

Teorema de enumeración de Redfield-Pólya



María Vallés Morales
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Paz Jiménez Seral
28 de junio de 2017

Prólogo

La fórmula del Teorema de Redfield-Pólya relaciona la acción de un grupo G sobre un conjunto D con la acción de un grupo G sobre un conjunto, al que llamemos conjunto de coloraciones, $\Omega = \{f : D \rightarrow R\}$, con R un conjunto cualquiera.

Partiendo del lema de Burnside, que sirve para contar órbitas. Pólya da la fórmula que mide el número de órbitas de la acción de G sobre el conjunto de coloraciones a partir de un polinomio que se contruye conociendo la acción de G sobre D .

Esta teoría sirve para responder preguntas como: ¿De cuántas maneras diferentes puedo pintar una pirámide utilizando dos colores? ¿De cuántas maneras diferentes puedo pintar un cubo utilizando los colores rojo, verde y azul? ¿De cuántas maneras puedo numerar un cubo con números del 1 al 10 de manera que la suma de sus lados sea 20? Si quiero pintar un dodecaedro con rojo, verde y naranja, ¿cuántos dodecaedros de los que pinte tendrán al menos una cara roja?

Abstract

How many different ways could a pyramid be painted using only two colours? How many different ways could a cube be painted using red, green and blue colours? How many different ways could a cube be numbered from 1 to 10 so that the sum of the cube sides results was 20? If you wanted to colour in red, green or orange a dodecahedron, how many dodecahedron would have at least one red side?

Some of these problems could be made without any mathematical theory. Others are too complicated.

Firstly, a *permutation* of a set is a bijective mapping of this set upon itself.

An *action* of a group on a set relates the group with the permutations of the set, by a group homomorphism.

The *orbit* of an element is integrated by all elements of the set related by the elements of the group acting on it.

In all the mentioned problems there is a set D (the faces of the polyhedron), so that each element of D is assigned an element of a set R (colours or numbers). If the polyhedra could not be moved, the problem would be simple, we would have to count the number of mappings from D to R , and the result would be $|R|^{|D|}$, but it is clear that this number is far superior to the solution.

If we consider the movements in the space that leave the polyhedron fixed, it is considered a group that acts on the set of all these mappings, which are called *colorings*, permuting them. For example, if the face of the cube called 1 is assigned the red colour and the others are assigned the green colour, at least there is one movement that *transforms* this coloring, so that the face called 3 is assigned the red colour and the rest of them the green one. This is so because there is a movement that permutes the faces and changes face 1 on face 3. It is clear that two colorings are indistinguishable when there is a movement that changes one to one another, i.e. when they are in the same orbit.

The problem is solved counting the number of orbits that exist.

The beginning of the work indicates a formula to calculate the number of orbits, the group known and a set on which it acts, called the *Burnside's Lemma*. Using this lemma several of the questions proposed are solved.

Por example, answering the question, how many different ways a pyramid could be painted using only two colours, knowing there are $2^6 = 64$ colorings, applying the lemma, it is known there are 14 different colorings each other. Or what's the answer to the question: how many different ways could a cube be painted using red, green and blue colours? In this case there are $3^6 = 729$ colorings of cubes, of which 57 are different cubes.

As long as the set of colorations and the group of permutations acting on the set are clear, the formula can be applied. Although it can also complicate its application if the problem is complicated. Another question could be: How many different ways could a dodecahedron be painted using three different colours? In this case, the answer is 9099, in this situation it has been complicated a little more, since it was starting from $3^{12} = 531441$ colorings.

In other way, there is a historical problem that had to be solved with a much more complex algorithm for unkowning the formulas of Pólya, which will be dealt with in this work. They wanted to know how many different ways a circuit with 4 switches had to build. All the circuits that worked the same were considered equal except a permutation of their switches. $\Omega = \{f_i | f_i : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}\}$, it is said that two functions $f_1, f_2 : \{0, 1\}^4 \rightarrow \{0, 1\}$ are essentially similar if, after a suitable relabeling (i_1, i_2, i_3, i_4) of $(1, 2, 3, 4)$, we get $f_1(b_1, b_2, b_3, b_4) = f_2(b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, b_{i_4})$ for all $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \{0, 1\}^4$. The group

S_4 , what is the set of every suitable relabeling of $((1, 2, 3, 4)$, and let be the elements of the set Ω we get the total number of these functions is $2^{16} = 65536$. Each relabeling, element of G , transposed an Ω element into another element, and the number of essentially similar functions is the total orbit number. Nevertheless, in this case, counting the orbits with Burnside's Lemma could be a difficult task.

In general, it exists an important relation between the group action G upon the set D and the group action G upon the colorings set $\{f : D \rightarrow R\}$. This is the basis of Pólya's theorem. This relation greatly facilitates problem solving, since the number of elements in the set D is much less than that of the set of colorings.

First, it is defined the *index polynomials of an action*. Let be a group G acting upon a set D , the index polynomial of the action has the same variables as elements has D . This is the sum of monomials related to different group G elements.

In the cube task, the group G , the group of the movements which let be fixed the cube, has 24 elements. Considering the action of G upon the 6 faces of the cube, each element of G could be considered a permutation of the 6 cube faces. This way, the index polynomial is:

$$Z_{G,D} = \frac{1}{24} (t_1^6 + 6t_1^2 t_4 + 3t_1^2 t_2^2 + 6t_2^3 + 8t_3^2)$$

In the dodecahedron case, the group G the group of the movements which fixed the dodecahedron, has 60 elements. Considering the action of G upon the 12 faces of the dodecahedron, each element of G could be considered a permutation of the 6 cube faces. This way, the index polynomial is:

$$Z_{G,D} = \frac{1}{60} (t_1^{12} + 24t_1^2 t_5^2 + 15t_2^6 + 20t_3^4)$$

In the circuits problem, group $G = S_4$ has 24 elements. Considering the action of G upon the $D = \{0, 1\}^4$ each element of G could be considered a permutation of the 16 elements of D . This way, the index polynomial is:

$$Z_{G,D} = \frac{1}{24} (t_1^{16} + 6t_1^8 t_2^4 + 3t_1^4 t_2^6 + 8t_1^4 t_3^4 + 6t_1^2 t_2^4 t_3^3)$$

The most simple application of Pólya's Theorem is finding the orbit number when G acts upon the colorings set. These orbits are called *designs*, so that the object would be finding the design number. Pólya's Theorem says that the number of designs results replacing in the index polynomial of the action every variables for $|R|$. In cube and dodecahedron cases $|R| = 3$, so replacing each t_i for 3, we get to the value of polynomial are 57 y 9099, severally. The same way, in the circuits problem $|R| = 2$ and replacing the polynomial we get 3984.

There are other problems that refers to particular designs. Pólya's Theorem helps us to find the solution.

Could be assigned to each element of R a *weight* $\omega(r)$, and to each coloring f it is defined:

$$\omega(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d)).$$

It is clear that two colorings in the same design have the same weight. The design weight is the weight of any of its colorings. Let be *inventory of designs* the sum of design weights:

$$ID = \sum \{\omega(F) | F \text{ design}\}.$$

In the particular case of $\omega(r) = 1$, ID the result is the number of designs of coloring sets.

Knowing the index polynomial of the action upon the set D and the assigned weights to each colours, we get to the **Pólya's Theory of Enumeration**: this is the issue is going to be addressed in this work.

The inventory of designs, which has just been named, is obtained as follows:

$$ID = Z_{G,D} \left(\sum_{r \in R} \omega(r), \sum_{r \in R} \omega(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} \omega(r)^k \right).$$

Thanks to this formula this question could be answered: how many different ways could a cube be numbered from 1 to 10 so that the sum of the cube sides results let be 20? Let be the index polynomial of the action of G upon D and the colours set $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. In this case, it is chosen assign i the weight $\omega(i) = x^i$. So if a coloring f , and its design have weight x^k , it means the sum of the numbers in the faces is k . The inventory of designs would be an x polynomial and the coefficient of x^k would be the number of designs with weight x^k . As we want to know how many times it sums 20, knowing the polynomial, we have to search the coefficient of x^{20} and the answer is 490. Knowing the polynomial let me know the sum of the all values that could be summed the faces cube.

If we take other weights, we could solve other questions as: if you wanted to colour in red, green or orange a dodecahedron, how many dodecahedron would have at least one red side? The answer is 9003. Maybe this process is less direct, but it's simple and without mistakes.

I Hope this work helps you to understand de Redfield-Pólya's Theorem and I wish it could be useful in your life, at least, sure it could help you to overcome your headache.

