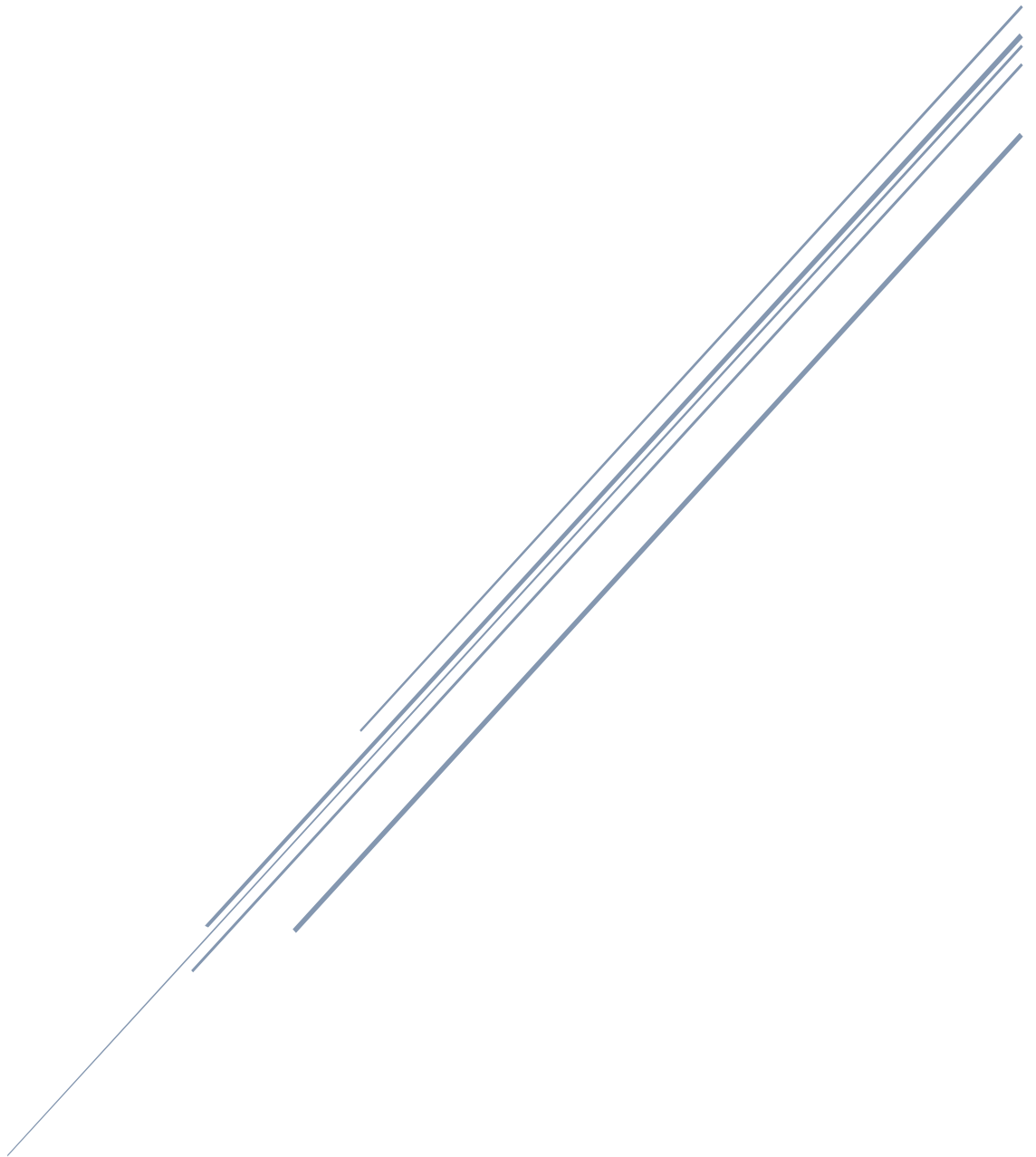


NUEVOS AVANCES EN TOMOGRAFÍA CUÁNTICA

Trabajo de fin de grado



Aitor Sánchez Mansilla

Índice

1. Introducción	4
1.1. El problema de Pauli	4
1.2. Aplicaciones más allá de la física	5
2. Estados, observables y funciones densidad de probabilidad de los sistemas físicos	7
2.1. Caso clásico	7
2.2. Caso cuántico	8
2.3. El teorema de Bell	9
3. El formalismo tomográfico en el espacio de fases	11
3.1. La cuantización de Weyl	11
3.2. El sistema de Weyl y la transformada de Weyl	13
3.3. La transformada de Radon como objeto matemático aplicado a la tomografía .	14
3.4. Clasificación de estados según sus propiedades tomográficas	16
4. Movimiento de una partícula libre	17
4.1. Caso de movimiento clásico	18
4.2. Caso del movimiento cuántico	18
4.3. Tomografía de la partícula libre clásica	19
4.4. Tomografía de la partícula libre cuántica	19
5. Tomografía en sistemas de n-niveles	20
5.1. Parametrización en la esfera de Bloch	21
5.2. Tomografía de un estado qubit	22
5.3. Frontera entre los dominios clásico y cuántico del sistema qubit o de 2 niveles .	24
6. Conclusiones: Volviendo al problema de Pauli	25
A. Cálculos	26
A.1. La desigualdad de Bell	26
A.2. Correlación predicha por la mecánica cuántica	27
A.3. Función de Wigner del estado fundamental	28
A.4. Función de Wigner del primer nivel excitado	28
A.5. Tomograma simpléctico del primer nivel excitado	29
A.6. Cálculo de SQS^\dagger y SPS^\dagger	29
A.7. Normalización del autoestado $ X_{\mu\nu}\rangle$	31
A.8. Tomograma simpléctico del estado fundamental	31
A.9. Relación de incertidumbre aplicada a \mathcal{W}_0	32
A.10.Ecuación de von Neumann para el estado ρ	32
A.11.Evolución temporal del tomograma clásico	33

Resumen

En este trabajo se pretende introducir el concepto de tomografía cuántica y discutir la naturaleza de los estados físicos haciendo hincapié en sus propiedades que los caracterizan como clásicos o cuánticos y sus diferencias mediante el uso del formalismo tomográfico. En la introducción se enuncia el problema de Pauli como directriz dada su importancia en la tomografía cuántica. En las secciones 2 y 3 se da una definición de ambos tipos de estados así como la frontera entre ellos y se define el tomograma como objeto principal en la tomografía. Las secciones 4 y 5 principalmente tratan dos casos sencillos para aplicar la tomografía como son el caso de una partícula libre y un qubit. Por último en la sección 6 se retorna al problema de Pauli para el que la tomografía cuántica da una respuesta definitiva .

1. Introducción

1.1. El problema de Pauli

El término tomografía se refiere a obtener una reconstrucción espacial de un objeto a partir de imágenes de sus secciones. Puede considerarse como primera aproximación a la tomografía el trabajo realizado por Radon en 1917 [1], que se centró en obtener la descomposición de una función mediante sus integrales de línea. La transformada de Radon consiste en promediar una función a lo largo de una trayectoria rectilínea:

$$\mathcal{R}[f](\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (1.1)$$

En 1963, el físico Allan McLeod Cormack logró obtener la reconstrucción de una función mediante integrales de línea [2] aunque con una demostración completamente distinta a la de Radon, y en su trabajo se basó el ingeniero electrónico Godfrey N.Housfield para construir el primer aparato de tomografía axial computarizada, lo cual les valió a ambos el premio Nobel de medicina.

Retrocediendo hasta la década de 1930, en los albores de la física cuántica, Pauli planteó una pregunta que se conoce como el problema de Pauli [3]: ¿es posible reconstruir un estado cuántico a partir del conocimiento de sus distribuciones de probabilidad de posición y momento? La respuesta a esta pregunta en concreto es no, tal como se muestra con un contraejemplo incluido en el libro *Philosophy of Quantum mechanics* de Reichenbach [4]:

$$\psi_1(q) = N \exp[-aq^2 + ibq] \quad (1.2)$$

$$\psi_2(q) = N \exp[-a^*q^2 + ibq] \quad (1.3)$$

con $\hbar = 1$, $Re(a) \geq 0$, $b = b^*$, $N = 4\sqrt{\frac{a+a^*}{\pi}}$. En la representación de momentos se tiene

$$\psi_1(p) = \frac{N}{\sqrt{2a}} \exp\left[-\frac{(b+p)^2}{4a}\right] \quad (1.4)$$

$$\psi_2(p) = \frac{N}{\sqrt{2a^*}} \exp\left[-\frac{(b+p)^2}{4a^*}\right] \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

A continuación se toman las densidades de probabilidad de las dos funciones de onda en ambas representaciones:

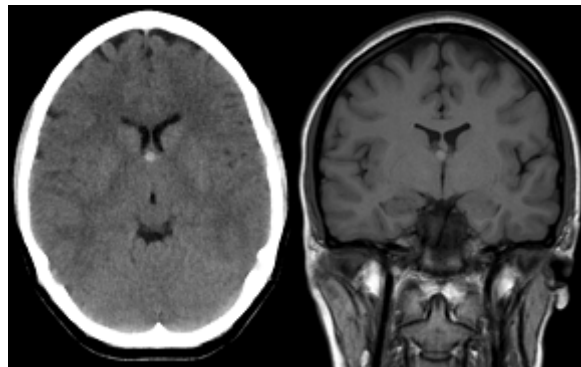
$$|\psi_1(q)|^2 = |\psi_2(q)|^2 = |N|^2 \exp [-(a + a^*)q^2] \quad (1.7)$$

$$|\psi_1(p)|^2 = |\psi_2(p)|^2 = \frac{|N|^2}{2|a|} \exp \left[-(b + p)^2 \left(\frac{a + a^*}{4aa^*} \right) \right] \quad (1.8)$$

Al ser los estados diferentes y tener las mismas distribuciones, conociendo éstas no puede distinguirse entre un estado u otro, por lo tanto su conocimiento es insuficiente para la reconstrucción unívoca del estado.

