

Determinación algorítmica del grupo fundamental de un plano con agujeros y aplicaciones a la monodromía de trenzas



David Díez Ibáñez

**Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza**

**Directores del trabajo: Enrique M. Artal Bartolo y
Miguel Á. Marco Buzunáriz
28 de junio de 2017**

*A la memoria de César Ibáñez Ortiz,
mi abuelo.*

Prólogo

En la disciplina conocida como geometría algebraica se busca clasificar objetos geométricos con la ayuda de invariantes algebraicos. Con ese objetivo este trabajo presenta la noción esencial de grupo fundamental, $\pi_1(X, x_0)$ como las clases de caminos cerrados en un espacio topológico, así como una pequeña incursión en el concepto de homotopía.

Con estas nociones inmediatas se probará que el grupo fundamental de la circunferencia es un grupo cíclico infinito y que el de un espacio producto es el producto directo de sus grupos fundamentales.

Para trabajar con grupos fundamentales es necesario conocer el concepto de grupo libre, del que se dará la definición y algunos resultados relevantes para comprender su estructura interna y su relación con otros grupos. La cualidad fundamental de estos grupos para este estudio es que todo grupo es la imagen epimorfa de un grupo libre. Esto es lo que denominaremos presentación de un grupo que vendrá dada por un conjunto de generadores y cierto número de relaciones entre ellos.

El principal resultado que se mostrará en lo que a grupos fundamentales se refiere es el Teorema de Seifert y Van Kampen, que permite obtener el grupo fundamental de un espacio a partir de una descomposición en abiertos arcoconexos. Además se dan dos aplicaciones particulares del teorema que facilitan su aplicación en multitud de situaciones. Gracias a ellos se obtienen los grupos fundamentales de una lemniscata, de un disco con agujeros, el toro, el plano proyectivo real y la suma conexa de n toros. En todos estos casos el grupo fundamental viene dado por una presentación aunque se explicita su estructura allí donde se conoce.

El segundo capítulo se centra en una construcción muy peculiar pero ubicua en geometría, la monodromía de trenzas. De nuevo se vuelven a mezclar conceptos algebraicos con geométricos y topológicos para dar origen a un objeto que acabará actuando como invariante algebraico de curvas complejas en dos variables.

Para comenzar se define el grupo de trenzas y se dan varias interpretaciones de sus elementos. Éstos podrán ser vistos como colecciones de caminos en $\mathbb{C} \times [0, 1]$ o como elementos de un espacio de configuración $N_n = M_n / \Sigma_n$ siendo $M_n = \{(z_1 \dots z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j, \forall i \neq j\}$. Este espacio de configuración tiene una identificación inmediata con el conjunto de polinomios mónicos de grado n con raíces simples.

Para poder trabajar con el grupo de trenzas de forma precisa se definen los generadores estándar y se da la presentación clásica del grupo de trenzas que debemos a Emil Artin. Esta notación nos permite definir una acción del grupo de trenzas en n hilos sobre el grupo fundamental del disco con n agujeros, lo que nos lleva a ver las trenzas como automorfismos del grupo libre F_n .

A continuación se presenta la noción de cubierta como una generalización de la aplicación que enrolla la recta real sobre la circunferencia. Este y otros casos se presentan, así como resultados teóricos que dan idea de la relación entre el grupo fundamental del espacio base y el de su cubierta o la relación entre cubiertas de un mismo espacio. A partir del concepto de cubierta se presenta la monodromía como la aplicación que asocia a cada elemento del grupo fundamental del espacio base una permutación de las antiimágenes del punto base de los lazos. Este concepto se generaliza a monodromía de trenzas si en lugar de una permutación se asocia una trenza.

Aquí se definirá una monodromía de trenzas a partir de los un plano con agujeros proveniente de una curva algebraica. Este plano será \mathbb{C} menos el conjunto de puntos donde se anula el discriminante en y del polinomio que define la curva. Esto hace que eliminando de la curva los puntos que se proyecten sobre los que han sido eliminados del plano, obtengamos una cubierta. De modo que para todo punto

del plano con agujeros tengamos exactamente d antiimágenes, número que coincide con el grado del polinomio de la curva. A todo camino en el plano con agujeros se le asociará una trenza inducida por el movimiento de las d antiimágenes de x cuando x recorre ese camino.

Tomando una base de caminos ordenada que llamaremos base geométrica, definiremos la monodromía de trenzas de la curva como la órbita del vector de las trenzas asociadas a cada uno de los elementos de la base geométrica por la acción $B_r \times B_d$, siendo r el número de puntos eliminados del plano y d el grado del polinomio.

Con el fin de poder poner en práctica el cálculo de este invariante, se ha programado un algoritmo que obtiene una base geométrica para el plano con agujeros a partir de un diagrama de Voronoi acotado. Posteriormente este algoritmo será incorporado a una librería existente Sagemath creada por Marco y Rodríguez lo que permitirá no solo calcular el grupo fundamental del complementario de una curva si no también su monodromía de trenzas asociada, que resulta ser un invariante algebraico más fino.

Summary

In topology one of the most basic elements are paths. These mappings associate continuously a real interval into any topological space.

Formally, a *path* in a topological space X is a continuous mapping $f : [a, b] \rightarrow X$ with $a, b \in \mathbb{R}$.

These objects can be deformed continuously over X fixing the starting and ending points to create an equivalence class. In particular, we can consider the equivalence classes of loops, closed paths that start and end in the same point. These classes form a group with the concatenation of paths which is called fundamental group.

The *fundamental group*, denoted by $\pi_1(X, x_0)$, is the group of all classes of equivalence of closed paths in X that start and end in $x_0 \in X$ with the concatenation of paths as operation.

This group is an algebraic invariant of the topological space that allows to convert topological problems into algebraic ones. This is the main strategy of algebraic topology and this invariant is a perfect example useful in many situations.

Another key concept in topology is *homotopy*. If two continuous mappings between topological spaces can be deformed continuously, they will be homotopic. The mapping that defines this deformation is called homotopy and the homotopic relation generates equivalence classes again.

Interaction between fundamental groups of different topological spaces and the homotopy classes provide a powerful tool to deal with different topological problems.

In the first chapter of the present work the structure of the fundamental group of the circumference is presented as an infinite cyclic group as well as the fundamental group of a product space.

In order to deal with different groups, free groups are presented. Moreover, we will introduce the notion of free product and show that any free product of free groups is a free group. These constructions allow us to introduce basic concepts as *set of generators* or *relations*. Following this route we show that any element of a free group can be written as a product of powers of the generators and we introduce the word problem. This brings us to define the *presentation of a group*, thanks to that any group can be seen as a free group over a certain set of generators with a family of relations. The presentation given for a group is not unique and although we know the operations that can be made with the relations to get different presentations, it is known that there is not an algorithm to go from one to another, so in practice is almost impossible to know if two different presentations correspond to the same group or not.

The end of the first chapter states a classical result in fundamental groups known as Seifert-Van Kampen theorem. It provides a method to obtain the fundamental group of a topological space that can be decomposed as $X = U \cup V$ with U and V arcwise-connected open subsets of X . This theorem is applied in two particular cases in order to obtain the fundamental group of several spaces.

The first application is valid when $U \cap V$ is simply connected and thanks to that we obtain the fundamental group of the lemniscate as a free group in two generators or the one of the disk with two punctures that results to have the same fundamental group as the lemniscate. This method can be generalized by induction to the n -punctured disk or the plane with n holes.

The second application requires V to be simply connected. Fundamental groups of the torus, the connected sum of n torus or the real projective plane can be computed through this result. In this section we will show the fundamental group of the torus has a presentation with two generators and one relation

and that the fundamental group of the projective plane is a cyclic group of order 2.

This first chapter sets the background and the fundamental concepts that are needed for the second one. The objective of this second chapter is to show the concept of braid monodromy and apply it to obtain the braid monodromy of an algebraic curve, a useful invariant in the study of the embedding of an algebraic curve $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ in \mathbb{C}^2 .

The *group of braids* over n strings can be seen as an extension of the n -symmetric group Σ_n , but is much more than a mere extension. The first notion of a braid comes from the real world. We can consider n points in a plane that move without touching each other at the same time as the plane goes up. These movements induce a collection of paths that can be seen as the strings of a braid. Usually, we will consider the same starting and ending n points in \mathbb{C} . If every string starts and ends in the same point we will call the braid a *pure braid*.

Another useful interpretation comes from the configuration space of n ordered points in \mathbb{C} , defined by $M_n = \{(z_1 \dots z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j, \forall i \neq j\}$. This space is the complement of a family of hyperplanes $H_{ij} = \{z_i = z_j\} \in \mathbb{C}^n$ with $1 \leq i < j \leq n$, then, calling $D = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} H_{ij}$, we can see the configuration space as $M_n = \mathbb{C}^n \setminus D$. Here, a path from $x = (x_1, \dots, x_n)$ to $y = (y_1, \dots, y_n)$ is a collection of paths γ_i , $i = 1, \dots, n$ that go from x_i to y_i such that $\gamma_i(\lambda) \neq \gamma_j(\lambda)$ if $i \neq j$, in other words, n paths that don't cross each other. Then we can see the pure braid group as the fundamental group of this configuration space $PB_n = \pi_1(M_n)$. Hence, here a braid is a closed path in M_n . Of course, they are equivalence classes so two homotopic loops give the same braid.

The generic braid group is obtained in a similar way, we only need to forget the order of the n points. To do so we take the quotient of M_n by the n -symmetric group, that is $N_n = M_n / \Sigma_n$, and consider its fundamental group. This will be the braid group, $B_n = \pi_1(N_n)$.

This introduction of the braid group ends with the definition of its standard generators and the presentation of the group, given by these standard generators and two relations.

The first application of this group shown in the chapter is the action of the braid group over the free group. This action combines all we have been seeing before, since the fundamental group of a disk with n punctures is the free group over n generators, F_n , and we can take paths that go around one of the punctures as generators. Then the braid can be seen as the movement of the punctures at the same time the disk goes up, almost the geometric interpretation of a braid. Then the action sends each closed path in the disk to another closed path deformed by the movement of the points in the disk, so the braid can be seen as an automorphism of the free group.

But we remark that the converse is not true, an automorphism in the free group can be seen as a braid if and only if the image of every generator is some generator conjugated and the ordered product of all generators is fixed.

Now we are quite close to braid monodromy but we still need to understand the concept of cover, the object over which we will define the monodromy action.

A cover is a topological space that in some sense recovers another space. More precisely, we call *cover* of a given topological space X to the pair (\tilde{X}, p) , where \tilde{X} is a topological space and $p : \tilde{X} \rightarrow X$ is a continuous mapping such that for any $x \in X$ there exists an arcwise-connected open neighbourhood U with $x \in U$ such that p maps topologically every arcwise-connected component of $p^{-1}(U)$ to U .

This object allows us to consider lifted paths from the base space to the cover and deal with the fundamental groups of both spaces. Several results are presented to show the relation between both fundamental groups, how two covers can be related or when we can say two covers are equal. We also define two particular types of covers, *universal covers*, where \tilde{X} is simply connected, and *regular covers*, where the image of the fundamental group of the cover by the homomorphism induced by the projection p is a normal subgroup of $\pi_1(X, x_0)$.

The final step in this work is present braid monodromy. In general, a monodromy is a mapping between a fundamental group and the symmetric group which comes from a cover (\tilde{X}, p) . It associates

to each class of closed paths in the base space X based in $x_0 \in X$ a permutation in the elements of the set $p^{-1}(x_0)$. The braid monodromy sends each $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ to a braid instead of a permutation. The precise definition may vary according to the context, in our case it comes from the study of algebraic curves in two variables.

Consider an algebraic curve in \mathbb{C}^2 given by the zeros of $f(x, y) \in \mathbb{C}^2[x, y]$. With the appropriate change of variables, this polynomial will be monic in y with degree d . Taking the discriminant in y , $\text{disc}_y f(x) \in \mathbb{C}[x]$, we can consider the space $W = \{t \in \mathbb{C} \mid \text{disc}_y f(t) \neq 0\}$, where all the points in the first variable x that make f have double roots in y are removed. Taking out these points from the domain of f , the curve itself becomes a cover for W and for each $x_0 \in X$, the polynomial $f(x_0, y)$ has exactly d different roots in y . These roots are the set $p^{-1}(x_0)$ for every point in W .

Now, let $\alpha \in \pi_1(W, x_0)$. The braid associated to this path class is the one generated by the d roots of $f(x_0, y)$ while x_0 moves around the loop. Therefore this define the *braid monodromy* $\nabla : \pi(W, x_0) \rightarrow B_d$.

With the notion of braid monodromy we state intuitively the notion of *braid monodromy of an algebraic curve* as an invariant for the curve created from the braids associated to a basis of the fundamental group of W . For that we set the *geometric basis*. This basis is made of meridians, which are the homotopy class of paths that go next to a removed point in W , circle around it counterclockwise, and returns following the same path to the base point. These meridians have to be ordered such that the product in the reverse order is homotopic to a path that circle all the punctures counterclockwise, in other words, if $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ is a geometric basis then $\gamma_r \cdots \gamma_1$ is homotopic to a circle that surrounds all the punctures.

But we can't consider this invariant as a tuple $(\nabla(\gamma_1), \dots, \nabla(\gamma_r)) \in (B_d)^r$, because the geometric basis is not unique and the braid induced by the roots admits also different expressions in its standard generators. Due to these facts, the monodromy of the curve is defined as the orbit of the tuple $(\nabla(\gamma_1), \dots, \nabla(\gamma_r)) \in (B_d)^r$ by the action of $B_r \times B_d$, where the elements of B_r act by Hurwitz moves and the ones of B_d by conjugation.

The final chapter is devoted to an algorithmic procedure to find a geometric basis for the fundamental group of a plane with punctures. We start from a Voronoi diagram over the punctures modified to get a finite diagram in which all the selected points belong to a closed region. Using the vectors of this diagram we create paths that go from a base point to a tessell, circle it counterclockwise and return to the base point following the same path. These loops are meridians so we find the order to get a geometric basis.

The algorithm is based on finding a path for every tessell to reach the base point of the fundamental group, create with them a tree graph and follow the branches counterclockwise to get the order of the tessells. Finally, the algorithm creates the meridians using the tree graph and gives an ordered list of meridians, the geometric basis we were looking for.

This algorithm has been implemented in a Sagemath package by Marco and Rodríguez [9]; in its current version it computes the fundamental group of the complement of the curve. The algorithm in this work will be included in order to compute its braid monodromy which is a stronger invariant.

Índice general

Prólogo	III
Summary	V
1. Grupo fundamental	1
1.1. Aplicación continua sobre el grupo fundamental	2
1.2. Homotopía	3
1.3. Grupo fundamental de la circunferencia	4
1.4. Grupo fundamental de un espacio producto	5
1.5. Grupos libres	5
1.6. Teorema de Seifert y Van Kampen	7
2. Monodromía de trenzas	13
2.1. Grupo de trenzas	13
2.2. Trenzas como automorfismos del grupo libre	15
2.3. Cubiertas	16
2.4. Monodromías	20
3. Determinación algorítmica del grupo fundamental de un plano con agujeros	23
3.1. Input	23
3.2. Output	23
3.3. Algoritmo	23
3.3.1. Funciones	24
Bibliografía	27
Índice alfabético	29
Anexo	31

Capítulo 1

Grupo fundamental

El concepto de grupo fundamental aparece por primera vez en la obra *Analysis Situs* [11] de Henri Poincaré, un artículo publicado en 1895. Los trabajos de este matemático francés darían un gran impulso a la rama de las matemáticas hoy conocida como geometría algebraica, en donde el grupo fundamental juega un papel clave.

