjuntos $tA = \{tx \in \mathbb{R}^n : x \in A\}$, $(tA)^c = \{y \in \mathbb{R}^n : y \neq tx, \forall x \in A\}$, entonces

$$A^c \supseteq \frac{2}{t+1}(tA)^c + \frac{t-1}{t+1}A$$

Vamos a probarlo por reducción al absurdo. Supongamos que $\frac{2}{t+1}y + \frac{t-1}{t+1}x \in A$, para algún $y \in (tA)^c, x \in A$.
Tomamos $\lambda = \frac{t+1}{2t} \in [0,1]$. En efecto, ya que $t > 0 \Rightarrow \lambda = \frac{t+1}{2t} > 0$ y por otro lado $t > 1 \Rightarrow \lambda = \frac{t+1}{2t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2t} < 1$
Luego por ser A un conjunto convexo y simétrico

$$\lambda \left(\frac{2}{t+1}y + \frac{t-1}{t+1}x\right) + (1-\lambda)(-x) \in A.$$

Sustituyendo λ y operando obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{t+1}{2t}\left(\frac{2}{t+1}y + \frac{t-1}{t+1}x\right) + \left(1 - \frac{t+1}{2t}\right)(-x) \in A \iff \\ \frac{1}{t}y + \left[\frac{t-1}{2t} - \frac{t-1}{2t}x\right] \in A \iff \\ \frac{1}{t}y \in A \iff y \in tA. \end{aligned}$$

Contradicción, ya que $y \in (tA)^c$.
Aplicando la desigualdad de Brunn-Minkowski ,

$$1-\theta \geq \mu(A^c) \geq \mu((tA)^c)^{\frac{2}{t+1}} \mu(A)^{\frac{t-1}{t+1}} \geq \mu((tA)^c)^{\frac{2}{t+1}} \theta^{\frac{t-1}{t+1}}$$

despejando y operando llegamos a la desigualdad buscada

$$\mu((tA)^c) \leq \left(\frac{1-\theta}{\theta^{\frac{t-1}{t+1}}}\right)^{\frac{t+1}{2}} = \theta\left(\frac{1-\theta}{\theta^{\frac{t-1}{t+1}}\theta^{\frac{2}{t+1}}} = \right)^{\frac{t+1}{2}} = \theta\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{\frac{t+1}{2}}.$$

□

El siguiente teorema muestra formas equivalentes de expresar una velocidad de decaimiento para variables aleatorias.

Teorema 2.5. ***Colas/ Integrabilidad/ Momentos***. *Sea X una variable aleatoria no negativa. Son equivalentes :*

1. $\mathbb{P}(X>t)<C_1e^{-c_1t^{\alpha}} \qquad \alpha\in[1,2] \qquad \forall t\geq 0.$

2. $\mathbb{E}[e^{c_2X^{\alpha}}]\leq C_2 \qquad \alpha\in[1,2].$

3. $\mathbb{E}[X^p]^{\frac{1}{p}}\leq C_3p^{\frac{1}{\alpha}} \qquad ,1\leq p<\infty,\alpha\in[1,2].$

donde C_1,c_1,C_2,c_2 y C_3 son constantes positivas dependiendo sólo unas de las otras.

Demostración. $(1\Rightarrow 3)$ Suponemos que X es una variable aleatoria no negativa. Veamos que $\mathbb{E}[X]=\int_0^{\infty}\mathbb{P}(X>t)dt$. Para ello usaremos el teorema de Fubini

$$\int_0^{\infty}\mathbb{P}(X>t)dt=\int_0^{\infty}\int_{\Omega}\chi_{\{X>t\}}(\omega)d\mathbb{P}(\omega)dt=\int_{\Omega}\int_0^{\infty}\chi_{\{X>t\}}(t)dtd\mathbb{P}(\omega)=\int_{\Omega}Xd\mathbb{P}(\omega)=\mathbb{E}[X].$$

Luego usando la propiedad 1 y el cambio de variable: $t=s^p$ y $dt=ps^{p-1}ds$ obtenemos

$$\mathbb{E}[X^p]=\int_0^{\infty}\mathbb{P}(X^p>t)dt=\int_0^{\infty}\mathbb{P}(X^p>s^p)ps^{p-1}ds=p\int_0^{\infty}\mathbb{P}(X>s)s^{p-1}ds<p\int_0^{\infty}C_1e^{-c_1s^{\alpha}}s^{p-1}ds$$

