

ANEXOS

ANEXO A. ECUACIONES DE LA ACÚSTICA LINEAL

Ecuación de continuidad para las perturbaciones acústicas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.1)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) en la (3.1) se obtiene:

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \nabla((\rho_0 + \rho') \cdot (\vec{u}_0 + \vec{u}')) = 0 \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} + \nabla(\rho_0 \vec{u}_0 + \rho_0 \vec{u}' + \rho' \vec{u}_0 + \rho' \vec{u}') = 0 \quad (A.2)$$

Siendo ρ_0, \vec{u}_0 valores medios de la densidad y velocidad respectivamente.

Por tanto:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0 ; \nabla(\rho_0 \vec{u}_0) = 0 \quad (A.3)$$

La ecuación puede ser agrupada en: Términos de orden 0: ρ_0, \vec{u}_0

Términos de orden 1: $\rho_0 \vec{u}', \rho' \vec{u}_0$

Términos de orden 2: $\rho' \vec{u}'$

Se pueden despreciar términos de orden 2 ya que:

$$\nabla \cdot (\rho' \vec{u}') = \vec{u}' \nabla \rho' + \rho' \nabla \vec{u}' \quad \text{Siendo} \quad \vec{u}' \nabla \rho' \ll \vec{u}_0 \nabla \rho'$$

$$\rho' \nabla \vec{u}' \ll \rho_0 \nabla \vec{u}'$$

Con todo esto la Ecuación 3.1 queda:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{u}_0 \nabla \rho' + \rho_0 \nabla \vec{u}' = 0 \Rightarrow \frac{D\rho'}{Dt} + \rho_0 \nabla \vec{u}' = 0 \quad (A.4)$$

Suponiendo que el campo acústico es unidimensional:

$$\boxed{\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{u}_0 \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial x} = 0} \quad (3.8)$$

Ecuación de cantidad de movimiento para las perturbaciones acústicas

A partir de la ecuación de Euler de cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\rho \vec{u} \nabla) \vec{u} = -\nabla p \quad (3.2)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7):

$$(\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial(\vec{u}_0 + \vec{u}')}{\partial t} + (\vec{u}_0 + \vec{u}') \nabla(\vec{u}_0 + \vec{u}') \right) = -\nabla(p_0 + p') \quad (A.5)$$

$$(\rho_0 + \rho') \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + (\rho_0 + \rho')(\vec{u}_0 + \vec{u}') \nabla \vec{u}' = -\nabla(p_0 + p') \quad (A.6)$$

Desarrollando y teniendo en cuenta las hipótesis de campo acústico unidimensional y términos de segundo orden despreciables:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + \rho_0 \vec{u}_0 \nabla \vec{u}' = -\nabla p' \Rightarrow \boxed{\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \vec{u}_0 \rho_0 \frac{\partial \vec{u}'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial x}} \quad (3.9)$$

Ecuación de la energía para las perturbaciones acústicas [9]

A partir de la ecuación de la energía:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho(\vec{u} \nabla) e = -p(\nabla \vec{u}) \Rightarrow \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{u} \frac{\partial e}{\partial x} = -p \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \quad (A.7)$$

Desarrollando la Ecuación (3.1), se obtiene:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (A.8)$$

Y combinando ambas expresiones:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \vec{u} \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (A.9)$$

Considerando la definición de c_v , $e = c_v \cdot T$ y que éste es constante:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \vec{u} c_v \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (A.10)$$

Como se ha supuesto que el gas es ideal, se cumple que $T = \frac{p}{R\rho}$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{p}{\rho} \right) = \frac{1}{R} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \quad (A.11)$$

Donde α es "x" o "t"

Combinando estas últimas dos ecuaciones:

$$c_v \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial t} - c_v \frac{1}{R} \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + c_v \vec{u} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial x} - c_v \vec{u} \frac{1}{R} \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (\text{A.12})$$

Utilizando las siguientes igualdades $c_v = \frac{R}{\gamma-1}$; $c_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} R$ Se llega a:

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \frac{1}{\gamma-1} \frac{\partial p}{\partial x} - \vec{u} \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (\text{A.13})$$

Multiplicando en ambos lados por $\frac{\gamma-1}{p}$:

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} - \vec{u} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\gamma-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \frac{\gamma-1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (\text{A.14})$$

Agrupando términos:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = \frac{1}{\gamma p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (\text{A.15})$$

Aplicando (3.5), (3.6), (3.7) y suposición de gas ideal:

$$\boxed{\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{u}_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} \right) = \frac{1}{\gamma p_0} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + \vec{u}_0 \frac{\partial p'}{\partial x} \right)} \quad (\text{3.10})$$

ANEXO B. ECUACIÓN DE ONDAS [9]

Se supone que el campo acústico es isentrópico, bajo estas condiciones:

$$p = K\rho^\gamma \quad (B.1)$$

$$\text{Siendo } \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad (B.2)$$

Con la derivada en el tiempo de la expresión anterior, obtenemos:

$$\left. \frac{\partial p'}{\partial t} \right|_{p_0} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{p_0} \left. \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right|_{p_0} = c^2 \left. \frac{\partial \rho'}{\partial t} \right|_{p_0} \quad (B.3)$$

$$\text{Siendo } c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{p_0} = K\gamma\rho^{\gamma-1}|_{p_0} = \left. \frac{\gamma p}{\rho} \right|_{p_0} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \quad (B.4)$$

Sustituyendo en la Ecuación (3.10) se obtiene:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho' = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) p' \quad (B.5)$$

Combinando (B.5) y (3.8):

$$-\rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) p' \quad (B.6)$$

Aplicando en ambos lados de la ecuación anterior la expresión $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)$ y desarrollando la Ecuación (3.9), se llega a la ecuación de ondas:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2} p' = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p'} \quad (3.11)$$

ANEXO C. ECUACIONES DEL MÉTODO DE LOS DOS MICRÓFONOS

Un esquema de la instalación empleada cuando se está midiendo un orificio aplicando el método de los dos micrófonos es el que se muestra en la Figura C.1:

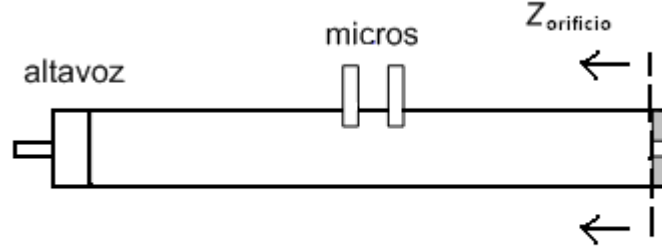


Figura C.1 Esquema instalación método dos micrófonos

Excitando el altavoz a diferentes frecuencias y aplicando el método que a continuación se describe se puede caracterizar la impedancia de estudio.

La impedancia acústica se puede definir según:

$$\hat{Z}_n(f) = \hat{S}_{pu}(f) / \hat{S}_{uu}(f) \quad (C.1)$$

Donde $\hat{S}_{pu}(f)$ es la densidad espectral cruzada entre la presión y la velocidad, y \hat{S}_{uu} hace referencia a la densidad auto-espectral de la velocidad.

Ambos términos se pueden definir como:

$$\hat{S}_{pu}(f) = 1/T \{ \bar{P}_o(f, T) \cdot \bar{U}_o^*(f, T) \} \quad (C.2)$$

$$\hat{S}_{uu}(f) = 1/T \{ \bar{U}_o(f, T) \cdot \bar{U}_o^*(f, T) \} \quad (C.3)$$

Por otro lado, también definimos la densidad auto-espectral de la presión según:

$$\hat{S}_{pp}(f) = 1/T \{ \bar{P}_o(f, T) \cdot \bar{P}_o^*(f, T) \} \quad (C.4)$$

En las Ecuaciones (C.2), (C.3) y (C.4) \bar{P}_o y \bar{U}_o son las transformadas finitas de Fourier

$$\bar{P}_o(f, T) = 1/T \int_0^T \bar{p}(x, t) e^{-i\omega t} dt \quad (C.5)$$

$$\bar{U}_o(f, T) = 1/T \int_0^T \bar{u}(x, t) e^{-i\omega t} dt \quad (C.6)$$

Combinando las Ecuaciones (3.12), (3.13) con (C.5) y (C.6) se obtiene:

$$\bar{P}_o(f, T) = \bar{D}^+(f, T) + \bar{D}^-(f, T) \Rightarrow \bar{A}(f, T) + \bar{B}(f, T) \quad (C.7)$$

$$\bar{U}_o(f, T) = [\bar{D}^+(f, T) - \bar{D}^-(f, T)] \left(\frac{1}{\rho c} \right) \Rightarrow [\bar{A}(f, T) - \bar{B}(f, T)] \left(\frac{1}{\rho c} \right) \quad (C.8)$$

Las expresiones anteriores se escriben con "A" y "B" en vez de "D⁺" y "D⁻" por claridad para las siguientes ecuaciones.