Ya desde sus inicios la táctica fundamental de esta disciplina a la hora de abordar problemas consiste en traducir las nociones geométricas a cuestiones puramente algebraicas, obtener aquí resultados y reinterpretarlos en clave geométrica. En este sentido el grupo fundamental es de gran relevancia por su extrema utilidad en multitud de cuestiones.

De forma intuitiva puede decirse que el grupo fundamental de un espacio topológico es el grupo de clases de equivalencia de caminos cerrados con base en un mismo punto. Es decir, lo que nos interesa es saber cuántos caminos esencialmente distintos hay que empiecen y terminen en un mismo punto dado. Estos caminos esencialmente distintos, que llamaremos clases de equivalencia de caminos, junto con el producto de caminos definido como concatenación de dos caminos consecutivos tendrán estructura de grupo lo que permite trabajar con ellos de forma algebraica. El grupo así definido resulta ser un invariante topológico, ya que dos espacios homeomorfos tendrán el mismo grupo fundamental salvo isomorfismo. Esto nos permitirá probar que dos espacios no son homeomorfos viendo que sus grupos fundamentales no son isomorfos. Además el grupo fundamental posee también interés en el estudio de aplicaciones continuas entre espacios topológicos, ya que toda aplicación continua induce un homomorfismo entre los grupos fundamentales de los respectivos espacios. Así estudiando este homomorfismo podremos obtener información útil sobre la aplicación original.

Antes de definir el grupo fundamental de forma rigurosa es necesario precisar el concepto de camino.

Definición. Un *camino* en un espacio topológico X es una aplicación continua $f : [a, b] \rightarrow X$, con $a, b \in \mathbb{R}$

Con esta definición, inmediatamente vemos que muchos caminos distintos pueden llevar de un punto a otro. Es decir, existen caminos relacionados de alguna forma dentro del espacio topológico que estamos considerando. Esta noción puede definirse como una relación de equivalencia entre caminos:

Definición. Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow X$ dos caminos en X con mismo inicio y final, $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$, $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Diremos que estos dos caminos son *equivalentes*, y lo denotaremos por $\gamma_0 \sim \gamma_1$, si y solo si $\exists h : [a, b] \times I \rightarrow X$ continua, siendo $I = [0, 1]$, tal que

$$\begin{cases} h(t, 0) = \gamma_0(t), \forall t \in [a, b] \\ h(t, 1) = \gamma_1(t), \forall t \in [a, b] \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} h(a, s) = \gamma_0(a) = \gamma_1(a), \forall s \in I \\ h(b, s) = \gamma_0(b) = \gamma_1(b), \forall s \in I \end{cases}.$$

En otras palabras, dos caminos serán equivalentes si pueden deformarse el uno sobre el otro de forma continua. Esta relación de equivalencia permite definir clases de equivalencia de caminos. Pero no todos los caminos estarán parametrizados en el mismo intervalo $[a, b]$, de forma que lo primero de

lo que tenemos que asegurarnos es de que podemos reparametrizar aplicaciones que originan el mismo camino.

Así $f : [a, b] \rightarrow X$ y $g : [c, d] \rightarrow X$ dos caminos en X con mismo origen y final e idéntica imagen, $f([a, b]) = g([c, d])$, pertenecerán a la misma clase de equivalencia si existe $h : [c, d] \rightarrow [a, b]$ homeomorfismo lineal que conserva la orientación tal que $g = f \circ h$.

De esta manera podremos considerar todos los caminos de una misma clase de equivalencia definidos en un mismo intervalo, el intervalo $I = [0, 1]$. Así las clases de equivalencia de caminos responderán únicamente a propiedades geométricas del camino con respecto al espacio topológico que lo contiene.

Con estas consideraciones previas podemos identificar un producto de caminos consistente en concatenar dos caminos consecutivos. Esto exige que el primero acabe donde comienza el segundo por lo que el producto de dos caminos cualesquiera en general no está definido. Formalmente:

Definición. Si $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ son dos caminos tales que $f(1) = g(0)$, entonces

$$(fg)(t) := \begin{cases} f(2t), t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t - 1), t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad \text{con } f \circ g : [0, 1] \rightarrow X$$

Considerando las clases de equivalencia de caminos parametrizadas en $[0, 1]$ y este producto, basta con exigir $f(1) = g(0)$ y reparametrizar el camino resultante para tener de nuevo una clase de equivalencia de caminos. Entonces podemos considerar estas clases de equivalencia y su producto asociado como un grupo, puesto que la operación es asociativa y existe elemento neutro, el camino trivial $\varepsilon_x(t) = \varepsilon_x(0) = x$, con $x \in X$, $\forall t \in I$, e inversos $f^{-1}(t) = f(1 - t)$. La única consideración que hay que resaltar es que el producto de dos clases de caminos cualesquiera no siempre está definido, la segunda clase ha de comenzar donde acaba la primera.

Llegados a este punto estamos en disposición de definir rigurosamente el grupo fundamental.

Definición. El *grupo fundamental*, denotado $\pi_1(X, x_0)$, es el grupo de todas las clases de caminos cerrados en X con principio y final en el punto $x_0 \in X$. Al haber sido empleado por primera vez por el matemático francés Henri Poincaré, en ocasiones se le denomina grupo de Poincaré.

De esta definición se deduce de inmediato que en caso de ser X arcoconexo, es decir, un espacio en el que dos puntos cualesquiera siempre pueden ser unidos por un camino, el punto base del grupo fundamental no tiene importancia a la hora de estudiar el espacio puesto que todos los grupos fundamentales tendrán la misma estructura con independencia del origen de sus lazos, serán todos ellos isomorfos. En estos casos el grupo fundamental se suele denotar simplemente como $\pi_1(X)$.

La mejor manera de ilustrar estos conceptos es ver su aplicación en algún ejemplo.

Imaginemos un plano y consideremos un punto en ella. Dibujemos ahora un camino cerrado en el plano que parta y acabe en ese punto. No importa lo complicado que sea ese camino o las veces que se corte a sí mismo, éste siempre podrá ser deformado de forma continua, es decir, sin cortarlo en ningún momento ni sacarlo del plano, hasta ser contraído sobre el punto base. En otras palabras, todos los lazos del plano basados en ese punto pertenecen a la misma clase de equivalencia, la del camino trivial. Por tanto el grupo fundamental de un plano consta únicamente de un elemento, el elemento neutro.

Al ser el plano un espacio arcoconexo el punto elegido para basar los caminos cerrados no tiene importancia, sea cual sea nuestra elección el grupo fundamental seguirá siendo el formado por la clase de equivalencia del camino trivial.

1.1. Aplicación continua sobre el grupo fundamental

Vamos ahora a dar un pequeño paso conceptual. Consideremos dos espacios topológicos X e Y y una aplicación continua entre ellos $\varphi : X \rightarrow Y$. El grupo fundamental va a sernos de utilidad en el estudio

de esta aplicación ya que dados dos caminos equivalentes en X , f_0, f_1 , sus imágenes en Y $\varphi \circ f_0$ y $\varphi \circ f_1$ serán también caminos equivalentes en el espacio de llegada. Luego φ induce un homomorfismo entre los grupos fundamentales de los dos espacios, denotado por φ_* , puesto que preserva las clases de equivalencia de caminos. Esto queda recogido formalmente en las siguientes propiedades del homomorfismo inducido por φ .

1. Sean α, β clases de equivalencia de caminos en X , tales que $\alpha\beta$ está definido. Entonces $\varphi_*(\alpha\beta) = (\varphi_*(\alpha))(\varphi_*(\beta))$.
2. $\forall x \in X, \varphi_*(\varepsilon_x) = \varepsilon_{\varphi(x)}$
3. $\varphi_*(\alpha^{-1}) = (\varphi_*(\alpha))^{-1}$, para toda clase de caminos α en X .
4. $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$, siendo $\psi : Y \rightarrow Z$ continua.
5. Si $\varphi : X \rightarrow X$ es la identidad, entonces $\varphi_*(\alpha) = \alpha$ para toda clase de caminos en X , es decir, φ_* es el homomorfismo identidad.

De esta forma, vemos que $\varphi : X \rightarrow Y$ continua induce efectivamente un homomorfismo $\varphi_* : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$. Si φ es además de continua un homeomorfismo, entonces φ_* será un isomorfismo. Sin embargo, que φ sea inyectiva o suprayectiva no implica que φ_* lo sea.

1.2. Homotopía

Al igual que hicimos con las clases de equivalencia de caminos en un espacio, podemos encontrar relaciones entre las aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos. Y es que si antes decíamos que podíamos deformar de forma continua un camino sobre otro, ahora en el caso de aplicaciones continuas el concepto será idéntico, dos aplicaciones $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$ continuas serán equivalentes si podemos deformar de forma continua una sobre la otra. Esta relación entre aplicaciones es lo que denominamos homotopía.

Definición. Dos aplicaciones continuas $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$ son *homotópicas* (u homótopas) si y solo si $\exists \varphi : X \times I \rightarrow Y$ continua tal que $\forall x \in X$ se tiene $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$ y $\varphi(x, 1) = \varphi_1(x)$, que llamaremos *homotopía*. En ese caso escribiremos $\varphi_0 \simeq \varphi_1$. Esta relación genera clases de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas entre X e Y , que denominaremos *clases de homotopía*.

Un caso singular de homotopía es la homotopía relativa a un subconjunto, en el que además de ser homotópicas se exige a la deformación que fije los elementos de un subconjunto. Formalmente esto se define como sigue:

Definición. Dos aplicaciones $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$ se dicen *homotópicas relativas a subconjunto A de X* si y

solo si existe $\varphi : X \times I \rightarrow Y$ continua tal que
$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \forall x \in X \\ \varphi(x, 1) = \varphi_1(x), \forall x \in X \\ \varphi(a, t) = \varphi_0(a) = \varphi_1(a), \forall a \in A, \forall t \in I \end{cases}$$

Esta definición implica inmediatamente que $\varphi_0|_A = \varphi_1|_A$.

Ahora podemos preguntarnos por la relación que guardan los homomorfismos inducidos por aplicaciones homotópicas, y en particular si son homotópicas respecto a un subconjunto.

Teorema 1.1. Sean $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow Y$ aplicaciones homotópicas relativamente al conjunto $\{x\}$. Entonces $\varphi_{0*} = \varphi_{1*} : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi_0(x))$, es decir, los homomorfismos inducidos son el mismo.

Algo similar se puede obtener con los conceptos de retracción y retracto por deformación, que serán, especialmente el último, dos conceptos muy útiles para obtener los grupos fundamentales de ciertos espacios.

Definición. Un subconjunto A de un espacio topológico X es un *retracto* de X si existe una aplicación continua $r : X \rightarrow A$, llamada *retracción*, tal que $r(a) = a, \forall a \in A$.

Es decir, un retracto de X es un espacio sobre el que se puede contraer el espacio topológico de forma continua.

Observemos que si $r : X \rightarrow A$ es una retracción y $i : A \rightarrow X$ la inclusión, $r \circ i$ es la identidad en A . Entonces, considerando los homomorfismos inducidos $r_* : \pi(X, a) \rightarrow \pi(A, a)$ y $i_* : \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$ para todo elemento $a \in A$, la composición $r_* \circ i_*$ es el homomorfismo identidad del grupo $\pi_1(A, a)$. Esto nos dice que i_* es también inyectiva y r_* es suprayectiva.

En el caso del retracto por deformación la definición es algo más exigente:

Definición. Un subconjunto A de X es un *retracto por deformación* de X si existe una retracción $r : X \rightarrow A$ y una homotopía $f : X \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{cases} f(x, 0) = x, \forall x \in X \\ f(x, 1) = r(x), \forall x \in X \\ f(a, t) = a, \forall a \in A, \forall t \in I \end{cases} \quad \text{Es decir, si existe una}$$

retracción de X homotópica a la identidad relativa al subconjunto A .

Y estos retracts por deformación poseen una cualidad muy útil para nosotros:

Teorema 1.2. Si A es un retracto por deformación de X , entonces la inclusión $i : A \rightarrow X$ induce un isomorfismo de $\pi_1(A, a)$ sobre $\pi_1(X, a)$, $\forall a \in A$.

Este teorema nos asegura que el grupo fundamental de un espacio topológico es isomorfo al de cualquiera de sus retracts por deformación, siempre que el punto base esté en la imagen de la retracción. Esto nos permitirá obtener algunos grupos fundamentales de forma más sencilla a partir de los de sus retracts por deformación.

¿Pero qué estructura tiene el grupo fundamental? ¿Cómo puede ser calculado? La respuesta a estas preguntas depende en gran medida del espacio topológico considerado. Por el momento nos centraremos en dos ejemplos sencillos, la circunferencia y el espacio producto.

1.3. Grupo fundamental de la circunferencia

Teorema 1.3. El grupo fundamental de la circunferencia, $\pi_1(S^1, (1, 0))$, es un grupo cíclico infinito.

Demostración. Consideremos la circunferencia centrada en el origen, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, y sea $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ una aplicación dada por $\pi(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Entonces si $f : [a, b] \rightarrow S^1$ es un camino en la circunferencia podemos tomar un cierto $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = (\cos(2\pi t_0), \sin(2\pi t_0))$. En esta situación siempre podremos encontrar una única función $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\pi \circ \tilde{f} = f$ y $\tilde{f}(a) = t_0$. Si dos aplicaciones equivalentes se levantan con el mismo origen tendrán el mismo final.

Esto hace que si f es un camino cerrado, su grado, definido como $\deg(f) = \tilde{f}(b) - \tilde{f}(a)$, sea siempre un número entero. De modo que podemos considerar la aplicación $\pi_1(S^1, (1, 0)) \rightarrow \mathbb{Z}$ que envía $[f] \mapsto \deg(f)$. Esta aplicación es inyectiva ya que dos caminos cerrados con el mismo grado pertenecerán a la misma clase de equivalencia, y también es suprayectiva dado que para todo $n \in \mathbb{Z}$ podremos encontrar una curva de ese grado. Por ejemplo, $f(t) = (\cos(2n\pi t), \sin(2n\pi t))$ definida en $[0, 1]$ es una curva sobre la circunferencia de grado n . De modo que la aplicación así definida es una biyección, lo que nos dice que $\pi_1(S^1, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$ y es por tanto un grupo cíclico infinito. □

1.4. Grupo fundamental de un espacio producto

Teorema 1.4. *El grupo fundamental de un espacio producto, $\pi_1(X \times Y, (x, y))$ es isomorfo al producto directo de grupos fundamentales, $\pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$. Este isomorfismo se define como la aplicación que a cada $\alpha \in \pi_1(X \times Y, (x, y))$ le asigna el par ordenado $(p_*(\alpha), q_*(\alpha))$, siendo $p : X \times Y \rightarrow X$ y $q : X \times Y \rightarrow Y$ las proyecciones del espacio producto en sus factores.*

Demostración. Si X, Y y A son espacios topológicos y $f : A \rightarrow X \times Y$ es una aplicación cualquiera, denotamos las coordenadas de $f(a)$ como $(f_1(a), f_2(a))$ para todo $a \in A$. Entonces f_1 es una aplicación de $A \rightarrow X$ y f_2 de $A \rightarrow Y$. Además sabemos que f será continua si y solo si f_1 y f_2 lo son. Esto nos da una relación inyectiva entre las aplicaciones $f : A \rightarrow X \times Y$ y los pares $f_1 : A \rightarrow X, f_2 : A \rightarrow Y$. Denotando como p y q las proyecciones en X y Y respectivamente podemos escribir $f_1 = pf$ y $f_2 = qf$. Entonces, tomando como A el intervalo unidad $I = [0, 1]$ tenemos las siguientes propiedades:

1. Si $f, g : I \rightarrow X \times Y$ son caminos con el mismo principio y final, entonces $f \sim g$ si y solo si $f_1 \sim g_1$ y $f_2 \sim g_2$.
2. Sean $f, g : I \rightarrow X \times Y$ caminos tales que f acaba donde empieza g y sea $h = f \cdot g$. Entonces $h_1 = f_1 \cdot g_1$ y $h_2 = f_2 \cdot g_2$.