Haciendo el cambio de variable $c_1s^{\alpha}=x$, $ds=\frac{1}{c_1^{1/\alpha}}\frac{1}{\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-1}dx$ y sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned}pC_1\int_0^{\infty}e^{-x}\left(\frac{1}{c_1^{1/\alpha}}x^{1/\alpha}\right)^{p-1}\frac{1}{c_1^{1/\alpha}}\frac{1}{\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-1}dx&=pC_1\frac{1}{c_1^{\frac{1}{\alpha}(p-1)}c_1^{\frac{1}{\alpha}}\alpha}\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\frac{p-\alpha}{\alpha}}dx\\&=pC_1\frac{1}{c_1^{p/\alpha}\alpha}\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\frac{p-\alpha}{\alpha}}dx=pC_1\frac{\Gamma(p/\alpha)}{c_1^{p/\alpha}\alpha}=\frac{C_1}{c_1^{p/\alpha}}\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $\Gamma(1+\frac{p}{\alpha})=\frac{p}{\alpha}\Gamma(\frac{p}{\alpha})$. Es decir

$$(\mathbb{E}[X^p])^{\frac{1}{p}}<\left(C_1\frac{\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}\right)}{c_1^{p/\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

y usando la fórmula de Stirling $\Gamma(1+\frac{p}{\alpha})\sim(\frac{p}{\alpha})^{\frac{p}{\alpha}}e^{-\frac{p}{\alpha}}\sqrt{2\pi\frac{p}{\alpha}}$, si $p\to\infty$ tenemos que

$$\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}\sim\frac{p^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\sqrt{2\pi\frac{p}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}\leq C\frac{p^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}e^{-\frac{1}{\alpha}}\left(\sqrt{2\pi\frac{p}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{p}}<Cp^{\frac{1}{\alpha}}$$

donde C es una constante absoluta. Por lo que

$$\frac{C_1^{1/p}}{c_1^{1/\alpha}}\Gamma(1+\frac{p}{\alpha})^{\frac{1}{p}}\leq\frac{C_1^{1/p}}{c_1^{1/\alpha}}Cp^{\frac{1}{\alpha}}\leq C_3p^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$(3\Rightarrow 2)$ Sabemos que $e^x=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^p}{p!}$ y aplicando las propiedades de la esperanza y que $p!\sim p^pe^{-p}\sqrt{2\pi p}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{c_2X^{\alpha}}]=\mathbb{E}\left[\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(c_2X^{\alpha})^p}{p!}\right]&=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{c_2^p}{p!}\mathbb{E}[X^{\alpha p}]\leq\sum_{p=0}^{\infty}\frac{c_2^pC_3^{\alpha p}(\alpha p)^p}{p!}\\&\leq\sum_{p=0}^{\infty}c_2^pC_3^{\alpha p}\alpha^pe^p(\sqrt{2\pi p})^{-1}=\sum_{p=0}^{\infty}(c_2C_3^{\alpha}\alpha p)^p(\sqrt{2\pi p})^{-1}\\&\leq\sum_{p=0}^{\infty}(c_2C_3^{\alpha}\alpha e)^p=\frac{1}{1-c_2C_3^{\alpha}\alpha e}<2\end{aligned}$$

eligiendo c_2 suficientemente pequeña.
($2 \Rightarrow 1$) Usaremos la desigualdad de Markov. Así tenemos que

$$\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(e^{c_2 X^\alpha} > e^{c_2 t^\alpha}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{c_2 X^\alpha}]}{e^{c_2 t^\alpha}} \leq C_2 e^{-c_2 t^\alpha} \qquad \forall \alpha \in [1,2].$$

□

Podemos aplicar las desigualdades anteriores a una seminorma. Con $\alpha = 1$ obtenemos el siguiente resultado. Así con ver una de las implicaciones, las demás son equivalentes.
Como consecuencia de la Desigualdad de Borell, tenemos que se cumple el siguiente teorema

Teorema 2.6. ***Desigualdad de Hölder inversa y decrecimiento exponencial.*** *Existen constantes absolutas $C_1, C_2 = 2C_1 e > 0$ tal que para cualquier cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, si μ es la probabilidad uniforme sobre K, para cualquier semi-norma $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\infty)$ tenemos*

1. $(\mathbb{E}_\mu f^p)^{\frac{1}{p}} \leq C_1 p \mathbb{E}_\mu f \qquad \forall p \geq 1$
2. $\mathbb{E}_\mu e^{\frac{f}{C_2 \mathbb{E}_\mu f}} \leq 2$
3. $\mu\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq C_2 t \mathbb{E}_\mu f\} \leq 2e^{-t} \qquad \forall t > 0$