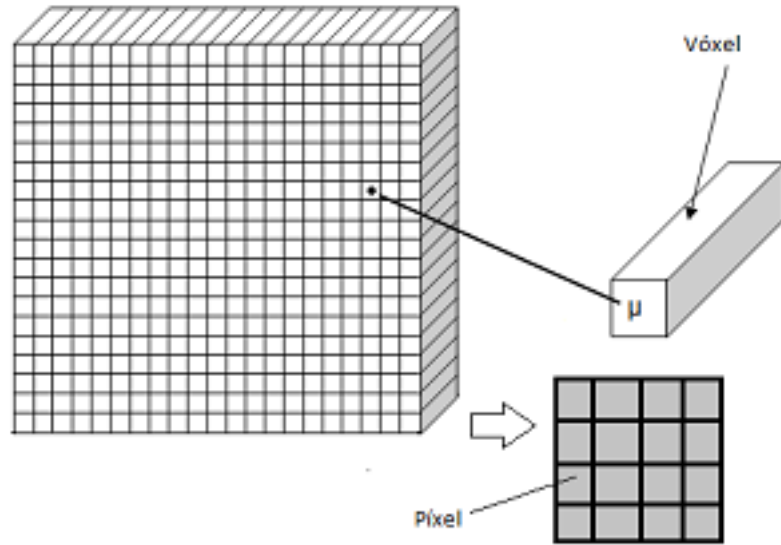
1.2. Aplicaciones más allá de la física

La tomografía tiene multitud de aplicaciones en distintas disciplinas, muchas de ellas de uso habitual como la tomografía axial computarizada (TAC) por rayos-x en medicina o la tomografía sónica 3D en estructuras. Como se ha mencionado anteriormente, la tomografía médica fue la primera aplicación tomográfica de uso extendido que consiste en seleccionar planos axiales en el cuerpo humano de los que se obtiene una imagen nítida sin superposición de otras estructuras:



El rayo que atraviesa una sección del objeto que se somete a análisis y llega al detector, que obtiene un promedio de la intensidad del rayo durante su trayectoria dando información de la

opacidad $\mu(x)$:



Cada región cúbica en la que está dividida la rebanada es denominada vóxel. Según la ley de Beer-Lambert, la intensidad medida en el detector $I(x)$ es:

$$I(x) = I_0 \exp \left[- \int_L \mu(x) dx \right] \quad (1.9)$$

Que escribiendo la atenuación en función de las magnitudes medibles I_0 e $I(x)$ resulta en la proyección $p(x)$:

$$p(x) = -\ln \left(\frac{I(x)}{I_0} \right) = \int_L \mu(x) dx \quad (1.10)$$

De esta forma queda asignado a cada ángulo de incidencia θ un número $p(x)$ que registra la atenuación de toda la región espacial atravesada por el rayo. Con esto se define el llamado sinograma $p(x, \theta)$, que se escribe en forma de transformada de Radon de la función distribución de opacidades $\mu = f(x, y)$:

$$p(r, \theta) = R[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(r \cos \theta - s \sin \theta, r \sin \theta + s \cos \theta) ds \quad (1.11)$$

donde:

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

lo que consiste en un cambio del ángulo de incidencia. Como se observa el problema final consiste en encontrar la función $f(x, y)$ lo que supone realizar una transformada inversa de Radon. En lugar de hacerlo directamente existen otros métodos adicionales que ayudan a mejorar la calidad de la imagen como el teorema de las secciones de Fourier, etc.

Otro ejemplo de aplicación de esta disciplina es la tomografía sónica aplicada a presas y estructuras de hormigón, en las que se producen ondas acústicas que son recibidas por detectores, midiendo así su velocidad para conocer las propiedades del material.

2. Estados, observables y funciones densidad de probabilidad de los sistemas físicos

Un estado físico puede definirse como el conjunto condiciones medibles que un sistema físico puede adoptar en su proceso de evolución temporal. Estas condiciones medibles se identifican con magnitudes físicas llamadas observables, como la posición o el momento.

2.1. Caso clásico

Un estado en mecánica clásica puede ser descrito como una función $f(q,p,t)$ de la posición y el momento que describe la situación del sistema físico en su evolución temporal. Como ejemplo puede considerarse el movimiento en una dimensión de una partícula libre:

$$p(t) = p_0 \quad (2.1)$$

$$q(t) = q_0 + \frac{p_0}{m}t \quad (2.2)$$

En consecuencia, la función que representa el estado del sistema es:

$$f(q,p) = \delta(p - p_0)\delta(q - q_0 - \frac{p_0}{m}t) \quad (2.3)$$

Esta función representa un estado determinista, puesto que la partícula está determinada a moverse describiendo una trayectoria fija en el espacio de fases. Puede considerarse en su lugar un estado probabilístico descrito, por ejemplo, por una función gaussiana.

$$g(q,p) = \frac{1}{\pi} \exp \left[-(p - p_0)^2 - (q - q_0 - \frac{p_0}{m}t)^2 \right] \quad (2.4)$$

Las funciones $f(q,p)$ y $g(q,p)$ son funciones densidad de probabilidad ya que, normalizados, tienen las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \rho(q,p) &\geq 0 ; \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(q,p) dq dp = 1 \\ P(b \leq q \leq a) &= \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(q,p) dp \right) dq \\ P(v \leq p \leq u) &= \int_u^v \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(q,p) dq \right) dp \end{aligned} \quad (2.5)$$

Los observables dependen del estado del sistema, por lo tanto son funciones de q y p . Además, deben ser reales, ya que son medibles. El valor medio de un observable A viene dado por:

$$\langle A \rangle = \int f_A(q,p) \rho(q,p) dq dp \quad (2.6)$$

donde $f_A(q,p)$ es la función que representa a A en función de las variables q y p .

2.2. Caso cuántico

En mecánica cuántica, los estados puros son representados usualmente mediante funciones de onda o vectores en el espacio de Hilbert[15]. Las funciones de onda son amplitudes de probabilidad que no son directamente observables, lo que sí puede medirse es su densidad de probabilidad asociada a la variable p o q , que está dada por el módulo al cuadrado de la función de onda:

$$\phi(q) = \langle q|\psi \rangle \rightarrow \rho(q) = |\psi(q)|^2 = \psi(q)^* \psi(q) \quad (2.7)$$

$$\phi(p) = \langle p|\psi \rangle \rightarrow \rho(p) = |\psi(p)|^2 = \psi(p)^* \psi(p) \quad (2.8)$$

Ejemplo de este tipo de estados son los estados del nivel fundamental y del primer nivel excitado del oscilador armónico:

$$\psi_0(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right] \quad (2.9)$$

$$\psi_1(q) = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} q \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}q^2\right] \quad (2.10)$$

Los estados mezcla son asociados a matrices densidad haciendo uso del formalismo de von Neumann[6]:

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \quad (2.11)$$

donde p_n es la probabilidad de obtener el estado puro ψ_n . Los observables en mecánica cuántica son operadores lineales autoadjuntos sobre el espacio de Hilbert que forman una C^* -álgebra separable, pudiendo ser representada por ejemplo como matrices de dimensión infinita (Heisenberg) u operadores diferenciales (Schrödinger) siendo ambas representaciones equivalentes. Los estados como por ejemplo los operadores densidad no pertenecen a esta álgebra de observables, ya que carecen de una ley de composición interna como éstos; en su lugar pueden verse como un álgebra dual, es lo que se conoce como un enfoque de C^* -álgebras[14]: Estados y observables conforman dos conjuntos duales uno del otro cuyo nexo de unión es la medida:

$$A \xrightarrow{\pi_A(E)} E \in \mathfrak{R} \quad (2.12)$$

A cada observable A le asociamos una medida espectral π_A cuyo dominio son los conjuntos E_i de la σ -álgebra de Borel sobre la recta real. Así pues, para un estado ρ , la medida de probabilidad $m_{\rho,A}$ se define como:

$$m_{\rho,A} := Tr(\rho\pi_A(E)) \quad (2.13)$$

que puede aplicarse al teorema espectral:

$$A = \int \lambda d\pi_A(E) \rightarrow Tr(\rho A) = \int \lambda m_{\rho,A} \quad (2.14)$$

Si se aplica este resultado al operador posición Q se tiene que sus proyectores asociados $\pi_Q(E)$ actúan sobre las funciones de onda mediante la multiplicación por la función característica

del conjunto boreliano E :

$$(\pi_Q(E)\psi)(x) = \chi_E(x)\psi(x) \quad (2.15)$$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases} \quad (2.16)$$

Usando la descomposición en proyectores de rango 1:

$$\rho = \sum_j \alpha_j \pi_j \quad (2.17)$$

la expresión de la medida resulta:

$$\begin{aligned} m_{\rho,A} &:= \text{Tr}(\rho\pi_A(E)) = \sum_j \alpha_j \text{Tr}(\pi_j\pi_Q(E)) \\ &= \sum_j \alpha_j \int \chi_E(x) |\psi_j(x)|^2 dx = \sum_j \alpha_j \int_E |\psi_j(x)|^2 dx \\ &= \int_E \sum_j \alpha_j |\psi_j(x)|^2 dx = \int_E \rho(x,x) dx \end{aligned} \quad (2.18)$$

Esto significa que la medida de probabilidad $m_{\rho,A}$ es absolutamente continua respecto a dx , que es la medida de Lebesgue sobre la recta real, siendo además $\rho(x,x)$ la derivada de Radon-Nykodim, es decir, la función densidad de probabilidad asociada al estado $\psi(x)$. Debido a esto se cumplen las condiciones establecidas por el teorema de Radon-Nykodim lo cual permite establecer una medida. El valor medio del operador posición se obtiene como:

$$\text{Tr}(\rho Q) = \int x \rho(x,x) dx \quad (2.19)$$

siendo para un estado puro:

$$\langle \psi | Q | \psi \rangle = \int x |\psi(x)|^2 dx \quad (2.20)$$

La medida de probabilidad otorga un emparejamiento entre observables y estados cuyo producto es un número real, que es la medida de un observable A de un sistema que se encuentra en el estado ρ .

2.3. El teorema de Bell

La teoría cuántica en sus inicios fue puesta en duda debido a la supuesta naturaleza probabilística de los sistemas físicos y, sobre todo, al conflictivo cuarto postulado que supone el colapso de la función de onda al realizar una medida, proceso que altera inevitablemente el estado del sistema. El principio de incertidumbre de Heisenberg nos dice que no es posible determinar con precisión la posición y el momento de un sistema, o generalmente, de dos observables que no conmutan entre ellos:

$$[Q, P] = QP - PQ = i\hbar I \rightarrow \Delta q \Delta p \leq \frac{\hbar}{2} \quad (2.21)$$

Este criterio puede servir como discriminador ya que solamente es satisfecho por los estados cuánticos como se verá en las secciones posteriores, es decir, establece una frontera entre los dos dominios. En los inicios de la teoría existía la duda sobre si la naturaleza probabilística de los fenómenos cuánticos era explicable mediante la fluctuación de ciertas variables ocultas [7], lo que implicaría que la teoría cuántica es una teoría incompleta y que en realidad los fenómenos cuánticos podrían ser predichos mediante una teoría clásica de estas variables ocultas al igual que la mecánica cuántica.