Este comportamiento implica que la relación existente entre f y (f_1, f_2) preserva la relación de equivalencia entre caminos y su producto. Ahora podemos aplicar todo esto al grupo fundamental del espacio producto, $\pi_1(X \times Y, (x, y))$. Sean $p_* : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(X, x)$ y $q_* : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ los homomorfismos inducidos por las proyecciones p y q . Entonces por la primera propiedad vemos que la aplicación que asocia cada elemento $\alpha \in \pi_1(X \times Y, (x, y))$ a $(p_*(\alpha), q_*(\alpha))$ es inyectiva y obviamente es supreyectiva, así que es biyectiva. Además la segunda propiedad nos garantiza que se conserva el producto de clases de caminos así que esta aplicación es un isomorfismo. \square

Observemos en particular que los elementos del primer factor conmutan con los elementos del segundo factor.

1.5. Grupos libres

Los grupos libres son un tipo de grupo muy interesante que nos aparecerá a lo largo de este estudio. La particularidad de estos grupos es que tienen la menor cantidad de restricciones posible cumpliendo siempre los axiomas de grupo. En general, estos grupos suelen expresarse mediante una familia de elementos generadores a partir de los cuales se obtiene el resto multiplicándolos entre sí, junto con sus inversos. Estos grupos son por tanto siempre infinitos, al igual que el orden de todos sus elementos.

Pero antes de definir el grupo libre tenemos que conocer el producto libre:

Definición. Sea $\{G_i \mid i \in I\}$ una colección de grupos, pudiendo ser I finito o infinito, contable o incontable. Y sea también φ_i un homomorfismo de G_i a un grupo G , para todo índice $i \in I$. Diremos que el grupo G es el *producto libre* de los grupos G_i con respecto a los homomorfismos φ_i si y solo si se cumple la siguiente condición:

Para cualquier grupo H y cualquier familia de homomorfismos $\psi_i : G_i \rightarrow H$, con $i \in I$, existe un único homomorfismo $f : G \rightarrow H$ tal que para todo $i \in I$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\varphi_i} & G \\ & \searrow \psi_i & \downarrow f \\ & & H \end{array}$$

Para diferenciarlo del producto directo, denotaremos el producto libre como $G_1 * G_2 * \dots * G_n$ en el caso finito, $\prod_{i \in I}^* G_i$ en general.

El producto libre de cualquier colección de grupos siempre existirá y será único salvo isomorfismo. La noción de grupo libre se define de una forma muy similar:

Definición. Sea S un conjunto arbitrario. Diremos que un *grupo libre* sobre S o generado por S es un grupo F junto con una función $\varphi : S \rightarrow F$ tal que se cumple la siguiente condición:

Dado un grupo H y una función $\psi : S \rightarrow H$, existe un único homomorfismo $f : F \rightarrow H$ que hace este diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\varphi} & F \\ & \searrow \psi & \downarrow f \\ & & H \end{array}$$

Esta forma de definir conceptos, conocida como propiedad universal, en la que se exige la existencia de una aplicación única que haga conmutativo el diagrama es muy precisa pero nada intuitiva. A continuación veremos la relación existente entre productos y grupos libres y también cómo describir los elementos de uno de estos grupos, lo que nos permitirá entender mejor su comportamiento.

Proposición 1.5. Sea $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ con los subconjuntos S_i disjuntos y no vacíos. Para todo índice $i \in I$, sea F_i el grupo libre sobre S_i con respecto a la función $\varphi_i : S_i \rightarrow F_i$ y consideremos F el producto libre de estos grupos F_i con respecto a los homomorfismos $\eta_i : F_i \rightarrow F$. Entonces F es el grupo libre sobre S con respecto a la función $\varphi : S \rightarrow F$ definida por $\varphi|_{S_i} = \eta_i \varphi_i$, ya que los conjuntos S_i son disjuntos. Es decir, el producto libre de grupos libres es a su vez un grupo libre.

Esta relación entre producto libre y grupo libre tiene una importancia capital para la teoría de grupos libres. De aquí deducimos que todo grupo libre puede verse como producto libre de grupos cíclicos infinitos, ya que dado $S = \{x_i | i \in I\}$ y F grupo libre sobre S , podemos tomar $S_i = \{x_i\}$ de modo que su grupo libre asociado $F_i = \{x_i^n | n \in \mathbb{Z}\}$ será un grupo cíclico infinito, siendo $\varphi_i : S_i \rightarrow F_i$ la inclusión. Así el grupo libre F estará generado por $\varphi(S)$, siendo $\varphi : S \rightarrow F$ la función dada por $\varphi|_{S_i} = \eta_i \varphi_i$.

Esto además nos garantiza la existencia del grupo libre sobre S ya que nos da una forma constructiva de obtenerlo. Pero ¿cómo son los elementos del grupo libre? ¿Qué relación tienen con los del conjunto S si es que existe? Estas preguntas tienen respuesta en lo que se conoce como "palabra reducida" en los elementos de S . Y es que todo elemento $g \in F$ distinto de la unidad puede escribirse de forma única como $g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ en donde $x_1^{n_1}, x_2^{n_2}, \dots, x_k^{n_k}$ son elementos de S tales que dos consecutivos son distintos y n_1, n_2, \dots, n_k son enteros distintos de cero. El elemento neutro en F se representa por la palabra vacía.

Con todo esto vemos que los elementos de F pueden expresarse en función de los de S , o al menos, siendo rigurosos en los de $\varphi(S)$, pero ya que φ es inyectiva se suele asociar los elementos de S con los de su imagen. De ahí que escribamos $g = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_k^{n_k}$ en lugar de $g = \varphi(x_1)^{n_1} \varphi(x_2)^{n_2} \cdots \varphi(x_k)^{n_k}$.

Escribir de esta forma los elementos de F hace que se vea con facilidad la estructura mínima que poseen los grupos libres ya que todo producto de los generadores representará un elemento diferente de F . Esto hace que dados dos grupos libres F y F' sobre S y S' , éstos serán isomorfos si y solo si S y S' tienen el mismo cardinal. Lo que nos lleva a definir el rango de un grupo libre como el cardinal del conjunto S que lo genera. También definimos base de un grupo libre como cualquier subconjunto S de F tal que F es un grupo libre sobre S con respecto a la aplicación inclusión. Como es evidente, un grupo libre podrá tener muchas bases distintas.

Los grupos libres desempeñan un papel muy especial dentro de la teoría de representación de grupos, tal y como se muestra a continuación.

Proposición 1.6. Cualquier grupo es la imagen homomorfa de un grupo libre. Es decir, si S es un conjunto de generadores del grupo G y F es el grupo libre sobre S , entonces la aplicación inclusión $S \rightarrow G$ determina de forma única un homomorfismo suprayectivo de F en G .

Esta proposición nos da una forma de caracterizar lo que llamamos “relación entre los elementos de S ”, que será un producto de potencias de elementos de S que es igual al elemento neutro del grupo. De forma más precisa, sea G un grupo y S su conjunto de generadores y sea F el grupo libre sobre S con respecto a $\varphi : S \rightarrow F$. Sea $\psi : S \rightarrow G$ la inclusión y $f : F \rightarrow G$ el único homomorfismo tal que $f \circ \varphi = \psi$, tal y como dice la proposición. Entonces una *relación* entre los generadores del grupo es cualquier elemento $r \in \ker f$ distinto de la unidad, $r \neq 1$. Siendo puristas podríamos considerar $r = 1$ como una relación, puesto que $1 \in \ker f$, pero dado que no aporta absolutamente nada siempre que hablemos de una relación asumiremos que $r \neq 1$.

Estos elementos pertenecientes al núcleo, $r \in \ker f$, pueden escribirse como palabras reducidas en los elementos de S , ya que pertenecen al grupo libre F . Pero además todo elemento en S es también un elemento en G , de modo que la palabra reducida puede ser considerada como un producto en este grupo. Sin embargo, este producto será la identidad en G ya que $r \in \ker f \subseteq F$.

Dada una colección de relaciones $\{r_j\}$, se dice de cualquier otra relación r que es consecuencia de las relaciones r_j si y solo si r está contenida en el menor subgrupo normal de F que contiene la colección de relaciones $\{r_j\}$. En el caso de que toda relación sea consecuencia de un conjunto de relaciones $\{r_j\}$, el núcleo de f queda completamente determinado por este conjunto de relaciones, ya que será la intersección de todos los subgrupos normales de F que contienen a $\{r_j\}$.

De este modo, el grupo G también queda caracterizado unívocamente salvo isomorfismo por el conjunto de generadores S y el conjunto de relaciones $\{r_j\}$, puesto que es isomorfo al grupo cociente de F módulo el menor subgrupo normal de F que contiene al conjunto $\{r_j\}$. Un conjunto de relaciones tal, en el que toda relación es consecuencia de este conjunto de relaciones $\{r_j\}$, se denomina *conjunto completo de relaciones*.

Por tanto, dado que S y $\{r_j\}$ determina por completo la estructura del grupo G , es muy común que los grupos vengan dados por este par que además facilita el manejo del grupo a la hora de trabajar con él. Esto es lo que se conoce como *presentación de un grupo*, formalmente un par $(S, \{r_j\})$ consistente en un conjunto de generadores de G y un conjunto completo de relaciones entre esos generadores. La presentación se dirá finita si S y $\{r_j\}$ son conjuntos finitos y por tanto el grupo G se dirá finitamente presentado si tiene al menos una presentación finita.

Esta forma de caracterizar un grupo posee gran utilidad ya que relaciona el grupo G de nuestro interés con el correspondiente grupo libre por medio de las relaciones. Aun así podemos encontrar ciertos obstáculos en el manejo de grupos dados por presentaciones. Y es que un grupo puede tener muchas y muy diferentes presentaciones y en la mayoría de ocasiones, dadas dos presentaciones, es casi imposible determinar si los grupos que definen son isomorfos o no.

Existen una serie de operaciones que permiten generar nuevas presentaciones de un grupo a partir de una dada, conocidas como transformaciones de Tietze. Pero el problema fundamental está en el llamado problema de las palabras. Y es que se ha demostrado que dadas dos palabras en una presentación que representen el mismo elemento del grupo no existe un algoritmo que nos diga como pasar de una a otra. Esto hace que dadas dos presentaciones sea muy difícil comparar sus generadores y relaciones.

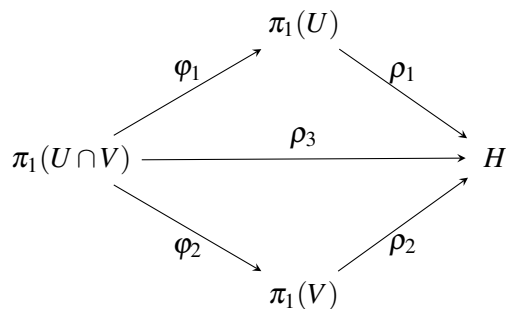
1.6. Teorema de Seifert y Van Kampen

A continuación se tratará una de las herramientas más útiles de que se dispone para calcular grupos fundamentales, el teorema de Seifert y Van Kampen. El texto original de Van Kampen donde se plantea el problema es [7] y se resuelve en [8], y el texto de Seifert, por puro completismo, en [12], aunque quizá pueda ser de más utilidad una aproximación moderna como la de [10, capítulo 4]. Este teorema permite descomponer el espacio de nuestro interés en subespacios menores y obtener el grupo fundamental del total a partir de los grupos fundamentales de sus partes.

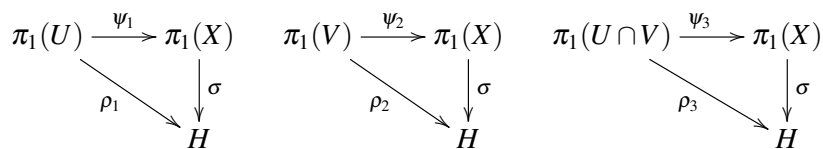
Aquí mostramos una versión simplificada en la que el espacio topológico X se divide en dos componentes. La versión más general contempla en lugar de dos abiertos, todo un recubrimiento abierto de

X . En cualquier caso el resultado aquí presentado sigue siendo de gran utilidad tal y como se verá más adelante.

Teorema 1.7. *Supongamos que U y V son dos abiertos arcoconexos tales que $X = U \cup V$ y que su intersección $U \cap V$ es también arcoconexa y no vacía. Elegiremos como punto base $x_0 \in U \cap V$ para todos los grupos fundamentales a considerar. Y consideremos también H un grupo y ρ_1, ρ_2, ρ_3 tres homomorfismos tales que este diagrama es conmutativo:*



Entonces existe un único homomorfismo $\sigma : \pi_1(X) \rightarrow H$ que hace conmutativos estos tres diagramas:



Siendo φ_i y ψ_i los homomorfismos inducidos por las correspondientes inclusiones.

La existencia de este homomorfismo único σ caracteriza $\pi_1(X)$, que estará generado por la unión de $\psi_1(\pi_1(U))$ y $\psi_2(\pi_1(V))$. De manera más concreta podemos expresar el resultado del Teorema como sigue;

$$\pi_1(X) = \frac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{\langle \varphi_{1*}(g)\varphi_{2*}(g)^{-1} \mid g \in \pi_1(U \cap V) \rangle}$$

Si los dos abiertos del recubrimiento cumplen alguna propiedad adicional podemos encontrar situaciones en las que la aplicación de este teorema sea todavía más inmediata. Veamos algunos casos.

Teorema 1.8. *Sea $\{U, V\}$ el recubrimiento de X exigido en el teorema de Seifert-Van Kampen. Si $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1(X)$ es el producto libre de los grupos $\pi_1(U)$ y $\pi_1(V)$ con respecto a los homomorfismos $\psi_1 : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ y $\psi_2 : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X)$.*

Y ahora se mostrarán algunas situaciones donde esta aplicación del teorema de Seifert y Van Kampen resulta de utilidad.

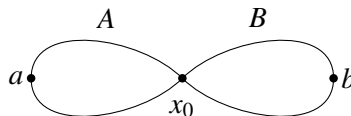


Figura 1.1: Lemniscata

Consideremos para empezar una lemniscata. Nuestro espacio topológico X será esta construcción geométrica y llamaremos A y B a cada uno de sus lóbulos. Estos dos subespacios serán homeomorfos a la circunferencia y $A \cap B = \{x_0\}$ siendo ese punto el de unión entre los dos lóbulos de la lemniscata. Como

es obvio $X = A \cup B$ pero estos dos subespacios no son abiertos así que no estamos ante un recubrimiento abierto, lo que impide aplicar el teorema que acabamos de ver. Para solucionar esto seleccionamos dos puntos, uno en A y otro en B tales que $a \in A$, $b \in B$ pero $a, b \neq x_0$. Así podemos considerar los subespacios abiertos $U = X \setminus \{b\}$ y $V = X \setminus \{a\}$.