Índice general

Prólogo	III
Abstract	v
1. Conceptos básicos	1
1.1. Definiciones	1
1.2. Ejemplos previos	3
2. Polinomio indicador de una acción	9
2.1. Definiciones	9
2.2. Ejemplos polinomio	9
3. Teorema de Redfield-Pólya	15
3.1. Conceptos	15
3.2. Teorema de Redfield-Pólya	17
3.3. Ejemplos	21
A. Anexo I	27
A.1. Polinomio 7 colores	27
Bibliografía	31

Capítulo 1

Conceptos básicos

Vamos a utilizar varios conceptos conocidos, ya que han sido estudiados durante la carrera y que conviene recordar para entender el trabajo.

1.1. Definiciones

Permutaciones

- **Permutación** de un conjunto $\Omega \neq \emptyset$, es una aplicación biyectiva de este conjunto sobre sí mismo. Denotamos por Per_{Ω} a $\{\alpha | \alpha : \Omega \rightarrow \Omega \text{ biyectiva}\}$, de manera que si α y $\beta \in Per_{\Omega}$ expresaremos $\beta\alpha = \alpha \circ \beta$. Además, si Ω es finito, para algún n tenemos: $\alpha^n = 1$.

En todo el trabajo consideraremos a Ω finito, de manera que si $\Omega = \{1, \dots, n\}$, entonces $\Omega = S_n$. En S_n la operación $\beta\alpha = \alpha \circ \beta$ es asociativa.

- **Ciclo** de longitud k es una permutación α tal que $\exists a_1, a_2, \dots, a_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ donde los a_i son distintos, de manera que $a_i^{\alpha} = a_{i+1}$ para $i = 1, \dots, k-1$ y $a_k^{\alpha} = a_1$ y todos los demás elementos quedan fijos por α . Se escribe (a_1, a_2, \dots, a_k) y si no da lugar a error lo escribiremos $(a_1 a_2 \dots a_k)$.

Las permutaciones se expresan de manera única como producto de ciclos disjuntos. Por ejemplo, si $n = 7$, una permutación puede ser $(143)(52)(6)(7)$, donde como se ha explicado, 1 va a 4, 4 va a 3 y 3 va a 1, 5 va a 2 y 2 va a 5 y 6 y 7 van a ellas mismas.

- **Conjugados:** Dos elementos, α y $\beta \in S_n$ se dicen conjugados si $\exists \gamma \in S_n$, de manera que $\gamma^{-1}\alpha\gamma = \beta$. La aplicación $\sigma_{\gamma} : S_n \rightarrow S_n$ definida por $\sigma_{\gamma}(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma$ para cada $\alpha \in S_n$. Satisface $\sigma_{\delta} \circ \sigma_{\gamma} = \sigma_{\gamma\delta}$ para todo $\gamma, \delta \in S_n$. Además, dos permutaciones son conjugadas \Leftrightarrow tienen la misma estructura de ciclos.

Grupos

- **Grupo:** Es un conjunto G con una operación binaria que verifica:
 - ◊ (Propiedad Asociativa) $\forall g, h, k \in G$ se verifica: $g \cdot (h \cdot k) = (g \cdot h) \cdot k$.
 - ◊ (Existencia del elemento neutro) \exists un elemento $1 \in G$ (llamado neutro) tal que: $g \cdot 1 = 1 \cdot g = g \ \forall g \in G$.
 - ◊ (Existencia de inverso) Para cada elemento $g \in G$, \exists otro elemento $h \in G$ (llamado inverso de g) tal que: $g \cdot h = h \cdot g = 1$.
- **Subgrupo** de G es un subconjunto que sigue siendo grupo con la operación restringida. Se escribe $H \leq G$.
- **Grupo simétrico:** S_n con la operación biyectiva definida anteriormente, formado por la composición de estas aplicaciones.

- **Homomorfismo** entre dos grupos (G_1, \cdot) y (G_2, \cdot) es un aplicación $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ de manera que $\phi(g \cdot g') = \phi(g) \cdot \phi(g') \forall g, g' \in G_1$.
- **Coclase a izquierda** de g módulo H : si $H \leq G$ y $g \in G$ es $gH = \{x \in G | x = gh \text{ para algún } h \in H\}$. La **coclase a derecha** de g módulo H se define de manera análoga: $Hg = \{x \in G | x = hg \text{ para algún } h \in H\}$.
- **Índice**: $\{Hg | g \in G\}$ es una partición de G , el índice es $|\{Hg | g \in G\}| = |G : H|$. Se tiene que $|Hg| = |H|$ y por tanto, $|G| = |H||G : H|$.

Si G es finito $\emptyset \neq H \subseteq G$ es subconjunto $\Leftrightarrow \forall h, k \in H$ se tiene $h \cdot k \in H$.

En todo el trabajo consideraremos a G finito.

Acción de un grupo sobre un conjunto

- **Acción**: Sea un grupo G y un conjunto Ω . Decimos que G actúa sobre Ω si tenemos un homomorfismo de grupos

$$\varphi : G \longrightarrow Per_{\Omega}$$

Si el homomorfismo es inyectivo, entonces G es isomorfo a un subgrupo de permutaciones de Ω . En este caso, se dice que la acción es fiel, a los elementos de G los podemos considerar aplicaciones biyectivas de Ω en Ω

Si no hay lugar a error, diremos que para $i \in \Omega$ y para $g \in G$ la imagen de $\varphi(g)$ es i^g , es decir, $\varphi(g) : i \rightarrow i^{\varphi(g)} = i^g$. Donde $(i^{g_1})^{g_2} = i^{g_1 g_2}$ y dados $i \neq j$ tenemos $i^g \neq j^g$.

- **Órbita** de $i \in \Omega$ es $O(i) = \{i^g | g \in G\} \subseteq \Omega$.

- **Estabilizador** de i es $St(i) = \{g \in G | i^g = i\} \leq G$.

Veamos que $St(i)$ es subgrupo. Como G finito bastará comprobar las siguientes dos condiciones:

- ◊ $St(i)$ no es vacío pues $1 \in St(i)$ siempre: $\varphi(1) = 1_{\Omega}$ (la identidad en Ω).
- ◊ Si $g, h \in St(i)$. Tenemos $i^{gh} = i^h = i$.

Teorema 1.1. *Sea G un grupo que actúa sobre Ω , $i \in \Omega$, O la órbita de i , H el estabilizador de i .*

a) Entonces, se tiene que $|O| = \frac{|G|}{|H|}$.

- b) El conjunto de todas las órbitas forman una partición de Ω .
- c) El estabilizador de i^g es H^g , en particular tiene el mismo orden que H .
- d) **Lema de Burnside:** El número de órbitas es $|G|^{-1} \sum_{g \in G} |Fi(g)|$, donde $Fi(g) = \{i \in \Omega | i^g = i\}$

Demostración. a) $i^{\bar{g}} = i^g \iff i^{\bar{g}g^{-1}} = i \iff \bar{g}g^{-1} \in H \iff \bar{g} = hg \text{ para algún } h \in H$.

El cardinal de H es el mismo que el de $Hg = \{hg | h \in H\}$, luego hay $|H|$ elementos de G que me llevan i al mismo i^g . Por lo tanto $|\{i^g | g \in G\}|$ coincide con el número de coclases que hay para H , que es el índice $|G : H| = |G|/|H|$.

- b) Sean dos elementos $i, j \in \Omega$ de manera que sus órbitas tienen un elemento en común, vamos a probar que se trata de la misma órbita. Así las órbitas son subconjuntos del conjunto Ω disjuntos y que al unirlos se completa Ω . Si $\exists g_1, g_2 \in G$ tales que $i^{g_1} = j^{g_2}$, $i^{g_1 g_2^{-1}} = i^x = j$, con $x = g_1 g_2^{-1}$, $O(j) = \{j^g | g \in G\} = \{i^{xg} | g \in G\} \subseteq O(i)$ y el contenido $O(i) \subseteq O(j)$ es análogo.