La paradoja EPR [8] (Einstein-Podolsky-Rosen) enunciada en 1935 supuso una crítica que puso de manifiesto las dudas existentes y la solución vino en 1964 de la mano de John Stewart Bell con su teorema: "Ninguna teoría de variables puede reproducir todas las predicciones de la mecánica cuántica" [9]. Las pruebas de este teorema sobre el caso de la paradoja EPR son las desigualdades de Bell como se muestra a continuación.

$$\text{Bob } \hat{b} \quad e^+ \longleftarrow \pi^0 \longrightarrow e^- \quad \hat{a} \quad \text{Alice}$$

Un pión neutro decae en un par electrón-positrón y éstos salen en direcciones opuestas. Considerando la conservación del momento angular, el único estado entrelazado posible para las dos partículas (que se denotarán como 1 y 2) es el del singlete, formado por un espín arriba y un espín abajo:

$$|\chi_{12}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow_1\downarrow_2\rangle + |\downarrow_1\uparrow_2\rangle]$$

La mecánica cuántica no es capaz de decir nada más, lo único seguro es que si al medir uno de los espines se obtiene arriba, al medir el otro se obtendrá abajo. El problema es que según la teoría, la partícula no adquiere la "cualidad" hasta que ésta es medida, y por lo tanto cuando la probabilidad del espín de la partícula 1 colapsa, también lo hace la de la partícula 2 y viceversa. Supongamos que hemos dejado a las partículas separarse una distancia infinita, al medir el espín en una de las partículas inmediatamente la probabilidad del espín de la otra colapsará en el espín contrario (anticorrelación) lo que implicaría una acción a distancia instantánea entrando en desacuerdo con la relatividad especial. La conclusión de este análisis es que o bien la mecánica cuántica está completa (no hay necesidad de una teoría de variables ocultas) y no se cumple el realismo local o bien el universo ya conoce el espín de las dos partículas en el instante de su producción pero nosotros no lo podemos conocer con certeza (existe una teoría subyacente de variables ocultas) en cuyo caso se cumpliría el realismo local. La prueba del teorema de Bell en este caso la da la desigualdad de Bell (sección A.1):

$$\left| C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c}) \right| \leq 1 + C(\hat{b}, \hat{c}) \quad (2.22)$$

Donde C es la correlación, a y b son las direcciones de medida y c es otra dirección. Si el sistema admite una teoría de variables ocultas entonces la desigualdad se cumplirá, pero el presente caso arroja un resultado muy distinto según las predicciones de la mecánica cuántica

(sección A.2):

$$C(\hat{a}, \hat{b})_{MC} = 0 ; C(\hat{a}, \hat{c})_{MC} = C(\hat{b}, \hat{c})_{MC} = -0,707 \text{ con } \hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{a} + \hat{b}]$$

$$|0 - 0,707| \not\leq 1 + 0,293$$

El resultado no deja lugar a dudas, una teoría de variables ocultas no puede predecir todos los resultados de la mecánica cuántica, y por lo tanto, ningún modelo basado en la mecánica clásica puede hacerlo por lo que la teoría cuántica es completa. El teorema de Bell estableció una fuerte separación entre los dominios clásico y cuántico que va más allá de las relaciones de incertidumbre aunque se manifiesta en ellas, por lo que las usaremos como criterio en las secciones siguientes.

3. El formalismo tomográfico en el espacio de fases

La formulación del espacio de fases permite en ciertos casos tratar de igual forma con estados clásicos y cuánticos: Los estados clásicos tendrán asociada una verdadera función densidad de probabilidad mientras que los estados cuánticos tendrán asociada una función de Wigner[10] que generalmente no es definida positiva. La función de Wigner de un estado cuántico de densidad de probabilidad ρ es:

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \rho\left(q + \frac{x}{2}, q - \frac{x}{2}\right) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}px\right] dx \quad (3.1)$$

Una función de Wigner particular que sí es positiva es la del estado fundamental (2.9) del oscilador armónico cuántico (sección A.3):

$$W_0(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right] \exp\left[-\frac{1}{m\omega\hbar}p^2\right] \quad (3.2)$$

La formulación cuántica en el espacio de fases se logra mediante la cuantización de Weyl[11], en la que se asignan funciones de Wigner a las matrices densidad y los llamados símbolos de Weyl al resto de los operadores[12][13]:

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \left\langle q + \frac{x}{2} \left| \hat{\rho} \right| q - \frac{x}{2} \right\rangle \exp\left[-\frac{i}{\hbar}px\right] dx \quad (3.3)$$

$$\Omega(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \left\langle q + \frac{x}{2} \left| \hat{\Omega} \right| q - \frac{x}{2} \right\rangle \exp\left[-\frac{i}{\hbar}px\right] dx \quad (3.4)$$

3.1. La cuantización de Weyl

Para introducir la cuantización de Weyl se considera el espacio de fases como el espacio vectorial simpléctico \mathfrak{R}^{2n} . P y Q son magnitudes conjugadas con la relación de conmutación:

$$[Q, P] = QP - PQ = i\hbar I \quad (3.5)$$

Weyl se percató de los problemas que suponía esta relación en espacios de Hilbert en dimensión finita, ya que se trata con operadores no acotados en ella. Si consideramos la traza a ambos

lados de la igualdad:

$$\text{tr}(QP) - \text{tr}(PQ) = \text{tr}(i\hbar I) \quad (3.6)$$

Si P y Q son ambos acotados se tiene que $\text{tr}(QP) = \text{tr}(PQ)$, lo cual no puede ser ya que $\text{tr}(i\hbar I) \neq 0$. Con el teorema de Wintner se da una demostración más rigurosa:

$$[Q, P] = QP - PQ = i\hbar I; \quad (3.7)$$

$$[Q^n, P] = Q^n P - P Q^n = in\hbar Q^{n-1} \quad (3.8)$$

Si los dos fueran acotados:

$$n \|Q\|^{n-1} = n \|Q^{n-1}\| \leq 2 \|P\| \|Q\|^n \quad (3.9)$$

lo que implicaría que:

$$\|P\| \|Q\| \geq \frac{n}{2} \quad (3.10)$$

lo que significa que alguno de los dos no puede ser acotado, ya que el producto de las dos normas diverge. El problema de que uno de los dos operadores sea no acotado es que su actuación no está definida sobre todo el espacio de Hilbert, mientras que al otro lado de la igualdad en la relación (3.5) está un múltiplo de la identidad que sí está definido sobre todo el espacio. Esto indica que la relación (3.5) en dominios donde uno de los operadores no esté definido no significa nada.

El propósito es construir una relación de conmutación equivalente a la original que esté definida sobre todo el espacio de Hilbert, lo que es posible y está demostrado por el teorema de Stone von-Neumann, que establece que dos cualesquiera representaciones de las relaciones de conmutación son unitariamente equivalentes. Para solucionar el problema del dominio, en lugar de escoger los operadores P y Q se escogen operadores unitarios uniparamétricos tal que:

$$U(x) = e^{ixP}; \quad V(\alpha) = e^{i\alpha Q} \quad (3.11)$$

Para esto se hace uso del teorema de Stone, que establece una correspondencia uno a uno entre operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert (no necesariamente acotados) y familias uniparamétricas que cumplen la condición de continuidad fuerte, esto es, para una familia uniparamétrica $(U_t)_{t \in \mathfrak{R}}$:

$$\forall t_0 \in \mathfrak{R}, \phi \in \mathcal{H} : \lim_{t \rightarrow t_0} U_t(\phi) = U_{t_0}(\phi) \quad (3.12)$$

Al ser operadores unitarios están definidos sobre todo el espacio de Hilbert, siendo P y Q sus generadores infinitesimales. Las relaciones de conmutación pasan a ser las siguientes:

$$e^{i\alpha Q} e^{ixP} e^{-i\alpha Q} e^{-ixP} = e^{-i\hbar x \alpha} \quad (3.13)$$

3.2. El sistema de Weyl y la transformada de Weyl

Sea S un espacio simpléctico (S, ω) de dimensión entera $2n$ donde ω es la forma simpléctica en S . Un sistema de Weyl es una función fuertemente continua que asigna a un elemento de S un operador unitario sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} :

$$W : S \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}) \quad (3.14)$$

que satisface la condición, para dos cualesquiera $v_1, v_2 \in S$, donde $v_i = (p_i, q_i)$:

$$W(v_1)W(v_2)W^\dagger(v_1 + v_2) = Ie^{i\omega(v_1, v_2)} \quad (3.15)$$

Esto es, una representación unitaria proyectiva fuertemente continua del grupo abeliano asociado a S , es decir, un grupo unitario uniparamétrico fuertemente continuo.

Dentro de S , por ser un espacio simpléctico, puede escogerse un subespacio lagrangiano L de dimensión mitad a la de S . Un espacio de Hilbert puede construirse si sólo se toman las funciones de cuadrado integrable dentro de este subespacio. Al ser L de dimensión n , entonces S puede descomponerse de la forma $S = L \oplus L^*$ donde L^* es el espacio dual a L .

Volviendo al sistema de Weyl, la continuidad fuerte nos asegura que podemos aplicar el teorema de Stone y asociar a $W(tv)$, que es una familia uniparamétrica dependiente de t , al operador autoadjunto en el espacio de Hilbert:

$$W(tv) := e^{itR(v)} \quad (3.16)$$

Donde $R(v)$ es el generador infinitesimal del grupo uniparamétrico $W(tv)$ y es necesariamente autoadjunto pero no necesariamente acotado.