Es fácil ver que A y B son retratos por deformación de U y V respectivamente y que $U \cap V = X \setminus \{a, b\}$ es simplemente conexo, ya que es contractible a un punto. Entonces estamos en condiciones de aplicar el teorema y por lo tanto el grupo fundamental de X , $\pi_1(X)$, será el producto libre de $\pi_1(U)$ y $\pi_1(V)$. Pero A y B son retratos por deformación de U y V así que $\pi_1(U) \cong \pi_1(A)$ y $\pi_1(V) \cong \pi_1(B)$. Como A y B son homeomorfos a la circunferencia comparten su grupo fundamental que sabemos que es un grupo cíclico infinito, por lo que $\pi_1(X)$ es el producto libre de dos grupos cíclicos infinitos, es decir un grupo libre sobre dos generadores. Una posible elección para estos dos elementos sería tomar las clases de equivalencia de caminos α y β , los caminos con punto base en x_0 que rodean una sola vez A y B respectivamente.

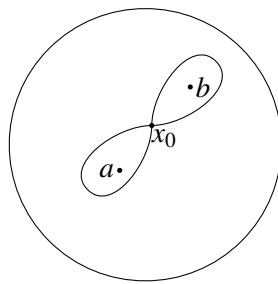


Figura 1.2: Disco menos dos puntos, $E^2 \setminus \{a, b\}$

Una vez que sabemos cómo obtener el grupo fundamental de la lemniscata podemos extender este razonamiento a muchos otros espacios. Por ejemplo, consideremos un disco menos dos puntos. Sea E^2 el disco unitario en el plano y $a, b \in \text{int}(E^2)$ tales que $a \neq b$. Entonces el grupo fundamental de $Y = E^2 \setminus \{a, b\}$ será idéntico al de la lemniscata, es decir un grupo libre sobre dos generadores, ya que podemos encontrar una lemniscata X contenida en Y de manera que los dos puntos que le faltan al disco queden en el interior de sus lóbulos. Así X es retracto por deformación de Y por lo que comparten el mismo grupo fundamental, $\pi_1(Y) \cong \pi_1(X)$.

Como generadores podemos tomar las clases de equivalencia de caminos α y β que partiendo de un punto $x_0 \in Y$ rodean una vez los puntos a y b respectivamente.

Este argumento puede aplicarse en muchos otros espacios, como el plano menos dos puntos, la esfera menos tres puntos, eliminar en lugar de puntos aislados pequeños discos abiertos o cerrados, etc. Además, por inducción se puede probar que si en lugar de eliminar dos puntos se eliminan $n \in \mathbb{N}$ el grupo fundamental del espacio resultante será un grupo libre en n generadores, cada uno de ellos lazos que rodean una sola vez los agujeros o puntos eliminados.

Como segunda aplicación del teorema original de Seifert y Van Kampen veamos el siguiente resultado:

Teorema 1.9. *Sea de nuevo $\{U, V\}$ el recubrimiento de X exigido en el teorema de Seifert-Van Kampen. Si V es simplemente conexo, entonces el homomorfismo $\psi_1 : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ es suprayectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal de $\pi_1(U)$ que contiene a $\phi_1[\pi_1(U \cap V)]$. $\pi_1(X)$ será entonces isomorfo al grupo cociente $\pi_1(U)$ módulo el citado subgrupo normal.*

Una aplicación inmediata de este resultado puede verse en la esfera. Tomemos un punto $x \in S^2$ y llamemos $U = S^2 \setminus \{x\}$. Consideremos también otro punto $y \neq x$, por ejemplo su antípoda, y llamemos

$V = S^2 \setminus \{y\}$. Estos dos espacios U y V pueden identificarse con sendos planos a través de la aplicación antipodal y por tanto son ambos simplemente conexos. Esto nos permite aplicar el teorema que acabamos de ver, que nos dice que el homomorfismo de grupos $\psi_1 : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(S^2)$ es suprayectivo. Pero como U es simplemente conexo su grupo fundamental es el grupo trivial, $\pi_1(U) = \{1\}$, y al ser la aplicación ψ_1 suprayectiva, el grupo fundamental de la esfera tiene un único elemento y es por tanto el grupo trivial, $\pi_1(S^2) = \{1\}$. Esto nos dice que la esfera es simplemente conexa.

Además esta segunda aplicación del teorema de Seifert y Van Kampen es de utilidad para obtener los grupos fundamentales de dos espacios muy interesantes, como son el toro y el plano proyectivo.

Sabemos que el toro puede escribirse como $T = S^1 \times S^1$, y con lo que ya sabemos de grupos fundamentales, $\pi_1(T) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1)$ por lo que su grupo fundamental será un grupo libre sobre dos generadores. Pero también podemos obtener este grupo fundamental a partir de la segunda aplicación del teorema de Seifert y Van Kampen.

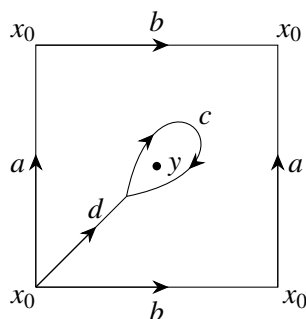


Figura 1.3: Toro

Consideremos la representación del toro como el espacio obtenido por la identificación de lados opuestos de un cuadrado. Sea $U = T \setminus \{y\}$, con y el punto central del cuadrado, y V la imagen del interior del cuadrado tras la identificación. Entonces U y V son subconjuntos abiertos, U , V y $U \cap V$ son arcoconexos y V es simplemente conexo (ya que es homeomorfo a un disco abierto).

Entonces usando la segunda aplicación del teorema de Seifert y Van Kampen tenemos que $\psi_1 : \pi_1(U, x_1) \rightarrow \pi_1(T, x_1)$ es un homomorfismo suprayectivo y su núcleo es el menor subgrupo normal que contiene la imagen del homomorfismo $\phi_1 : \pi_1(U \cap V, x_1) \rightarrow \pi_1(U, x_1)$.

Dado que la frontera del cuadrado es un retracto por deformación de todo el cuadrado menos un punto, la unión de los caminos cerrados a y b será un retracto por deformación de U . Entonces, $\pi_1(U, x_1)$ es un grupo libre sobre dos generadores. Por lo tanto, $\pi_1(U, x_0)$ es también un grupo libre sobre dos generadores α y β , siendo estas las clases de equivalencia de los caminos a y b respectivamente, de forma que los generadores de $\pi_1(U, x_1)$ pueden escribirse como $\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$ y $\beta' = \delta^{-1}\beta\delta$. También sabemos que $U \cap V$ tiene el tipo de homotopía de una circunferencia, por lo tanto $\pi_1(U \cap V, x_1)$ es un grupo cíclico infinito generado por γ , la clase de equivalencia del camino c que rodea el punto y una vez.

Y como $\phi_1(\gamma) = \alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}$, $\pi(T, x_1)$ será isomorfo al grupo libre sobre los generadores α' y β' módulo el subgrupo normal generado por el elemento $\alpha'\beta'\alpha'^{-1}\beta'^{-1}$. Cambiando el punto base a x_0 vemos que $\pi_1(T, x_0)$ es isomorfo al grupo libre sobre los generadores α y β módulo el subgrupo normal generado por $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

De modo que una presentación del grupo $\pi_1(T)$ puede darse con los generadores α y β y la relación $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$. Pero resulta que los generadores α y β conmutan, por lo que $\pi_1(T)$ será un grupo conmutativo, lo que implica que el menor subgrupo normal conteniendo al elemento $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ del grupo libre sobre α y β contiene a su vez al subgrupo conmutador. Pero este subgrupo normal está a

su vez contenido en el subgrupo conmutador puesto que $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ es un elemento de $[\pi_1(T), \pi_1(T)]$ que es un grupo normal. Todo esto nos lleva a deducir que el menor subgrupo normal que contiene al elemento $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ es el subgrupo conmutador. Por lo tanto el grupo fundamental del toro es un grupo libre sobre dos generadores módulo su subgrupo conmutador, lo que quiere decir que es un grupo libre abeliano sobre dos generadores.

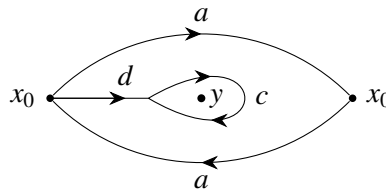


Figura 1.4: Plano proyectivo real

Estudiemos ahora el grupo fundamental del plano proyectivo real. Consideremos el plano proyectivo, P_2 , como el espacio obtenido identificando los lados opuestos de un polígono de dos lados. Bajo esta identificación el lado a se convierte en una circunferencia.

Sean $U = P_2 \setminus \{y\}$, con y el punto central del polígono, y V la imagen del interior del polígono tras la identificación. Estos dos subconjuntos son abiertos, y de nuevo U , V y $U \cap V$ son arcoconexos y V es además simplemente conexo por ser homeomorfo al disco abierto.

Haciendo uso de la segunda aplicación del teorema de Seifert y Van Kampen obtenemos varios resultados. Primero, al ser a un retracto por deformación de U , $\pi(U, x_0)$ es un grupo cíclico infinito generado por el elemento α , la clase de equivalencia del camino a . Segundo, $\pi_1(U, x_1)$ será un grupo cíclico infinito generado por $\alpha' = \delta^{-1}\alpha\delta$. Y por último, $\pi_1(U \cap V, x_1)$ es también grupo cíclico infinito generado por γ la clase de equivalencia del camino que rodea el punto y una sola vez.

Entonces, sabiendo que $\phi_1 = U \rightarrow U \cap V$ y $\alpha'^2 = \delta^{-1}\alpha\alpha\delta$, se tiene que $\phi_1(\gamma) = \alpha'^2$. Por lo tanto, $\pi_1(P_2, x_1)$ es el cociente de un grupo cíclico infinito generado por α' módulo el subgrupo generado por α'^2 . Equivalentemente, $\pi_1(P_2, x_0)$ será el cociente de un grupo cíclico infinito generado por α módulo el subgrupo generado por α^2 .

De este modo, $\pi_1(P_2)$ es un grupo cíclico de orden 2.

Este método puede ser aplicado a otras superficies como por ejemplo la botella de Klein. Tomando la identificación correspondiente con un cuadrado podemos aplicar un razonamiento análogo al aplicado en el toro para ver que su grupo fundamental admite una presentación dada por dos generadores α, β y una relación $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta$.

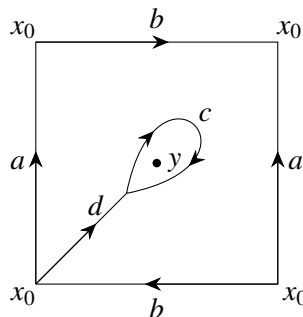


Figura 1.5: Botella de Klein

También podemos razonar así con la suma conexa de n toros, llamémosla M , ya que podemos identificar este espacio con un polígono de $4n$ lados identificados dos a dos. De este modo los segmentos $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ son circunferencias en M que solo se cortan entre sí en el punto x_0 . Al igual que

antes, podemos considerar $U = M \setminus \{y\}$ el complementario del punto central del polígono y V la imagen bajo la identificación del interior del polígono. Entonces V es un disco abierto de M y la unión de las $2n$ circunferencias dadas por $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$ es un retracto por deformación de U , lo que implica que $\pi_1(U, x_0)$ es un grupo libre sobre los generadores $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n$, siendo α la clase representada por a_i y β_i la representada por b_i . Además tenemos que $\pi_1(U \cap V, x_1)$ es un grupo cíclico infinito con generador γ , la clase representada por el camino c , tal que para la inclusión de $\pi_1(U \cap V, x_1)$ en $\pi_1(M, x_1)$ se tiene que

$$\varphi_1(\gamma) = \prod_{i=1}^n [\alpha'_i, \beta'_i]$$

siendo $[\alpha'_i, \beta'_i]$ el conmutador y $\alpha'_i = \delta^{-1} \alpha_i \delta$, $\beta'_i = \delta^{-1} \beta_i \delta$.

Por tanto, de todo esto se deduce que $\pi_1(M, x_0)$ es el cociente del grupo libre sobre los generadores $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n$ módulo el subgrupo normal generado por $\prod_{i=1}^n [\alpha'_i, \beta'_i]$. Es decir, este grupo fundamental admite una presentación con el conjunto de generadores $\{\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n\}$ y la relación $\prod_{i=1}^n [\alpha'_i, \beta'_i]$.

Capítulo 2

Monodromía de trenzas

2.1. Grupo de trenzas

El grupo de trenzas fue introducido por el matemático austríaco Emil Artin en 1925, quien lo volvió a publicar en 1947 [4]. Este grupo, denotado por B_n , es una generalización del grupo simétrico Σ_n y toma su nombre de la fuerte analogía que guardan sus elementos con las trenzas de n hilos en la realidad. Los elementos de este grupo serán los posibles entrecruzamientos de los hilos y la operación será la concatenación de estos entrecruzamientos. Pero veamos primero dónde se origina este grupo.

La interpretación más inmediata, como se ha comentado, es la de una colección de hilos. Dado $t \in [0, 1]$, se representa la n -tupla $\beta(t)$ dibujando en $\mathbb{C} \times [0, 1]$ los n puntos $(\beta_1(t), t), (\beta_2(t), t), \dots, (\beta_n(t), t)$. El movimiento del punto que comienza en la posición k cuando $t = 0$ puede ser visto como un hilo, que corresponderá a la proyección de la componente k -ésima de la tupla $\beta(t)$, es decir $\beta_k(t)$, para $t \in [0, 1]$. Diremos que una trenza es pura si todos sus hilos acaban en la misma posición donde empezaron, dicho de otra forma, $\beta_i(0) = \beta_i(1)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

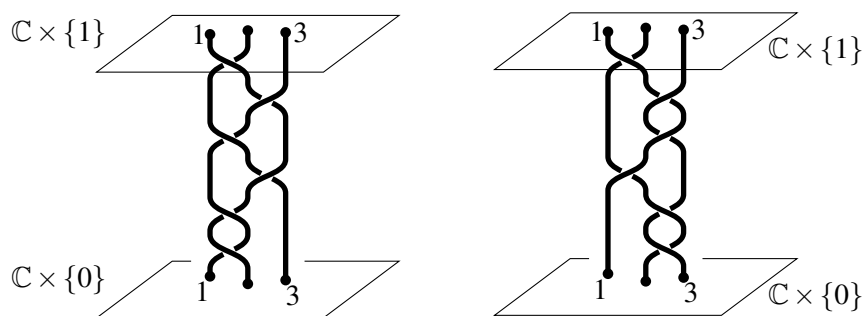


Figura 2.1: Trenza y trenza pura respectivamente

Pero el grupo de trenzas permite otras interpretaciones. Consideremos ahora el espacio de configuración de n puntos distintos ordenados en el plano complejo, esto es $M_n = \{(z_1 \dots z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j, \forall i \neq j\}$. Este espacio, que es conexo y de dimensión real $2n$, es el complementario de la familia de hiperplanos en \mathbb{C}^n . Denotemos cada hiperplano como $H_{ij} = \{z_i = z_j\} \in \mathbb{C}^n$ con $1 \leq i < j \leq n$. Entonces, siendo $D = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} H_{ij}$ la unión de hiperplanos también conocida como gran diagonal o "braid arrangement", podemos ver el espacio de configuración anterior como $M_n = \mathbb{C}^n \setminus D$. Un camino en M_n de $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$ es una colección de n caminos $\gamma_i, i = 1, \dots, n$, que van de x_i a y_i tal que $\gamma_i(\lambda) \neq \gamma_j(\lambda)$ si $i \neq j$, es decir n caminos que no se cortan.