- c) Sean i, j elementos de la misma órbita, $\exists g \in G$ tal que $i^g = j$. El $St(j)$ es $\{g^{-1}hg | h \in H\}$. En efecto, $j^{g^{-1}hg} = i^{hg} = i^g = j$. Recíprocamente, si x estabiliza a j se tiene $j^x = j$, por lo tanto $i^{gx} = j^x = j = i^g$ entonces $i^{gxg^{-1}} = i^x$, entonces $gxg^{-1} \in H$. De esta manera, $\exists h \in H$ tal que $gxg^{-1} = h$ y $x = g^{-1}hg$. Es claro que $|g^{-1}Hg| = |H|$.
- d) Consideramos el conjunto de pares $\{(i, g) \in \Omega \times G | i^g = i\}$. Lo que hacemos es contar los elementos de dos modos y vemos que tenemos que el número de pares es $\sum_{i \in \Omega} |St(i)| = \sum_{g \in G} |Fi(g)|$ donde $St(i)$ es el estabilizador de i y $Fi(g) = \{i \in \Omega | i^g = i\}$, es decir, son los elementos de Ω que se quedan fijados. Como por c) sabemos que para dos elementos de la misma órbita los estabilizadores tienen el mismo orden, si las órbitas distintas son $O_i = O(i)$ y elegimos un elemento $x_i \in \Omega$ y en particular $x_i \in O_i$, se tiene que $\sum_{i=1, \dots, r} |St(x_i)||O_i| = \sum_{g \in G} |Fi(g)|$. De a) tenemos que $|O_i| = \frac{|G|}{|St(x_i)|}$, por lo tanto, sustituyendo en todas las i queda:
- $$r|G| = \sum_{g \in G} |Fi(g)| \text{ y por lo tanto, tenemos que el número de órbitas es } r = |G|^{-1} \sum_{g \in G} |Fi(g)|.$$
-

1.2. Ejemplos previos

Ejemplo 1.2. ¿De cuántas formas puedo colorear las caras laterales de una pirámide hexagonal con 2 colores?

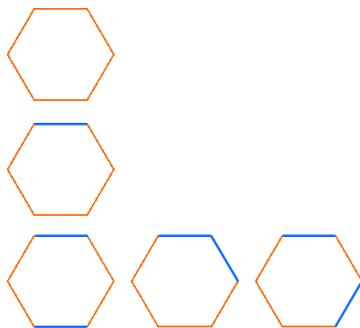
Es un problema que podemos resolver a mano o aplicando el Lema de Burnside, que nos da la fórmula para contar órbitas, viendo que llegamos al mismo resultado.

Si la pirámide no se pudiera mover el número de pirámides fijas coloreadas es $2^6 = 64$, 2 por los colores distintos utilizados y 6 por el número de caras de la pirámide.

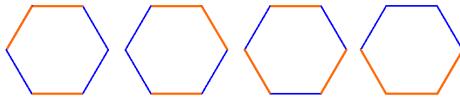
Visualmente dibujaremos hexágonos regulares a los que colorearemos sus lados, pero teóricamente nos estaremos refiriendo a pirámides.

Vamos a colorear las caras de la pirámide con azul y naranja y vamos a ver cuantas pirámides distintas nos salen, comprobando que hemos dibujado las 64 pirámides fijas. Es decir, si se pueden mover, cuantas de estas 64 pirámides nos quedan al juntar aquellas que con un movimiento se pasa de una a otra.

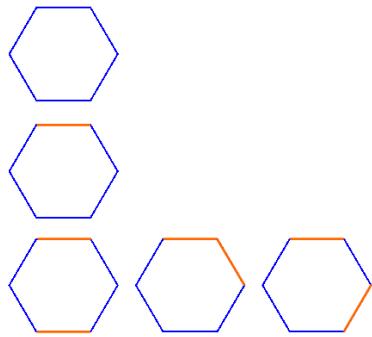
- Todas las caras naranjas. Hay una forma de colorearlo y sale 1 pirámide fija.
- 1 cara azul y 5 naranjas. Hay una forma de colorearlo y salen 6 pirámides fijas diferentes.
- 2 caras azules y 4 naranjas. Hay tres formas de colorearlo. De la primera salen 3 pirámides fijas, de la segunda y de la tercera salen 6 pirámides fijas de cada una.



- 3 caras azules y 3 caras naranjas. Hay cuatro formas de colorearlo. De la primera, la segunda y la cuarta salen 6 pirámides fijas y de la tercera salen 2.



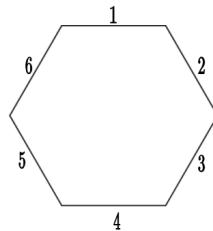
- Todas las caras azules. Hay una forma de colorearlo y sale 1 pirámide fija.
- 1 cara naranja y 5 azules. Hay una forma de colorearlo y salen 6 pirámides fijas diferentes.
- 2 caras naranjas y 4 azules. Hay tres formas de colorearlo. De la primera salen 3 pirámides fijas, de la segunda y de la tercera salen 6 pirámides fijas de cada una.



De esta manera conseguimos: $1 + 6 + 3 + 6 + 6 + 6 + 6 + 2 + 1 + 6 + 3 + 6 + 6 = 64$ pirámides fijas, como queríamos mostrar, pero solo 14 formas distintas de colorear la pirámide si consideramos como las mismas aquellas que al aplicarles movimientos pasan de una a otra. Conforme va aumentando el número de caras o colores se complica mucho este procedimiento.

Vamos a realizar el problema aplicando el Lema de Burnside, para ello primero vamos a definir correctamente todo lo que utilizamos.

Numeramos las caras de la pirámide, del 1 al 6 en el sentido de las agujas del reloj, como vemos en la imagen, considerando $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ el conjunto de las 6 caras de la pirámide. Consideramos el conjunto $R = \{\text{naranja, azul}\}$ como el conjunto de los colores que utilizamos y consideramos $\Omega = \{D \rightarrow R\}$ como el conjunto de las pirámides fijas ya coloreadas.



Los movimientos que consideramos deben dejarla fija en la misma posición, estos movimientos son giros con un eje que atraviesa el vértice y el centro de la base de la pirámide y los represento con este grupo $\{\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^6 = 1\}$ siendo $\alpha = 2\pi/6$. Cada uno de estos giros lo puedo representar como una permutación de las 6 caras de la pirámide, siendo $G = \{(123456), (135)(246), (14)(25)(36), (153)(264), (165432), 1\}$, ya que el grupo G actúa sobre el conjunto de las 6 caras de la pirámide.

Partimos de la misma idea del procedimiento anterior, consideramos como iguales aquellas pirámides que cuando actúa G sobre Ω pasan de una pirámide a otra igual.

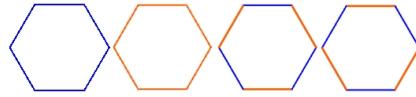
Recordamos el Lema de Burnside, que es el apartado d) del teorema 1,1, que nos da la fórmula para contar órbitas: $|G|^{-1} \sum_{g \in G} |Fi(g)|$, donde $Fi(g) = \{i \in \Omega | i^g = i\}$, por lo tanto para cada $g \in G$

consideramos distintos $F_i(g)$, donde i es cada uno de los elementos de Ω , donde $|D| = 6$ y $|R| = 2$, luego son $2^6 = 64$, es decir, las 64 pirámides fijas. De manera que si el número de órbitas, nos dice cuantos elementos $i \in \Omega$ son totalmente diferentes, en realidad estamos viendo cuantas pirámides son realmente diferentes. Vamos a conocer entonces el número de órbitas:

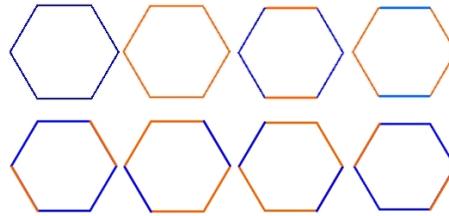
- Si $g = (123456)$: Solo se quedan como están, aquellas que todas sus caras son iguales, es decir, las que tienen todas las caras naranjas y todas las caras azules, luego $|F_i(123456)| = 2^1 = 2$.



- Si $g = (135)(246)$: Solo se quedan como están, aquellas que tienen sus caras 1,3,5 y 2,4,6, del mismo color, así que consideramos las que tienen todas sus caras iguales y las que tienen sus caras con los colores alternados:, luego $|F_i(135)(246)| = 2^2 = 4$.



- Si $g = (14)(25)(36)$: Solo se quedan como están, aquellas que tienen sus caras 1,4; 2,5 y 3,6, del mismo color, así que consideramos que cada uno de los pares de caras se pintan del mismo color, luego $|F_i(14)(25)(36)| = 2^3 = 8$.



- Si $g = (153)(264)$: Análogo al caso $g = (135)(246)$, luego $|F_i(153)(264)| = 2^2 = 4$.

- Si $g = (165432)$: Análogo al caso $g = (123456)$, luego $|F_i(165432)| = 2^1 = 2$.

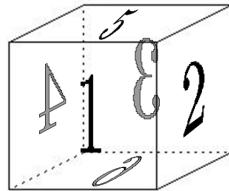
- Si $g = 1$ (la identidad): Se quedan todas fijas, así que todas son ella misma, luego $|F_i(1)| = 64$.

Por lo tanto, tenemos: $\sum_{g \in G} |F_i(g)| = 64 + 2 + 4 + 8 + 4 + 2 = 84$, si $|G| = 6$, tenemos que el número de órbitas es: $\frac{84}{6} = 14$, por lo tanto hay 14 pirámides que consideramos diferentes, es decir, lo que habíamos obtenido con el anterior procedimiento.