De ahora en adelante, nos centraremos en el caso $S = \mathfrak{R}^2$ con coordenadas (q, p) . El operador desplazamiento en el plano de fases se deduce por su expansión en serie de Taylor:

$$\begin{aligned} \psi(q+x) &= \psi(q) + x \frac{d}{dq} \psi(q) + \frac{1}{2!} \left(x \frac{d}{dq} \right)^2 \psi(q) + \dots \\ &\longrightarrow \left(e^{x \frac{d}{dq}} \psi \right) (q) = \left(e^{-ixP} \psi \right) (q) = \psi(q+x) \\ \tilde{\psi}(p+\alpha) &= \tilde{\psi}(p) + \alpha \frac{d}{dp} \tilde{\psi}(p) + \frac{1}{2!} \left(\alpha \frac{d}{dp} \right)^2 \tilde{\psi}(p) + \dots \\ &\longrightarrow \left(e^{-\alpha \frac{d}{dp}} \tilde{\psi} \right) (p) = \left(e^{i\alpha Q} \tilde{\psi} \right) (p) = \tilde{\psi}(p+\alpha) \\ &\longrightarrow D(q, p) = e^{-i(\alpha Q - xP)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

que representa un operador unitario sobre funciones de cuadrado integrable. Al ser P y Q los generadores infinitesimales del desplazamiento en ambos subespacios lagrangianos, puede escogerse oportunamente:

$$P = R(1, 0) ; Q = R(0, 1) \quad (3.18)$$

Podemos representar $W(v)$ como el operador desplazamiento en el espacio de fases similar al de la mecánica clásica:

$$W(v) = D(q, p) = e^{i(pQ - qP)} \quad (3.19)$$

Por lo tanto, el sistema de Weyl se identifica con una representación irreducible proyectiva del grupo de las traslaciones, lo que permite asociar a cada función en V un operador en el espacio de Hilbert vía transformada de Fourier. La extensión a todo \mathfrak{R}^2 de las funciones $f(x, \alpha)$ definidas sobre un dominio D se realiza mediante la transformada simpléctica de Fourier:

$$f(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha dx \tilde{f}(\alpha, x) e^{i(\alpha q - xp)} \quad (3.20)$$

obteniendo la función $\tilde{f}(\alpha, x)$, puede sustituirse en la expresión de la transformada, cambiando la función exponencial por el sistema de Weyl que equivale al operador desplazamiento:

$$\hat{f} = \frac{1}{2\pi} \int d\alpha dx \tilde{f}(\alpha, x) e^{i(\alpha Q - xP)} \quad (3.21)$$

Esta es la llamada transformada de Weyl, inversa de la transformada de Wigner, que recorre el camino de vuelta a los operadores.

3.3. La transformada de Radon como objeto matemático aplicado a la tomografía

Como se ha introducido en el anterior capítulo, la función de Wigner es capaz de caracterizar un estado cuántico pero no es una verdadera función densidad de probabilidad puesto que no está definida positiva. Por ejemplo, la función de Wigner del primer nivel excitado del oscilador armónico (2.10) es la siguiente (sección A.4):

$$W_1(q, p) = \frac{1}{\pi\hbar} \left(-1 + \frac{2p^2}{m\omega\hbar} + \frac{2m\omega q^2}{\hbar} \right) \exp \left[-\frac{m\omega q^2}{\hbar} - \frac{p^2}{m\omega\hbar} \right] \quad (3.22)$$

Con lo que basta que el miembro que multiplica la exponencial sea negativo para que la función lo sea, entonces tendríamos una probabilidad negativa, algo imposible de interpretar. La solución a este problema pasa por aplicar la transformada de Radon, que produce una función que sí es una verdadera función densidad de probabilidad. Como ya se ha introducido en la sección 1, la transformada de Radon consiste en realizar la integral de la función sobre un conjunto de rectas:

$$\mathcal{R}[f](\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - s) dx dy \quad (3.23)$$

Así, trasladando la transformada de Radon al espacio de fases, se define el tomograma simpléctico de un estado clásico o cuántico como la transformada de Radon de una función

densidad de probabilidad o una función de Wigner respectivamente:

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu) = \int W(q, p) \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp \quad (3.24)$$

Los parámetros μ y ν pueden expresarse en términos de un ángulo de rotación θ y un parámetro de contracción s , que a fin de que la transformación sea canónica cumplen que:

$$\mu = s \cos \theta ; \nu = s^{-1} \sin \theta \quad (3.25)$$

Lo que se está haciendo es integrar y promediar a lo largo de un conjunto de rectas en el plano de fases, haciendo una rotación y reescalado de los ejes. Partiendo del primer estado excitado (3.22), su tomograma simpléctico asociado es (sección A.5):

$$\mathcal{W}_1(X, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar(\mu^2 + m^2\omega^2\nu^2)}} \frac{2m\omega}{\hbar(\mu^2 + m^2\omega^2\nu^2)} X^2 \exp \left[-\frac{m\omega}{\hbar(\mu^2 m^2 \omega^2 \nu^2)} X^2 \right] \quad (3.26)$$

Únicamente en el caso cuántico el tomograma puede escribirse de forma alternativa sin tener que recurrir a la función de Wigner, realizando una transformada de Radon en este dominio:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(X, \mu, \nu) &= \int \langle p | \langle q | \hat{\rho} | q' \rangle | p' \rangle \delta(X - \mu Q - \nu P) dq dp \quad (3.27) \\ &= \int \langle p | \langle q | \hat{\rho} | q \rangle \langle q | q' \rangle | p \rangle \langle p | p' \rangle \delta(X - \mu Q - \nu P) dq dp \\ &= \text{tr}(\hat{\rho} \delta(X - \mu Q - \nu P)) = \langle \delta(X - \mu Q - \nu P) \rangle_\rho \end{aligned}$$

En este caso no tenemos las variables p y q , sino una familia isoespectral de operadores cuyo espectro es la recta real:

$$X_{\mu, \nu} = \mu Q + \nu P \quad (3.28)$$

la cual es el resultado de aplicar una rotación y una dilatación al operador Q (sección A.6), que se define como el operador S tal que, considerando $\hbar = 1$:

$$S = \exp \left[i\lambda \left(\frac{PQ + QP}{2} \right) \right] \exp \left[i\theta \left(\frac{Q^2 + P^2}{2} \right) \right] \rightarrow SQS^\dagger = \mu Q + \nu P \quad (3.29)$$

donde

$$\mu = e^\lambda \cos \theta ; \nu = e^{-\lambda} \sin \theta$$

La transformada de Radon cuántica puede escribirse de otra forma. Puesto que se considera a la variable espectral X como la nueva "posición" y toma valores en toda la recta real, se admite una representación en la base de autoestados de $X_{\mu\nu}$ para lo que basta resolver la ecuación de autovalores:

$$X\psi(q) = \left(\mu q - \nu i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \right) \psi(q) \quad (3.30)$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtiene la expresión de los autoestados del operador $X_{\mu,\nu}$

$$\langle X_{\mu\nu}|q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar|\nu|}} e^{-i\mu q^2/2\hbar\nu + iXq/\hbar\nu} \quad (3.31)$$

Donde el factor de normalización $N = 1/\sqrt{2\pi\hbar|\nu|}$ es debido a la normalización a la delta de Dirac (sección A.7). El estado en la representación del momento p es:

$$\langle X_{\mu\nu}|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar|\mu|}} e^{i\nu p^2/2\hbar\mu - iXp/\hbar\mu} \quad (3.32)$$

El tomograma pues, será la distribución de probabilidad asociada al estado ϕ en la representación de la nueva coordenada X, es decir, en función de los autoestados del operador $X_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(X, \mu, \nu) &= |\langle X_{\mu\nu}|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2\pi\hbar|\nu|} \left| \int \psi(q) e^{i\mu q/2\hbar\nu - iXq/\hbar\nu} dq \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar|\mu|} \left| \int \psi(q) e^{-i\nu q/2\hbar\mu + iXp/\hbar\mu} dq \right|^2 \end{aligned} \quad (3.33)$$

El tomograma simpléctico puede obtenerse en laboratorio, como ya se ha hecho empleando métodos de detección homodina en lo que se conoce como tomografía óptica homodina. Así, para reconstruir el estado, debería ser suficiente con aplicar la transformada de Radon inversa una vez obtenido el tomograma:

$$\rho_\psi = \frac{1}{2\pi} \int \mathcal{W}(X, \mu, \nu) e^{i(X - \mu q - \nu p)} dX d\mu d\nu \quad (3.34)$$

y análogamente para un estado cuántico densidad:

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \int \mathcal{W}(X, \mu, \nu) e^{i(X - \mu q - \nu p)} dX d\mu d\nu \quad (3.35)$$

Aquí está el por qué de la respuesta negativa al problema de Pauli: Para reconstruir el estado no nos basta con conocer las distribuciones de probabilidad tan sólo en las "direcciones" de Q y P, sino que según este resultado necesitaríamos conocerlas en todas, las correspondientes a los diferentes observables de la familia isoenergética $X_{\mu,\nu}$, en la cual cada valor distinto de μ y ν nos proporciona una "dirección".

3.4. Clasificación de estados según sus propiedades tomográficas

Debido a la no positividad de la función de Wigner puede deducirse en primer lugar que los estados que cumplen:

$$\rho_\psi = \frac{1}{2\pi} \int \mathcal{W}(X, \mu, \nu) e^{i(X - \mu q - \nu p)} dX d\mu d\nu \geq 0 \quad (3.36)$$

son estados clásicos ya que de ser una función de Wigner en general la integral sería negativa y correspondería a un estado cuántico. De igual forma, los estados que cumplen la siguiente

condición:

$$\hat{\rho}_\psi = \frac{1}{2\pi} \int \mathcal{W}(X, \mu, \nu) e^{i(X-\mu Q-\nu P)} dX d\mu d\nu \geq 0 \quad (3.37)$$

son estados cuánticos, ya que el operador densidad es de norma positiva. Otro criterio para conocer si un estado es cuántico o no es verificar si cumple las relaciones de incertidumbre, que puede aplicarse directamente al tomograma obtenido según la relación de incertidumbre de Robertson-Schrödinger:

$$\sigma_{QQ}\sigma_{PP} - \sigma_{QP}^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (3.38)$$

Se toma como ejemplo el estado fundamental del oscilador armónico (3.2), cuyo tomograma es (sección A.8):

$$\mathcal{W}_0(X, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar(m^2\omega^2\nu^2 + \mu^2)}} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar(m^2\omega^2\nu^2 + \mu^2)} X^2\right]$$

La función es una gaussiana de variable X una vez fijados los parámetros μ y ν . En primer lugar comprobamos que cuando se sustituye \hbar por un parámetro η que se hace tender a cero, la función se vuelve cada vez más estrecha hasta que se convierte en una delta de Dirac, la cual representa un estado determinista que claramente viola la relación de incertidumbre. Ahora la pregunta es, ¿cuál es el valor mínimo que puede tomar η ? Para conocer la respuesta se aplica la relación de incertidumbre de Robertson-Schrödinger, la cual proporciona la siguiente condición (sección A.9):

$$\eta \geq \hbar$$

Por lo tanto el valor mínimo posible que cumple la relación de incertidumbre es el propio valor $\eta = \hbar$ que hace posible que el estado se encuentre en el dominio cuántico. Por otro lado, la función de Wigner del estado fundamental (3.2) es definida positiva y convergente (corresponde a una gaussiana en p y q), por lo tanto es una verdadera densidad de probabilidad en el espacio de fases al igual que las funciones que representan los estados en la mecánica clásica y en consecuencia pertenece también al dominio clásico. Esto no se cumple para los estados excitados, que son puramente cuánticos.