Entonces el *grupo de trenzas puras* se define como el grupo fundamental de este espacio de configuración, $PB_n = \pi_1(M_n)$. Una trenza pura $\beta \in \pi_1(M_n)$ será un lazo en M_n , un camino que empieza y

acaba en el mismo punto, dado por

$$\begin{aligned}\beta: [0,1] &\longrightarrow M_n \\ t &\longmapsto \beta(t) = (\beta_1(t), \dots, \beta_n(t))\end{aligned}$$

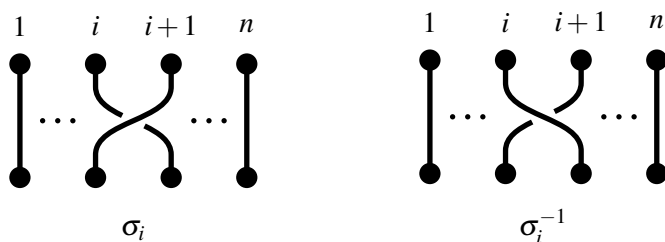
Una trenza pura se representa mediante el movimiento de esos puntos en \mathbb{C} a condición de que sean todos distintos en todo momento. Estos lazos por supuesto son clases de equivalencia así que permitiremos deformaciones homotópicas en los movimientos puesto que generarán la misma trenza.

Para definir el grupo de trenzas genérico debemos eliminar la ordenación de los n puntos considerados. Con este fin consideramos el grupo simétrico Σ_n , y así el espacio de configuración de n puntos sin ordenar en \mathbb{C} será $N_n = M_n / \Sigma_n$. Merece la pena destacar que dado un polinomio mónico $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ de grado n con raíces simples podremos identificarlo con un elemento $\{z_1, \dots, z_n\} \in N_n$, ya que siempre podremos escribir $f(z) = (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$. Del mismo modo todo elemento $\{a_1, \dots, a_n\} \in N_n$ puede verse como un polinomio mónico de grado n , $f(z) = (z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_n)$. Así que este espacio de configuración puede verse como el conjunto de polinomios mónicos de grado d con raíces simples.

Así el grupo de trenzas es el grupo fundamental de este nuevo espacio de configuración, denotado por $B_n = \pi_1(N_n)$. Ahora los caminos en N_n , dados los mismos extremos $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$, serán n caminos disjuntos γ_i que van de x_i a $y_{\sigma(i)}$ para cierto $\sigma \in \Sigma_n$. De nuevo, dos trenzas son consideradas iguales si son homotópicas, es decir, si podemos transformar una en la otra deformando sus hilos y manteniendo fijos los extremos. Además durante estas deformaciones los hilos han de ser disjuntos en todo momento y han de cortar cada plano horizontal una única vez. La operación en este grupo es la concatenación de bucles en N_n , que se puede ver como colocar dos trenzas una a continuación de la otra y reescalar el intervalo.

Una forma muy habitual de dar el grupo de trenzas es mediante una presentación finita, así que debemos buscar una manera de describir sus elementos para encontrar un conjunto de generadores. Para ello usaremos la interpretación más intuitiva de trenza, hilos entrelazados. De este modo, dada una trenza en $\mathbb{C} \times [0, 1]$ podemos deformarla de forma que su proyección sobre el plano tenga únicamente un número finito de entrecruzamientos y cada uno de ellos involucrando únicamente dos hilos consecutivos. Además podemos ordenar estos cruces de manera que cada uno ocurra a distinta altura, es decir, para distintos valores de $t \in [0, 1]$. De esta forma podemos ver que toda trenza puede escribirse como producto de trenzas en las que únicamente dos hilos consecutivos se cruzan.

Así el conjunto de generadores estándar de B_n está formado por $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$.



Encontrar un conjunto completo de relaciones es un asunto bastante más complicado aunque bien conocido, aquí nos limitaremos a mostrar una presentación del grupo de trenzas. Para una demostración detallada de que efectivamente es una presentación remitimos al interesado a la bibliografía, en especial [4].

Presentación del grupo de trenzas:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \text{ si } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j, \text{ si } |i - j| = 1 \end{array} \right\rangle$$

2.2. Trenzas como automorfismos del grupo libre

Como hemos visto hasta ahora el grupo de trenzas tiene múltiples interpretaciones y puede encontrarse en diferentes contextos. Hemos visto una interpretación geométrica intuitiva, de donde toma su nombre, y también lo hemos obtenido como el grupo fundamental de un espacio de configuración. Pero aún hay una interpretación más de especial interés para nosotros y es que los elementos del grupo de trenzas pueden verse como automorfismos sobre el grupo libre.

Consideremos el disco menos n puntos, \mathbb{D}_n . El grupo fundamental de este espacio es el grupo libre de rango n : $\pi_1(\mathbb{D}_n) = F_n$. Fijando un punto base, por ejemplo en la frontera exterior del disco, podemos tomar como generadores del grupo libre los caminos x_1, \dots, x_n que rodean una sola vez cada uno de los n puntos.

Entonces toda trenza $\beta \in B_n$ induce una acción sobre $\pi_1(\mathbb{D}_n) = F_n$ que asocia cada elemento del grupo libre $\gamma \in \pi_1(\mathbb{D}_n)$ con el elemento $\beta(\gamma) \in \pi_1(\mathbb{D}_n)$. Esta acción será un homomorfismo de grupos con respecto a la concatenación de lazos y además biyectivo puesto que la trenza β^{-1} induce la acción inversa. De este modo β induce un automorfismo sobre F_n que permite representar toda trenza como un automorfismo del grupo libre mediante la aplicación

$$\begin{aligned} \rho: B_n &\longrightarrow \text{Aut}(F_n) \\ \beta &\longmapsto \rho(\beta) \end{aligned}$$

Intuitivamente podemos ver la acción de la trenza sobre el grupo fundamental del disco como el movimiento de los caminos de base a lo largo de los hilos de la trenza. El automorfismo inducido $\rho(\beta)$ puede ser descrito con facilidad cuando la trenza es uno de los generadores estándar del grupo, $\beta = \sigma_i$, ya que podemos dar la imagen de los generadores x_1, \dots, x_n del grupo libre F_n .

$$\text{Esto es } \begin{cases} (x_i)^{\rho(\sigma_i)} = x_{i+1} \\ (x_{i+1})^{\rho(\sigma_i)} = x_{i+1}^{-1} \cdot x_i \cdot x_{i+1} \\ (x_j)^{\rho(\sigma_i)} = x_j \text{ siempre que } j \neq i, i+1 \end{cases}$$

Una vez que tenemos $\rho(\sigma_i)$, el automorfismo $\rho(\sigma_i^{-1})$ puede ser deducido con facilidad de manera análoga. Para una trenza general $\beta \in B_n$, escrita como producto de $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ y sus inversos, el automorfismo $\rho(\beta)$ es tan solo la composición de los automorfismos correspondientes a sus factores. De hecho, la acción se ha tomado por la derecha para que sea compatible con esta composición.

Naturalmente la aplicación ρ preserva las relaciones de la presentación del grupo de trenzas, puesto que se tiene que $\rho(\sigma_i \sigma_j) \equiv \rho(\sigma_j \sigma_i)$ si $|i - j| > 1$ y que $\rho(\sigma_i \sigma_j \sigma_i) \equiv \rho(\sigma_j \sigma_i \sigma_j)$, si $|i - j| = 1$.

Merece la pena resaltar que para todo $\beta \in B_n$ el automorfismo $\rho(\beta)$ manda cada generador del grupo libre x_j al conjugado de uno de esos generadores. También es importante remarcar que para todo $i = 1, \dots, n-1$, se tiene que $\rho(\sigma_i)(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$, es decir este automorfismo del grupo libre fija el elemento producto de todos los generadores. Y por lo tanto lo mismo ocurrirá para cualquier trenza. Esto se debe a que estamos viendo la trenza como una acción sobre caminos del grupo fundamental de un disco con agujeros y por lo tanto $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ no es sino un lazo homótopo a la frontera del disco, de modo que este camino no se verá esencialmente deformado por ninguna trenza.

Para acabar remarcar que aunque toda trenza pueda verse como un automorfismo del grupo libre esta inyección no es una biyección ya que no todo automorfismo en F_n tiene su contrapartida en el grupo de trenzas.

Teorema 2.1. *Un automorfismo del grupo libre $f \in \text{Aut}(F_n)$ es igual a $\rho(\beta)$ para algún $\beta \in B_n$ si y solo si se cumplen estas dos condiciones:*

1. $f(x_i)$ es el conjugado de algún x_j , para todo $i = 1, \dots, n$.
2. $f(x_1 \cdot \dots \cdot x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$

2.3. Cubiertas

Antes de poder entrar en detalle en la monodromía de trenzas debemos conocer una construcción matemática íntimamente ligada a las monodromías como son las cubiertas. Estos objetos están formados por un espacio que envuelve en cierta manera a otro. La forma precisa de este recubrimiento viene indicada por una aplicación continua que relaciona ambos espacios. Esta idea surge de la generalización de la aplicación $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ que enrolla toda la recta real sobre la circunferencia. Enseguida se verá esta situación en detalle.

Definición. Llamaremos *cubierta* del espacio topológico X al par formado por el espacio topológico \tilde{X} y la aplicación continua $p : \tilde{X} \rightarrow X$ cumpliendo la siguiente condición: Para cada punto $x \in X$ existe un entorno abierto y arcoconexo U tal que la imagen por p de cada arcocomponente de $p^{-1}(U)$ es homeomorfa a U a través de la restricción de esta aplicación. Llamaremos *entorno elemental* a todo el que cumpla estas condiciones y diremos que la aplicación p es la *proyección*.

Dada (\tilde{X}, p) una cubierta de X , todo punto de X tendrá el mismo número de preimágenes, es decir, el conjunto $p^{-1}(x)$ tendrá el mismo cardinal para todo $x \in X$.

Nosotros consideraremos siempre cubiertas en las que \tilde{X} sea arcoconexo. Esto no resta generalidad a la teoría que viene a continuación ya que de no ser \tilde{X} arcoconexo, por la propia definición de cubierta, cualquiera de sus arcocomponentes será una cubierta del mismo espacio base con la proyección restringida a esa componente.

Este tipo de objetos son ubicuos en geometría y en especial en topología. Por ejemplo, es fácil encontrar cubiertas para la circunferencia unidad como el par (\mathbb{R}, p) con $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $p(t) = e^{2\pi i t}$, o (S^1, p_n) con $p_n : S^1 \rightarrow S^1$ dada en coordenadas polares por $p_n(1, \theta) = (1, n\theta)$. En el primer caso los entornos elementales serán entornos abiertos en la recta real y en el segundo serán abiertos en la circunferencia unidad. En cambio, si consideramos la primera cubierta sobre el intervalo $(0, 10)$ en lugar de en toda la recta real no obtendremos una cubierta ya que habrá puntos en la circunferencia para los que no existirá un entorno elemental. Por ejemplo todo entorno del punto $(1, 0)$ tendrá una componente arcoconexa en su antiimagen de la forma $(0, a)$ y esta componente no tiene como imagen por p a todo el entorno de $(1, 0)$, luego no es una cubierta.

Por supuesto, podemos considerar la cubierta trivial de cualquier espacio X generada por la aplicación identidad $p : X \rightarrow X$ y el propio espacio X .

Más interesante es el caso del espacio producto, $X \times Y$, donde podemos construir una cubierta a partir de las cubiertas de cada uno de los espacios que lo forman. Así, si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ y $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ son cubiertas de X e Y respectivamente, el par $(\tilde{X} \times \tilde{Y}, p \times q)$ será una cubierta del espacio producto.

Por último, podemos ver que la esfera en tres dimensiones, S^2 , es una cubierta del plano proyectivo real considerando $p : S^2 \rightarrow \mathbb{P}$ como la aplicación que asocia cada par de puntos antipodales de la esfera con un punto del plano proyectivo. Teniendo en cuenta que este espacio \mathbb{P} puede definirse como el cociente de la esfera por esta relación antipodal es inmediato ver que este espacio es una cubierta.

Durante todo este trabajo nos hemos fijado en el comportamiento de los caminos en distintos espacios y de cómo estos ponen de manifiesto la estructura de ese espacio que los contiene. Las cubiertas aparecen aquí por el mismo motivo, intentaremos trasladar el estudio de los caminos en el espacio base a la cubierta y para eso es preciso ver como se elevan los caminos de un espacio a otro.

Lema 2.2. Sea (\tilde{X}, p) una cubierta de X , sea $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $x = p(\tilde{x})$. Entonces para cualquier camino $f : I \rightarrow X$ con origen en x existe un único camino en \tilde{X} , $g : I \rightarrow \tilde{X}$, con punto inicial \tilde{x} tal que $p \circ g = f$.

Este lema nos dice que todo camino en el espacio base puede elevarse a la cubierta de forma única fijando el punto inicial en la cubierta. En general, la antiimagen de un punto $x \in X$ por la proyección será un conjunto formado por más de un punto así que fijar el origen del nuevo camino es lo que nos da la unicidad.

Lema 2.3. Sea (\tilde{X}, p) una cubierta de X y $g_0, g_1 : I \rightarrow \tilde{X}$ caminos en \tilde{X} con el mismo punto inicial. Si $pg_0 \sim pg_1$, entonces $g_0 \sim g_1$. En particular, ambos caminos g_0, g_1 tendrán el mismo punto final.

Este resultado es el que hace tan singulares a las cubiertas, ya que no solo permite elevar caminos si no que esas elevaciones conservan las relaciones entre caminos. Es inmediato ver que dos caminos homótopos en el espacio base podrán elevarse a caminos homótopos en la cubierta si ambos empiezan en el mismo punto, pero además este resultado nos garantiza el recíproco, que si dos caminos son homótopos en la cubierta también lo serán sus proyecciones en el espacio base. De modo que el grupo fundamental de la cubierta guardará una relación muy estrecha con el grupo fundamental del espacio base.

Teorema 2.4. Sea (\tilde{X}, p) una cubierta de X y sea $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $x = p(\tilde{x})$. Entonces el homomorfismo de grupos inducido entre los grupos fundamentales, $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$, es inyectivo.

Podemos ahora considerar qué ocurre cuando basamos el grupo fundamental de la cubierta en distintas preimágenes de x . Para ello tomamos dos puntos \tilde{x}_0 y \tilde{x}_1 en \tilde{X} tales que $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x \in X$ y una clase de caminos γ en \tilde{X} que vaya de \tilde{x}_0 a \tilde{x}_1 . Este camino induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales con distinto punto base, $u : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ dado por $u(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma$. Esta aplicación hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(X, x) \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(X, x) \end{array}$$

Con la aplicación v dada por $v(\beta) = (p_*(\gamma))^{-1}\beta p_*(\gamma)$. Y como el elemento $p_*(\gamma)$ es un camino derrado en $\pi_1(X, x)$, las imágenes de $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ y $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ por p_* son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x)$. Esto se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 2.5. Sea (\tilde{X}, p) una cubierta de X y $x_0 \in X$. Entonces los subgrupos $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ con $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ forman una clase de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$.

Más adelante veremos que esta clase de conjugación es un invariante algebraico de la cubierta y determina su estructura por completo.

Al igual que hemos visto cómo elevar caminos del espacio base a la cubierta, podemos plantearnos lo mismo para otras aplicaciones, lo que se conoce como elevación a la cubierta de aplicaciones arbitrarias. Denotaremos por $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ a una aplicación continua que va de X a Y con $f(x) = y$. Con esto en mente, ¿qué condiciones son necesarias para que exista una aplicación $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$ de forma que el diagrama a continuación sea conmutativo?

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \nearrow \tilde{\varphi} & \downarrow p \\ (Y, y_0) & \xrightarrow{\varphi} & (X, x_0) \end{array}$$

Si tal aplicación existe diremos que φ puede ser elevada a $\tilde{\varphi}$ o que $\tilde{\varphi}$ es una elevación de φ .

Teorema 2.6. Sea (\tilde{X}, p) una cubierta de X , Y un espacio conexo y localmente arcoconexo, $y_0 \in Y$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $x_0 = p(\tilde{x})$. Dada una aplicación $\varphi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, existe una elevación $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$ si y solo si $\varphi_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$.