Sustituyendo (C.7) y (C.8) en (C.2), (C.3), (C.4):

$$\hat{S}_{pu}(f) = \left(\frac{1}{\rho c}\right) [\hat{S}_{AA}(f) - \hat{S}_{BB}(f) - i2\hat{Q}_{AB}(f)] \quad (C.9)$$

$$\hat{S}_{uu}(f) = \left(\frac{1}{\rho c}\right)^2 [\hat{S}_{AA}(f) + \hat{S}_{BB}(f) - 2\hat{C}_{AB}(f)] \quad (C.10)$$

$$\hat{S}_{pp}(f) = \hat{S}_{AA}(f) + \hat{S}_{BB}(f) - 2\hat{C}_{AB}(f) \quad (C.11)$$

$$\text{Con } \hat{S}_{AB}(f) = \hat{C}_{AB}(f) + i\hat{Q}_{AB}(f) \quad (C.12)$$

Sustituyendo (C.9), (C.10), (C.11) en (C.1)

$$\boxed{\frac{\hat{Z}_n(f)}{\rho c} = \frac{\hat{S}_{AA}(f) - \hat{S}_{BB}(f) - i2\hat{Q}_{AB}(f)}{\hat{S}_{AA}(f) + \hat{S}_{BB}(f) - 2\hat{C}_{AB}(f)}} \quad (3.15)$$

Dividiendo la impedancia en dos términos:

$$\frac{\hat{R}_n(f)}{\rho c} = \frac{\hat{S}_{AA}(f) - \hat{S}_{BB}(f)}{\hat{S}_{AA}(f) + \hat{S}_{BB}(f) - 2\hat{C}_{AB}(f)} \quad (3.16)$$

$$\frac{\hat{X}_n(f)}{\rho c} = \frac{-i2\hat{Q}_{AB}(f)}{\hat{S}_{AA}(f) + \hat{S}_{BB}(f) - 2\hat{C}_{AB}(f)} \quad (3.17)$$

En los ensayos se toman fluctuaciones de presiones mediante dos micrófonos, \bar{P}_1 y \bar{P}_2 , al calcular la densidad auto-espectral y la densidad cruzada de ambas mediciones:

$$\hat{S}_{11}(f) = 1/T \{ \bar{P}_1(f, T) \cdot \bar{P}_1^*(f, T) \} \quad (C.13)$$

$$\hat{S}_{22}(f) = 1/T \{ \bar{P}_2(f, T) \cdot \bar{P}_2^*(f, T) \} \quad (C.14)$$

$$\hat{S}_{12}(f) = \hat{C}_{12}(f) + i\hat{Q}_{12}(f) = 1/T \{ \bar{P}_1(f, T) \cdot \bar{P}_2^*(f, T) \} \quad (C.15)$$

Realizando la transformada de Fourier de (3.12) y combinándola con (C.13), (C.14) y (C.15), se llega al siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{S}_{11}(f) = \hat{S}_{AA}(f) + \hat{S}_{BB}(f) + 2[\hat{C}_{AB}(f) \cos(k_i + k_r) x_1 + \hat{Q}_{AB}(f) \sin(k_i + k_r) x_1] \\ \hat{S}_{22}(f) = \hat{S}_{AA}(f) + \hat{S}_{BB}(f) + 2[\hat{C}_{AB}(f) \cos(k_i + k_r) x_2 + \hat{Q}_{AB}(f) \sin(k_i + k_r) x_2] \\ \hat{C}_{12}(f) = \hat{S}_{AA}(f) \cos k_i (x_1 - x_2) + \hat{S}_{BB}(f) \cos k_r (x_1 - x_2) + \\ \quad + \hat{C}_{AB}(f) [\cos(k_r x_1 + k_i x_2) + \cos(k_i x_1 + k_r x_2)] + \\ \quad + \hat{Q}_{AB}(f) [\sin(k_r x_1 + k_i x_2) + \sin(k_i x_1 + k_r x_2)] \\ \hat{Q}_{12}(f) = -\hat{S}_{AA}(f) \sin k_i (x_1 - x_2) + \hat{S}_{BB}(f) \cos k_r (x_1 - x_2) + \\ \quad + \hat{C}_{AB}(f) [-\sin(k_i x_1 + k_r x_2) + \sin(k_r x_1 + k_i x_2)] + \\ \quad + \hat{Q}_{AB}(f) [\cos(k_i x_1 + k_r x_2) - \cos(k_r x_1 + k_i x_2)] \end{array} \right.$$

$\hat{S}_{11}(f), \hat{S}_{22}(f), \hat{C}_{12}(f), \hat{Q}_{12}(f)$ son medidas experimentales, al resolver el sistema de ecuaciones anteriores, se obtiene $\hat{S}_{AA}(f), \hat{S}_{BB}(f), \hat{C}_{AB}(f)$ y $\hat{Q}_{AB}(f)$ por lo que se puede determinar la impedancia acústica experimental.

ANEXO D. MODELO ACÚSTICO UNIDIMENSIONAL

Para el cálculo de las diferentes propiedades acústicas de un sistema se utilizará un modelo acústico unidimensional basado en los invariantes de Riemann f y g .

A continuación se realiza una breve introducción a las invariantes de Riemann.

Partiendo de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p' = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 p' \quad (3.11)$$

Resolviendo la ecuación (3.11):

$$\frac{1}{\rho \bar{c}} p'(x, t) = f(x - (c + \bar{u}_0)t) + g(x + (c - \bar{u}_0)t) \quad (D.1)$$

$$u'(x, t) = f(x - (c + \bar{u}_0)t) - g(x + (c - \bar{u}_0)t) \quad (D.2)$$

Donde las invariantes de Riemann f y g son arbitrarias

Para el caso de ondas armónicas, las Ecuaciones (D.1), (D.2) se pueden reescribir según:

$$\frac{1}{\rho \bar{c}} p'(x, t) = (F e^{-ik_+x} + G e^{-ik_-x}) e^{i\omega t} \quad (D.3)$$

$$u'(x, t) = (F e^{-ik_+x} - G e^{-ik_-x}) e^{i\omega t} \quad (D.4)$$

Donde $k_{\pm} = \pm k \frac{1}{1 \pm M}$

Debido a que se trata de ondas armónicas, la dependencia del tiempo es la misma para todos los puntos del espacio. Por lo tanto, se puede tomar $t=0$ en las ecuaciones anteriores y con esto, se omite el término $e^{i\omega t}$.

Introduciendo las invariantes acústicas de Riemann:

$$f(x) = F e^{-ik_+x} \quad (D.5)$$

$$g(x) = G e^{-ik_-x} \quad (D.6)$$

$$\frac{1}{\rho \bar{c}} p'(x) = f + g \quad (D.7)$$

$$u'(x) = f - g \quad (D.8)$$

Como la impedancia acústica se define como el cociente entre la fluctuación de presión y velocidad, expresándola en términos de Riemann:

$$Z = \frac{f + g}{f - g} \quad (D.9)$$

Gracias a esta herramienta matemática se pueden imponer las diferentes condiciones de contorno, que son necesarias para realizar el modelo acústico unidimensional, de forma sencilla. Las diferentes ecuaciones que describen estas condiciones se citan a continuación:

Condiciones de contorno de los nodos:

- Tubo Abierto a la atmósfera

$$\frac{p'_i}{\rho_i c_i} = 0 \quad (D.10)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix} = 0 \quad (D.11)$$

- Tubo Cerrado

$$u_i = 0 \quad (D.12)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix} = 0 \quad (D.13)$$

- Altavoz

$$u_i = Amp \quad (D.14)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix} = Amp \quad (D.15)$$

Conexiones de los nodos

$$\left[A \left(\frac{p'}{\rho c} M + u' \right) \right]_2^1 = 0 \quad (D.16)$$

$$\left[\frac{p'}{\rho c} + M u' \right]_2^1 + \xi M'_2 u'_2 = 0 \quad (D.17)$$

- Cambio de sección

De las Ecuaciones (D.16) y (D.17) se obtiene:

$$A_i \left(\frac{p'_i}{\rho_i c_i} M_i + u'_i \right) = A_j \left(\frac{p'_j}{\rho_j c_j} M_j + u'_j \right) \quad (D.18)$$

$$\frac{p'_i}{\rho_i c_i} + M_i u'_i = \frac{p'_j}{\rho_j c_j} + M_j u'_j (1 + \xi) \quad (D.19)$$

Montando la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 + M_i & 1 - M_i \\ A_i(1 + M_i) & -A_i(1 - M_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(1 + M_j(1 + \xi)) & -(1 - M_j(1 + \xi)) \\ -A_j(1 + M_j) & A_j(1 - M_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \end{bmatrix} = 0 \quad (D.20)$$