Demostración. Sea $Y = \dfrac{X}{\mathbb{E}_\mu f(X)}$ donde X es un vector uniformemente distribuido en K.
Entonces $\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}_\mu \left[\dfrac{f(x)}{\mathbb{E}_\mu f(x)}\right] = \dfrac{\mathbb{E}_\mu[f(x)]}{\mathbb{E}_\mu[f(x)]} = 1$. Sea el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < 3\mathbb{E}_\mu f(x)\}$.
Por la desigualdad de Markov $\mathbb{P}(f(Y) > 3) \leq \frac{\mathbb{E}[f(Y)]}{3} = \frac{1}{3}$. Luego $\mu(A) = \mathbb{P}(f(Y) < 3) \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
Entonces por la desigualdad de Borell, como f es una seminorma

$$\mathbb{P}\{f(Y) \geq 3t\} = \mu\{(tA)^c\} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1+t}{2}} = \frac{2}{3} 2^{\frac{-1-t}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} 2^{\frac{-t}{2}} < 2^{\frac{-t}{2}} = e^{\frac{-t \log 2}{2}}$$

cuando $t > 1$. Por tanto

$$\mathbb{E} f(Y)^p = \int_0^3 p t^{p-1} \mathbb{P}\{f(Y) > t\} dt + \int_3^\infty p t^{p-1} \mathbb{P}\{f(Y) > t\} dt.$$

Haciendo el cambio de variable $t = 3s$ y $dt = 3ds$ en la segunda integral

$$\leq 3^p + \int_1^\infty p(3s)^{p-1} \mathbb{P}\{f(Y) > 3s\} 3ds \leq 3^p + 3^p \int_1^\infty p s^{p-1} e^{-\frac{\log 2}{2} s} ds \leq 3^p + 3^p \int_0^\infty p s^{p-1} e^{-\frac{\log 2}{2} s} ds.$$

Llamando $\frac{\log 2}{2} s = x$ y $ds = \frac{2}{\log 2} dx$, la anterior integral es igual a

$$3^p + 3^p \int_0^\infty p \left(\frac{2x}{\log 2}\right)^{p-1} e^{-x} \left(\frac{2}{\log 2}\right) dx \leq 3^p + \left(\frac{6}{\log 2}\right)^p \int_0^\infty p x^{p-1} e^{-x} dx =$$
$$3^p + \left(\frac{6}{\log 2}\right)^p p\Gamma(p) = 3^p \left(1 + \left(\frac{2}{\log 2}\right)^p \Gamma(1+p)\right).$$

Utilizando las propiedades de la función Gamma y la fórmula de Stirling, obtenemos el resultado buscado

$$3^p + \left(\frac{6}{\log 2}\right)^p \Gamma(1+p) \leq 3^p + \left(\frac{6}{\log 2}\right)^p [p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p}] \leq 3^p + \left(\frac{6}{\log 2}\right)^p p^p e^{-p} \leq (C_1 p)^p.$$

Deshacemos el cambio

$$
\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}_\mu\left[\frac{f(x)}{\mathbb{E}_\mu f(x)}\right]^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C_1 p \\
\left(\frac{\mathbb{E}_\mu[f(x)]^p}{(\mathbb{E}[f(x)])^p}\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C_1 p \\
\mathbb{E}_\mu(f(x)^p)^{1/p} &\leq C_1 p \mathbb{E}_\mu(f(x)).
\end{aligned}
$$

Concretamente, aplicando este resultado a $f(x) = |\langle x, \theta\rangle|$ obtenemos el teorema.

$\square$

Capítulo 3

Isotropía

En el capítulo anterior hemos estudiado el crecimiento de los momentos de los funcionales lineales. En este capítulo nos fijaremos solo en los dos primeros momentos, es decir, en $\mathbb{E}\langle X,\theta\rangle$ y $Var\langle X,\theta\rangle$, y veremos que, aplicando únicamente transformaciones afines, es posible conseguir que sean iguales en todas las direcciones. Obtendremos así una normalización de forma que la masa está distribuida de manera similar en algún sentido y en todas las direcciones. Esto da lugar al concepto de isotropía.

Definición 3.1. Un cuerpo convexo K en $\mathbb{R}^n$ es isotrópico si tiene volumen $|K| = 1$, centro de masas el origen y existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\int_K \langle x,y\rangle^2 dx = \alpha^2 |y|^2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

En el siguiente resultado vemos que esta condición en la definición de isotropía, se puede expresar de varias formas equivalentes.

Teorema 3.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\int_K \langle x,y\rangle^2 dx = \alpha^2 |y|^2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$
2. *Para cada i,j $=1,\dots,n$*
$$\int_K x_i x_j dx = \alpha^2 \delta_{ij},$$
donde $x_1,\dots,x_n$ son las coordenadas de x respecto a una base ortonormal y δ_{ij} representa la delta de Kronecker.
3. *Para cada $T \in L(\mathbb{R}^n)$*
$$\int_K \langle x,Tx\rangle dx = \alpha^2 (trT).$$

Demostración. Veamos que $(1 \Rightarrow 2)$
Si $i = j$:

$$\int_K x_i^2 dx = \int_K \langle x,e_i\rangle^2 dx = \alpha^2.$$

Si $i \neq j$:

$$\int_K (x_i + x_j)^2 dx = \int_K \langle x,e_i + e_j\rangle^2 dx = 2\alpha^2.$$