Esta condición además de ser necesaria y suficiente para su existencia también garantiza la unicidad de la elevación. Como es evidente, al aplicar este resultado a un camino obtenemos lo que ya sabíamos,

que siempre existirá esa elevación única en la cubierta ya que $Y = I$ es un espacio conexo y localmente arcoconexo y su grupo fundamental es el trivial luego el homomorfismo inducido aplicado a este grupo trivial siempre estará contenido en la imagen por el homomorfismo inducido por la proyección del grupo fundamental de la cubierta.

Al comienzo de esta sección hemos visto que un mismo espacio base admite diferentes cubiertas y sin duda estas han de guardar cierta relación entre sí. Para estudiar este tipo de relaciones vamos a definir un tipo de aplicaciones entre cubiertas de un mismo espacio base que denominaremos *homomorfismos*.

Dadas dos cubiertas de X , (\tilde{X}_1, p_1) y (\tilde{X}_2, p_2) , un homomorfismo entre ellas es una aplicación continua $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow p_1 & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

La aplicación identidad sobre una cubierta será un homomorfismo, al igual que la composición de dos homomorfismos.

Si dado un homomorfismo φ de (\tilde{X}_1, p_1) en (\tilde{X}_2, p_2) , existe otro ψ de (\tilde{X}_2, p_2) a (\tilde{X}_1, p_1) tal que las dos posibles composiciones $\psi\varphi$ y $\varphi\psi$ son aplicaciones identidad diremos que es un isomorfismo. Así dos cubiertas serán isomorfas si existe un isomorfismo entre ellas y por supuesto, será denominado automorfismo si es un isomorfismo de una cubierta en sí misma. El conjunto de todos los automorfismos de una cubierta (\tilde{X}, p) de X es un grupo con la composición que denotaremos $A(\tilde{X}, p)$. Este concepto de isomorfismo es análogo al de homeomorfismo, es decir un homomorfismo de espacios topológicos será un isomorfismo si y solo si es un homeomorfismo.

Ahora apodemos ver una serie de resultados que muestran la relación existente entre diferentes cubiertas de un mismo espacio base.

Lema 2.7. Sean φ_0 y φ_1 homomorfismos entre dos cubiertas de X , (\tilde{X}_1, p_1) y (\tilde{X}_2, p_2) . Si existe algún punto $x \in \tilde{X}_1$ tal que $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$, entonces $\varphi_0 = \varphi_1$.

Lema 2.8. Sean (\tilde{X}_1, p_1) y (\tilde{X}_2, p_2) cubiertas de X y $\tilde{x}_i \in \tilde{X}_i$ con $i = 1, 2$ puntos tales que $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Entonces existe un homomorfismo φ de (\tilde{X}_1, p_1) en (\tilde{X}_2, p_2) con $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ si y solo si $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.

Teorema 2.9. Dos cubiertas (\tilde{X}_1, p_1) y (\tilde{X}_2, p_2) de X son isomorfas si y solo si para dos puntos cualquiera $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ y $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ tales que $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0 \in X$, los subgrupos $p_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ y $p_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ pertenecen a la misma clase de conjugación en $\pi_1(X, x_0)$.

Este teorema muestra que la clase de conjugación del subgrupo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ con $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ determina por completo la cubierta, salvo isomorfismo.

Lema 2.10. Sean (\tilde{X}_1, p_1) y (\tilde{X}_2, p_2) dos cubiertas de X y φ un homomorfismo de (\tilde{X}_1, p_1) en (\tilde{X}_2, p_2) . Entonces (\tilde{X}_1, φ) es una cubierta de \tilde{X}_2 .

En caso de que la cubierta esté formada por un espacio simplemente conexo diremos que estamos ante la *cubierta universal* de ese espacio base. Dos cubiertas universales del mismo espacio base siempre serán isomorfas. Este tipo de cubiertas tienen la particularidad de que son a su vez cubiertas de cualquier otra cubierta del espacio base. Esto se debe a que si (\tilde{X}, p) es una cubierta de X con \tilde{X} simplemente conexo, el Lema 2.8 garantiza la existencia de un homomorfismo desde la cubierta universal a cualquier otra, ya que el grupo fundamental de un espacio simplemente conexo es el grupo trivial. Y aplicando el lema inmediatamente anterior deducimos esta propiedad de las cubiertas universales.

Sabemos que en toda cubierta la aintiimagen de cualquier punto en el espacio base X pertenece a un conjunto discreto de puntos que denotamos $p^{-1}(x)$, con $x \in X$. Y también hemos visto que todo camino

en X puede elevarse a la cubierta de forma única fijando el punto inicial. Entonces, los caminos cerrados X con principio y final en x al ser elevados comenzarán y terminarán en puntos de la antiimagen de x , es decir en $p^{-1}(x)$. Pero ahora nada nos garantiza que este camino elevado siga siendo cerrado. Es más podemos considerar todas las posibles elevaciones de este lazo y veremos que cada uno de ellos empieza en un punto de $p^{-1}(x)$ y acaba en otro distinto. Esto induce una permutación en los elementos de la antiimagen, con lo que podemos definir una acción del grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ sobre el conjunto antiimagen $p^{-1}(x)$.

Formalmente, dada una cubierta (\tilde{X}, p) de X y un punto $x \in X$, para todo $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ y $\alpha \in \pi_1(X, x)$ se define $\tilde{x} \cdot \alpha \in p^{-1}(x)$ como el punto final de la clase de caminos $\tilde{\alpha}$ en \tilde{X} , siendo $\tilde{\alpha}$ tal que $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$ con punto inicial \tilde{x} .

El conjunto $p^{-1}(x)$ se dice homogéneo como $\pi_1(X, x)$ -espacio por la derecha, puesto que $\forall a, b \in p^{-1}(x)$ existe un camino $\gamma \in \pi_1(X, x)$ tal que $a \cdot \gamma = b$. Es decir, todos los elementos de la antiimagen están conectados por caminos en \tilde{X} .

Proposición 2.11. *Para todo $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$, $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ y $\alpha \in \pi_1(X, x)$ se tiene que $\varphi(\tilde{x} \cdot \alpha) = \varphi(\tilde{x}) \cdot \alpha$. En otras palabras, todo elemento $\varphi \in A(\tilde{X}, p)$ induce un automorfismo en el conjunto $p^{-1}(x)$ visto como $\pi_1(X, x)$ -espacio por la derecha.*

Teorema 2.12. *Sea (\tilde{X}, p) una cubierta de X . Entonces el grupo de automorfismos $A(\tilde{X}, p)$ es isomorfo al grupo de automorfismos del conjunto $p^{-1}(x)$ visto como $\pi_1(X, x)$ -espacio por la derecha, con $x \in X$.*

Este resultado determina la estructura del grupo de automorfismos de una cubierta, $A(\tilde{X}, p)$.

Corolario 2.13. *Para todo $x \in X$ y $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, el grupo de automorfismos $A(\tilde{X}, p)$ es isomorfo al cociente de grupos $N[p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))]/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$, donde $N[p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))]$ denota el normalizador del subgrupo $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ en $\pi_1(X, x)$.*

Recordar que el normalizador de un subgrupo $H < G$ se define como $N(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\}$ y es el mayor subgrupo de G que tiene a H como un subgrupo normal.

Un tipo particular de cubiertas son las que se conocen como *cubiertas regulares*. Diremos que una cubierta (\tilde{X}, p) de X es regular si $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$. Y es fácil ver que esta condición es independiente de la elección del punto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.

Entonces, tal y como podemos ver a partir del corolario 2.13, dada una cubierta regular (\tilde{X}, p) de X , el grupo de automorfismos $A(\tilde{X}, p)$ es isomorfo al grupo cociente $\pi_1(X, x)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ para todo $x \in X$ y $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.

Y a su vez, podemos aplicar este resultado a las cubiertas universales, que obviamente son también regulares. Así si (\tilde{X}, p) es una cubierta universal de X , el grupo de automorfismos $A(\tilde{X}, p)$ es isomorfo a $\pi_1(X)$ y el orden del grupo es igual al número de hojas de la cubierta (\tilde{X}, p) .

Estos resultados pueden apreciarse con claridad en la cubierta de la circunferencia unidad que vimos al comienzo de esta sección, (\mathbb{R}, p) con $p(t) = (\cos(t), \sin(t))$. Lo primero que debemos notar es que como \mathbb{R} es simplemente conexo estamos ante una cubierta universal de S^1 . A continuación, dado que las funciones $\cos(t)$ y $\sin(t)$ son periódicas el grupo de automorfismos $A(\mathbb{R}, p)$ es $\{T_n | n \in \mathbb{Z}\}$ con $T_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T_n(t) = t + 2\pi n$. Esto es así debido a que si $x \in S^1$ y $t_1, t_2 \in p^{-1}(x)$ existe un número $n \in \mathbb{Z}$ tal que $T_n(t_1) = t_2$, y por lo tanto todo automorfismo sobre la cubierta (\mathbb{R}, p) es una traslación como estas. De este modo, y teniendo en cuenta que $A(\mathbb{R}, p) = \{T_n | n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$, el grupo fundamental de la circunferencia unidad es cíclico de orden infinito, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Este resultado coincide con lo obtenido en el primer capítulo.

Del mismo modo podemos proceder con la cubierta (S^2, p) del plano proyectivo real siendo $p : S^2 \rightarrow \mathbb{P}$ la aplicación natural de la esfera a su espacio cociente. Como S^2 es simplemente conexo estamos ante otra cubierta universal y dado que es una cubierta de dos hojas, ya que cada punto del plano proyectivo se identifica con dos puntos antipodales de la esfera, el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{P})$ y el

grupo de automorfismos de la cubierta tienen ambos orden 2. Recordemos que la aplicación antipodal que genera el grupo de automorfismos es $T : S^2 \rightarrow S^2$ dada por $T(x, y, z) = (-x, -y, -z)$.

2.4. Monodromías

Llegados a este punto estamos en disposición de ver qué es una monodromía. En general, una *monodromía* es una aplicación del grupo fundamental del espacio base al grupo simétrico, $\psi : \pi_1(X, x) \rightarrow \Sigma_d$. Para definir esta aplicación usamos la acción del grupo fundamental sobre $p^{-1}(x)$ por lo que debemos considerar una cubierta (\tilde{X}, p) de X . Así cada lazo α del grupo fundamental estará asociado a una permutación de los elementos de $p^{-1}(x)$ dada por $\tilde{x} \mapsto$ punto final del levantamiento de α con inicio en \tilde{x} .

De esta forma el orden del grupo simétrico será el cardinal del conjunto de antiimágenes, $d = |p^{-1}(x)|$.

$$\begin{aligned} \psi : \pi_1(X, x) &\longrightarrow \Sigma_d \\ \alpha &\longmapsto \left(\begin{array}{ccc} p^{-1}(x) & \rightarrow & p^{-1}(x) \\ \tilde{x} & \mapsto & \text{extremo final de la elevación de } \alpha \text{ con punto inicial } \tilde{x} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Pero el concepto de monodromía no va a ser tan significativo para nosotros como el de *monodromía de trenzas*. Siendo rigurosos, una monodromía de trenzas no es una monodromía tal y como la hemos definido ya que en lugar de asociar los elementos del grupo fundamental a una permutación los asocia a una trenza, aunque no dejan de ser una generalización de las permutaciones. Así en una monodromía de trenzas no sólo nos interesa la posición final de los elementos de $p^{-1}(x)$ si no también los caminos que han seguido para llegar hasta allí. Esto nos da más información que una monodromía usual por lo que podemos decir que estamos ante una monodromía enriquecida.

La definición precisa de una monodromía de trenzas depende en gran medida del contexto en el que aparezca. En nuestro caso estas monodromías surgen del estudio de una curva algebraica compleja en dos variables.

Consideremos una curva algebraica en \mathbb{C}^2 dada por los ceros de $f(x, y) \in \mathbb{C}^2[x, y]$. Siempre podremos efectuar un cambio de variable tal que sea mónica en la variable y , de forma que su grado total d coincida con el grado en y . Tomemos a continuación el discriminante en la segunda componente, $\text{disc}_y f(x) \in \mathbb{C}[x]$ y llamemos $W = \{t \in \mathbb{C} \mid \text{disc}_y f(t) \neq 0\}$. De este modo eliminamos los puntos del dominio de la primera componente que hacen que el polinomio f tenga raíces múltiples en la segunda. Este conjunto W tiene forma de plano con agujeros.

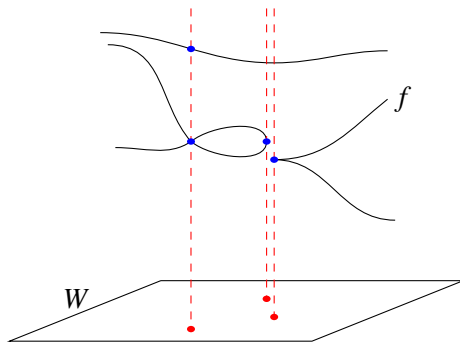


Figura 2.2: Proyección de una curva algebraica

Entonces, la curva algebraica menos los puntos en donde aparecen las raíces dobles y todos aquellos que compartan proyección con éstos es una cubierta para el espacio W , basta con considerar la proyección en la primera componente. Estos puntos que se eliminan de la curva algebraica están señalados con

puntos azules en el dibujo esquemático. Conviene observar que se ha eliminado un punto en la componente superior de la curva pese a no tener raíces dobles debido a que su proyección coincide con uno de estos puntos. Esta cubierta tendrá d hojas, ya que para todo $x_0 \in W$ el polinomio $f(x_0, y)$ tiene raíces simples en y , en total d distintas.

Ahora que tenemos una cubierta podemos considerar una monodromía que a cada lazo de $\pi_1(W, x)$ le asocie una trenza en d hilos. Esta trenza se definirá como los caminos que siguen las d raíces en la segunda componente cuando la primera va tomando los valores del lazo en W . Recordemos que la interpretación geométrica de una trenza es un conjunto de d caminos de $[0, 1]$ en \mathbb{C} . En nuestra situación tenemos precisamente esos elementos, ya que la segunda componente se encuentra en \mathbb{C} , por lo tanto los ceros de $f(x_0, y)$ también, y estos puntos nunca se cortarían ya que precisamente hemos quitado de la primera componente aquellos que producían raíces dobles en la segunda. Generamos por tanto una trenza a partir de un camino cerrado en el espacio base, esto es lo que llamamos una *monodromía de trenzas*. En general denotaremos esta monodromía como $\nabla : \pi_1(W, x_0) \rightarrow B_d$.

Esta situación es de lo más interesante, ya que al ser W un plano con agujeros conocemos su grupo fundamental que será un grupo libre generado por tantos elementos como agujeros tenga W . Estos puntos que hemos eliminado de \mathbb{C} para obtener W formarán un conjunto discreto y finito de puntos, ya que únicamente hemos eliminado los que hacen cero el discriminante en y . Y este discriminante en y es un polinomio complejo en x distinto de cero si f no tiene componentes múltiples. Como nuestro polinomio siempre será de este tipo, el discriminante nunca será cero y por tanto sus raíces serán un conjunto discreto y finito de puntos. Llamaremos r al cardinal de este conjunto de puntos eliminados, es decir $r = |\mathbb{C} \setminus W|$.

Entonces podemos tomar como generadores del grupo libre caminos cerrados que parten de un mismo origen y rodean una sola vez uno de esos puntos. Un tipo particular de caminos como estos son los llamados meridianos, que formarán una base del grupo fundamental de W .