Lo bueno de este procedimiento es que podemos aumentar el número de colores, el número de caras o el número de elementos en G , de manera que, mientras tengamos claro cuales son, la dificultad no aumentará.

Ejemplo 1.3. ¿De cuántas formas se puede colorear las caras de un cubo con tres colores?

Ahora consideramos un conjunto al que llamamos D , ahora el conjunto de las caras de un cubo, las cuales numeramos como vemos en la figura, de manera que $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Otro conjunto R , el conjunto de los colores con los que vamos a colorear el cubo, consideramos por ejemplo: $R = \{\text{rojo}, \text{azul}, \text{verde}\}$. Y consideramos $\Omega = \{D \rightarrow R\}$ como el conjunto de las caras del cubo ya coloreadas, a este conjunto de aplicaciones en el capítulo 3 le llamamos coloración.



Consideramos también el grupo de movimientos que dejan fijo al cubo, como cada movimiento pasa una cara del cubo a otra, este grupo actúa sobre las 6 caras del cubo, lo puedo representar como una permutación de las 6 caras, siendo este grupo G el que describiremos a continuación.

Giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos caras opuestas: hay tres ejes de 1 a 3, de 2 a 4 y de 5 a 6, de manera que consideramos las siguientes permutaciones, dadas por ciclos, $\{(1234), (13)(24), (1432), (1635), (13)(46), (1536), (2645), (24)(65), (2546)\}$. Giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas: hay seis ejes estos que vienen denotados por $\{(13)(26)(54), (13)(25)(64), (14)(65)(23), (12)(34)(56), (15)(24)(36), (16)(24)(35)\}$. Giros cuyos ejes son los que unen dos vértices opuestos: hay 4 ejes de este tipo, y denotamos a sus permutaciones como $\{(125)(463), (152)(436), (145)(632), (154)(236), (345)(612), (354)(621), (235)(164), (253)(146)\}$. Y consideramos por último la identidad, que deja fija todas las caras del cubo. Este grupo tiene 24 elementos.

G actúa sobre el conjunto de los cubos coloreados fijos, pues cada elemento de G pasa de un cubo a otro y los cubos que son realmente distintos se corresponden con las órbitas de esta acción. Vamos a ver cuantos hay:

- Si $g = (1234)$. Se quedan como están aquellos que tienen sus caras 1, 2, 3 y 4 del mismo color, y 5 y 6 como quieran, de manera que consideramos $|F_i(1234)| = 3^3 = 27$. Para otros movimientos de este tipo el cálculo es igual, hay 6 movimiento más de este tipo, entonces tenemos $6 \cdot 27 = 162$.
- Si $g = (13)(24)$. Se quedan como están aquellos que tienen sus caras 1, 3 por un lado y 2, 4 por otro del mismo color, y 5 y 6 como quieran, de manera que consideramos $|F_i(13)(24)| = 3^4 = 81$. Para otros movimientos de este tipo el cálculo es igual y como hay 3 movimiento más de este tipo, tenemos $3 \cdot 81 = 243$.
- Si $g = (13)(26)(54)$. Se quedan como están aquellos que tienen sus caras 1, 3 por un lado, 2, 6 por otro y 5, 4 por otro del mismo color, de manera que consideramos $|F_i(13)(26)(54)| = 3^3 = 27$. Para otros movimientos de este tipo el cálculo es igual y como hay 6 movimiento más de este tipo, tenemos $6 \cdot 27 = 162$.
- Si $g = (125)(463)$. Se quedan como están aquellos que tienen sus caras 1, 2, 5 por un lado y 4, 6, 3 por otro del mismo color, de manera que consideramos los que $|F_i(125)(463)| = 3^2 = 9$. Para otros movimientos de este tipo el cálculo es igual y como hay 8 movimiento más de este tipo, tenemos $8 \cdot 9 = 72$.
- Si $g = 1$: Se quedan todas fijas, así que todas son ella misma, luego $|F_i(1)| = 3^6 = 729$.

Por lo tanto,

$$\sum_{g \in G} |F_i(g)| = 6 \cdot 27 + 3 \cdot 81 + 6 \cdot 27 + 8 \cdot 9 + 729 = 162 + 243 + 162 + 72 + 729 = 1368,$$

si $|G| = 24$, tenemos que el número de órbitas es: $\frac{1368}{24} = 57$. Por lo tanto, llegamos a que hay 57 órbitas o 57 formas distintas de colorear un cubo con 3 colores.

Ejemplo 1.4. ¿ De cuántas formas se pueden colorear las caras de un dodecaedro con tres colores?

Dentro de los problemas de colorear caras de figuras podemos complicarlo más, el dodecaedro tiene más caras que el cubo y también más movimientos que lo dejan fijo. Consideramos ahora el

conjunto $D\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, como el conjunto de las caras de un dodecaedro, las cuales numeramos como vemos en la figura. Otro $R = \{\text{rojo, azul, verde}\}$, como el conjunto de los colores con los que vamos a colorear el dodecaedro. Y consideramos $\Omega = \{D \rightarrow R\}$ como el conjunto de las coloraciones fijas del dodecaedro.



Consideramos también el grupo de movimientos que dejan fijo al dodecaedro, como cada movimiento pasa una cara a otra, este grupo actúa sobre las 12 caras del dodecaedro, lo puedo representar como una permutación de las 12 caras, siendo este grupo G el que describiremos a continuación.

Giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos caras opuestas: hay seis de estos ejes de 1 a 12, de 2 a 10, de 3 a 11, de 4 a 7, de 5 a 8 y de 6 a 9, de manera que de cada eje consideramos cuatro ciclos como las siguientes, dadas por el eje de 1 a 12: $\{(2, 3, 4, 5, 6)(7, 8, 9, 10, 11)(1)(12), (2, 4, 6, 3, 5)(7, 9, 11, 8, 10)(1)(12), (2, 5, 3, 6, 4)(7, 10, 8, 11, 9)(1)(12), (2, 6, 5, 4, 3)(7, 11, 10, 9, 8)(1)(12)\}$.



Giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas: hay quince ejes los cuales tienen permutaciones como las siguientes, dadas por el eje de la figura: $\{(1, 4)(3, 5)(7, 12)(8, 11)(2, 10)(6, 9)\}$.



Giros cuyos ejes son los que unen dos vértices opuestos: hay diez ejes de este tipo, y denotamos a sus permutaciones las siguientes $\{(6, 5, 11)(7, 1, 10)(3, 9, 8)(2, 4, 12), (6, 11, 5)(7, 10, 1)(3, 8, 9)(2, 12, 4)\}$.



Y consideramos por último la identidad, que deja fija todas las caras del dodecaedro. Este grupo tiene 60 elementos.

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, G actúa sobre el conjunto de los dodecaedros coloreados fijos, pues cada elemento de G pasa de un dodecaedro a otro y los dodecaedros que son realmente distintos se corresponden con las órbitas de esta acción. Vamos a ver cuantos hay:

- Si $g = (2, 3, 4, 5, 6)(7, 8, 9, 10, 11)$. Solo se quedan como están, aquellos que tienen sus caras 2, 3, 4, 5 y 6 del mismo color, 7, 8, 9, 10 y 11 otro pero el mismo y 1 y 12 como quieran, de manera que consideramos $|F_i(2, 3, 4, 5, 6)(7, 8, 9, 10, 11)| = 3^4 = 81$. Como hay 24 permutaciones así, tenemos $24 \cdot 81 = 1944$.
- Si $g = (9, 10)(4, 12)(11, 3)(8, 5)(6, 2)(1, 7)$. Se quedan como están, aquellos que tienen sus caras 1, 7; 2, 6; 3, 11; 4, 12; 5, 8 y 9, 10 del mismo color, de manera que consideramos $|F_i(9, 10)(4, 12)(11, 3)(8, 5)(6, 2)(1, 7)| = 3^6 = 729$. Como hay 15 movimiento más así, tenemos $15 \cdot 729 = 10935$.
- Si $g = (6, 5, 11)(7, 1, 10)(3, 9, 8)(2, 4, 12)$. Se quedan como están, aquellos que tienen sus caras 6, 5, 11; 7, 1, 10; 3, 9, 8 y 2, 4, 12 del mismo color, de manera que consideramos $|F_i(6, 5, 11)(7, 1, 10)(3, 9, 8)(2, 4, 12)| = 3^4 = 81$. Como hay 20 movimiento más así, tenemos $20 \cdot 81 = 1620$.
- Si $g = 1$: Se quedan todas fijas, así que todas son ella misma, luego $|F_i(1)| = 3^{12} = 531441$.