Además,

$$\int_K (x_i + x_j)^2 dx = \int_K x_i^2 dx + 2\int_K x_i x_j dx + \int_K x_j^2 dx = 2\alpha^2 + 2\int_K x_i x_j dx$$

de donde obtenemos que

$$2\alpha^2 = 2\alpha^2 + 2\int_K x_i x_j dx$$

por lo que concluimos que $\int_K x_i x_j dx = 0$.
$(2 \Rightarrow 3)$
Para cualquier matriz $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$

$$\begin{aligned}\int_K \langle x, Tx\rangle dx &= \int_K \sum_{i=1}^n x_i (Tx)_i dx = \int_K \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j dx \\ &= \sum_{i,j=1}^n t_{ij} \int_K x_i x_j dx = \sum_{i=1}^n t_{ii}\alpha^2 = \alpha^2 (trT).\end{aligned}$$

$(3 \Rightarrow 1)$

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = \int_K \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j y_j\right) dx = \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \int_K x_i x_j dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx,$$

donde T es la matriz con elemento $t_{ij} = y_i y_j$. Por lo tanto $trT = \sum_{i=1}^n y_i^2 = |y|^2$ y así $\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = \alpha^2 |y|^2$.

□

Al número α que aparece en la definición de isotropía lo llamaremos constante de isotropía de K y lo denotaremos por L_K. Observamos que si K satisface la condición de isotropía, entonces

$$\int_K |x|^2 dx = nL_K^2.$$

En efecto, ya que

$$\int_K |x|^2 = \int_K (x_1^2 + \ldots + x_n^2) dx = \int_K x_1^2 dx + \ldots + \int_K x_n^2 dx = \int_K \langle x, e_1\rangle^2 dx + \ldots + \int_K \langle x, e_n\rangle^2 dx = nL_K^2.$$

Observamos además que si K es un cuerpo isotrópico y $U \in O(n)$ es una transformación ortogonal, entonces $U(K)$ es también isotrópico y además $L_{U(K)} = L_K$.
En efecto, si $y \in \mathbb{R}^n$ y $U \in O(n)$

$$\int_{U(K)} \langle x, y\rangle^2 dx = \int_K \langle Ux, y\rangle^2 dx = \int_K \langle x, U^t y\rangle^2 dx = L_K^2 |U^t y|^2 = L_K^2 |y|^2$$

y, por tanto, $U(K)$ es isotrópico con $L_{U(K)} = L_K$.

Los siguientes resultados están destinados a demostrar que para cualquier cuerpo convexo con centro de masas en el origen, existe una transformación lineal T, tal que $T(K)$ es isotrópico. Dicha transformación lineal aparece además como solución de un problema de minimización y es esencialmente única, salvo transformaciones ortogonales.
El siguiente resultado prueba la existencia de un cuerpo isotrópico en cada clase lineal. Es decir, para cada cuerpo convexo K existe una transformación afín T tal que $T(K)$ es isotrópico.

Teorema 3.2. *Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con centro de masas en el origen. Entonces existe $T \in GL(n)$ tal que $T(K)$ es isotrópico.*

Demostración. Veamos que el operador $M \in L(\mathbb{R}^n)$ definido por $M(y) = \int_K \langle x, y\rangle x dx$, tiene raíz cuadrada simétrica y definida positiva S. La matriz M dada por $M_{ij} = \langle Me_i, e_j\rangle = \int_K \langle x, e_i\rangle\langle x, e_j\rangle dx = \int_K x_i x_j dx$

es claramente simétrica y además para todo $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\langle y, My\rangle = \int_K \langle x,y\rangle\langle x,y\rangle dx = \int_K \langle x,y\rangle^2 dx > 0$. Por lo tanto existe una matriz ortogonal U y unos escalares $\lambda_1,\dots,\lambda_n > 0$ tales que

$$M = U \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} U^t.$$

Entonces tomando $S = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} U^t$, tenemos que

$$S \cdot S = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} U^t U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} U^t = U \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} U^t = M.$$

Consideramos la imagen lineal $\tilde{K} = S^{-1}(K)$ de K. Entonces para cada $y \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\int_{\tilde{K}} \langle x,y\rangle^2 dx = \int_{S^{-1}(K)} \langle x,y\rangle^2 dx.$$

Haciendo el cambio de variable $x = S^{-1}\tilde{x}$ y utilizando que

$$S^{-1} = U \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} U^t$$

es una matriz simétrica, la anterior integral es igual a

$$|detS^{-1}| \int_K \langle S^{-1}\tilde{x}, y\rangle^2 d\tilde{x} = |detS|^{-1} \int_K \langle S^{-1}\tilde{x}, y\rangle^2 d\tilde{x}.$$