4. Movimiento de una partícula libre

El movimiento de una partícula libre o movimiento de una partícula en ausencia de potencial es el caso más sencillo que posee una descripción tanto clásica como cuántica, por ello tiene un interés tomográfico ya que se producirán tanto tomogramas de estados clásicos como de estados cuánticos.

4.1. Caso de movimiento clásico

El movimiento de una partícula según la mecánica clásica viene descrito por el hamiltoniano en ausencia de un potencial externo:

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (4.1)$$

Según las ecuaciones de la mecánica hamiltoniana:

$$p = p_0 ; q = q_0 + \frac{p_0}{m}t \quad (4.2)$$

Por lo que, en ausencia de fluctuaciones, el estado es determinista:

$$f(q, p, t) = \delta(p - p_0)\delta(q - q_0 - \frac{p_0}{m}t) \quad (4.3)$$

En su lugar pueden existir fluctuaciones como por ejemplo en el caso que se posea una nube de partículas y lo que se mida sea el momento o la posición promedios, lo que es llamado una partícula modelo. En ese caso se parte de la ecuación de Liouville que debe cumplir la función de probabilidad clásica:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\{f, H\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial q} \quad (4.4)$$

La solución a esta ecuación es de la forma:

$$f(q, p, t) = f(q - \frac{p}{m}t, p, 0) = f_0(q - \frac{p}{m}t, p) \quad (4.5)$$

Según la ecuación de Liouville, tenemos una correspondencia entre la evolución temporal de la función de distribución $f(q, p, t)$ y distribución inicial a tiempo $t = 0$. Esto se traduce en que el volumen de la distribución o nube de puntos en el espacio de fases permanece constante.

4.2. Caso del movimiento cuántico

El análogo para la ecuación de Liouville en el caso del movimiento cuántico es la ecuación de von Neumann:

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho] \quad (4.6)$$

donde por definición:

$$\rho(q, q', t) = \langle q | \hat{\rho} | q' \rangle \quad (4.7)$$

La ecuación de von Neumann queda entonces en la siguiente forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{\partial^2}{\partial q'^2} \right) \rho \quad (4.8)$$

La solución a esta ecuación es (sección A.10):

$$\rho(t) = \exp \left[-\frac{i}{2m\hbar} P^2 \right] \rho(0) \exp \left[\frac{i}{2m\hbar} P^2 \right]$$

En este caso la correspondencia es a misma pero la evolución temporal la da un operador actuando sobre el estado.

4.3. Tomografía de la partícula libre clásica

Sabiendo ya que la evolución temporal de la función $f(q,p,t)$ la marca la ecuación de Liouville (4.4), el propósito es la reconstrucción tomográfica del estado y la determinación de la evolución temporal de la densidad tomográfica clásica o tomograma simpléctico clásico:

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q, p, t) \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp \quad (4.9)$$

La evolución temporal del tomograma está dada por la ecuación (sección A.11):

$$\left(\frac{d}{dt} - \frac{\mu}{m} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \mathcal{W}(X, \mu, \nu, t) = 0 \quad (4.10)$$

y la solución que le corresponde es:

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu, t) = \mathcal{W}_0(X, \mu, \nu + \frac{\mu}{m}) \quad (4.11)$$

4.4. Tomografía de la partícula libre cuántica

Una partícula cuántica no posee una trayectoria determinista sino que su posición está sujeta a una densidad de probabilidad en cada instante de tiempo. El tomograma simpléctico es la transformada de Radon de la densidad de probabilidad del estado correspondiente. Si este es un estado cuántico mezcla (caso general) entonces viene representado por una matriz densidad y su tomograma simpléctico asociado es el siguiente:

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu, t) = \left\langle \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(X - \mu Q - \nu P)} dk \right\rangle_{\rho} \quad (4.12)$$

La ecuación es la misma que para un tomograma en el caso de la partícula libre clásica (4.10):

$$\left(\frac{d}{dt} - \frac{\mu}{m} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \mathcal{W}(X, \mu, \nu, t) = 0 \quad (4.13)$$

Por lo tanto se cumple lo ya explicado en el capítulo 3, el formalismo tomográfico logra tratar de igual forma ambos tipos de estados como densidades de probabilidad clásicas y en principio no se distinguen los unos de los otros. Como se aprecia aquí, la evolución temporal es igual para ambos tipos de tomograma y por lo tanto hay que emplear los criterios excluyentes anteriormente mencionados para clasificarlos.

5. Tomografía en sistemas de n-niveles

Se considera el caso discreto de un sistema de n niveles. La medida de probabilidad del observable $X = \mu Q + \nu P$ sobre un estado ρ viene dada (ver sección 2.2) es:

$$m_{\rho, X} = \text{tr}(\rho \underbrace{S \pi_Q S^\dagger}_{\pi_X}) = \text{tr}(\pi_Q S^\dagger \rho S) = \sum_i^n \text{tr}(|q_i\rangle \langle q_i| S^\dagger \rho S) = \sum_i^n \langle q_i | S^\dagger \rho S | q_i \rangle \quad (5.1)$$

El término dentro del sumatorio es la derivada de Radon-Nykodim de m respecto a X, es decir, la densidad de probabilidad cuya suma en un intervalo proporciona la probabilidad de que el valor del observable X en una medida esté contenido en dicho intervalo y por lo tanto es un tomograma simpléctico:

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu) = \langle q | S^\dagger \rho S | q \rangle = \text{tr}(\rho S | q \rangle \langle q | S^\dagger) \quad (5.2)$$

Ahora bien, el objeto $S | q \rangle \langle q | S^\dagger = P(\mu, \nu)$ es una familia de proyectores de rango 1 correspondiente a la órbita obtenida al variar $S(\mu, \nu)$. Este objeto puede verse también como un vector de dimensión n^2 :

$$\begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_{n^2} \end{pmatrix} = |P\rangle \quad (5.3)$$

Mediante el procedimiento de Gram-Schmidt puede construirse una familia ortonormal donde cada vector es de la forma $|V_j\rangle = \sum_{k=1}^{n^2} \gamma_{jk} |P_k\rangle$ y puede facilitar una resolución de la super-identidad:

$$I_{n^2} = \sum_{i=1}^{n^2} |V_i\rangle \langle V_i| = \sum_{i,j,k=1}^{n^2} \underbrace{\gamma_{ij}^* \gamma_{ik}}_{|O_j\rangle} |P_k\rangle \langle P_j| = \sum_{j=1}^{n^2} |O_j\rangle \langle P_j| \quad (5.4)$$

y en el caso continuo de una familia biparamétrica significa que:

$$I = \int |O(\mu, \nu)\rangle \langle P(\mu, \nu)| d\mu d\nu \quad (5.5)$$

Donde $O(\mu, \nu)$ agrupa también los términos de Gram-Schmidt resultado de ortonormalizar la base, por lo que es una función no lineal de los proyectores.

Al lograr una reconstrucción de la identidad, el obtener la forma de la familia $O(\mu, \nu)$ permite reconstruir el estado ρ :

$$\rho = \int O(\mu, \nu) \underbrace{\text{tr}(\rho P(\mu, \nu))}_{\text{Tomograma}} d\mu d\nu \quad (5.6)$$

Tomográficamente se obtiene el término $\text{tr}(\rho P(\mu, \nu))$, lo que ya permita la reconstrucción del estado. En el caso de un qubit se consideran los autoestados del espín $s=1/2$ $|m\rangle$ y los proyectores $|m\rangle \langle m|$ de rango 1.

5.1. Parametrización en la esfera de Bloch

Consideremos el estado densidad ρ correspondiente a un momento angular total $j = 1/2$, que viene representado por la matriz 2x2:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

que al estar sujeta a las condiciones:

- $\rho > 0 \Leftrightarrow \rho_{11}, \rho_{22} > 0; \det \rho \geq 0$
- $\rho = \rho^\dagger$
- $\text{tr}(\rho) = 1$

se reduce a la forma:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12}^* & 1 - \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

con $0 < \rho_{11} < 1$. Como esta matriz pertenece a SU(2), puede escribirse en función de las cuatro matrices de Pauli que forman una base del álgebra de Lie en SU(2):

$$\sigma_0 = I; \sigma_a = \begin{pmatrix} \delta_{a3} & \delta_{a1} - i\delta_{a2} \\ \delta_{a1} + i\delta_{a2} & -\delta_{a3} \end{pmatrix}, a = 1, 2, 3 \quad (5.9)$$

siendo δ la delta de Kronecker,

$$\rho = \frac{1}{2} [\sigma_0 + \vec{y} \cdot \vec{\sigma}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + y_3 & y_1 - iy_2 \\ y_1 + iy_2 & 1 + y_3 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Dado que su determinante debe ser mayor o igual que cero para que la matriz sea positiva por la definición de estado densidad, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\det \rho = \frac{1}{4} (1 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2) \geq 0 \rightarrow y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \leq 1 \quad (5.11)$$

que es la ecuación de la esfera de Bloch. Los estados que cumplen la igualdad son los estados puros, que en su forma diagonal son de la forma:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

y se encuentran sobre la superficie de la esfera; por el contrario, los estados mixtos se encuentran en el interior. Así pues, se tienen dos conjuntos bien diferenciados. La esfera puede parametrizarse en coordenadas esféricas:

$$x = \sin \theta \cos \phi \quad (5.13)$$

$$y = \sin \theta \sin \phi \quad (5.14)$$

$$z = \cos \theta \quad (5.15)$$

y la expresión más general de un estado puro en la superficie es:

$$|\psi\rangle = \cos \theta/2 |+\rangle + e^{i\phi} \sin \theta/2 |-\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 \\ e^{i\phi} \sin \theta/2 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