Por lo tanto,

$$g \in G |F_i(g)| = 24 \cdot 81 + 15 \cdot 729 + 20 \cdot 81 + 531441 = 1944 + 10935 + 1620 + 531441 = 545940,$$

si $|G| = 60$, tenemos que el número de órbitas es: $\frac{545940}{60} = 9099$. Por lo tanto, llegamos a que hay 9099 órbitas o 9099 formas distintas de colorear un dodecaedro con 3 colores.

Capítulo 2

Polinomio indicador de una acción

2.1. Definiciones

Si un grupo G actúa sobre un conjunto D con $|D| = n$. A cada elemento del grupo $g \in G$ le corresponde un $\alpha \in S_n$, que se puede expresar de manera única como producto de ciclos disjuntos.

- **Tipo de permutación** α es (j_1, j_2, \dots, j_n) si α como producto de ciclos tiene j_k ciclos de longitud k , de manera que, $1 \cdot j_1 + 2 \cdot j_2 + \dots + n \cdot j_n = n$.
- **Tipo de ciclo** $g \in G$ es el de su imagen $\alpha \in S_n$

Por ejemplo, si consideramos que $\alpha \in S_7$ y es de la siguiente forma: (134)(56)(2)(7) la forma de denotar el tipo de ciclo que tendremos nosotros será: (2, 1, 1, 0, 0, 0, 0).

Dos elementos conjugados tienen el mismo tipo de ciclos.

- **Monomial** de g : $Mon(g) = t_1^{j_1} \cdot t_2^{j_2} \cdot \dots \cdot t_n^{j_n}$ donde t_1, \dots, t_n son distintas variables.
- **Polinomio indicador de la acción de G sobre D** : es el siguiente polinomio en \mathbb{Q} :

$$Z_{G,D} = |G|^{-1} \sum \{Mon(g) : g \in G\}$$

Dos elementos son conjugados tienen el mismo monomio, ya que tienen el mismo tipo de ciclos.

2.2. Ejemplos polinomio

Ejemplo 2.1. Sea $G = S_3$ y $D = \{1, 2, 3\}$. Siendo $G = \{1, (12), (13), (23), (123), (132)\}$.

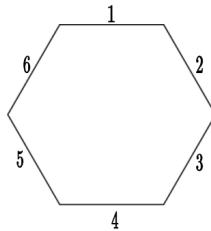
Por lo tanto, vemos que el tipo de ciclo en 1 es (3, 0, 0), su monomial es t_1^3 y hay un único tipo de ciclo así, los 2-ciclos, por ejemplo (13) en realidad es (13)(2), por lo tanto su tipo de ciclo es (1, 1, 0), su monomial $t_1 t_2$ y hay 3 ciclos de esta forma y por último los 3-ciclos, por ejemplo (123) tienen el tipo de ciclo (0, 0, 1), el monomial es t_3 y hay 2 ciclos de esta forma. Con todo esto llegamos a que el polinomio es

$$Z_{G,D} = \frac{1}{6}(t_1^3 + 3t_1 t_2 + 2t_3)$$

Ejemplo 2.2. Acción de G sobre las caras de una pirámide hexagonal

Sea G cada uno de los giros representados como una permutación de las caras de la pirámide. Que en realidad son giros con un eje que atraviesa el vértice y el centro de la base de la pirámide y se representan también como $\{\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^6 = 1\}$ siendo $\alpha = 2\pi/6$.

Si numeramos las caras de la pirámide hexagonal regular del 1 al 6, considerando el conjunto de las caras de la pirámide $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y podemos representar a los elementos de G como elementos de S_6 , consideramos $G = \{(123456), (135)(246), (14)(25)(36), (153)(264), (165432), 1\}$.

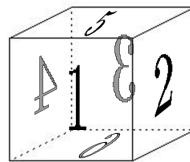


Por lo tanto, los tipos de ciclos que hay son: uno tipo $(6,0,0,0,0,0)$, 2 tipo $(0,0,0,0,0,1)$, 2 tipo $(0,0,2,0,0,0)$ y uno tipo $(0,3,0,0,0,0)$, y el polinomio en este caso es:

$$Z_{G,D} = \frac{1}{6} (t_1^6 + 2t_6 + 2t_3^2 + t_2^3).$$

Ejemplo 2.3. Acción de G sobre las caras de un cubo

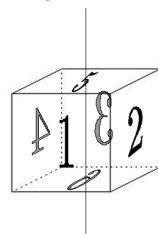
Recordamos que $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es el conjunto de caras del cubo y que G es el grupo de movimientos directos del espacio que fijan un cubo, este grupo de movimientos serán de tres tipos: Giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos caras opuestas: hay tres ejes de 1 a 3, de 2 a 4 y de 5 a 6, les llamaremos $i = 1, 2$ y 3 respectivamente. Para cada uno de estos ejes hay tres giros distintos, dos de orden 4 y un 2-ciclos de orden 2, los denotaremos como ρ_{i1}, ρ_{i2} y ρ_{i3} respectivamente. Giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas: hay seis ejes. Hay un giro de grado π para cada uno, a estos les llamaremos $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ y μ_6 . Y giros cuyos ejes son los que unen dos vértices opuestos: hay 4 ejes de este tipo, a los que llamamos $i = 1, 2, 3$ y 4. Hay dos giros de orden 3 en cada eje, los denotamos como α_{i1} y α_{i2} . La acción de G sobre el conjunto de las 6 caras del cubo tiene 24 elementos.



Dado D , si consideramos la acción sobre las 6 caras del cubo, tenemos:

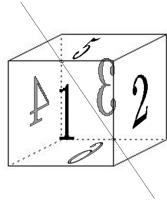
- La identidad, 1, que deja fija las 6 caras. De aquí sacaremos que el tipo de ciclo es $(6,0,0,0,0,0)$. Y el monomio t_1^6 .

Figura 2.1:



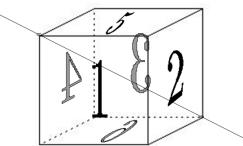
- Del tipo de movimiento *giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos caras opuestas*, hay tres ejes de 1 a 3, de 2 a 4 y de 5 a 6, les llamaremos $i = 1, 2$ y 3 respectivamente. Para cada uno de estos ejes hay tres giros distintos, dos de orden 4 y un 2-ciclos de orden 2, los denotaremos como ρ_{i1}, ρ_{i2} y ρ_{i3} respectivamente. Si consideramos el eje de giro de la figura, cuando $i = 3$, y que las permutaciones son de una cara a otra del cubo, tenemos que $\rho_{31} = (1234)(5)(6)$, $\rho_{32} = (1432)(5)(6)$ y $\rho_{33} = (13)(24)(5)(6)$. Por lo tanto, para los movimientos como ρ_{i1} y ρ_{i2} el tipo de ciclo es $(2,0,0,1,0,0)$ y como ρ_{i3} es $(2,2,0,0,0,0)$. Cuyos monomios son $t_1^2 t_4$ y $t_1^2 t_2^2$ respectivamente. Recordando que hay 6 y 3 monomios de cada tipo respectivamente.

Figura 2.2:



- Del tipo de movimiento *giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas*, hay seis ejes. Hay un giro de grado π para cada uno, a estos les llamaremos $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ y μ_6 . De la misma manera que en el anterior, vemos un ejemplo, si consideramos el eje de giro de la figura y que las permutaciones son de una cara a otra del cubo, tenemos que $\mu_1 = (15)(24)(36)$. Así que para estos movimientos, el tipo de ciclo es $(0, 3, 0, 0, 0, 0)$. Cuyo monomio es t_2^3 . Y teniendo en cuenta que de este tipo hay 6 monomios.

Figura 2.3:



- Por último, del tipo de movimiento *giro cuyo eje pasa por dos vértices opuestos*, hay cuatro ejes de este tipo, a los que llamamos $i = 1, 2, 3$ y 4 . Hay dos giros de orden 3 en cada eje, los denotamos como α_{i1} y α_{i2} . Vamos a ver un ejemplo, si consideramos el eje de giro de la figura y que las permutaciones son de una cara a otra del cubo, tenemos que $\alpha_{11} = (145)(263)$ y $\alpha_{12} = (154)(236)$. Por lo tanto, para estos movimientos el tipo de ciclo es $(0, 0, 2, 0, 0, 0)$. Cuyo monomio es t_3^2 . Y hay 8 monomios de este tipo.

Por lo tanto, con todo esto llegamos a que el polinomio indicador de la acción de G sobre las 6 caras del cubo es:

$$Z_{G,D} = \frac{1}{24} (t_1^6 + 6t_1^2 t_4 + 3t_1^2 t_2^2 + 6t_2^3 + 8t_3^2)$$

Ejemplo 2.4. Acción de G sobre los vértices de un cubo

En el caso anterior hemos considerado la acción de G sobre las 6 caras del cubo, podríamos haber considerado otras acciones distintas.