Utilizando las propiedades del producto escalar y que S^{-1} es simétrica, obtenemos que $\langle S^{-1}\tilde{x}, y\rangle = (S^{-1}\tilde{x})^t y = \tilde{x}^t (S^{-1})^t y = \tilde{x}^t S^{-1} y = \langle \tilde{x}, S^{-1}y\rangle$, por lo que la anterior integral es igual a

$$|detS|^{-1} \int_K \langle \tilde{x}, S^{-1}y\rangle^2 d\tilde{x} = |detS|^{-1} \int_K \langle \tilde{x}, S^{-1}y\rangle \cdot \tilde{x}^t S^{-1} y d\tilde{x} = |detS|^{-1} \left(\int_K \langle \tilde{x}, S^{-1}y\rangle \tilde{x} d\tilde{x} \right) \cdot S^{-1}y$$

$$= |detS|^{-1} \langle \int_K \langle \tilde{x}, S^{-1}y\rangle \tilde{x} d\tilde{x}, S^{-1}y\rangle = |detS|^{-1} \langle MS^{-1}y, S^{-1}y\rangle = |detS|^{-1} \langle S^{-1}MS^{-1}y, y\rangle = |detS|^{-1}|y|^2,$$

ya que $S^{-1}MS^{-1} = I_n$, y por lo tanto, $\frac{\tilde{K}}{|\tilde{K}|^{\frac{1}{n}}}$ es isotrópico.

□

En el próximo teorema, vemos que la posición de isotropía de un cuerpo convexo, cuya existencia acabamos de demostrar, está únicamente determinada, salvo transformaciones ortogonales, y que además aparece como solución de un problema de minimización.

Teorema 3.3. *Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$ con volumen $|K| = 1$ y centro de masa en el origen. Definimos*

$$B(K) = inf \left\{ \int_{TK} |x|^2 dx : T \in SL(n) \right\}.$$

Entonces una posición K_1 de K es isotrópica si y sólo si

$$\int_{K_1} |x|^2 dx = B(K).$$

Además, si K_1 y K_2 son posiciones isotrópicas de K, existe $U \in O(n)$ tal que $K_2 = U(K_1)$.

Demostración. Fijamos una posición de isotropía K_1 de K, luego sabemos que

$$\int_{K_1} \langle x, Tx \rangle dx = L_{K_1}^2 (trT),$$

para cada $T \in L(\mathbb{R}^n)$.
Entonces para cada $T \in SL(n)$, haciendo el cambio de variable $x = T\tilde{x}$, y utilizando que $|detT| = 1$ tenemos

$$\int_{TK_1} |x|^2 dx = \int_{K_1} |T\tilde{x}|^2 d\tilde{x} = \int_{K_1} \langle T\tilde{x}, T\tilde{x} \rangle d\tilde{x} = \int_{K_1} \langle \tilde{x}, T^t T\tilde{x} \rangle d\tilde{x} = L_{K_1}^2 tr(T^t T),$$

donde hemos utilizado que $\langle T\tilde{x}, T\tilde{x} \rangle = (T\tilde{x})^t T\tilde{x} = \tilde{x}^t T^t T\tilde{x} = \langle \tilde{x}, T^t T\tilde{x} \rangle$.
Ahora usando la desigualdad aritmético-geométrica en la forma $tr(T^t T) \geq n[det(T^t T)]^{1/n}$, obtenemos que

$$L_{K_1}^2 tr(T^t T) \geq L_{K_1}^2 n[det(T^t T)]^{1/n} \geq nL_{K_1}^2 = \int_{K_1} |x|^2 dx.$$

Por lo tanto, $\int_{K_1} |x|^2 dx = B(K)$ y recíprocamente, si $\tilde{K} = TK_1$ es una posición tal que $\int_{\tilde{K}} |x|^2 dx = B(K)$, entonces necesariamente $trT^t T = n|detT^t T|^{\frac{1}{n}}$, de donde concluimos que $T^t T = I_n$.
Además si K_1 y K_2 son posiciones de isotropía de K, como $K_2 = TK_1$ para una cierta T, T debe ser ortogonal. □

Como consecuencia de los anteriores resultados podemos definir la constante de isotropía de cualquier cuerpo convexo K como la constante de isotropía de su imagen isotrópica.

En los resultados anteriores hemos visto que a cada cuerpo convexo le podemos asociar un número que es su constante de isotropía. Una pregunta natural que surge entonces es la siguiente: ¿Qué cuerpos convexos en dimensión n son los que minimizan y maximizan el valor de dicha constante? El problema de encontrar el cuerpo cuya constante de isotropía es máxima está abierto todavía a día de hoy. Además, se desconoce si dicho valor está acotado superiormente por una constante independiente de la dimensión.
En el siguiente teorema demostraremos que la bola Euclídea es el cuerpo con menor constante de isotropía de entre todos los cuerpos convexos n-dimensionales. Además, dicho valor está acotado inferiormente por una constante independiente de la dimensión.