- Unión 2-1

En este caso, se tienen las conexiones de entrada “i”, “j” y de salida “k”, la relación entre las tres se puede expresar como:

$$\frac{p'_i}{\rho_i c_i} + M_i u'_i(1 + \xi_i) = \frac{p'_k}{\rho_k c_k} + M_k u'_k \quad (D.21)$$

$$\frac{p'_j}{\rho_j c_j} + M_j u'_j(1 + \xi_j) = \frac{p'_k}{\rho_k c_k} + M_k u'_k \quad (D.22)$$

$$A_i \left(\frac{p'_i}{\rho_i c_i} M_i + u'_i \right) + A_j \left(\frac{p'_j}{\rho_j c_j} M_j + u'_j \right) = A_j \left(\frac{p'_k}{\rho_k c_k} M_k + u'_k \right) \quad (D.23)$$

Montando la matriz se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 1 + M_i(1 + \xi_i) & 1 - M_i(1 + \xi_i) \\ 0 & 0 \\ A_i(1 + M_i) & -A_i(1 - M_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 + M_j(1 + \xi_j) & 1 - M_j(1 + \xi_j) \\ A_j(1 + M_j) & -A_j(1 - M_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(1 + M_k) & -(1 - M_k) \\ -(1 + M_k) & -(1 - M_k) \\ -A_k(1 + M_k) & A_k(1 - M_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_k \\ g_k \end{bmatrix} = 0 \quad (D.24)$$

Conexiones

- Conducto (simple duct)

$$f_j = e^{-ik_+L} f_i \quad (D.25)$$

$$g_j = e^{-ik_-L} g_i \quad (D.26)$$

Montando la matriz:

$$\begin{bmatrix} -e^{-ik_+L} & 0 \\ 0 & -e^{-ik_-L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_j \\ g_j \end{bmatrix} = 0 \quad (D.27)$$

Utilizando las diferentes condiciones descritas se pueden hacer las diferentes submatrices que formarán parte del sistema completo.

$$\begin{pmatrix} \text{Matriz} \\ de \\ \text{Coeficientes} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ g_i \\ \cdot \\ \cdot \\ g_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \cdot \\ \cdot \\ z \end{pmatrix} \quad (D.28)$$

Con la resolución de esta matriz global se obtienen las diferentes f y g del sistema, por lo que ya se pueden conocer las diferentes fluctuaciones de presión ($f+g$) y velocidad ($f-g$) existentes en la instalación.

ANEXO E. IMPEDANCIA ACÚSTICA A LO LARGO DEL ESPACIO

Los diferentes números de onda se pueden expresar según:

$$k_i = \frac{w}{c+u} = \frac{k}{1+M} \quad (E.1)$$

$$k_r = \frac{w}{c-u} = \frac{k}{1-M} \quad (E.2)$$

$$k_c = \frac{k}{1-M^2} \quad (E.3)$$

Escribiendo (E.1) y (E.2) en función de (E.3):

$$k_i = k_c(1-M) \quad (E.4)$$

$$k_r = k_c(1+M) \quad (E.5)$$

Partiendo de la definición de impedancia acústica:

$$\frac{Z}{\rho c} = \frac{D^+ e^{\frac{-ikx}{1+M}} + D^- e^{\frac{ikx}{1-M}}}{D^+ e^{\frac{-ikx}{1+M}} - D^- e^{\frac{ikx}{1-M}}} \quad (3.14)$$

Reescribiendo (3.14) en términos de (E.4) y (E.5)

$$\frac{Z}{\rho c} = \frac{D^+ e^{-ik_c(1-M)x} + D^- e^{ik_c(1+M)x}}{D^+ e^{-ik_c(1-M)x} - D^- e^{ik_c(1+M)x}} \quad (E.6)$$

Dividiendo (E.6) por la expresión $e^{ik_c Mx}$:

$$\frac{Z}{\rho c} = \frac{D^+ e^{-ik_c x} + D^- e^{ik_c x}}{D^+ e^{-ik_c x} - D^- e^{ik_c x}} \quad (E.7)$$

Dado que en $x=0$, la impedancia es conocida (la impedancia medida o la teórica según Munjal):

$$\frac{Z(x=0)}{\rho c} = Z_0 = \frac{D^+ + D^-}{D^+ - D^-} \quad (E.8)$$

De la ecuación (E.8), se puede obtener una relación entre las dos incógnitas D^+ , D^-

$$\frac{D^-}{D^+} = \frac{Z_0 - 1}{Z_0 + 1} \quad (E.9)$$

Sustituyendo (E.9) en la Ecuación (E.7) y operando:

$$\begin{aligned}
 \frac{Z}{\rho c} &= \frac{D^+ e^{-ik_c x} + D^- e^{ik_c x}}{D^+ e^{-ik_c x} - D^- e^{ik_c x}} = \frac{e^{-ik_c x} + \frac{Z_0 - 1}{Z_0 + 1} e^{ik_c x}}{e^{-ik_c x} - \frac{Z_0 - 1}{Z_0 + 1} e^{ik_c x}} = \frac{(Z_0 + 1)e^{-ik_c x} + (Z_0 - 1)e^{ik_c x}}{(Z_0 + 1)e^{-ik_c x} - (Z_0 - 1)e^{ik_c x}} = \\
 &= \frac{(Z_0 + 1)(\cos(k_c x) - i\sin(k_c x)) + (Z_0 - 1)(\cos(k_c x) + i\sin(k_c x))}{(Z_0 + 1)(\cos(k_c x) - i\sin(k_c x)) - (Z_0 - 1)(\cos(k_c x) + i\sin(k_c x))} = \\
 &= \frac{Z_0 \cos(k_c x) - i\sin(k_c x)}{\cos(k_c x) - iZ_0 \sin(k_c x)} \quad (E.10)
 \end{aligned}$$

Gracias a la expresión (E.10), una vez que se tiene calculada la impedancia acústica en el extremo del tubo, se puede calcular la impedancia en cualquier tramo del mismo.

ANEXO F. RESULTADOS MEDIDAS IMPEDANCIAS DE ORIFICIOS

A continuación se muestran los diferentes resultados experimentales que se obtuvieron al caracterizar los orificios para distintos caudales. Las gráficas muestran tanto para orificios de salida como de entrada, la variación del módulo y la fase al fijar el caudal y modificar el diámetro del orificio.