Definición. En general, dada Z una variedad conexa y H una hipersuperficie de Z , consideremos $* \in Z \setminus H$ y K una componente conexa de H . Llamaremos *meridiano* sobre K con respecto a H a la clase de homotopía $\gamma \in \pi_1(Z \setminus H, *)$ si tiene un representante δ que cumpla lo siguiente:

- a) Existe un disco complejo $\Delta \subset Z$ transversal a H tal que $\Delta \cap H = \{*\} \subset K$.
- b) Existe un camino α en $Z \setminus H$ que va de $*$ a un punto en la frontera del disco $*' \in \partial\Delta$.
- c) $\delta = \alpha \cdot \beta \cdot \alpha^{-1}$, donde β es el camino cerrado que recorre la frontera del disco $\partial\Delta$ desde $*'$ en el sentido positivo de giro.

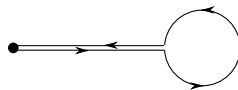


Figura 2.3: Meridiano

Estos meridianos no son ni muchísimo menos únicos, es más, como es fácil comprobar dos meridianos $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi_1(Z \setminus H, *)$ de la misma componente conexa K son conjugados entre sí, es decir, $\gamma_2 = w\gamma_1w^{-1}$ para cierto lazo $w \in \pi_1(Z \setminus H, *)$.

Entonces, dado un plano con agujeros como W y considerando un disco cerrado Δ_x lo suficientemente grande como para contener en su interior todos los puntos podemos encontrar una base $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r$ de $\pi_1(W, *)$ tal que cada γ_i sea un meridiano del punto eliminado x_i y que su producto en orden inverso, $\gamma_r \cdot \dots \cdot \gamma_1$, sea homotópico a la frontera del disco Δ_x parametrizada en sentido antihorario. Además cabe destacar que $(\gamma_r \cdot \dots \cdot \gamma_1)^{-1}$ será un meridiano del punto del infinito. Si el punto $*$ está en la frontera del disco o fuera de él hablaremos de una *base geométrica*. Si por el contrario este punto base de los caminos está en el interior del disco, el producto de meridianos puede no ser exactamente homotópico al borde del disco aunque en cualquier caso el resto de propiedades se conservarán. Entonces hablaremos de una *base pseudogeométrica*.

El tener bases de caminos ordenadas como estas permite definir la monodromía asociada a una curva algebraica como la monodromía de trenzas de cada uno de los elementos de la base. Es decir, asociamos a la curva una r -tupla de trenzas en d hilos. Pero este objeto no es ni mucho menos único para cada curva ya que tanto la monodromía de trenzas como la base elegida implican elecciones por nuestra parte que cambian el aspecto de este vector de trenzas.

En primer lugar lidiaremos con la monodromía de trenzas. Y es que aunque es fácil ver cómo asociamos una trenza para cada camino, la forma de describir estas trenzas no es única. Fijémonos que en general tendremos d puntos en \mathbb{C} en la base de la trenza que evolucionarán a lo largo del intervalo $[0, 1]$, y sin embargo, genéricamente representamos las trenzas basadas en d puntos alineados. Esto quiere decir que hacemos una elección a la hora de tomar esos puntos en un plano y alinearlos, lo que en el fondo viene a ser darles un orden. Evidentemente, si elegimos ordenaciones distintas escribiremos la misma trenza de diferentes formas. Traducido a productos de trenzas esto quiere decir que permitimos conjugaciones de trenzas en d hilos, ya que serán distintas maneras de escribir una misma trenza en $\mathbb{C} \times [0, 1]$.

El otro factor que influye en la representación de la monodromía de la curva es la base de caminos elegida. Ésta será geométrica o pseudogeométrica pero en ningún caso será única, así que necesitamos una forma de pasar de una a otra. Esto se consigue con la actuación del grupo de trenzas sobre el grupo libre que viene dada por:

$$\gamma_i^{\sigma_j} = \begin{cases} \gamma_i, & i \neq j, j+1 \\ \gamma_{j+1}, & i = j \\ \gamma_{j+1} \gamma_i \gamma_{j+1}^{-1}, & i = j+1 \end{cases}$$

Por supuesto, la acción de una trenza genérica será composición de las acciones de sus generadores estándar.

En general, el grupo de trenzas puede actuar sobre un grupo G' de forma análoga, lo que se conoce como los *movimientos de Hurwitz*. Estos movimientos preservan siempre el producto en orden inverso de los r elementos de la tupla, lo que en particular, en el caso del grupo libre quiere decir que tras actuar la curva sobre estos caminos obtendremos de nuevo una base del mismo tipo, geométrica o pseudogeométrica.

De este modo, se define la *monodromía asociada a la curva algebraica* dada por $f(x, y)$ como la órbita de la r -tupla $(\nabla(\gamma_1), \dots, \nabla(\gamma_r)) \in (B_d)^r$ por la acción de $B_r \times B_d$, donde $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ es una base pseudogeométrica de $\pi_1(W, *)$. Cabe recordar que los elementos de B_r actúan por movimientos de Hurwitz y los de B_d por conjugación.

Así, considerando la órbita completa de la r -tupla conseguimos un invariante más fino del encaje de la curva algebraica en el espacio. Esta técnica ha permitido diferenciar curvas para las que el grupo fundamental de su espacio complementario no ha podido ser calculado de forma efectiva o no permitía diferenciarlas, como por ejemplo curvas conjugadas en extensiones algebraicas finitas de \mathbb{Q} . Por ejemplo si tenemos una extensión cuadrática $\mathbb{Q}[\sqrt{\alpha}]$, $\alpha \in \mathbb{N}$ libre de cuadrados, podemos cambiar la ecuación reemplazando $\sqrt{\alpha}$ por $-\sqrt{\alpha}$, obteniendo curvas con las mismas propiedades algebraicas pero que pueden tener propiedades topológicas distintas. En [3] encontramos precisamente este concepto de curvas conjugadas, concretamente configuraciones de rectas conjugadas. Y en [2] podemos ver en acción la monodromía de trenzas de una curva.

Todo el desarrollo teórico estudiado hasta el momento motiva y justifica lo que viene en el próximo capítulo, en donde se describe un algoritmo para generar bases geométricas, un elemento indispensable para obtener la monodromía de trenzas de la curva. Este código se incorporará al paquete de software para Sagemath que han preparado Marco y Rodríguez [9] que permitirá no solo calcular el grupo fundamental del complementario de la curva si no también su monodromía. Este software asocia una trenza a cada camino por lo que dar una base ordenada es la clave para poder obtener la monodromía.

Capítulo 3

Determinación algorítmica del grupo fundamental de un plano con agujeros

Como parte del cálculo asistido por ordenador de la monodromía de una curva algebraica se necesita obtener una base geométrica para el plano con agujeros. Aquí se propone un algoritmo para encontrar la ordenación de esos caminos a partir de un diagrama de Voronoi acotado sobre los agujeros en el plano. Todo el código, que puede verse en el anexo, ha sido escrito para Sagemath.

3.1. Input

Una lista de vectores complejos que forman un diagrama de Voronoi acotado. Esta acotación se consigue haciendo que las regiones abiertas pasen a ser cerradas. Para ello se añaden cuatro puntos adicionales en forma de cruz, es decir, dos con parte real nula, arriba con parte compleja muy grande y otro abajo con parte compleja muy negativa. De la misma forma se colocan otros dos sobre el eje real uno a la derecha y otro a la izquierda. De esta forma se consigue que las únicas regiones no acotadas sean las de estos cuatro puntos. El diagrama que se nos dará será precisamente el formado por todas las aristas finitas de esta nueva configuración.

3.2. Output

Buscamos una lista ordenada de caminos que formen una base geométrica del grupo libre. Por lo tanto, el resultado final del algoritmo será una lista de listas de vectores, cada una con las aristas necesarias para ir desde un punto origen en el grafo, el mismo para todos los caminos, hasta una tesela, rodearla en sentido antihorario y volver por donde se ha venido. Estos caminos se darán ordenados de tal forma que al concatenarlos se obtenga un camino homotópico al marco del grafo.

3.3. Algoritmo

La estrategia general que se ha seguido consiste en encontrar caminos desde el punto origen a todas las teselas para crear un diagrama en forma de árbol con todos ellos. Recorriendo este árbol en sentido antihorario encontraremos el orden en que debemos recorrer esas teselas. Por último se generan los caminos asociados y se da una lista con todos ellos en el orden deseado.

Dado que los vectores del diagrama de Voronoi están orientados, lo primero que hacemos es completarlo añadiendo las aristas en sentido inverso a las que ya están en el diagrama para conseguir un grafo en el que todas las aristas sean de doble sentido.

El algoritmo consta de trece funciones, siendo la última el producto de caminos cuya única utilidad es comprobar que se genera la ordenación correcta. A continuación se detalla el funcionamiento de estas funciones, haciendo incapié en las que contienen la esencia del algoritmo, `path`, `tree` y `sort_paths`.

3.3.1. Funciones

- **conexions** - Dado un vector y un grafo genera una lista con todos los vectores que parten del extremo final del vector dado, excluyendolo a él.
- **tessel** - A partir de un vector y el grafo completo da la lista de vectores que forman la tesela a la que pertenece el vector girando en sentido antihorario. El camino crece añadiendo un vector consecutivo al de llegada en cada iteración. Hace uso de la función **conexions** para detectar las salidas posibles de cada vector y selecciona el de mayor ángulo con respecto al vector de llegada, tomando el argumento del cociente entre vectores para ello.
- **tesselation** - Dado el grafo completo genera una lista de listas con todas las teselas del diagrama. Se basa en que todo vector dirigido pertenece a una sola tesela y por lo tanto incluir también una tesela con las aristas del borde del diagrama, lo que llamamos marco.
- **frame** - A partir del grafo completo, encuentra la tesela del marco. Su detección se fundamenta en que los puntos de las esquinas del diagrama son los únicos vértices con valencia 2 y el marco los contiene todos.
- **origin** - Dado un grafo devuelve el punto situado más a la izquierda. Para ello examina la parte real de sus aristas y se queda con el de menor valor. En caso de empate seleccionará al de mayor parte imaginaria. Esta función puede aplicarse tanto al grafo completo como a teselas individuales.
- **path** - Genera a partir del grafo completo y de una tesela el camino que va desde el origen de esa tesela al del grafo. Damos a continuación una idea del algoritmo empleado para encontrarlo.
 - (a) Selecciona dos puntos, el origen de la tesela y el origen del vector.
 - (b) Busca de entre los vectores que salen del primer punto seleccionado los que están en el mismo semi plano que el segundo punto seleccionado. Para ello considera la recta normal a al segmento que une los dos puntos seleccionados que pasa por el que estamos considerando en este momento y evalúa su ecuación en el punto seleccionado opuesto y en los extremos de los vectores que salen de este punto seleccionado. Si su producto es mayor que cero pertenecen al mismo semi plano.
 - (c) De entre los que han pasado este test, selecciona el que más cerca se encuentra del segundo punto seleccionado. Para ello identifica \mathbb{C} con el plano real \mathbb{R}^2 y emplea la métrica euclídea.
 - (d) Sustituye el primer punto seleccionado por el que acabamos de encontrar.
 - (e) Se repite el proceso anterior partiendo del punto seleccionado opuesto.

El algoritmo continúa hasta que los dos puntos seleccionados coinciden. En ese momento ordena los vectores y los orienta de forma que el camino resultante vaya del origen de la tesela al origen del grafo.

- **tree** - Esta función genera un grafo en forma de árbol que llega a todas las teselas a partir del diagrama de Voronoi. De nuevo esquematizamos su funcionamiento:
 - (a) Genera los caminos a todas las teselas y los fusiona en una única lista eliminando los vectores repetidos.
 - (b) A continuación elimina los posibles bucles para conseguir un grafo en árbol.
 - I Detecta los bucles y los almacena en una lista.
 - II Se asegura de que todos los bucles almacenados son distintos, eliminando las posibles repeticiones.
 - III Rompe los bucles eliminando un vector de cada uno de ellos, asegurándose de que para cada ciclo elimina un vector distinto.

(c) Ahora que el diagrama es seguro un grafo en forma de árbol, da a las aristas la dirección adecuada.

- I partiendo del origen, recorre las ramas del árbol y anota las aristas que están en la dirección deseada. En cada rama se para si encuentra un vector en la dirección opuesta.
- II Ahora cambia el sentido a todos los vectores en los que ha parado y los añade a la lista.
- III Repite de nuevo estos dos pasos hasta sea capaz de recorrer el árbol completo en la dirección que nos interesa.

Tras este proceso obtendremos la lista de los vectores que forman el grafo en árbol con todos los caminos que van desde los orígenes de las teselas al origen del grafo.

- `element` - Dada una tesela y el grafo completo, genera camino que va del origen del grafo a la tesela, la rodea en sentido antihorario y vuelve al origen por donde ha venido. El camino de la tesela al origen del grafo lo obtiene del árbol de caminos dado por `tree`.
- `points0` - A partir del grafo completo devuelve una lista con los puntos origen de todas las teselas.
- `par` - Dado el grafo completo genera un diccionario en el que las entradas son el primer vector de cada tesela partiendo de su punto origen y el contenido asociado es la tesela misma.
- `bud` - Dado el grafo completo genera una lista con todos los primeros vectores de las teselas partiendo de sus orígenes.
- `sort_paths` - Es la función principal del algoritmo. Da una lista ordenada de caminos a partir del grafo completo. Esta ordenación que buscábamos es la que nos permite formar una base geométrica de caminos para el plano con agujeros. Para ello recorrerá el árbol de caminos en sentido antihorario y anotará el orden en que recorre las teselas, dando a partir de esta ordenación los caminos asociados a cada una siguiendo ese orden.

(a) Partiendo del origen del grafo selecciona la arista que sale de él con menor ángulo en sentido antihorario con respecto a la horizontal.

(b) En cada vértice al que llegue elegirá la siguiente arista de la misma forma, la que tenga menor ángulo en sentido antihorario con respecto al vector por el que hemos llegado.

(c) Una vez seleccionada la siguiente arista pero antes de avanzar comprueba si hay alguna tesela cuyo origen sea ese vértice que va a abandonar y que deba ser considerada antes. Esto ocurrirá si su primer vector tiene un ángulo todavía menor que el de la arista seleccionada.

(d) Cuando se llegue al extremo de una rama del árbol, y después de comprobar si debe añadir alguna tesela que tenga ahí su origen, elimina el último vector recorrido y vuelve a repetir este algoritmo completo comenzando de nuevo desde el origen del grafo.

(e) Cuando queda una sola arista por eliminar del árbol, se comprueba si la tesela que comparte origen con el grafo ha sido incluida en la ordenación. De no haber sido así se añade ahora, antes de terminar este algoritmo.

La lista de teselas que genera este algoritmo ha de ser podada eliminando las repeticiones y preservando el orden de la primera vez que se pasó por cada tesela. Para finalizar, se da siguiendo este orden, el camino asociado a cada una de las teselas. Formarán una base geométrica del plano con agujeros.

- `pathprod` - Dada una lista de caminos los concatena y realiza las simplificaciones necesarias para dar el camino producto. Esta función permite comprobar que la ordenación dada por `sort_paths` es la correcta.