Teorema 3.4. *Para todo K cuerpo convexo isotrópico en $\mathbb{R}^n$,*

$$L_K \geq L_{B_2^n} \geq c,$$

donde $c > 0$ es una constante absoluta.

Demostración. Si $r_n = |B_2^n|^{-1/n}$, entonces $|r_n B_2^n| = 1$ y por lo tanto, $r_n B_2^n$ es isotrópico, ya que por la invarianza rotacional de la bola Euclidea tenemos que para todo $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{B_2^n} \langle x, y \rangle^2 dx = |y|^2 \int_{B_2^n} \langle x, \frac{y}{|y|} \rangle^2 dx = |y|^2 \int_{B_2^n} \langle x, e_1 \rangle^2 dx.$$

Sea K un cuerpo convexo isotrópico. Observar que si $x \in K \setminus r_n B_2^n$, entonces $|x| > r_n$, en otro caso, si $x \in r_n B_2^n\ K$, tenemos que $|x| \leq r_n$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} nL_K^2 &= \int_K |x|^2 dx = \int_{K\cap r_n B_2^n} |x|^2 dx + \int_{K\setminus r_n B_2^n} |x|^2 dx \\ &\geq \int_{K\cap r_n B_2^n} |x|^2 dx + \int_{K\setminus r_n B_2^n} r_n^2 dx = \int_{K\cap r_n B_2^n} |x|^2 dx + r_n^2 |K \setminus r_n B_2^n| \end{aligned}$$

ya que en $K \setminus r_n B_2^n$, sabemos que $|x| \geq r_n$.
Como K es un cuerpo convexo isotrópico, entonces $1 = |K| = |K \cap r_n B_2^n| + |K \setminus r_n B_2^n|$. Por otro lado, tenemos que $1 = |r_n B_2^n| = |K \cap r_n B_2^n| + |r_n B_2^n \setminus K|$, de donde concluimos que $|K \setminus r_n B_2^n| = |r_n B_2^n \setminus K|$. Luego la expresión anterior es igual a

$$\begin{aligned} \int_{K\cap r_n B_2^n} |x|^2 dx + r_n^2 |r_n B_2^n \setminus K| &= \int_{K\cap r_n B_2^n} |x|^2 dx + \int_{r_n B_2^n \setminus K} r_n^2 dx \\ &\geq \int_{K\cap r_n B_2^n} |x|^2 dx + \int_{r_n B_2^n \setminus K} |x|^2 dx = \int_{r_n B_2^n} |x|^2 dx = nL_{B_2^n}^2 \end{aligned}$$

y aplicando el cambio a coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned} L_{B_2^n}^2 &= \frac{1}{n}\int_{r_n B_2^n} |x|^2 dx = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \chi_{[0,r_n]}(|x|) dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-1} |r\theta|^2 \chi_{[0,r_n]}(|r\theta|) dr dx \\ &= \frac{1}{n}\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n+1} \chi_{[0,r_n]}(|r\theta|) dr dx = \frac{1}{n}\int_0^{r_n} r^{n+1} n |B_2^n| dr = \frac{r_n^{n+2}}{n+2} |B_2^n| \\ &= \frac{1}{n+2} |B_2^n| |B_2^n|^{-1-\frac{2}{n}} = \frac{1}{n+2} |B_2^n|^{-\frac{2}{n}}. \end{aligned}$$

□

En el siguiente capítulo veremos que $|B_2^n| = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$ y, por lo tanto, utilizando la fórmula de Stirling

$$|B_2^n|^{\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})^{\frac{1}{n}}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}} (\sqrt{\pi n})^{\frac{1}{n}}} \sim \frac{\sqrt{2\pi e}}{\sqrt{n}}$$

y así,

$$\frac{1}{(n+2)|B_2^n|^{\frac{2}{n}}} \sim \frac{1}{(n+2)\dfrac{2\pi e}{n}} = \frac{n}{(n+2)} \frac{1}{2\pi e} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi e} = c.$$

Capítulo 4

El volumen y la constante de isotropía de las bolas p

En este capítulo calcularemos el valor de la constante de isotropía en una familia muy importante de cuerpos convexos, que son las bolas p.
Empezaremos calculando el volumen de $B_p^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_p \leq 1\}$.