F.1 ORIFICIOS DE SALIDA

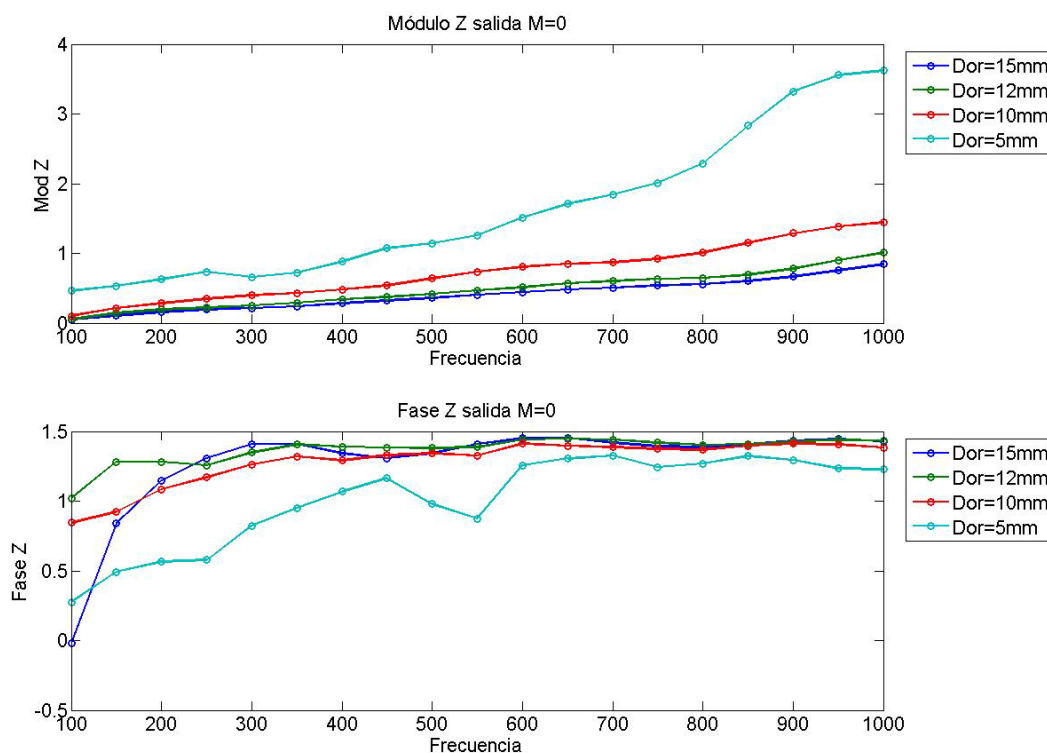


Figura F.1 Módulo y fase impedancia orificio de salida M=0

Anexo F. Resultados medidas impedancias de orificios

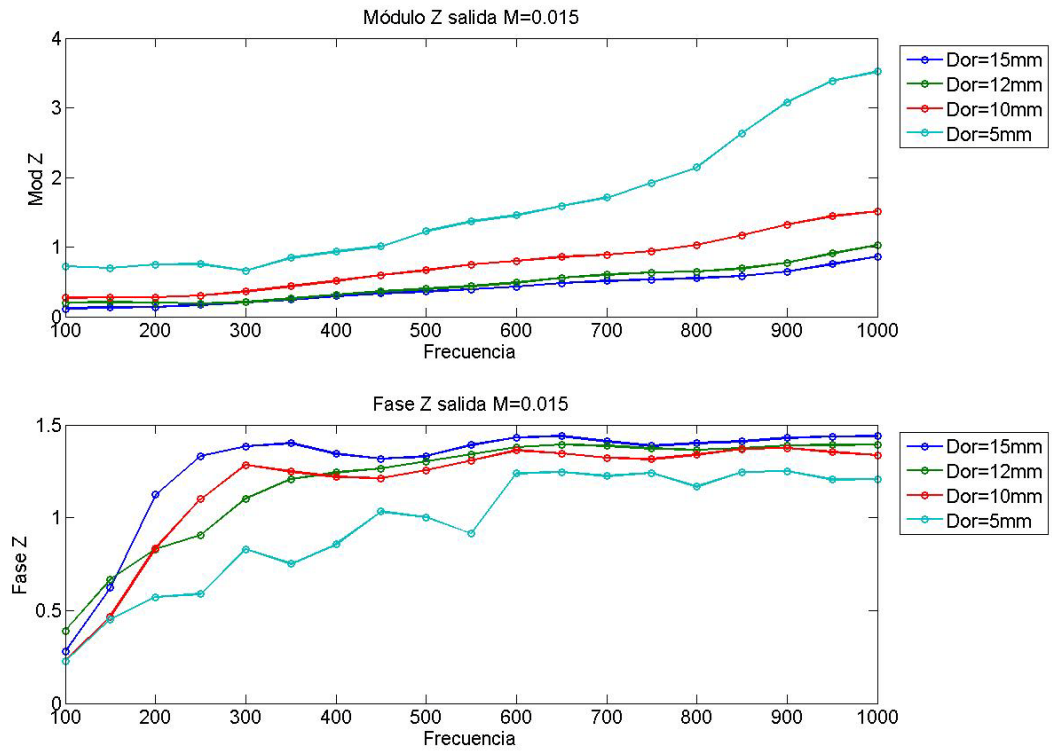


Figura F.2 Módulo y fase impedancia orificio de salida $M=0.015$

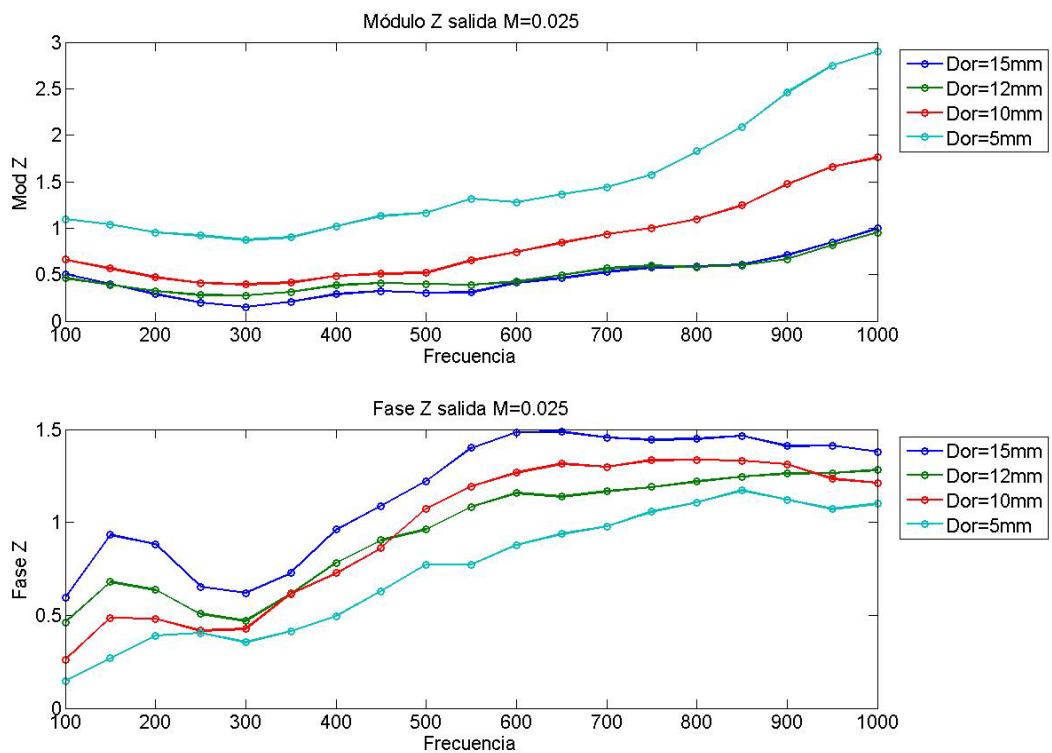
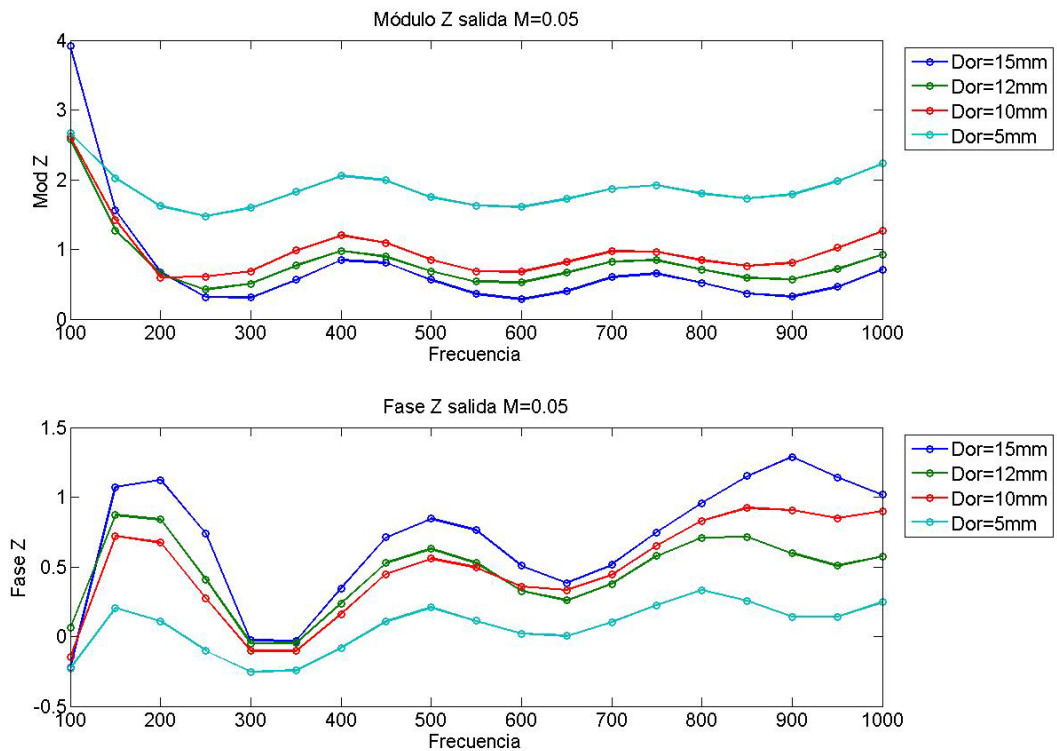
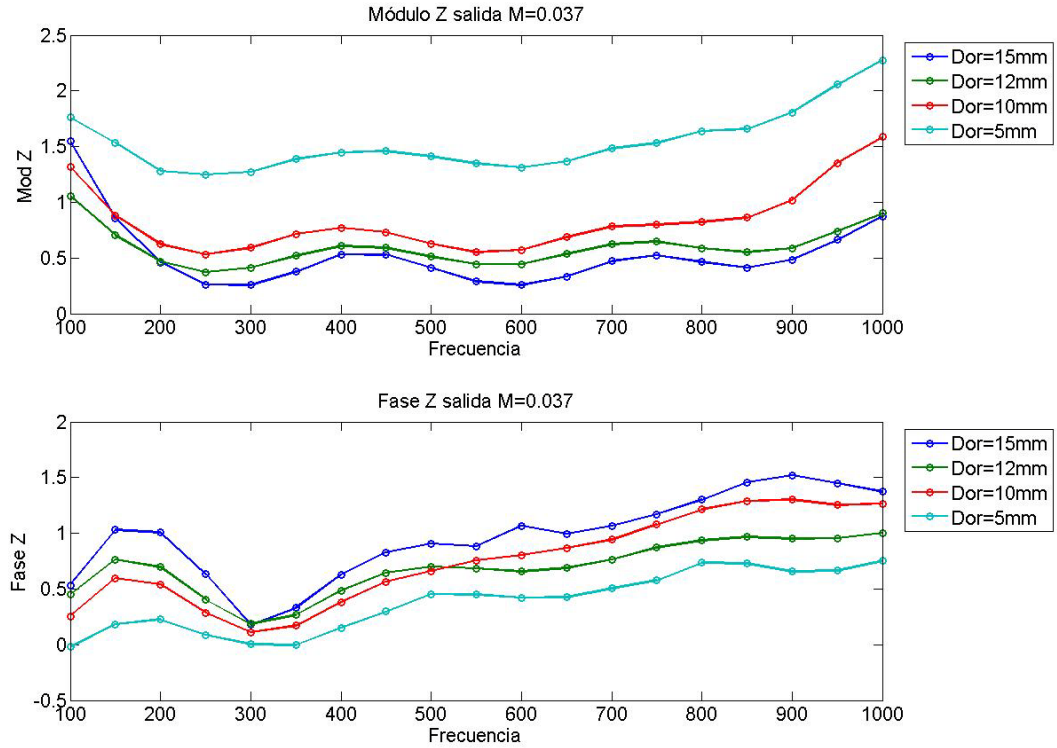