5.2. Tomografía de un estado qubit

El primer método consiste en considerar órbitas de la forma $U|m\rangle\langle m|U^\dagger$ y obtener una familia entera de proyectores $O(\theta, \phi)$ que no siempre va a ser sencillo. En este caso relativamente sencillo puede hacerse si se considera la expresión general de la familia de proyectores de rango-1:

$$P(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

y se sustituye en la expresión (5.5) de la resolución de la identidad:

$$I = \int \int O(\theta, \phi) P(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \quad (5.18)$$

Se sabe que la función $O(\theta, \phi)$ es un proyector de rango 1 de la misma forma que P que además viene multiplicado por escalares que son los coeficientes Gram-Schmidt. Por ello se considera una matriz de la forma:

$$O(\theta, \phi) = \alpha \begin{pmatrix} 1 + a \cos \theta & b e^{-i\phi} \sin \theta \\ b e^{i\phi} \sin \theta & 1 - a \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

y resolviendo las ecuaciones lineales correspondientes a las componentes de la matriz se obtiene que $a=3$, $b=3$ y $c=1/4\pi$. Obtenida esta matriz ya se puede aplicar la fórmula de reconstrucción:

$$\rho = \int O(\theta, \phi) \text{tr}(\rho P(\theta, \phi)) d\Omega \quad (5.20)$$

Como se puede intuir, no siempre podrá calcularse de forma sencilla esta familia de proyectores, por ello, se busca otra alternativa que es obtener un *quorum*, esto es, el mínimo conjunto de transformaciones unitarias o proyecciones que nos permita reconstruir de manera unívoca el estado. Para el presente caso basta con fijarse en la parametrización en función de las matrices de Pauli (5.10). El tomograma se escribe de la forma introducida al final del anterior capítulo:

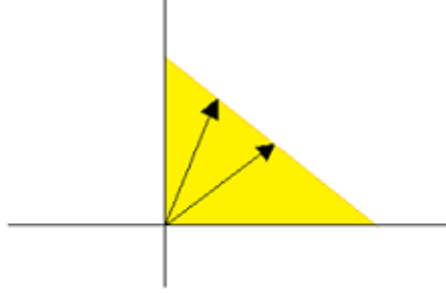
$$\mathcal{W}_\rho(m, U) = \text{tr}(\rho U|m\rangle\langle m|U^\dagger) = \langle m|U^\dagger \rho U|m\rangle \quad (5.21)$$

Como vemos esto es un elemento de la diagonal del estado bajo la acción de U. Si consideramos $U_0 = I$, obtenemos los elementos de la diagonal del estado:

$$\mathcal{W}_\rho(m = +1/2, U = I) = \frac{1 + y_3}{2} \quad (5.22)$$

$$\mathcal{W}_\rho(m = -1/2, U = I) = \frac{1 - y_3}{2} \quad (5.23)$$

Estas dos componentes conforman un vector de probabilidad ya que su suma es 1, es decir, este vector está contenido en el triángulo 1-símplex:



Si consideramos $U_1 = \exp[-i\frac{\pi}{4}\sigma_1]$, es decir, una rotación en torno a x de ángulo $\pi/2$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_\rho(m = +1/2, U = U_1) &= \frac{1 + y_2}{2} \\ \mathcal{W}_\rho(m = -1/2, U = U_1) &= \frac{1 - y_2}{2}\end{aligned}\quad (5.24)$$

Si se considera $U_2 = \exp[-i\frac{\pi}{4}\sigma_2]$, que es una rotación en torno a y de ángulo $\pi/2$ se obtiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_\rho(m = +1/2, U = U_2) &= \frac{1 + y_1}{2} \\ \mathcal{W}_\rho(m = -1/2, U = U_2) &= \frac{1 - y_1}{2}\end{aligned}\quad (5.25)$$

Esto se debe a que en realidad las tres transformaciones realizan una proyección sobre σ_3 (o S_z) que conforma por sí sola una subálgebra de Cartan, esto puede comprobarse si aplicamos las transformaciones U_1 y U_2 a las matrices σ_1 y σ_2 :

$$U_2\sigma_1U_2^\dagger = \sigma_3 ; U_1\sigma_2U_1^\dagger = \sigma_3 \quad (5.26)$$

Estas tres transformaciones conforman el *quorum* que permite reconstruir el estado. Ahora la matriz densidad puede reconstruirse en función de estos términos:

$$\mathcal{W}(m, U_k) =: \mathcal{W}_k(m) ; \mathcal{W}_k(+1/2) =: \mathcal{W}_k^+ = \frac{1 + y_k}{2} \rightarrow y_k = 2\mathcal{W}_k^+ - 1 \quad (5.27)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\sigma_0 \sum_{k=1}^3 (2\mathcal{W}_k^+ - 1) \sigma_k \right) \quad (5.28)$$

Esta es la llamada fórmula de reconstrucción de un estado qubit.

5.3. Frontera entre los dominios clásico y cuántico del sistema qubit o de 2 niveles

Supongamos en una medición obtener el estado que tiene asociada la siguiente matriz densidad:

$$\rho = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}; \quad 0 \leq p \leq 1$$

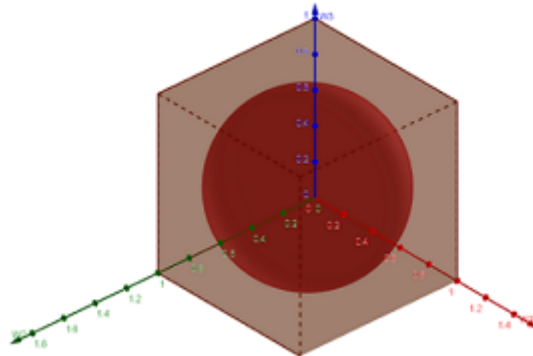
Como se aprecia, el estado es descriptible mediante un vector de probabilidad $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ que toma valores en el 1-símplex descrito en el apartado anterior. A primera vista no puede asegurarse que sea un estado clásico o cuántico ya que cumple con las condiciones de ambos: Es descriptible mediante un vector de probabilidad clásico y además cumple con la condición del determinante positivo para ser un estado cuántico. Sin embargo, si se considera una órbita generada por la acción de $U(2)$ el estado o la órbita asociada corresponde a un estado únicamente cuántico que no es representable mediante un vector de probabilidad clásico:

$$U \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} U^\dagger =: \begin{pmatrix} q & a \\ a^* & 1-q \end{pmatrix}, \quad U \in SU(2)$$

Esto quiere decir que el estado cuántico tiene asociada toda la órbita mientras que el estado inicial que puede ser tanto clásico como cuántico tan sólo representa un punto en ella. Para una caracterización completa se retorna a la condición (5.11) y se sustituyen los parámetros en función de los tomogramas según la fórmula de reconstrucción (5.28) que indica que $y_k = 2W_k^+ - 1$ en el caso de escogerse los tomogramas medidos con espín arriba:

$$\begin{aligned} (2W_1^+ - 1)^2 + (2W_2^+ - 1)^2 + (2W_3^+ - 1)^2 &\leq 1 \rightarrow \\ \rightarrow \left(W_1^+ - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(W_2^+ - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(W_3^+ - \frac{1}{2}\right)^2 &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Esta es la expresión de una esfera de radio $1/2$ centrada en el punto $(1/2, 1/2, 1/2)$ donde las coordenadas son los valores de los tomogramas W_k . Los tomogramas son funciones de probabilidad clásicas que toman valores entre 0 y 1 por lo que tendremos una esfera inscrita dentro de un cubo. Los estados que ocupan puntos dentro de la esfera cumplen la condición (5.11) y por lo tanto son estados cuánticos, mientras que los que se encuentran fuera de la esfera son estados únicamente clásicos.



6. Conclusiones: Volviendo al problema de Pauli

Después de reconstruir el estado de un qubit podemos responder a la pregunta formulada por Pauli: ¿basta con conocer las distribuciones de probabilidad de posición y momento para reconstruir completamente el estado?, esta pregunta puede ser re-formulada utilizando el formalismo tomográfico: ¿basta con conocer el valor de las integrales de línea en el espacio de fases sobre dos direcciones perpendiculares para reconstruir completamente el estado? La respuesta es no, para reconstruir completamente el estado se necesita conocer el valor de la integral de línea en un número mínimo finito de direcciones llamado quorum, que en caso cuántico es el mínimo conjunto necesario de observables $X_{\mu\nu}$. Como hemos visto el quorum necesario para reconstruir el estado qubit está formado por 3 "direcciones" o 3 rotaciones en $SU(2)$ que proporcionan todos los parámetros necesarios.

Como se ha mostrado, el formalismo tomográfico es muy práctico al ser capaz de tratar por igual tanto estados clásicos (densidades de probabilidad en el espacio de fase) como cuánticos (estados mezcla, funciones de Wigner, etc) como verdaderas distribuciones de probabilidad dadas por sus integrales de línea e independientemente del estado lo que se obtiene de la medida es un número real positivo, aunque como se ha mostrado al final la sección "Estados, observables y funciones densidad de probabilidad de los sistemas físicos", se debe recordar que existe una clara frontera entre ambos dominios que va más allá del carácter determinista o probabilístico en ambos casos y que es tratada en el estudio de la decoherencia cuántica.

Referencias

- [1] J. RADON, Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten, Breichte Sachsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Mathematische-Physikalische Klasse, **69** S. 262 (1917).
- [2] A. M. CORMACK, Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications (1963).
- [3] PAULI W, Handbuch der Physik Vol. XXIV (1933).
- [4] REICHENBACH H, Philosophy of Quantum Mechanics (Berkeley, CA: University of California Press, 1942).
- [5] PAULI W, General Principles of Quantum Mechanics (1980).
- [6] VON NEUMANN, JOHN (1927), "Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik", Göttinger Nachrichten, **1**: 245–272
- [7] BOHM, DAVID (1951). Quantum Theory. PrenticeHall.
- [8] A. EINSTEIN, PODOLSKY y N. ROSEN, "Can quantum mechanics be considered a complete theory?," Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [9] BELL, JOHN (1964). "On the Einstein Podolsky Rosen Paradox"(PDF). Physics. **1** (3): 195–200.