Teorema 4.1. *Para cualquier $p \in [1,\infty]$, el volumen de B_p^n es*

$$|B_p^n| = \begin{cases} \dfrac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)} & si\ 1 \leq p < \infty \\ 2^n & si\ p = \infty \end{cases}$$

Demostración. Por un lado tenemos que, utilizando el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||_p^p} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n |x_i|^p} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x_1|^p} e^{-|x_2|^p} \dots e^{-|x_n|^p} dx_n \dots dx_2 dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x_1|^p} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x_2|^p} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x_n|^p} dx_n = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|^p} dx\right)^n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|^p} dx + \int_0^{\infty} e^{-|x|^p} dx\right)^n = \left(2\int_0^{\infty} e^{-x^p} dx\right)^n. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $x^p = t$ y $dx = \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1} dt$ y usando que $\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)$ obtenemos que esta cantidad es igual que

$$\left(\frac{2}{p}\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{p}-1} dt\right)^n = \left(\frac{2}{p}\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^n = \left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n.$$

Por otro lado tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-||x||_p^p} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{||x||_p^p}^{\infty} e^{-t} dt dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} e^{-t} \chi_{\{t > ||x||_p^p\}}(x,t) dt dx.$$

Aplicando el teorema de Fubini esta integral es igual a

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t} \chi_{\{t > ||x||_p^p\}}(x,t) dx dt = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t} \chi_{\{t^{1/p} > ||x||_p\}}(x,t) dx dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_{t^{\frac{1}{p}} B_p^n} e^{-t} dx dt = \int_0^{\infty} e^{-t} |t^{\frac{1}{p}} B_p^n| dt = |B_p^n| \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{n}{p}} dt = |B_p^n| \Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right). \end{aligned}$$

Igualando ambos resultados obtenemos el resultado buscado

$$|B_p^n| = \frac{\left(2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}.$$

□

A continuación vamos a comprobar que las bolas p (previa normalización de volumen) son isotrópicas y calcularemos su constante de isotropía.

Teorema 4.2. *El cuerpo convexo $K_p = |B_p^n|^{-\frac{1}{n}} B_p^n$ es isotrópico $\forall p \in [1,\infty]$.*

Demostración. Veamos primero que K_p tiene volumen 1 .

$$|K_p| = \left| \frac{B_p^n}{|B_p^n|^{\frac{1}{n}}} \right| = \frac{1}{|B_p^n|} |B_p^n| = 1.$$

Comprobar que tiene el origen como centro de masas es trivial ya que K_p es simétrico respecto al origen. Sean ahora $x_1, \dots, x_n$ las coordenadas de x respecto a una base ortonormal. Para cada $i, j = 1, \dots, n$

$$\int_{K_p} x_i x_j dx = \int_{|B_p^n|^{-\frac{1}{n}} B_p^n} x_i x_j dx.$$

Haciendo el cambio de variable $x = \frac{1}{|B_p^n|^{\frac{1}{n}}} y$, y $dx = \frac{1}{|B_p^n|} dy$, obtenemos que para cada $i, j = 1, \dots, n$

$$\int_{K_p} x_i x_j dx = \frac{1}{|B_p^n|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{B_p^n} y_i y_j dy.$$

Si $i \neq j$, entonces utilizando el teorema de Fubini, esta integral es igual a

$$\frac{1}{|B_p^n|^{1+\frac{2}{n}}} \left[\int_{-1}^{1} \left(\int_{B_p^n \cap \{y \in \mathbb{R}^n : y_i = t\}} t \bar{y}_j d\bar{y} \right) dt \right] = \frac{1}{|B_p^n|^{1+\frac{2}{n}}} \left[\int_{-1}^{1} t \left(\int_{B_p^n \cap \{y \in \mathbb{R}^n : y_i = t\}} \bar{y}_j d\bar{y} \right) dt \right]$$

donde $\bar{y}$ denota el vector dado por las $n-1$ coordenadas distintas de la n-ésima.
Por otro lado el conjunto $\{y \in \mathbb{R}^n : y_i = t\}$ depende de $n-1$ variables, y además $B_p^n \cap \{y \in \mathbb{R}^n : y_i = t\} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^{n-1} : \|\bar{y}\|_p \leq (1-|t|^p)^{\frac{1}{p}}\}$. Luego la integral anterior es igual a

$$\frac{1}{|B_p^n|^{1+\frac{2}{n}}} \left[\int_{-1}^{1} t \left(\int_{(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}} B_p^{n-1}} \bar{y}_j d\bar{y} \right) dt \right].$$

Haciendo el cambio de variable $(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}} \bar{y} = z$, la integral es igual a

$$\frac{1}{|B_p^n|^{1+\frac{2}{n}}} \left[\int_{-1}^{1} t (1-|t|^p)^{\frac{n}{p}} \left(\int_{B_p^{n-1}} \bar{z}_j d\bar{z} \right) dt \right]$$

y como hemos visto que las bolas p están centradas, entonces $\int_{B_p^{n-1}} \bar{z}_j d\bar{z} = 0$. Queda probado que si $i \neq j$, $\int_{K_p} x_i x_j dx = 0$.
Si $i = j$, entonces tenemos que

$$\int_{B_p^n} y_i^2 dy = \int_{-1}^{1} \int_{(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}} B_p^{n-1}} t^2 d\bar{y} dt = \int_{-1}^{1} t^2 |(1-|t|^p)^{\frac{1}{p}} B_p^{n-1}| dt = \int_{-1}^{1} t^2 (1-|t|^p)^{\frac{n-1}{p}} dt |B_p^{n-1}|$$

y, por lo tanto, $\int_{K_p} x_i^2 dx$, no depende de i. Así, queda demostrado que K_p es isotrópico.
En el caso $p = \infty$ se procede de manera análoga.