Figura F.3 Módulo y fase impedancia orificio de salida $M=0.025$

Anexo F. Resultados medidas impedancias de orificios



Anexo F. Resultados medidas impedancias de orificios

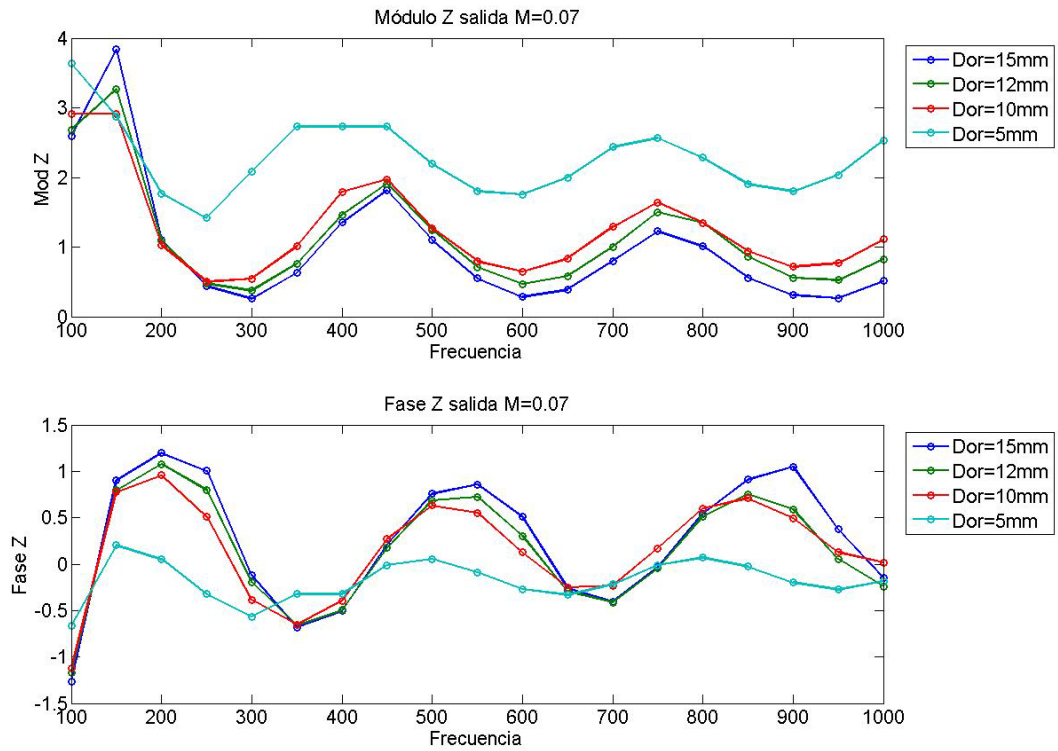


Figura F.6 Módulo y fase impedancia orificio de salida M=0.07

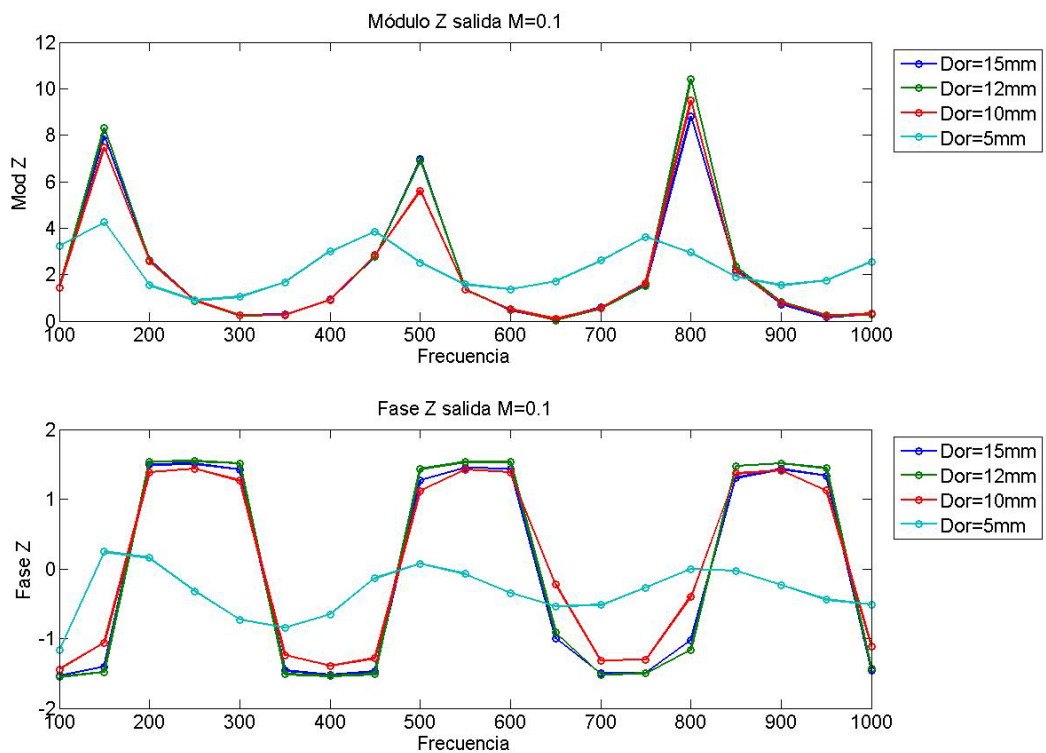


Figura F.7 Módulo y fase impedancia orificio de salida M=0.1

F.2 ORIFICIOS DE ENTRADA

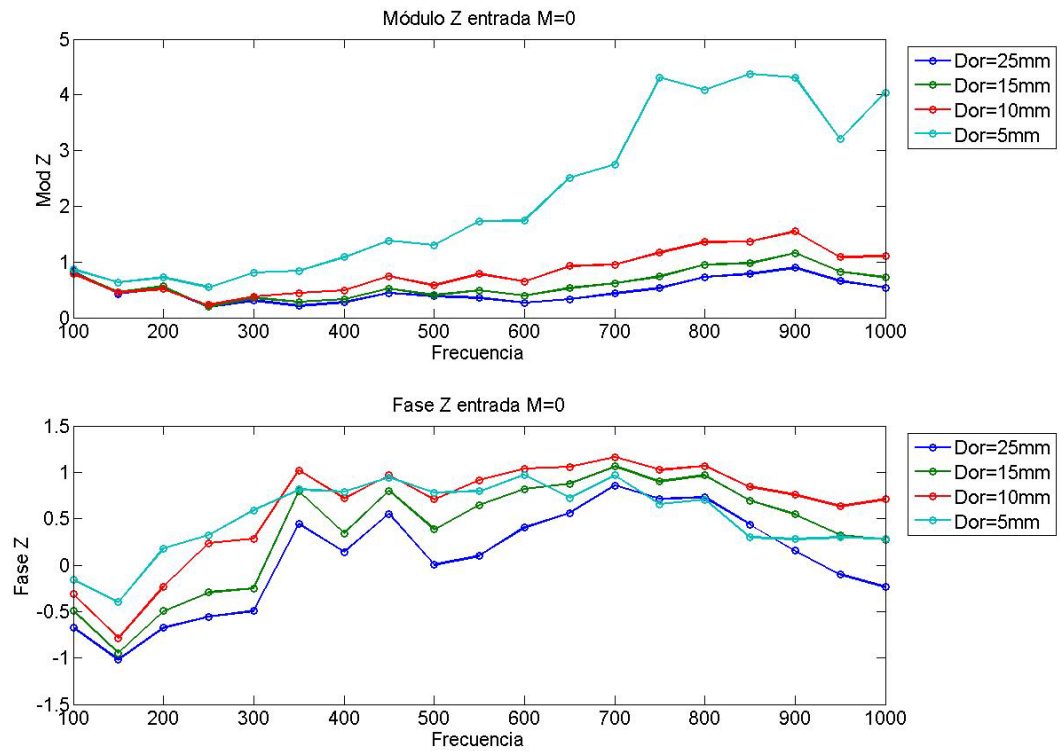


Figura F.8 Módulo y fase impedancia orificio de entrada $M=0$

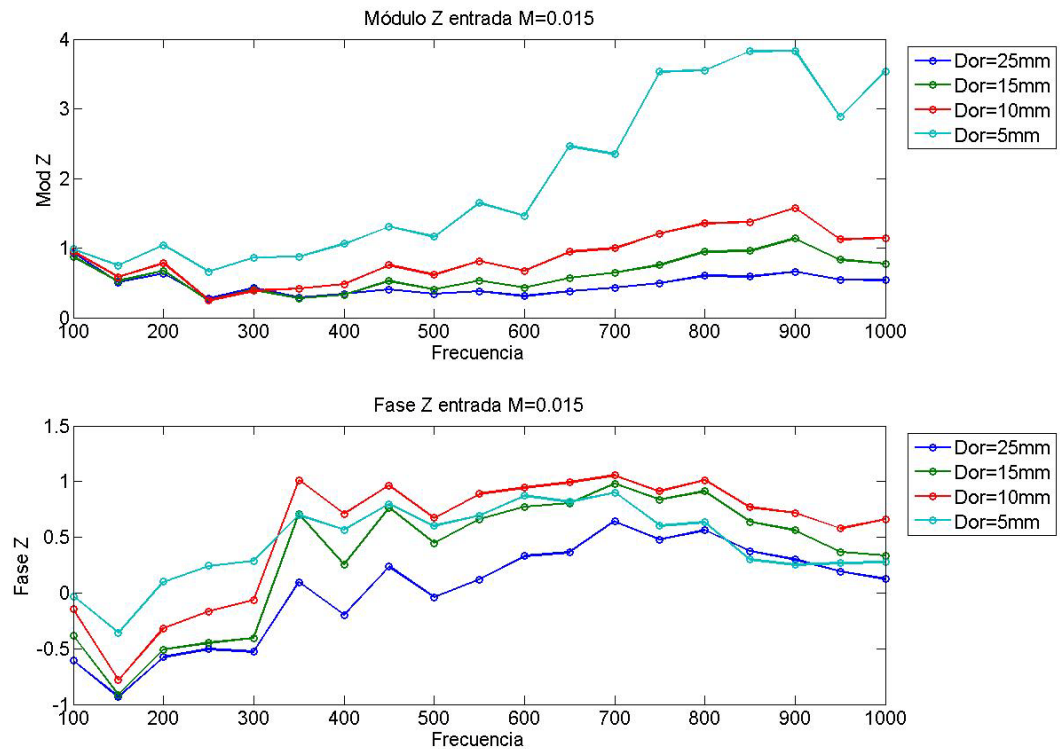


Figura F.9 Módulo y fase impedancia orificio de entrada $M=0.015$

Anexo F. Resultados medidas impedancias de orificios

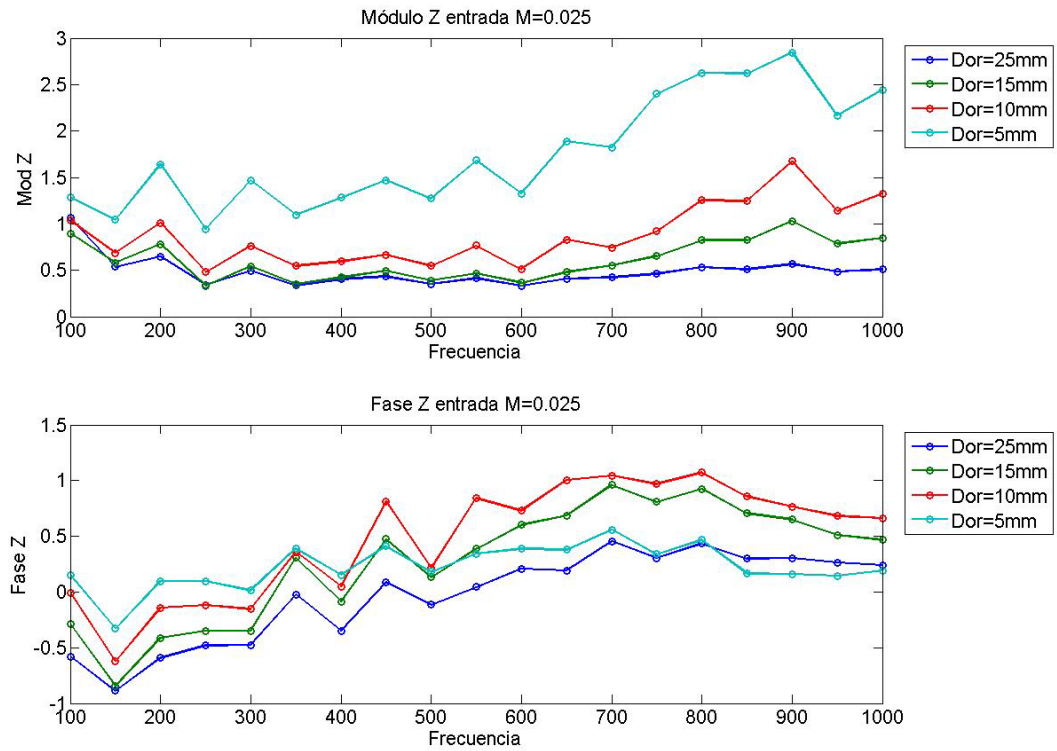


Figura F.10 Módulo y fase impedancia orificio de entrada $M=0.025$

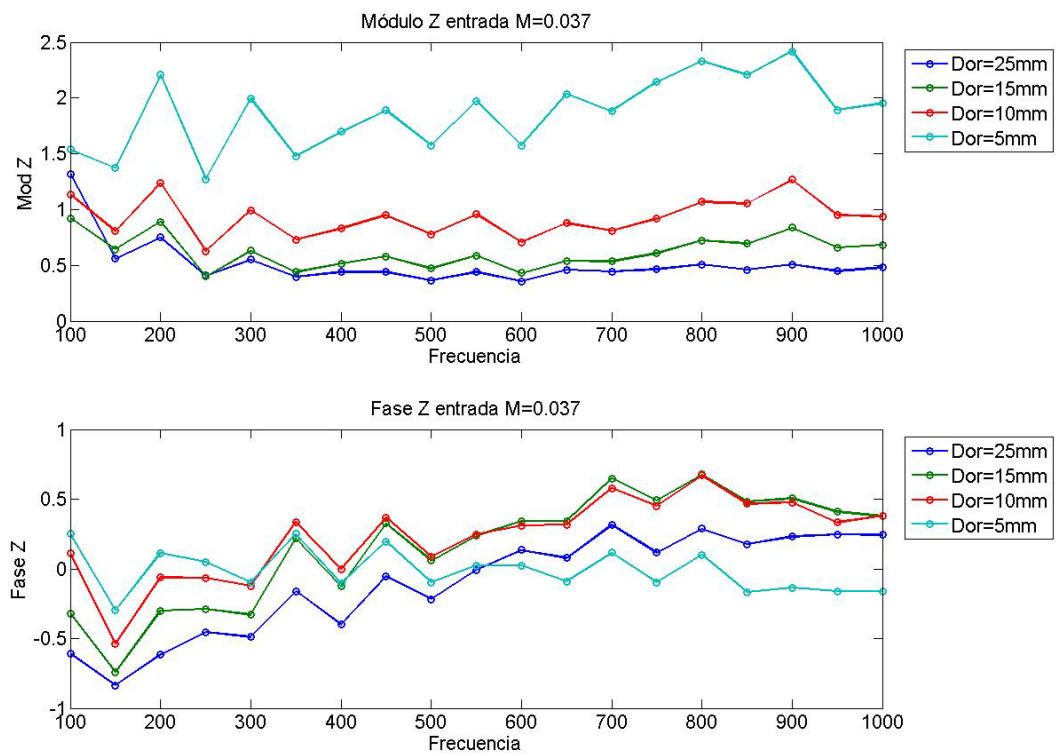


Figura F.11 Módulo y fase impedancia orificio de entrada $M=0.037$

Anexo F. Resultados medidas impedancias de orificios

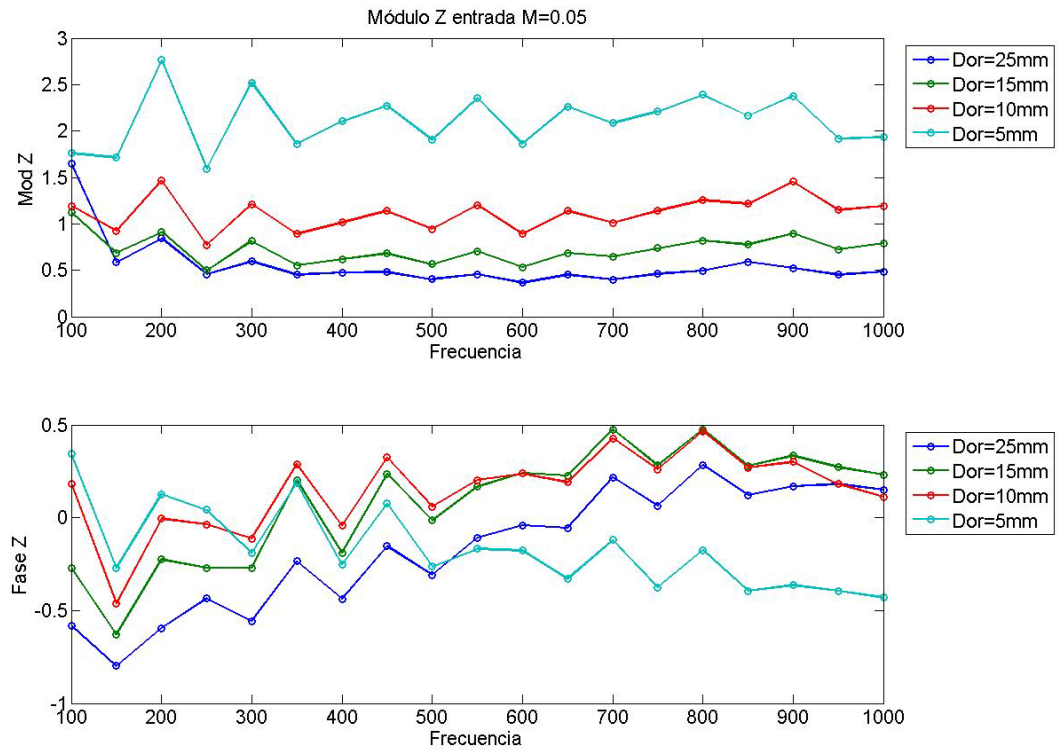


Figura F.12 Módulo y fase impedancia orificio de entrada M=0.05

ANEXO G. CRITERIO DE RAYLEIGH

La densidad de energía acústica, e' , se puede expresar para sistemas acústicos unidimensional (fluctuación acústica de velocidad u' , en dirección x) como:

$$e' = \frac{\bar{\rho} u'^2}{2} + \frac{p'^2}{2\bar{\rho}c^2} \quad (G.1)$$

Suponiendo que la velocidad del flujo medio \bar{u} y que el gradiente de presión $\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ son despreciables, las ecuaciones de presión y velocidad acústicas quedan:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} = (\gamma - 1) \dot{Q}' \quad (G.2)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (G.3)$$

Utilizando la definición de energía acústica y de la velocidad del sonido, $c^2 = \frac{\gamma \bar{p}}{\bar{\rho}}$, se pueden combinar las Ecuaciones (G.2) y (G.3) para obtener una ecuación que describa la evolución de la energía acústica:

$$\frac{\partial e'}{\partial t} + \frac{\partial (p' u')}{\partial x} = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma \bar{p}} p' \dot{Q}' \quad (G.4)$$

Sea L la longitud del combustor y T_{osc} el periodo de la oscilación acústica e integrando la G.4 tanto en el tiempo como en el espacio se obtiene:

$$\int_0^L [e'(x, t)]_0^{T_{osc}} dx = - \int_0^{T_{osc}} [p'(x, t) u'(x, t)]_0^L dt + \frac{(\gamma - 1)}{\gamma \bar{p}} \int_0^{T_{osc}} \int_0^L p' \dot{Q}' dx dt \quad (G.5)$$

