Anexo: Cálculo del umbral epidémico

Las ecuaciones que plasman la evolución de la fracción de infectados del sistema, introduciendo en ellas las definiciones 40-43 de la memoria, son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
P_i^{IS}(t+1) &= [1 - r(1-Q'^{IS}) - (1-r)(1-Q'^{IS}) - rQ'^{IS}]P_i^{IS}(t) \\
&+ r'[1-Q^{SI}]P_i^{SI}(t) + r'(1-r)P_i^{II}(t) + [1-Q^{SS}]Q'^{SS}P_i^{SS}(t) \ , \\
P_i^{SI}(t+1) &= [1 - (1-r')(1-Q^{SI}) - r'(1-Q^{SI}) - r'Q^{SI}]P_i^{SI}(t) \\
&+ r(1-Q'^{IS})P_i^{IS}(t) + r(1-r')P_i^{II}(t) + Q^{SS}(1-Q'^{SS})P_i^{SS}(t) \ , \\
P_i^{II}(t+1) &= [1 - rr' - r(1-r') - r'(1-r)]P_i^{II}(t) + [1-r][1-Q'^{IS}]P_i^{IS}(t) \\
&+ [1-r'][1-Q^{SI}]P_i^{SI}(t) + [1-Q^{SS}][1-Q'^{SS}]P_i^{SS}(t) \ .
\end{aligned}
$$

Para calcular la expresión teórica del umbral epidémico se van a realizar las siguientes consideraciones:

- La fracción de individuos infectados antes del umbral epidémico es pequeña:
  - $P_i^{IS} = \epsilon_i^{IS} << 1$,
  - $P_i^{SI} = \epsilon_i^{SI} << 1$,
  - $P_i^{II} = \epsilon_i^{II} << 1$,
  - $P_i^{SS} = 1 - \epsilon_i^{IS} - \epsilon_i^{SI} - \epsilon_i^{II}$.
- El sistema se encuentra en estado estacionario:
  - $\epsilon_i^{IS}(t) = \epsilon_i^{IS}(t+1)$,
  - $\epsilon_i^{SI}(t) = \epsilon_i^{SI}(t+1)$,
  - $\epsilon_i^{II}(t) = \epsilon_i^{II}(t+1)$,
  - $\epsilon_i^{SS}(t) = \epsilon_i^{SS}(t+1)$.

Introduciendo estas consideraciones en las definiciones de $Q^{SI}, Q'^{IS}, Q^{II}, Q'^{II}$ aproximando que $\prod_i^N (1-\epsilon_i) \simeq (1-\sum_i^N \epsilon_i)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
Q^{SS} &\simeq [1-\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{IS}\lambda^{IS}\alpha^{SS}+\epsilon_j^{II}\lambda^{II}\alpha^{SS})] \ , \\
Q'^{SS} &\simeq [1-\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{SI}\lambda'^{SI}\alpha'^{SS}+\epsilon_j^{II}\lambda'^{II}\alpha'^{SS})] \ , \\
Q'^{IS} &\simeq [1-\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{SI}\lambda'^{SI}\alpha'^{IS}+\epsilon_j^{II}\lambda'^{II}\alpha'^{IS})] \ . \\
Q^{SI} &\simeq [1-\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{IS}\lambda^{IS}\alpha^{SI}+\epsilon_j^{II}\lambda^{II}\alpha^{SI})]
\end{aligned}$$

Una vez realizadas éstas aproximaciones, las ecuaciones de la evolución temporal de *IS*, *SI*, *II* quedan:

$$\begin{aligned}
\epsilon_i^{IS}(t+1) &= [1-(1-r)(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{SI}\lambda'^{SI}\alpha'^{IS}+\epsilon_j^{II}\lambda'^{II}\alpha'^{IS}))-r]\epsilon_i^{IS}(t) \\
&+ r'(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{IS}\lambda^{IS}\alpha^{SI}+\epsilon_j^{II}\lambda^{II}\alpha^{SI}))\epsilon_i^{SI}(t)+r'(1-r)\epsilon_i^{II}(t) \\
&+ [\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{IS}\lambda^{IS}\alpha^{SS}+\epsilon_j^{II}\lambda^{II}\alpha^{SS})][1-\epsilon_i^{IS}(t)-\epsilon_i^{SI}(t)+\epsilon_i^{II}(t)] \ , \\
\epsilon_i^{SI}(t+1) &= [1-(1-r')\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{IS}\lambda^{IS}\alpha^{SI}+\epsilon_j^{II}\lambda^{II}\alpha^{SI})-r']\epsilon_i^{SI}(t) \\
&+ r[\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{SI}\lambda'^{SI}\alpha'^{IS}+\epsilon_j^{II}\lambda'^{II}\alpha'^{IS})]\epsilon_i^{IS}(t)+r(1-r')\epsilon_i^{II}(t) \\
&+ [\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{SI}\lambda'^{SI}\alpha'^{SS}+\epsilon_j^{II}\lambda'^{II}\alpha'^{SS})][1-\epsilon_i^{IS}(t)-\epsilon_i^{SI}(t)+\epsilon_i^{II}(t)] \ , \\
\epsilon_i^{II}(t+1) &= [1-r-r'+rr']\epsilon_i^{II}(t)+[1-r][\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{SI}\lambda'^{SI}\alpha'^{IS}+\epsilon_j^{II}\lambda'^{II}\alpha'^{IS})]\epsilon_i^{IS}(t) \\
&+ [1-r'][\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{IS}\lambda^{IS}\alpha^{SI}+\epsilon_j^{II}\lambda^{II}\alpha^{SI})]\epsilon_i^{SI}(t) \\
&+ [\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{IS}\lambda^{IS}\alpha^{SS}+\epsilon_j^{II}\lambda^{II}\alpha^{SS})][\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{SI}\lambda'^{SI}\alpha'^{SS}+\epsilon_j^{II}\lambda'^{II}\alpha'^{SS})]\cdot \\
&\cdot \ [1-\epsilon_i^{IS}(t)-\epsilon_i^{SI}(t)+\epsilon_i^{II}(t)] \ .
\end{aligned}$$

Operando y despreciando los términos de segundo grado (ya que $\epsilon_i^{IS} << 1$, $\epsilon_i^{SI} << 1$ y $\epsilon_i^{II} << 1$) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\epsilon_i^{IS}(t+1) &= [1-r]\epsilon_i^{IS}(t) + r'(1-r)\epsilon_i^{II}(t) + [\sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{IS}\lambda^{IS}\alpha^{SS} + \epsilon_j^{II}\lambda^{II}\alpha^{SS})] \ , \\
\epsilon_i^{SI}(t+1) &= [1-r']\epsilon_i^{SI}(t) + r(1-r')\epsilon_i^{II}(t) + \sum_{j=1}^{N} A_{ij}(\epsilon_j^{SI}\lambda'^{SI}\alpha'^{SS} + \epsilon_j^{II}\lambda'^{II}\alpha'^{SS}) \ , \\
\epsilon_i^{II}(t+1) &= [1-r-r'+rr']\epsilon_i^{II}(t) \ .
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando la condición de estado estacionario explicada previamente y reordenando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{cases}
(\lambda^{IS}\alpha^{SS}\sum_{j=1}^{N} A_{ij} - r\delta_{ij})\epsilon_j^{IS} + [\lambda^{II}\alpha^{SS}\sum_{j=1}^{N} A_{ij} + r'(1-r)\delta_{ij}]\epsilon_j^{II} = 0 \ , \\
(\lambda'^{SI}\alpha'^{SS}\sum_{j=1}^{N} A_{ij} - r\delta_{ij})\epsilon_j^{SI} + [\lambda'^{II}\alpha'^{SS}\sum_{j=1}^{N} A_{ij} + r'(1-r)\delta_{ij}]\epsilon_j^{II} = 0 \ , \\
[1-r-r'+rr']\,\epsilon_j^{II} = \epsilon_j^{II} \ .
\end{cases}$$

Se ha obtenido un sistema de tres ecuaciones en el que la tercera ecuación sólo se cumple para $(1-r-r'+rr') = 1$ o $\epsilon_j^{II} = 0$. Considerando la segunda solución, por las razones explicadas en la memoria, el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\begin{cases}
(\sum_{j=1}^{N} A_{ij} - \frac{r}{\lambda^{IS}\alpha^{SS}}\delta_{ij})\epsilon_j^{IS} = 0 \ , \\
(\sum_{j=1}^{N} A_{ij} - \frac{r}{\lambda'^{SI}\alpha'^{SS}}\delta_{ij})\epsilon_j^{SI} = 0 \ .
\end{cases}$$

Finalmente, se ha obtenido dos ecuaciones de autovalores cuya resolución permite calcular la expresión teórica de los puntos críticos del sistema:

$$\lambda_c^{IS} = \frac{r}{\alpha^{SS}\Lambda_{max}(A)} \ ,$$

$$\lambda_c^{SI} = \frac{r'}{\alpha'^{SS}\Lambda_{max}(A)} \ .$$