Bibliografía

- [1] E.Artal, J.Carmona, and J.I. Cogolludo-Agustín, *Braid monodromy and topology of plane curves*, Duke Math. J. **118** (2003), no.2, 261–278. MR 1980995
- [2] ———, *Effective invariants of braid monodromy*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no.1, 165–183.
- [3] E.Artal, J.Carmona, J.I. Cogolludo-Agustín, and M.Á. Marco, *Topology and combinatorics of real line arrangements*, Compos. Math. **141** (2005), no.6, 1578–1588.
- [4] E.Artin, *Theory of braids*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 101–126. MR 0019087
- [5] J.I. Cogolludo-Agustín, *Braid monodromy of algebraic curves*, Ann. Math. Blaise Pascal **18** (2011), no.1, 141–209. MR 2830090
- [6] J.González-Meneses, *Basic results on braid groups*, Ann. Math. Blaise Pascal **18** (2011), no.1, 15–59. MR 2830088
- [7] E.R.Van Kampen, *On the connection between the fundamental groups of some related spaces*, Amer. J. Math. **55** (1933), 261–267.
- [8] ———, *On the Fundamental Group of an Algebraic Curve*, Amer. J. Math. **55** (1933), no.1-4, 255–260. MR 1506962
- [9] M.Á. Marco and M.Rodríguez, *Sirocco: A library for certified polynomial root continuation*, International Congress on Mathematical Software, Springer International Publishing, 2016, pp.191–197.
- [10] W.S. Massey, *Algebraic topology: An introduction*, Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967. MR 0211390
- [11] H.Poincaré, *Analysis situs*, J. de l'Ecole Poly. **1** (1895).
- [12] H.Seifert, *Konstruktion dreidimensionaler geschlossener raume*, Hirzel, 1931.

Índice alfabético

- Base geométrica, 21
- Base pseudogeométrica, 21
- Camino, 1
- Conjunto completo de relaciones, 7
- Cubierta, 16
 - regular, 19
 - universal, 18
- Grupo de trenzas, 13, 14
- Grupo de trenzas puras, 13
- Grupo fundamental, 2
 - circunferencia, 4
 - disco menos puntos, 9
 - espacio producto, 5
 - lemniscata, 8
 - plano proyectivo real, 11
 - toro, 10
- Grupo libre, 6
- Homotopía, 3
 - clases, 3
 - relativa a un subconjunto, 3
- Meridiano, 21
- Monodromía, 20
 - curva algebraica, 22
 - de trenzas, 20, 21
- Movimientos de Hurwitz, 22
- Presentación de un grupo, 7
- Producto de caminos, 2
- Producto libre de grupos, 5
- Relación de equivalencia entre caminos, 1
- Retracto, 4
 - por deformación, 4

Anexo

Se incluye a continuación el código de todas las funciones desarrolladas en Sagemath para la computación algorítmica del grupo fundamental del plano con agujeros.

```
1 #Connections
2
3 def connections(vect, graph):
4     exits = []
5     for s in graph:
6         if vect[1]==s[0]:
7             if vect[0] != s[1]:
8                 exits = exits + [(s[0],s[1])]
9     return exits
```

```
1 #Edges of a tess
2
3 def tessell(vect, graph):
4     next = [vect[0]-1,vect[0]-1]
5     tess = [vect]
6     path1 = [vect[0],vect[1]]
7
8     while vect[0]!= next[1]:
9         maxangle = 0
10        exits = connections(path1, graph)
11        u=CC(path1[1]-path1[0])
12
13        for s in exits:
14            v=CC(s[1]-s[0])
15            arg=(u/v).argument()
16            angle=pi-arg
17            if angle > maxangle:
18                maxangle = angle
19                next = [s[0],s[1]]
20
21        tess.append(tuple(next))
22        path1 = next
23    return tess
```

```
1 #List of all tessels of the graph.
2
3 def tessellation(graph):
4     remainig=graph[:]
5     net = []
6     while len(remainig) > 0:
7         t=tessell(remainig[0],graph)
8         for s in t:
9             remainig.remove(s)
10        net = net + [t]
11    return net
```

```
1 # Detecting the frame tessell
```

```

2
3 def frame( graph ):
4     corner=[]
5     Frame=[]
6     for v in graph:
7         count=0
8         for u in graph:
9             if v[0]==u[0]:
10                 count=count+1
11             if count==2:
12                 corner = corner + [v[0]]
13 T=tessellation( graph )
14 for t in T:
15     count2=0
16     for s in corner:
17         for a in t:
18             if s==a[0]:
19                 count2=count2+1
20         if count2==8: ### Each vertex appear 2 times in the corner list.
21             Frame=t
22 return Frame

```

```

1 # Detecting the origin point of the graph/tessel
2

```

```

3 def origin( graph ):
4     a=graph[0][0].real()
5     b=graph[0][0].imag()
6     ori=0
7     for s in graph:
8         r=s[0].real()
9         im=s[0].imag()
10        if r<a:
11            ori = s[0]
12            a=s[0].real()
13            b=s[0].imag()
14        if r==a:
15            if im>=b:
16                ori = s[0]
17                a=s[0].real()
18                b=s[0].imag()
19 return ori

```

```

1 # The path between the origin point of tessel and the origin point of the graph.
2

```

```

3 def path( tess , graph ):
4     start = origin( tess )
5     end = origin( graph )
6     path1=[]
7     j=0
8
9     # Pick alternatively one edge from the end and the beginning to make the path
10    while end!=start:
11        if j==0:
12            exits=[]
13            for s in graph:
14                if s[0]==start:
15                    exits= exits + [(s[0],s[1])]
16
17            a=sqrt(((exits[0][1]-end).real())^2+((exits[0][1]-end).imag())^2)
18            next=(start,0)
19
20            for t in exits:
21                ### Check if our next point is in the same half plane as the end
point. For that, consider the perpendicular line through the start point to the

```

one that pass through the end point and the start point. Evaluate in the line's equation the end point and the one we are considering as the nextone. If the product of these two numbers is bigger than 0 they will be in the same half plane.

```

22
23     u=(start.real()-end.real())*end.real()+(start.imag()-end.imag())*end
    .imag()+(end.imag()-start.imag())*start.imag()+(end.real()-start.real())*start
    .real()
24     v=(start.real()-end.real())*t[1].real()+(start.imag()-end.imag())*t
    [1].imag()+(end.imag()-start.imag())*start.imag()+(end.real()-start.real())*
    start.real()
25
26     if (u*v)>0:
27         t[1].real
28         dist=sqrt(((t[1]-end).real())^2 + ((t[1]-end).imag())^2)
29         if dist<=a:
30             a=dist
31             next= t
32     start=next[1]
33     path1=path1+[(next[0],next[1])]
34     j=j+1
35
36
37     elif j==1:
38         exits=[]
39         for s in graph:
40             if s[0]==end:
41                 exits= exits + [(s[0],s[1])]
42
43         a=sqrt(((exits[0][1]-start).real())^2 + ((exits[0][1]-start).imag())^2)
44         next=(end,0)
45
46         for t in exits:
47             ### Check if our next point is in the same half plane as the start
    point. Same way as before but reversing the end and start points
48
49             u=(end.real()-start.real())*start.real()+(end.imag()-start.imag())*
    start.imag()+(start.imag()-end.imag())*end.imag()+(start.real()-end.real())*end
    .real()
50             v=(end.real()-start.real())*t[1].real()+(end.imag()-start.imag())*t
    [1].imag()+(start.imag()-end.imag())*end.imag()+(start.real()-end.real())*end
    .real()
51
52             if (u*v)>0:
53                 t[1].real()
54                 dist=sqrt(((t[1]-start).real())^2 + ((t[1]-start).imag())^2)
55                 if dist<=a:
56                     a=dist
57                     next= t
58             end=next[1]
59             path1=path1+[(next[1],next[0])]
60             j=j-1
61
62     # Sort the edges of the path
63     if path1==[]:
64         path2=path1
65     else:
66         path2=[path1[0]]
67         t=0
68         ori=path1[0]
69
70     while t<len(path1)-1:
71         for s in path1:

```

```

72         if s[0]==ori[1]:
73             ab=s
74             path2=path2+[(s[0],s[1])]
75         ori=ab
76         t=t+1
77     return path2

1  # Tree made with the paths from all tessels to the origin point of the graph.
2
3  def tree(graph):
4      branch=[]
5      T=tessellation(graph)
6      for t in T:
7          p=path(t,graph)
8          for s in p:
9              a=0
10             for i in branch:
11                 if s==i:
12                     a = a+1
13                 if (s[1],s[0])==i:
14                     a = a+1
15             if a==0:
16                 branch = branch + [s]
17
18     ## We need to avoid closed cells in the tree. First identify them.
19     branch2 = branch + [(s[1],s[0]) for s in branch]
20     T=[]
21
22     for t in branch2:
23         next=[t[0]-1,t[0]-1]
24         tess=[t]
25         path1=[t[0],t[1]]
26         while t[0]!= next[1]:
27             maxangle = 0
28             exits = connections(path1, branch2)
29
30             if exits == []:
31                 next[1]=t[0]
32             else:
33                 u=CC(path1[1]-path1[0])
34
35                 for s in exits:
36                     v=CC(s[1]-s[0])
37                     arg=(u/v).argument()
38                     angle=pi-arg
39                     if angle > maxangle:
40                         maxangle = angle
41                     next = [s[0],s[1]]
42
43             tess.append(tuple(next))
44             path1 = next
45             if next[1] == t[0]:
46                 T=T + [tess]
47
48     ## Eliminate repetitions of tessels
49     if T != []:
50         Ta=[T[0]]
51         for t in T:
52             q=0
53             for a in Ta:
54                 for tt in t:
55                     for aa in a:
56                         if tt == aa:
57                             q=1

```

```

58         if q==0:
59             Ta = Ta + [t]
60
61         ## Pick one different vector of each one and remove it from the tree.
62         S=[]
63         for t in Ta:
64             k=0
65             q=1
66             while q != 0:
67                 q=0
68                 for s in S:
69                     if t[k] == s:
70                         q=1
71                         k=k+1
72                     elif (t[k][1], t[k][0]) == s:
73                         q=1
74                         k=k+1
75             if q==0:
76                 S=S+[t[k]]
77
78         for s in S:
79             for t in branch:
80                 if s==t:
81                     branch.remove(s)
82                 elif (s[1],s[0])==t:
83                     branch.remove(s)
84
85         ## Every edge in the same direction
86         Or=origin(graph)
87         exits=[]
88         for s in branch:
89             if s[1]==Or:
90                 exits=exits+[s]
91         q=1
92         remaining=branch[:]
93         while q!=0:
94             q=0
95             for s in remaining:
96                 for t in exits:
97                     if s[1] == t[0]:
98                         k=0
99                         for a in exits:
100                             if s!= a:
101                                 k=k+1
102                         if k == len(exits):
103                             exits = exits + [s]
104                             q=q+1
105         if q==0:
106
107             for a in exits:
108                 for b in remaining:
109                     if a==b:
110                         remaining.remove(a)
111
112             if remaining != []:
113                 q=q+1
114                 for s in remaining:
115                     remaining.remove(s)
116                     remaining.append((s[1],s[0]))
117
118         return exits

```

```

1 # Building the elements of the paths' basis.
2

```

```

3 def element(tess , graph):
4     A=tree (graph)
5     ori=origin ( tess )
6     end=origin (graph)
7
8     if ori == end:
9         path2=[]
10    else:
11        for s in A:
12            if s[0]==ori:
13                next=s
14                path2 = [ next]
15
16        while next[1]!= end:
17            for s in A:
18                if s[0]==next [1]:
19                    path2 = path2+[s]
20                    next=s
21
22        for s in tess:
23            if s[0]==ori:
24                vect=s
25        T=tessel ( vect , graph)
26        N=len (path2 )
27        inv_path=path2 [:]
28        for i in range (0,N):
29            inv_path [ i]=path2 [N-1-i ]
30        Elem=[(s [1] , s [0]) for s in inv_path]+T+path2
31        return Elem

```

```

1 # Origin points of all tessels
2

```

```

3 def pointsO (graph):
4     p=[]
5     t=tesselation (graph)
6
7     for s in t:
8         a=origin (s)
9         p=p+[a]
10    return p

```

```

1 # Link each tessel with the edge that starts in its origin point
2

```

```

3 def par (graph):
4     p=[]
5     t=tesselation (graph)
6
7     for s in t:
8         a=origin (s)
9         for v in s:
10            if v[0]==a:
11                p=p+[v]
12
13    dictionary=dict ( zip (p,t))
14    return dictionary

```

```

1 #Fist edge of each tessel.
2

```

```

3 def bud (graph):
4     t=tesselation (graph)
5     buds=[]
6     cont=0
7     for s in t:
8         ori=origin (s)

```



```

9         for i in s:
10             if ori==i[0]:
11                 buds=buds+[i]
12     F=frame(graph)
13     orif=origin(F)
14     for i in F:
15         if orif==i[0]:
16             buds.remove(i)
17     return buds

1 #Ordered paths' basis.
2
3 def sort_paths(graph):
4     point=origin(graph)
5     path3=[point-1,point]
6     exits=[0]
7     ordination=[]
8     points=pointsO(graph)
9     cont=0
10    budl=bud(graph)
11    a=tree(graph)
12    A=[(s[1], s[0]) for s in a]
13    next=[graph[0][0],graph[0][1]]
14
15    p=0
16
17    while A != []:
18        path3=[point-1,point]
19        exits=[0]
20        while exits != []:
21            exits = connections(path3, A)
22
23        # Select the next edge. It choose the one with best angle in the tree
with respect to the path we've followed. The best angle is always the smallest
following the right hand rule. It's almost the same code as used in "tessel"
function
24
25        minangle = 2*pi
26        u=CC(path3[1]-path3[0])
27        for s in exits:
28            v=CC(s[1]-s[0])
29            arg=(u/v).argument()
30
31            angle = pi-arg
32            if angle < minangle:
33                minangle = angle
34                next = [s[0],s[1]]
35
36        # Check if we should consider the tessell before keep going with the
path.
37
38        for s in points:
39            if path3[1]==s:
40                for t in budl:
41                    if t[0]==path3[1]:
42                        v=CC(t[1]-t[0])
43                        arg=(u/v).argument()
44
45                        budangle=pi-arg
46                        if budangle < minangle:
47                            ordination=ordination+[t]
48
49        # Add the the end of the path if it is the origin point of a tessell.
50        path3 = next

```

```

51     if connections(next, A)==[]:
52         for s in points:
53             if next[1]==s:
54                 ind=0
55                 for t in ordination:
56                     if next[1]==t[0]:
57                         ind=ind+1
58             if ind==0:
59                 for a in bud1:
60                     if next[1]==a[0]:
61                         ordination=ordination+[a]
62
63     A.remove(tuple(next))
64     exits = []
65
66     # If the last tessell should be the one with the same origin point that
the one of the graph, it removes the last edge of the tree before adding this
tessell.
67     # This piece of code should solve this problem.
68     if A==[]:
69         for t in bud1:
70             if (next[0],next[1])==t:
71                 ordination=ordination+[t]
72
73     ## With this piece of code we have sorted the origin points of the tessels in
the proper way, but if we've passed several times through the same point it
will be repeated. So we are going to remove these repetitions preserving the
order.
74
75     end=[ordination[0]]
76     for s in ordination:
77         cont=0
78         for t in end:
79             if s==t:
80                 cont=cont+1
81         if cont==0:
82             end=end+[s]
83
84     # Now we have all the origin points sorted, we give the path associated to each
point in the same order.
85
86     dic=par(graph)
87
88     basis=[]
89     for s in end:
90         basis=basis+[element(dic[s], graph)]
91     return basis

```

```

1 #Product of paths
2
3 def pathprod(list):
4     lst=[]
5
6     for i in range(0, len(list)):
7         for s in range(0, len(list[i])):
8             lst=lst+[list[i][s]]
9
10    cont=1
11    while cont!=0:
12        cont=0
13
14        for i in range(0, len(lst)-1):
15            if lst[i][0]==lst[i+1][1]:
16                lst[i]='*'

```

```
17         lst[i+1]='*'
18         cont=cont+1
19     lst= [x for x in lst if x != '*']
20     return lst
```