La parte de izquierda de la anterior ecuación representa el cambio de energía acústica a lo largo del combustor durante un periodo de oscilación. El primer término del lado derecho hace referencia al flujo de energía acústica a través de la frontera y el segundo al acoplamiento entre fluctuación de presión y calor en el lugar de estudio. :

$$\int_0^L [e'(x, t)]_0^{T_{osc}} dx = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma \bar{p}} \int_0^{T_{osc}} \int_0^L (p' \dot{Q}' - \Phi) dx dt \quad (G.6)$$

Como se puede observar, si la presión acústica y la fluctuación de calor están en fase o desfasados menos de $\pi/2$ y su producto es mayor que la disipación (Φ), se produce un incremento en la energía acústica del sistema de combustión, induciendo inestabilidades en el sistema:

$$\boxed{\int_0^{T_{osc}} \int_0^L [p'(x, t) \dot{Q}'(x, t) - \Phi(x, t)] dx dt > 0} \Rightarrow \text{Inestabilidad} \quad (8.1)$$

ANEXO H. INSTRUMENTACIÓN

A lo largo del anexo se detallan las principales características de los diferentes componentes que forman parte del montaje experimental utilizado para determinar impedancias acústicas mediante el método de los dos micrófonos.

H.1 ALTAVOZ

Cuando se aplica a la bobina de un altavoz una señal eléctrica procedente del amplificador o de cualquier otro equipo, se crea un campo magnético que varía de sentido de acuerdo con dicha señal. En el entrehierro del imán se coloca una bobina cilíndrica de hilo que está unida al diafragma. La bobina genera una corriente eléctrica que provoca que el imán produzca un flujo magnético que hace vibrar la membrana.

Al vibrar la membrana se mueve el aire que tiene situado frente a ella generando así variaciones de presión en el mismo, es decir, ondas sonoras.

En función de las variaciones de voltaje de entrada, el cono vibra y genera perturbaciones equivalentes en el aire.

En la figura H.1 se muestra un esquema de un altavoz similar al utilizado en los ensayos

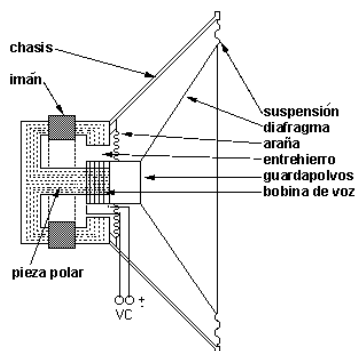


Figura H.1 Esquema altavoz

H.2 MICRÓFONOS DE MEDICIÓN

Un micrófono de medición es un condensador o capacitador, el cual se compone de un diafragma de metal y una placa fija también de metal.