El polinomio indicador de la acción de G sobre el conjunto de los 8 vértices, numerando con 1, 2, 3, 4 los vértices de la cara 5 y con 5, 6, 7, 8 los de la cara 6. Se ve como se expresa cada movimiento como permutación de los 8 vértices:

- La identidad, 1, que deja fija los 8 vértices. De aquí sacaremos que el tipo de ciclo es $(8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Y el monomio t_1^8 .
- Del tipo de movimiento *giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos caras opuestas*. Para cada uno de estos ejes hay tres giros distintos, dos de 2-ciclos de orden 4 y uno formado por 4 2-ciclos, se denotan como en el ejemplo anterior, ρ_{i1}, ρ_{i2} y ρ_{i3} respectivamente. Cuando $i = 3$, el de la figura 2.1 tenemos que $\rho_{31} = (1234)(5678)$, $\rho_{32} = (1432)(5876)$ y $\rho_{33} = (13)(24)(57)(68)$. Por lo tanto, para los movimientos como ρ_{i1} y ρ_{i2} el tipo de ciclo es $(0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0)$ y como ρ_{i3} es $(0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Cuyos monomios son t_4^2 y t_2^4 respectivamente. Recordando que hay 6 y 3 monomios de cada tipo respectivamente.

- Del tipo de movimiento *giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas*, hay seis ejes. Se denotan por $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ y μ_6 . De la misma manera que en el anterior, consideramos el eje de giro de la figura 2.2, tenemos que $\mu_1 = (14)(28)(35)(67)$. Así que para estos movimientos, el tipo de ciclo es $(0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Cuyo monomio es t_2^4 y teniendo en cuenta que de este tipo hay 6 monomios.
- Por último, del tipo de movimiento *giro cuyo eje pasa por dos vértices opuestos*, hay cuatro ejes de este tipo, a los que llamamos $i = 1, 2, 3$ y 4 . Hay dos giros de orden 3 en cada eje, los denotamos como α_{i1} y α_{i2} . Considerando el eje de giro de la figura 2.3, tenemos que $\alpha_{11} = (1)(245)(386)(7)$. Por lo tanto, para estos movimientos el tipo de ciclo es $(2, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Cuyo monomio es $t_1^2 t_3^2$ y hay 8 monomios de este tipo.

$$Z_{G,D} = \frac{1}{24} (t_1^8 + 6t_4^2 + 3t_2^4 + 6t_2^4 + 8t_1^2 t_3^2) = \frac{1}{24} (t_1^8 + 6t_4^2 + 9t_2^4 + 8t_1^2 t_3^2).$$

Ejemplo 2.5. Acción de G sobre las aristas de un cubo

Vamos a considerar también, el polinomio indicador de la acción de G sobre el conjunto de las 12 aristas del cubo.

numerando con 1, 2, 3, 4 las aristas superiores, con 5, 6, 7, 8 las aristas inferiores y con 9, 10, 11, 12 las aristas del centro. Vemos como se expresa cada movimiento como permutación de los 12 aristas:

- La identidad, 1, que deja fija las 12 aristas. De aquí sacaremos que el tipo de ciclo es $(12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Y el monomio t_1^{12} .
- Del tipo de movimiento *giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos caras opuestas*. Para cada uno de estos ejes hay tres giros distintos, dos de 2-ciclos de orden 4 y uno formado por 4 2-ciclos, se denotan como en los ejemplos anteriores, ρ_{i1}, ρ_{i2} y ρ_{i3} respectivamente. Cuando $i = 3$, el de la figura 2.1, tenemos que $\rho_{31} = (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8)(9, 10, 11, 12)$, $\rho_{32} = (1, 4, 3, 2)(5, 8, 7, 6)(9, 12, 11, 10)$ y $\rho_{33} = (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8)(9, 11)(10, 12)$. Por lo tanto, para los movimientos como ρ_{i1} y ρ_{i2} el tipo de ciclo es $(0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ y como ρ_{i3} es $(0, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Cuyos monomios son t_4^3 y t_2^6 respectivamente. Recordando que hay 6 y 3 monomios de cada tipo respectivamente.
- Del tipo de movimiento *giros cuyo eje pasa por los puntos medios de dos aristas opuestas*, hay seis ejes. Se denotan por $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ y μ_6 . De la misma manera que en los anteriores, consideramos el eje de giro de la figura 2.2, tenemos que $\mu_1 = (1)(2, 9)(3, 5)(4, 10)(6, 12)(8, 11)(7)$. Así que para estos movimientos, el tipo de ciclo es $(2, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Cuyo monomio es $t_2^5 t_1^2$ y teniendo en cuenta que de este tipo hay 6 monomios.
- Por último, del tipo de movimiento *giro cuyo eje pasa por dos vértices opuestos*, hay cuatro ejes de este tipo, a los que llamamos $i = 1, 2, 3$ y 4 . Hay dos giros de orden 3 en cada eje, los denotamos como α_{i1} y α_{i2} . Considerando el eje de giro de la figura 2.3, tenemos que $\alpha_{11} = (1, 4, 9)(5, 2, 12)(3, 8, 10)(7, 6, 11)$. Por lo tanto, para estos movimientos el tipo de ciclo es $(0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Cuyo monomio es t_3^4 y hay 8 monomios de este tipo.

$$Z_{G,D} = \frac{1}{24} (t_1^{12} + 6t_4^3 + 3t_2^6 + 6t_1^2 t_2^5 + 8t_3^4).$$

Ejemplo 2.6. Acción de G sobre las caras de un dodecaedro

Recordamos que ahora $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ es el conjunto de caras del dodecaedro y que G es el grupo de movimientos directos del espacio que fijan un dodecaedro, este grupo ya lo hemos desarrollado en el ejemplo 1.4 como permutaciones de las 12 caras y tiene 60 elementos.

Dado D , que numera las cara de un dodecaedro del 1 al 12 si consideramos la acción sobre las 12 caras del dodecaedro, tenemos distintos elementos de G , veamos los distintos tipos de g :



- Dado $g = (2, 3, 4, 5, 6)(7, 8, 9, 10, 11)(1)(12)$. Es un tipo de ciclo $(2, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, luego su monomio es $t_1^2 t_5^2$, hay 24 elementos de este tipo.
- Dado $g = (1, 4)(3, 5)(7, 12)(8, 11)(2, 10)(6, 9)$. Es un tipo de ciclo $(0, 6, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, así que su monomio es t_2^6 , hay 15 elementos de este tipo.
- Dado $g = (1, 4, 5)(7, 8, 12)(6, 3, 10)(2, 9, 11)$. Es un tipo de ciclo $(0, 0, 4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, por lo tanto su monomio es t_3^4 , hay 20 elementos de este tipo.
- Por último, consideramos la identidad, $g = 1$. De aquí sacaremos que el tipo de ciclo es $(12, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Y el monomio t_1^{12} . Y solo hay un elemento así.

Por lo tanto, con todo esto llegamos a que el polinomio indicador de la acción de G sobre las 12 caras del dodecaedro es:

$$Z_{G,D} = \frac{1}{60} (t_1^{12} + 24t_1^2 t_5^2 + 15t_2^6 + 20t_3^4)$$

Ejemplo 2.7. Acción de G sobre el circuito formado por 4 interruptores

Hay un problema histórico que se necesitó resolver con un ordenador gigante en 1951. El objetivo era contar cuantos circuitos esencialmente distintos (o como hemos dicho en anteriores ejemplos, formas realmente distintas) se podían montar con cuatro interruptores.

Este caso es diferente a los anteriores, comenzamos definiendo el conjunto D que no es cada interruptor $D \neq \{1, 2, 3, 4\}$ sino que es la agrupación de los interruptores, es decir, $D = \{(b_1, \dots, b_n) | b_i \in \{0, 1\}\} = \{0, 1\}^n$. $R = \{0, 1\}$ los posibles valores (hasta ahora habían sido colores) que pueden tomar los circuitos (podría considerarse 1 cuando pasa electricidad y 0 cuando no). Cada circuito de n interruptores se asocia con una función, de manera que queda el conjunto $\Omega = \{f_i | f_i : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}\}$.

Decimos que dos funciones $f_1, f_2 : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ son esencialmente similares si con una reordenación (i_1, \dots, i_n) de $(1, \dots, n)$, se tiene $f_1(b_1, \dots, b_n) = f_2(b_{i_1}, \dots, b_{i_n})$ para todo $(b_1, \dots, b_n) \in \{0, 1\}^n$. Esto, aplicándolo al problema histórico, significaba que los circuitos f_1 y f_2 funcionan de forma idéntica después de una permutación adecuada de los interruptores de entrada.