- [10] E. P. WIGNER (1932). "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium". *Phys. Rev.* **40** (5): 749–759.
- [11] WEYL, H. (1927). "Quantenmechanik und Gruppentheorie". *Zeitschrift für Physik.* **46**: 1–46.
- [12] H.J. GROENEWOLD (1946), "On the Principles of elementary quantum mechanics", *Physica* **12**, pp. 405-460.
- [13] J.E. MOYAL, "Quantum mechanics as a statistical theory", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **45** (1949) pp. 99–124.
- [14] HEISENBERG, W. (1927), "Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik", *Zeitschrift für Physik*, **43** (3–4): 172–198.
- [15] SCHRÖDINGER, ERWIN (December 1926). "An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules". *Phys. Rev.* **28** (6): 1049–1070.
- [16] S.HELGAISON, *ANN. OF MATH.* **98**, 451 (1973); *Groups and Geometric Analysis* (Academic Press, Orlando, 1984) *The Radon transform* (Birkhauser, Boston, 1980).
- [17] WEYL, H. (1928), *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Leipzig: Hirzel
- [18] O. V. MAN'KO y V. I. MAN'KO, *J. Russ. Laser Res.* **18** 407 (1997).
- [19] D. T. SMITHEY, M. BECK, M. G. RAYMER y A. FARIDANI, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1244 (1993).
- [20] C. KURTSIEFER, T. PFAU y J. MLYNEK, *Nature* **386**, 150 (1997).
- [21] V. I. MAN'KO y F. VENTRIGLIA, *Classical and quantum free motions in the tomographic probability representation* (2013).
- [22] V. I. MAN'KO, G. MARMO, F. VENTRIGLIA y P. VITALE, *Metric on the space of quantum states from relative entropy. Tomographic reconstruction* (2017).
- [23] A. IBORT, V. I. MAN'KO, G. MARMO, A. SIMONI y F. VENTRIGLIA, *An introduction to the tomographic picture of quantum mechanics* (2009).
- [24] M. ASOREY, A. IBORT, G. MARMO y F. VENTRIGLIA, *Quantum Tomography twenty years later* (2015).

A. Cálculos

A.1. La desigualdad de Bell

En una supuesta teoría clásica de una variable oculta que en este caso llamaremos λ , llamamos $A(\hat{a},\lambda)$ y $B(\hat{b},\lambda)$ a las funciones que representan el resultado medido por Alice y Bob respectivamente y su valor es $+1$ en el caso de medir espín arriba y -1 en el caso de medir espín

abajo. Si la variable oculta sigue una distribución de probabilidad $\rho(\lambda)$ entonces la correlación entre las dos funciones si los dos miden en las direcciones \hat{a} y \hat{b} es:

$$C(\hat{a}, \hat{b}) = \int \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) d\lambda = - \int \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) d\lambda \quad \text{con } B(\hat{b}, \lambda) = -A(\hat{b}, \lambda)$$

Si \hat{c} es otro vector entonces:

$$\begin{aligned} C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c}) &= - \int \rho(\lambda) \left[A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) - A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) \right] d\lambda = \\ &= - \int \rho(\lambda) \left[1 - A(\hat{b}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) \right] A(\hat{a}, \lambda) A(\hat{b}, \lambda) d\lambda \quad \text{ya que } \left[A(\hat{b}, \lambda) \right]^2 = 1 \end{aligned}$$

Al ser $A = \pm 1$, $B = \pm 1$ el producto de las dos funciones está acotado:

$$-1 \leq \left[A(\hat{b}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) \right] \leq 1 \quad \longrightarrow \quad 1 - A(\hat{b}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) \geq 0$$

Al estar el producto acotado se tiene la siguiente desigualdad:

$$\left| C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c}) \right| \leq \int \rho(\lambda) \left[1 - A(\hat{b}, \lambda) A(\hat{c}, \lambda) \right] d\lambda$$

y simplificando en el miembro de la derecha:

$$\left| C(\hat{a}, \hat{b}) - C(\hat{a}, \hat{c}) \right| \leq 1 + C(\hat{b}, \hat{c})$$

Esta es la desigualdad de Bell original para tratar el caso de la paradoja EPR con \hat{a} y \hat{b} perpendiculares.

A.2. Correlación predicha por la mecánica cuántica

Teniendo dos direcciones cualesquiera \hat{a} y \hat{b} en las cuales se mide el espín por los aparatos a y b respectivamente, las matrices que representan el espín en las dos direcciones en función de la base de SU(2) son:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{a} = \begin{pmatrix} a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & -a_z \end{pmatrix}; \quad \vec{\sigma} \cdot \hat{b} = \begin{pmatrix} b_z & b_x - ib_y \\ b_x + ib_y & -b_z \end{pmatrix}$$

y el estado singlete de las dos partículas entrelazadas es:

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|1/2\rangle_1 \otimes |-1/2\rangle_2 - |-1/2\rangle_1 \otimes |1/2\rangle_2 \right]$$

La correlación de las medidas realizadas de a sobre la partícula 1 y de b sobre la partícula 2 prevista por la mecánica cuántica es la siguiente:

$$C_{MC}(\hat{a}, \hat{b}) = \langle A | (\vec{\sigma} \cdot \hat{b})^{(2)} (\vec{\sigma} \cdot \hat{a})^{(1)} | A \rangle \quad (\text{A.1})$$

Se calcula la acción de los operadores teniendo en cuenta el subespacio sobre el cual actúa cada uno:

$$\begin{aligned}\langle A | (\vec{\sigma} \cdot \hat{b})^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_x + ib_y & -b_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_z & b_x - ib_y \end{pmatrix} \right] \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{a})^{(1)} | A \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} a_z \\ a_x + ia_y \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_x - ia_y \\ -a_z \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]\end{aligned}$$

y usando la propiedad $\langle x \otimes y | u \otimes v \rangle = \langle x | u \rangle \langle y | v \rangle$, el valor de la correlación predicho por la mecánica cuántica resulta:

$$\begin{aligned}C_{MC}(\hat{a}, \hat{b}) &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_z \\ a_x + ia_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x + ib_y & -b_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_z \\ a_x + ia_y \end{pmatrix} \cdot \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} b_z & b_x - ib_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x - ia_y \\ -a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_z & b_x + ib_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x - ia_y \\ -a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_z & b_x - ib_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = -\hat{a} \cdot \hat{b}\end{aligned}$$

A.3. Función de Wigner del estado fundamental

Para este cálculo se hace uso de la identidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \left[\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right] \quad (\text{A.2})$$

luego:

$$\begin{aligned}W_0(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int \psi_0^* \left(q - \frac{x}{2} \right) \psi_0 \left(q + \frac{x}{2} \right) \exp \left[\frac{ipx}{\hbar} \right] dx = \\ &= \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int \exp \left[-\frac{m\omega}{2\hbar} \left(q + \frac{x}{2} \right)^2 \right] \exp \left[-\frac{m\omega}{2\hbar} \left(q - \frac{x}{2} \right)^2 \right] \exp \left[-i\frac{px}{\hbar} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \int \exp \left[-\frac{m\omega}{2\hbar} \left(2q^2 + \frac{x}{2} + i\frac{px}{\hbar} \right) \right] dx = \frac{1}{\pi\hbar} \exp \left[-\frac{m\omega}{\hbar} q^2 \right] \exp \left[-\frac{1}{m\omega\hbar} p^2 \right]\end{aligned}$$

A.4. Función de Wigner del primer nivel excitado

Se hace uso de (A.2) y de la identidad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \frac{\sqrt{\pi(2a+b^2)}}{4a^{5/2}} \exp \left[\frac{b^2}{4a} \right] \quad (\text{A.3})$$

entonces:

$$\begin{aligned}W_1(q, p) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int \psi_1^* \left(q - \frac{x}{2} \right) \psi_1 \left(q + \frac{x}{2} \right) \exp \left[\frac{ipx}{\hbar} \right] dx = \\ &= \sqrt{\frac{4m^3\omega^3}{\pi\hbar^3}} \int \left(q^2 - \frac{x^2}{4} \right) \exp \left[-\left(\frac{m\omega}{4\hbar} x^2 + ipx + \frac{m\omega}{\hbar} q^2 \right) \right] dx\end{aligned}$$

Quedan dos integrales debido al miembro que multiplica a la exponencial, la primera se resuelve usando (A.2) y la segunda (A.3):

$$= \frac{1}{\pi\hbar} \left(-1 + \frac{2p^2}{m\omega\hbar} + \frac{2m\omega q^2}{\hbar} \right) \exp \left[-\frac{m\omega q^2}{\hbar} - \frac{p^2}{m\omega\hbar} \right]$$

A.5. Tomograma simpléctico del primer nivel excitado

Se integra en el orden q,p y k como en el caso del fundamental usando (A.2) y (A.3):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1(X, \mu, \nu) &= \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int \left(-1 + \frac{2p^2}{m\omega\hbar} + \frac{2m\omega q^2}{\hbar} \right) \exp \left[-\frac{m\omega q^2}{\hbar} - \frac{p^2}{m\omega\hbar} \right] \exp [ik(X - \mu q - \nu p)] dk dq dp = \\ &= \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int \exp \left[-\frac{p^2}{m\omega\hbar} \right] \exp [ik(X - \nu p)] dp dk \int \left(-1 + \frac{2p^2}{m\omega\hbar} + \frac{2m\omega q^2}{\hbar} \right) \exp \left[-\left(\frac{m\omega}{\hbar} q^2 + ik\mu q \right) \right] dq = \\ &= \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int \exp \left[-\frac{p^2}{m\omega\hbar} \right] \exp [ik(X - \nu p)] \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \left[\frac{2p^2}{m\omega\hbar} - \frac{\hbar\mu^2}{2m\omega} k^2 \right] \exp \left[-\frac{\hbar\mu^2}{4m\omega} k^2 \right] dp dk = \\ &= \frac{1}{2\pi^2\hbar} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \int \exp [ikX] dk \int \left[\frac{2p^2}{m\omega\hbar} - \frac{\hbar\mu^2}{2m\omega} k^2 \right] \exp \left[-\frac{\hbar\mu^2}{4m\omega} k^2 \right] \exp \left[-\left(\frac{p^2}{m\omega\hbar} + ik\nu p \right) \right] dp = \\ &= \frac{1}{2\pi^2\hbar} \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \sqrt{m\omega\hbar\pi} \int \left[1 - \frac{\hbar\mu^2 k^2}{2m\omega} - \frac{m\omega\hbar\nu^2 k^2}{2} \right] \exp \left[-\left(\frac{m\omega\hbar\nu^2}{4} k^2 + \frac{\hbar\mu^2}{4m\omega} k^2 - iXk \right) \right] dk = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left[1 - \frac{\hbar(\mu^2 + m^2\omega^2\nu^2)}{2m\omega} \right] \exp \left[\frac{\hbar(\mu^2 + m^2\omega^2\nu^2)}{4m\omega} \right] dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar(\mu^2 + m^2\omega^2\nu^2)}} \frac{2m\omega}{\hbar(\mu^2 + m^2\omega^2\nu^2)} X^2 \exp \left[-\frac{m\omega}{\hbar(\mu^2 + m^2\omega^2\nu^2)} X^2 \right] \end{aligned}$$