Este tipo de micrófono se polariza con una carga fija en la placa, así cuando se le aplica un sonido al micrófono el diafragma vibra provocando variación en la capacitancia y ésta genera una tensión eléctrica de salida directamente proporcional al sonido recibido. Este es el principio de funcionamiento del micrófono de medición.

Durante los ensayos se han utilizado micrófonos tipo 4188 fabricados por la compañía Brüel & Kjaer.

En la figura H.2 se representa de forma esquemática, los micrófonos de medición 4188.

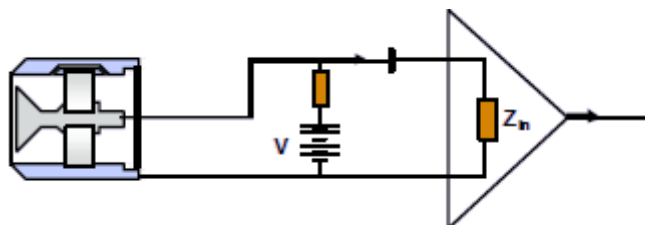


Figura H.2 Esquema micrófonos

H.3 FUENTE DE ALIMENTACIÓN

Para el funcionamiento de los micrófonos se necesita un voltaje externo. Para proporcionar esta tensión se han utilizado dos fuentes de alimentación (una por cada micrófono) modelo DeltaTron WB 1372 de 30V.

H.4 TARJETA DE ADQUISICIÓN

Si se va a realizar la medición de señales analógicas para tratarlas con un ordenador, se necesita un convertidor analógico digital (CAD). Entre las características más importantes de un CAD se destacan: la resolución, el rango de voltaje, el tiempo de conversión.

Resolución:

El número de bits usado para representar una señal analógica determina la resolución del CAD. Mientras mayor sea el número de bits más precisa será la medición ya que el rango de voltaje será dividido en más pequeños niveles de voltaje que puedan ser detectados por el CAD.

Rango de voltaje:

El rango de voltaje establece los valores máximo y mínimo que el convertidor puede digitalizar. Muchas tarjetas de adquisición de datos (TAD) tienen rangos seleccionables para aprovechar lo mejor posible la resolución. Por ejemplo un convertidor de 3 bits tiene 8 divisiones digitales, si su rango está entre 0 y +10 V, el menor valor de voltaje detectable será 1.25 V. Si se selecciona un rango entre -10 y + 10 V el menor valor de voltaje detectable será 2.50 V y por lo tanto la exactitud de la medición habrá disminuido. La determinación del valor más pequeño de voltaje que puede ser detectado por el convertidor viene dado por la relación:

$$\Delta V = \frac{\text{Rango}}{2^{\text{resolucion}}}$$

donde ΔV es el valor de voltaje detectable, Rango es el voltaje que viene dado por $V_{\text{max}} - V_{\text{min}}$. Es importante que el parámetro que fija los límites de la señal a medir en la función de adquisición que se vaya a utilizar se ajuste lo más próximo que se pueda a los límites reales de la señal a medir para aprovechar lo mejor posible la resolución del convertidor.