En el problema histórico quisieron calcular cuantas funciones esencialmente diferentes había para el caso concreto $n = 4$. Sabemos que el total de funciones era $2^{2^4} = 65536$, de las cuales, se encontraron que eran esencialmente diferentes 3984. Este problema, con la teoría que veremos se habría resuelto en un par de líneas como se verá en el ejemplo 3.10, sin embargo en ese momento, por desconocimiento de esta teoría, fue necesario un super ordenador.

Empezamos poniendo un ejemplo de dos funciones esencialmente similares, para $n = 4$, sabiendo que $(b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, b_{i_4})$ surge de aplicarle a (b_1, b_2, b_3, b_4) la permutación (123) , es decir, que $(b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}, b_{i_4})$

$= (b_3, b_1, b_2, b_4)$ (omitimos las comas de los paréntesis por comodidad, por ejemplo (0000) sería (0,0,0,0)):

$$\begin{array}{llll}
 f_1(0000) \rightarrow 0 & f_1(1000) \rightarrow 1 & f_2(0000) = f_1(0000) \rightarrow 0 & f_2(1000) = f_1(0010) \rightarrow 1 \\
 f_1(0001) \rightarrow 0 & f_1(1001) \rightarrow 0 & f_2(0001) = f_1(0001) \rightarrow 0 & f_2(1001) = f_1(0011) \rightarrow 0 \\
 f_1(0010) \rightarrow 1 & f_1(1010) \rightarrow 1 & f_2(0010) = f_1(0100) \rightarrow 1 & f_2(1010) = f_1(0110) \rightarrow 1 \\
 f_1(0011) \rightarrow 0 & f_1(1011) \rightarrow 1 & f_2(0011) = f_1(0101) \rightarrow 0 & f_2(1011) = f_1(0111) \rightarrow 0 \\
 f_1(0100) \rightarrow 1 & f_1(1100) \rightarrow 1 & f_2(0100) = f_1(1000) \rightarrow 1 & f_2(1100) = f_1(1010) \rightarrow 1 \\
 f_1(0101) \rightarrow 0 & f_1(1101) \rightarrow 0 & f_2(0101) = f_1(1001) \rightarrow 0 & f_2(1101) = f_1(1011) \rightarrow 1 \\
 f_1(0110) \rightarrow 1 & f_1(1110) \rightarrow 0 & f_2(0110) = f_1(1100) \rightarrow 1 & f_2(1110) = f_1(1110) \rightarrow 0 \\
 f_1(0111) \rightarrow 0 & f_1(1111) \rightarrow 1 & f_2(0111) = f_1(1011) \rightarrow 1 & f_2(1111) = f_1(1111) \rightarrow 1
 \end{array}$$

Nuestro objetivo es encontrar todas las funciones, o circuitos, que sean diferentes. Las anteriores funciones son únicamente dos de las 65536 que tenemos, es comprensible que sin más conocimientos matemáticos se viese necesario utilizar un ordenador para resolverlo.

Consideramos el grupo G de las reordenaciones de $\{1, 2, 3, 4\}$, $G = \text{Per}_{\{1, 2, 3, 4\}} = S_4$. Este grupo actúa sobre $\{0, 1\}^4$ de la siguiente manera, para $\sigma \in S_4$ y $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \{0, 1\}^4$, se ve que $(b_1, b_2, b_3, b_4)^\sigma = (b_{\sigma 1}, b_{\sigma 2}, b_{\sigma 3}, b_{\sigma 4})$. Lo que queremos decir, es que el efecto de, por ejemplo, $\sigma = (12)(34)$ en $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \{0, 1\}^4$ es convertirlo en $(b_2, b_1, b_4, b_3) \in \{0, 1\}^4$.

Calculamos el polinomio indicador de esta acción de G sobre $\{0, 1\}^4$:

- La Identidad: fija las 16 combinaciones (b_1, b_2, b_3, b_4) , dando el monomio t_1^{16} .
- Seis 2-ciclos: $((12), (13), (14), (23), (24), (34))$, vemos por ejemplo el (12) , que da lugar a cuatro 2-ciclos fijos de la forma: $((1, 0, b_3, b_4), (0, 1, b_3, b_4))$ y a ocho 1-ciclos que quedan fijados de la forma: $(0, 0, b_3, b_4)$ y $(1, 1, b_3, b_4)$, de manera que su monomio es $t_2^4 t_1^8$, que si consideramos los demás, tenemos el monomio: $6t_1^8 t_2^4$
- Tres productos de 2-ciclos: $((12)(34), (13)(24), (14)(23))$, vemos por ejemplo el $(12)(34)$, que da lugar a cuatro 1-ciclos fijos de la forma: (b_1, b_1, b_3, b_3) y a seis 2-ciclos de la forma: $((b_1, b_2, b_3, b_4), (b_2, b_1, b_4, b_3))$, de manera que el monomio, considerando que hay 3 de esta forma, es: $3t_1^4 t_2^6$
- Ocho 3-ciclos: $((123), (124), (134), (132), (142), (143), (234), (243))$, vemos por ejemplo el (123) que deja fijos los cuatro circuitos de la forma: (b_1, b_1, b_1, b_4) y agrupa en 3-ciclos el resto, de la forma: $((b_1, b_2, b_3, b_4), (b_3, b_1, b_2, b_4), (b_2, b_3, b_1, b_4))$, teniendo cuatro 3-ciclos teniendo en cuenta que hay ocho permutaciones de este estilo es: $8t_1^4 t_3^4$
- Seis 4-ciclos: $((1234), (1342), (1243), (1324), (1423), (1432))$, vemos por ejemplo el (1234) que deja fijos los dos circuitos de la forma: (b_1, b_1, b_1, b_1) , un 2-ciclo de la forma: $((b_1, b_2, b_1, b_2), (b_2, b_1, b_2, b_1))$ y los demás se agrupan en 4-ciclos de la forma: $((b_1, b_2, b_3, b_4), (b_4, b_1, b_2, b_3), (b_3, b_4, b_1, b_2), (b_2, b_3, b_4, b_1))$, de forma que siendo seis 4-ciclos tenemos: $6t_1^2 t_2^1 t_4^3$

Con todo esto llegamos a que en este caso, el polinomio indicador es

$$Z_{G,D} = \frac{1}{24} (t_1^{16} + 6t_1^8 t_2^4 + 3t_1^4 t_2^6 + 8t_1^4 t_3^4 + 6t_1^2 t_2^1 t_4^3)$$

Capítulo 3

Teorema de Redfield-Pólya

Existe una relación significativa entre la acción del grupo sobre el conjunto D y la acción del grupo sobre el conjunto $\Omega : \{D \rightarrow R\}$. En todos los ejemplos vistos aparecen grupos que actúan sobre D , como caras del cubo, caras de la pirámide, $\{0, 1\}^n$... y a la vez actúan sobre $\Omega : \{D \rightarrow R\}$, donde D es alguno de los anteriores y R es el conjunto de colores o el conjunto $R = \{0, 1\}$. Hay una relación entre estas acciones y sobre esta vamos a trabajar, ya que el número de elementos del conjunto D es mucho menor que el del conjunto Ω .

3.1. Conceptos

En un problema de coloraciones aparecen los siguientes objetos:

- Un conjunto finito D y otro conjunto finito R , que llamaremos conjunto de colores.
- **Coloración:** Es el conjunto de las aplicaciones de D en R , que se denotan $R^D = \{f : D \rightarrow R\}$.

Además hay que considerar que un grupo G que actúa sobre D hace indistinguibles algunas coloraciones R^D , hace que sean esencialmente iguales.

Proposición 3.1. *Sea G un grupo que actúa sobre D y sea R un conjunto de colores finito. Sea R^D el conjunto de coloraciones. Se tiene que la aplicación $G \rightarrow \text{Per}_{R^D}$, dada por $g \mapsto (f \rightarrow f^g(d))$, donde f^g está definida por $f^g(d) = f(d^{g^{-1}})$, es una acción de G sobre R^D .*

Demostración. Vemos que está bien definida.

1. Sea $R^D = \{f | f : D \rightarrow R\}$. Queremos ver que la aplicación $f \mapsto f^g$ es biyectiva. Comprobamos que es inyectiva, ya que si lo comprobamos, al ser finita, estamos probando que es biyectiva.

Sean $f, f' \in R^D$ distintas. Tenemos que

$$\begin{aligned} f^g(d) &= f(d^{g^{-1}}) \\ f'^g(d) &= f'(d^{g^{-1}}) \end{aligned}$$

Luego si $f \neq f'$ entonces $f(d^{g^{-1}}) \neq f'(d^{g^{-1}})$, luego $f^g(d) \neq f'^g(d)$, por lo tanto, es inyectiva.