□

En el siguiente teorema vamos a calcular el valor de la constante de isotropía.

Teorema 4.3. *Sea $p \in [1,\infty]$. Entonces el valor de la constante de isotropía de B_p^n es*

$$L_{B_p^n}^2 = \begin{cases} \frac{2}{p}\frac{|B_p^{n-1}|}{|B_p^n|^{1+\frac{2}{n}}}\frac{\Gamma(\frac{3}{p})\Gamma(1+\frac{n-1}{p})}{\Gamma(1+\frac{n+2}{p})} & si\ 1 \leq p < \infty \\ \frac{1}{12} & si\ p = \infty \end{cases}$$

Demostración. En el resultado anterior hemos obtenido que si $i = j$, entonces

$$\int_{B_p^n} y_i^2 dy = \int_{-1}^1 t^2(1-|t|^p)^{\frac{n-1}{p}} dt |B_p^{n-1}| = \int_{-1}^0 t^2(1-|t|^p)^{\frac{n-1}{p}} dt |B_p^{n-1}| + \int_0^1 t^2(1-|t|^p)^{\frac{n-1}{p}} dt |B_p^{n-1}|.$$

Haciendo el cambio de variable $t = -s$ y $dt = -ds$, la integral anterior es igual a

$$\int_0^1 s^2(1-|s|^p)^{\frac{n-1}{p}} ds |B_p^{n-1}| + \int_0^1 t^2(1-|t|^p)^{\frac{n-1}{p}} dt |B_p^{n-1}| = 2|B_p^{n-1}| \int_0^1 t^2(1-|t|^p)^{\frac{n-1}{p}} dt.$$

Haciendo el cambio de variable $t^p = u$ y $dt = \frac{1}{p}u^{\frac{1}{p}-1}$ y utilizando las propiedades de la función Beta, obtenemos que esta cantidad es igual que

$$\frac{2}{p}|B_p^{n-1}| \int_0^1 u^{\frac{3}{p}-1}(1-u)^{\frac{n-1}{p}} du = \frac{2}{p}|B_p^{n-1}|\beta\left(\frac{3}{p}, 1+\frac{n-1}{p}\right) = \frac{2}{p}|B_p^{n-1}|\frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n+2}{p}\right)}.$$

Luego hemos obtenido que el valor de la constante de isotropía es igual a

$$\int_{K_p} x_i^2 dx = \frac{1}{|B_p|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{B_p} x_i^2 dx = \frac{2}{p}\frac{|B_p^{n-1}|}{|B_p|^{1+\frac{2}{n}}}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{p}\right)\Gamma\left(1+\frac{n-1}{p}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{n+2}{p}\right)}.$$

Si $p = \infty$, tenemos el cuerpo convexo $K_p = \frac{B_\infty^n}{2} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.
Entonces, cuando $i = j$, haciendo el cambio de variable $x = \frac{y}{2}$, obtenemos que

$$\int_{K_p} x_i^2 dx = \int_{\frac{B_\infty^n}{2}} x_i^2 dx = \frac{1}{2^{n+2}} \int_{B_\infty^n} y_i^2 dy = \frac{1}{2^{n+2}} \int_{-1}^1 t^2 |B_\infty^{n-1}| dt.$$

Sabemos que $|B_\infty^{n-1}| = 2^{n-1}$, así sustituyendo y operando en la expresión anterior obtenemos que es igual a

$$\frac{1}{8}\int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{1}{12}.$$

□

Bibliografía

[1] S. BRAZITIKOS, A. GIANNOPOULOS, P. VALETTAS Y B.H. VRITSIOU, *Geometry of Isotropic Convex Bodies*, Mathematical Surveys and Monographs. Volume 196. American Mathematical Society.

[2] A.C. THOMSON, *Minkowski geometry*, Enciclopedia of mathematics and its applications 63, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] D. ALONSO, J. BASTERO, *Approaching the Kannan-Lovász-Simonovits and Variance conjectures*, Lecture Notes in Mathematics 2131. Springer.

[4] A. GIANNOPOULOS, *Notes on isotropic convex bodies*, `http://users.uoa.gr/~apgiannop/isotropic-bodies.pdf`, disponible en `http://users.uoa.gr/~apgiannop/`.

[5] R. VERSHYNIN, *Notes on isotropic convex bodies*, `http://www-personal.umich.edu/~romanv/teaching/2006-07/280/lec3.pdf`, disponible en `http://www-personal.umich.edu/~romanv/`.