El rango de voltaje del convertidor puede ser bipolar si el voltaje va de negativo a positivo (ej. $\pm 5V$) o unipolar si el voltaje está con respecto a tierra (ej. 0 a + 10V)

Frecuencia de muestreo

El convertidor para realizar la conversión de la señal analógica en digital requiere de un tiempo, este tiempo es denominado tiempo de conversión. En teoría el inverso de este tiempo define la máxima frecuencia a la cual el convertidor puede muestrear la señal analógica.

ANEXO I. CARACTERÍSTICAS TÉCNICAS DE LA INSTRUMENTACIÓN

I.1 Micrófonos 4188

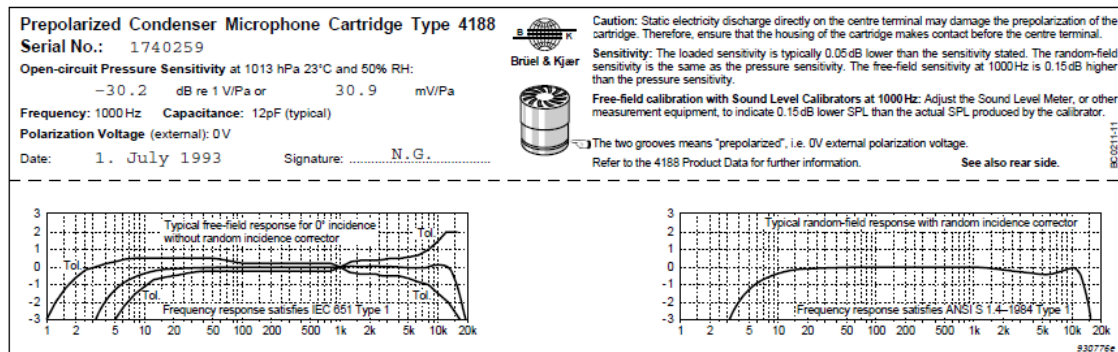


Figura I.1 Cuadro de calibración del micrófono 4188

OPEN-CIRCUIT SENSITIVITY (1000 Hz): $-30 \text{ dB} \pm 2 \text{ dB re } 1 \text{ V/Pa, } 31.6 \text{ mV/Pa}^*$	CALIBRATOR LOAD VOLUME (250 Hz): 208 mm^3	PRESSURE COEFFICIENT (250 Hz): $-0.021 \text{ dB/kPa, typical}$
POLARIZATION VOLTAGE: External: 0V	PISTONPHONE TYPE 4228 CORRECTION: with DP 0776: $+0.02 \text{ dB}$	INFLUENCE OF HUMIDITY: $<0.1 \text{ dB}/100 \% \text{ RH}$
FREQUENCY RESPONSE: 0° incidence free-field response: 12.5 Hz to 8 kHz: $\pm 1 \text{ dB}$ 8 Hz to 12.5 kHz: $\pm 2 \text{ dB}$ In accordance with IEC 651, Type 1 and ANSI S1.4 – 1983	TYPICAL CARTRIDGE THERMAL NOISE: $14.2 \text{ dB (A) } 14.5 \text{ dB (Lin.)}$	VIBRATION SENSITIVITY (<1000 Hz): Typically 63.5 dB equivalent SPL for 1 m/s^2 axial acceleration
LOWER LIMITING FREQUENCY (-3 dB): 1 Hz to 5 Hz (vent exposed to sound)	UPPER LIMIT OF DYNAMIC RANGE: 3% distortion: $>146 \text{ dB SPL}$	MAGNETIC FIELD SENSITIVITY: Typically 7 dB SPL for 80 A/m, 50 Hz field
PRESSURE EQUALIZATION VENT: Rear vented	MAXIMUM SOUND PRESSURE LEVEL: 157 dB (peak)	ESTIMATED LONG-TERM STABILITY: $> 1000 \text{ years/dB (dry air at } 20^\circ \text{C)}$ $> 10 \text{ hours/dB (dry air at } 125^\circ \text{C)}$ $> 40 \text{ years/dB (air at } 20^\circ \text{C, } 90\% \text{ RH)}$ $> 6 \text{ months/dB (air at } 50^\circ \text{C, } 90\% \text{ RH)}$
DIAPHRAGM RESONANCE FREQUENCY: 9 kHz, typical (90° phase shift)	OPERATING TEMPERATURE RANGE: -30 to $+125^\circ \text{C}$ (-22 to 257°F) Max. 70°C (158°F) when fitted with Random-incidence Corrector DZ 9566	DIMENSIONS: Diameter: 13.2 mm (0.52 in) (with grid) 12.7 mm (0.50 in) (cartridge housing) Height: 14.35 mm (0.56 in) (with DZ 9566) 14.9 mm (0.59 in) (with grid) 14.0 mm (0.55 in) (without grid) 16.7 mm (0.66 in) (with DZ 9566)
CAPACITANCE (POLARIZED): 12 pF, typical (at 1000 Hz)	OPERATING HUMIDITY RANGE: 0 to 100 % RH (without condensation)	Thread for preamplifier mounting: 11.7 mm – 60 UNS
EQUIVALENT AIR VOLUME (101.3 kPa): 65 mm^3	STORAGE TEMPERATURE: -30 to $+70^\circ \text{C}$ (-22 to 158°F)	The data above are valid at 23°C , 101.3 kPa and 50% RH, unless otherwise specified.
TEMPERATURE COEFFICIENT (250 Hz): $+0.005 \text{ dB}/^\circ \text{C}$, typical (for the range -10 to $+50^\circ \text{C}$)		

* Individually calibrated

Figura I.2 Rango de operación del micrófono 4188



Figura I.3 Cabezal micrófono 4188

I.2 FUENTE DE ALIMENTACIÓN

DeltaTron Power Supply Type WB-1372

	
WB-1372 Physical Dimensions <ul style="list-style-type: none"> • Height: 39 mm (1.5") • Width: 65 mm (2.5") • Depth: 120 mm (4.7") • Weight: 250 gram (8.8 oz.) 	
Channels	1
Type Number	WB-1372
Description	DeltaTron Power Supply

Features of WB-1372

- Powers one DeltaTron transducer
- Input/output BNC sockets
- Transducer current: 3 mA ($\pm 20\%$)
- Displays bias voltage on the meter
- Dynamic Impedance: $>100\text{ k}\Omega$
- The unit uses three 9 V standard batteries, that is, 6LR61
- Battery check
- AC output

Figura I.4 Características fuente alimentación WB-1372

I.3 TARJETA DE ADQUISICIÓN DE DATOS Lab-PC-1200 Family


1200 Family

PCI-1200
 DAQCard-1200
 Lab-PC-1200
 Lab-PC-1200AI
 DAQPad-1200

Driver Software
 NI-DAQ
 Windows 2000/NT/9x
 Mac OS*
* not for all hardware, refer to page 192

Application Software
 LabVIEW
 LabWindows/CVI
 ComponentWorks
 VirtualBench
 Measure
 BridgeVIEW
 Lookout

Calibration Certificate Included!
(refer to page 216)



Bus	Analog Inputs	Resolution	Sampling Rate	Input Range	Analog Outputs	Resolution	Output Rate	Output Range	Digital I/O	Counter/Timers	Triggers
PCI, PCMCIA, ISA, Parallel Port	8 SE/4 DI	12 bits	100 kS/s	up to $\pm 5\text{ V}$	2	12 bits	1 kS/s	$\pm 5\text{ V}$	24	3, 16-bit	Digital

Figura I.5 Especificaciones técnicas DAQ 1200 Family

ANEXO J. FOTOGRAFÍAS DE LA INSTALACIÓN

A continuación se muestran una serie de fotografías para ilustrar mejor las diferentes configuraciones que se han explicado:

En la Figura J.1 se representa una imagen de la instalación para medir impedancias acústicas de orificios de salida (en este caso está instalado el orificio de 15mm de diámetro):



Figura J.1 Configuración medición impedancias de salida

El detalle de la cámara anecoica (que permite reducir el ruido en la instalación) y la posición del altavoz cuando se miden impedancias de salida se muestra en la Figura J.2:



Figura J.2 Detalle cámara anecoica y altavoz

En la siguiente imagen (Figura J.3) se muestra la posición relativa del altavoz frente a los micrófonos en el caso de que se quieran medir impedancias acústicas de entrada a la instalación:



Figura J.3 Posición altavoz para medida de impedancias de entrada

En la Figura J.4 se representa el inicio de la instalación cuando se están midiendo impedancias de entrada:



Figura J.4 Detalle de la entrada de la instalación cuando se miden impedancias de entrada.