A.6. Cálculo de SQS^\dagger y SPS^\dagger

Para este cálculo se emplean las propiedades del conmutador y la siguiente identidad:

$$e^{iS} A e^{-iS} = A + i[S, A] + \frac{i^2}{2} [S, [S, A]] + \cdots + \frac{i^n}{n!} \underbrace{[S, \dots, [S, [S, A]] \dots]}_{n \text{ veces}} + \cdots$$

Para el operador Q:

$$S = (\mu, \nu) = \exp \left[i\frac{\lambda}{2} (PQ + QP) \right] \exp \left[i\frac{\theta}{2} (Q^2 + P^2) \right] ; \mu = e^\lambda \cos \theta, \nu = e^{-\lambda} \sin \theta$$

La acción del reescalado sobre los operadores Q y P es:

$$\begin{aligned} \exp\left[i\lambda\frac{PQ+QP}{2}\right] Q \exp\left[-i\lambda\frac{PQ+QP}{2}\right] &= Q + i\lambda(-iQ) + \frac{i^2}{2!}\lambda^2(-Q) + \dots = \\ &= Q\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \dots\right) = Qe^\lambda \\ \exp\left[i\lambda\frac{PQ+QP}{2}\right] P \exp\left[-i\lambda\frac{PQ+QP}{2}\right] &= P - i\lambda(-iP) + \frac{i^2}{2!}\lambda^2(-P) + \dots = \\ &= P\left(1 - \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \dots\right) = Pe^{-\lambda} \end{aligned}$$

y la rotación aplicada a Q y P:

$$\begin{aligned} \exp\left[i\theta\frac{Q^2+P^2}{2}\right] Q \exp\left[-i\theta\frac{Q^2+P^2}{2}\right] &= Q + \theta P + \frac{i^2\theta^2}{2!}(Q) + \dots = \\ &= Q\left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + P\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right) = Q \cos \theta + P \sin \theta \\ \exp\left[i\theta\frac{Q^2+P^2}{2}\right] P \exp\left[-i\theta\frac{Q^2+P^2}{2}\right] &= \\ &= P\left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots\right) + Q\left(-\theta + \frac{\theta^3}{3!}\right) = -\sin \theta Q + \cos \theta P \end{aligned}$$

Por lo tanto la acción de S sobre Q y P está dada por la rotación y el posterior reescalado:

$$\begin{aligned} SQS^\dagger &= \exp\left[i\frac{\lambda}{2}(PQ+QP)\right] \exp\left[i\frac{\theta}{2}(Q^2+P^2)\right] Q \exp\left[-i\frac{\theta}{2}(Q^2+P^2)\right] \exp\left[-i\frac{\lambda}{2}(PQ+QP)\right] = \\ &= \exp\left[i\frac{\lambda}{2}(PQ+QP)\right] [Q \cos \theta + P \sin \theta] \exp\left[-i\frac{\lambda}{2}(PQ+QP)\right] = \\ &= e^\lambda \cos \theta Q + e^{-\lambda} \sin \theta P = \mu Q + \nu P = X_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SP S^\dagger &= \exp\left[i\frac{\lambda}{2}(PQ+QP)\right] \exp\left[i\frac{\theta}{2}(Q^2+P^2)\right] P \exp\left[-i\frac{\theta}{2}(Q^2+P^2)\right] \exp\left[-i\frac{\lambda}{2}(PQ+QP)\right] = \\ &= -e^\lambda \sin \theta P + e^{-\lambda} \cos \theta Q = Y_{\mu\nu} \end{aligned}$$

A.7. Normalización del autoestado $|X_{\mu\nu}\rangle$

El autoestado del operador $X_{\mu\nu}$ es una función cuya integral de densidad de probabilidad no converge, así que se normaliza a la delta de Dirac (en representación q):

$$\begin{aligned}\langle X'|X\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle X'|q\rangle \langle q|X\rangle dq = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\mu q}{2\hbar\nu}} e^{i\frac{X'q}{\hbar\nu}} e^{i\frac{\mu q}{2\hbar\nu}} e^{-i\frac{Xq}{\hbar\nu}} dq \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{q}{\hbar\nu}(X'-X)} dq\end{aligned}$$

Para que este estado esté normalizado, esta integral debería ser igual a la delta de Dirac:

$$\langle X'|X\rangle = \delta(X - X')$$

Se usa $k = q/\hbar\nu$:

$$\langle X'|X\rangle = \hbar\nu \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(X'-X)} dk = 2\pi\hbar\nu\delta(X - X')$$

Por lo tanto el factor de normalización que debe ser aplicado al autoestado $\langle q|X\rangle$ es

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar|\nu|}}$$

El caso para $\langle p|X\rangle$ es análogo.

A.8. Tomograma simpléctico del estado fundamental

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_0(X, \mu, \nu) &= \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int W_0(q, p) \delta(X - \mu q - \nu p) dqdp = \\ &= \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right] \exp\left[-\frac{1}{m\omega\hbar}p^2\right] \delta(X - \mu q - \nu p) dqdp = \\ &= \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}q^2\right] \exp\left[-\frac{1}{m\omega\hbar}p^2\right] e^{ik(X-\mu q-\nu p)} dkdqdp = \\ &= \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int \exp\left[-\left(\frac{m\omega}{\hbar}q^2 + ik\mu q\right)\right] \exp\left[-\left(\frac{1}{m\omega\hbar}p^2 + ik\nu p\right)\right] \exp[ikX] dkdqdp =\end{aligned}$$

Se integra primero en q , luego en p y después en k empleando la identidad (A.2):

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2\pi^2\hbar} \int \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} \sqrt{\pi\hbar m\omega} \exp\left[-\frac{\mu^2\hbar}{4m\omega}k^2\right] \exp\left[\frac{m\omega\hbar\nu^2}{4}\right] dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \exp\left[-\frac{\hbar(\mu^2 + m^2\omega^2\nu^2)}{4m\omega}\right] \exp[ikX] dk = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar(m^2\omega^2\nu^2 + \mu^2)}} \exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar(m^2\omega^2\nu^2 + \mu^2)}X^2\right]\end{aligned}$$

A.9. Relación de incertidumbre aplicada a \mathcal{W}_0

Se tiene la relación de incertidumbre de Robertson-Schrödinger, que se pretende evaluar en función del parámetro η para el caso del estado fundamental del oscilador armónico:

$$\sigma_{QQ}(\eta)\sigma_{PP}(\eta) - \sigma_{QP}(\eta) \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

En la base tomográfica, las funciones sólo dependen de la variable X y de los parámetros μ y ν , pero con la relación $X = \mu Q + \nu P$. Así pues la varianza y la covarianza respecto a las variables Q y P son:

$$\begin{aligned} \sigma_{XX}(\mu, \nu) &= \int X^2 \mathcal{W}(X, \mu, \nu) dX - \left[\int X \mathcal{W}(X, \mu, \nu) dX \right]^2 = \frac{\eta(m^2 \omega^2 \nu^2 + \mu^2)}{2m\omega} \\ \sigma_{QQ} &= \sigma_{XX}(1, 0) = \eta/2m\omega \\ \sigma_{PP} &= \sigma_{XX}(0, 1) = \eta m \omega / 2 \\ \sigma_{QP} &= \sigma_{XX}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}(\sigma_{XX}(1, 0) + \sigma_{XX}(0, 1)) = 0 \end{aligned}$$

por lo que en definitiva la relación de incertidumbre queda:

$$\frac{\eta^2}{4} \geq \frac{\hbar^2}{4} \rightarrow \eta \geq \hbar$$

A.10. Ecuación de von Neumann para el estado ρ

$$\frac{d}{dt} \rho(q, q', t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{\partial^2}{\partial q'^2} \right) \rho(q, q', t)$$

donde

$$\rho(q, q', t) = \langle q | \rho(\hat{t}) | q' \rangle = \langle q | \left[\sum_n P_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \right] | q' \rangle \quad (\text{A.4})$$

Ahora veamos que forma tiene la evolución temporal de este estado densidad:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho &= \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{\partial^2}{\partial q'^2} \right) \rho \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{\partial^2}{\partial q'^2} \right) \rho \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho(q, q', t) = \rho(q, q', 0) \exp \left[\frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{\partial^2}{\partial q'^2} \right) t \right] \end{aligned}$$

Lo cual significa que, haciendo uso de la notación indicada en A.1 y sustituyendo la expresión del operador momento $P^2 = -\hbar^2/2m \cdot \partial^2/\partial q^2$,

$$\begin{aligned} \langle q | \rho(\hat{t}) | q' \rangle &= \exp \left[\frac{-iP^2}{2m\hbar} t \right] \langle q | \rho(0) | q' \rangle \exp \left[\frac{iP^2}{2m\hbar} t \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho(\hat{t}) &= \exp \left[\frac{-iP^2}{2m\hbar} t \right] \rho(0) \exp \left[\frac{iP^2}{2m\hbar} t \right] = U(t) \rho(0) U^\dagger(t) \end{aligned}$$

A.11. Evolución temporal del tomograma clásico

El tomograma de la función de probabilidad de la partícula clásica es:

$$\mathcal{W}(X, \mu, \nu, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q, p, t) \delta(X - \mu q - \nu p) dq dp$$

se considera su derivada total respecto al tiempo:

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = \cancel{\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t}} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p} \frac{dp}{dt}$$

Los términos tachados se anulan debido a que el tomograma no depende explícitamente del tiempo al ser promediado sobre las rectas y también a que $p = p_0 = cte$. Sabiendo que la derivada de q con respecto al tiempo es p/m la ecuación queda así:

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = -\mu \frac{p}{m} \Rightarrow \frac{d\mathcal{W}}{dt} + \mu \frac{p}{m} = 0$$

o escrito de forma más compacta, sustituyendo p :

$$\left(\frac{d}{dt} - \frac{\mu}{m} \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \mathcal{W}(X, \mu, \nu, t) = 0$$

El caso de la ecuación de von Neumann es análogo.