2. O vemos que $\varphi : G \rightarrow \text{Per}_{R^D}$ es homomorfismo de grupos, para ello queremos ver si $f^{gg'} = (f^g)^{g'}$. Sean

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \text{Per}_{R^D} \\ g &\mapsto \left(f \rightarrow f^g(d) = f(d^{g^{-1}}) \right) \\ g' &\mapsto \left(f \rightarrow f^{g'}(d) = f(d^{g'^{-1}}) \right). \end{aligned}$$

Por un lado, $f^{gg'}(d) = f(d^{(gg')^{-1}}) = f(d^{g'^{-1}g^{-1}})$ y por otro, $(f^g)^{g'}(d) = f^g(d^{g'^{-1}}) = f(d^{g'^{-1}g^{-1}}) = f(d^{g'^{-1}g^{-1}})$. Vemos que se llega a lo mismo, luego hay un homomorfismo de grupos.

Con esto queda demostrado que esta aplicación es una acción. \square

- **Diseño:** Es como se llama a cada órbita del conjunto de las coloraciones a través de la acción de G sobre R^D descrita en 3.1, siendo G un grupo que actúa sobre D (conjunto que coloreamos con R).
- **Peso:** Es una aplicación $\omega : R \rightarrow S$, donde S es un anillo comunitativo con identidad que contiene a los enteros.

El peso de una coloración es

$$\omega(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d)).$$

Un ejemplo, para que comprendamos mejor esto, es un anillo de polinomios que a cada color le asocia una variable diferente, esto es: $\omega(\text{rojo}) = x_1; \omega(\text{verde}) = x_2; \omega(\text{azul}) = x_3$. Donde contar las coloraciones de un cubo que tiene dos caras rojas, dos verdes y dos azules es contar las coloraciones de peso $x_1^2x_2^2x_3^2$.

Proposición 3.2. *Si dos coloraciones están en el mismo diseño, tienen el mismo peso. El peso de un diseño es el peso de una cualquiera de sus coloraciones. Si F es un diseño, $\omega(F) = \omega(f)$, siendo $f \in F$.*

Demostración. Sea f una coloración, sea

$$\omega(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d)).$$

Y sea f^g otra coloración del mismo diseño. Entonces

$$\omega(f^g) = \prod_{d \in D} \omega(f^g(d)) = \prod_{d \in D} \omega(f(d^{g^{-1}}))$$

donde $d^{g^{-1}} \in D$, luego

$$\omega(f^g) = \prod_{d^{g^{-1}} \in D} \omega(f(d^{g^{-1}})) = \prod_{\hat{d} \in D} \omega(f(\hat{d})) = \omega(f)$$

\square

Puede que diseños distintos tengan el mismo peso, pero con pesos distintos seguro que son de distintos diseños.

- **Inventario** de T , denotándolo $InvT$, si T es un conjunto de coloraciones $T \subseteq R^D$ es

$$InvT = \sum_{f \in T} \omega(f).$$

- **Inventario de diseños**, denotándolo ID es

$$ID = \sum \{\omega(F) | F \text{ diseño}\},$$

de manera que si conocemos los coeficientes que acompañan a cada peso del ID sabemos cuantos diseños hay de cada tipo.

3.2. Teorema de Redfield-Pólya

El siguiente lema es necesario para la realización de la demostración de nuestro teorema:

Lema 3.3. *Sea D_1, \dots, D_m una partición de D y sea T el conjunto de todas las coloraciones que son constantes en D_i , para cada i , es decir, para cada una de las particiones.*

$$\text{Inv}T = \prod_{i=1, \dots, m} \sum \{\omega(r)^{|D_i|}; r \in R\}.$$

Demostración. Desarrollamos primero el primer miembro de la igualdad. El conjunto T está formado por las aplicaciones f tales que $f(d) = f(d')$ si existe i tal que $d \in D_i$ y $d' \in D_i$, es decir, los dos valores están dentro de la misma partición de D . Dicho de otra manera, $T : \{f : D \rightarrow R | f(d) = f(d') \forall d, d' \in D_i, i = 1, \dots, m\}$.

Vamos a calcular el peso de una de estas $f \in T$

$$\omega(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d)).$$

Elegimos uno cualquiera de los elementos de D_i , por ejemplo, $d_i \in D_i$, y tenemos

$$\omega(f) = \prod_{i=1, \dots, m} \omega(f(d_i))^{|D_i|}$$

y por lo tanto, se llega a que

$$\text{Inv}T = \sum_{f \in T} \prod_{i=1, \dots, m} \omega(f(d_i))^{|D_i|}.$$

Ahora vamos a desarrollar el segundo miembro de la fórmula, para ver que llegamos a una igualdad.

$$\prod_{i=1, \dots, m} \sum \{\omega(r)^{|D_i|}; r \in R\}$$

Si hay n colores, tenemos:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1, \dots, n} \omega(r_j)^{|D_i|} &= \prod_{i=1, \dots, m} [\omega(r_1)^{|D_i|} + \omega(r_2)^{|D_i|} + \dots + \omega(r_n)^{|D_i|}] = \\ &[\omega(r_1)^{|D_1|} + \omega(r_2)^{|D_1|} + \dots + \omega(r_n)^{|D_1|}] \cdot \dots \cdot [\omega(r_1)^{|D_m|} + \omega(r_2)^{|D_m|} + \dots + \omega(r_n)^{|D_m|}] = \\ &\omega(r_1)^{|D_1|} \cdot \dots \cdot \omega(r_1)^{|D_m|} + \dots + \omega(r_n)^{|D_1|} \cdot \dots \cdot \omega(r_n)^{|D_m|}. \end{aligned}$$

De manera que tenemos $|R|^m$ términos, $|R| = n$ el número de colores que tenemos, y m el número de particiones distintas del conjunto D que hacemos. Donde cada término de la suma es, como vemos, de la forma:

$$\prod_{i=1, \dots, m} (\omega(r_{ij}))^{|D_i|}$$

Como cada f de T es cada una de las coloraciones, teniendo en cuenta que cada color es un j , para cada término, si consideramos uno de los $d_i \in D_i$, le asociamos una coloración definida:

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow R \\ d_i &\rightarrow r_{ij} \end{aligned}$$

Se con esto, que cada

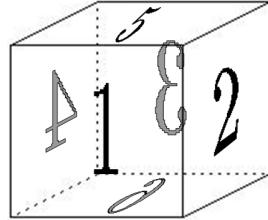
$$\prod_{i=1, \dots, m} (\omega(r_{ij}))^{|D_i|} = \omega(f)$$

Luego es biyectiva, pues esto es cierto para cada uno de los sumandos, y por lo tanto, se tiene que es cierta la igualdad. \square

Ejemplo 3.4. Inventario de T

Como sabemos $T_1 = \{f : D \rightarrow R | f(d) = f(d') \forall d, d' \in D_i, i = 1, \dots, m\}$ es el conjunto de las coloraciones que son constantes en cada D_i .

Consideramos un cubo, con caras $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Tomamos $D_1 = \{1, 4, 5\}$ y $D_2 = \{2, 6, 3\}$, por lo tanto, los colores de 1, 4 y 5 deberán ser los mismos y por otro lado los de 2, 6 y 3 también,



y sea $R = \{\text{rojo}, \text{verde}, \text{azul}\}$. Aquí vemos $|D_1| = 3$, $|D_2| = 3$ y $|R| = 3$.

Sabiendo que por un lado de la igualdad, tenemos:

$$\text{Inv}T = \sum_{f \in T_1} \omega(f) \quad \omega(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d))$$

de manera que, como 1, 4 y 5 tienen el mismo $f(d)$ y 2, 6 y 3 también tienen el mismo $f(d)$

$$\omega(f) = \omega(f(1))^3 \cdot \omega(f(2))^3.$$

Si denotamos los siguientes pesos: $\omega(\text{rojo}) = x$; $\omega(\text{verde}) = y$; $\omega(\text{azul}) = z$.

Como hay tres colores a elegir y se tienen que pintar cada partición de D del mismo color, como hay 2 particiones, habrá por lo tanto $3^2 = 9$ sumandos en el $\text{Inv}T$.

$$\text{Inv}T = \sum_{f \in T} (\omega(f(1))^3 \cdot \omega(f(2))^3) = x^6 + x^3y^3 + x^3z^3 + y^3x^3 + y^6 + y^3z^3 + z^3x^3 + z^3y^3 + z^6.$$

Por otro lado, vemos que $\prod \sum \{\omega(r)^{|D_i|}; r \in R\}$. En estos casos, $|D_1| = |D_2| = 3$, por tanto,

$$\sum \{\omega(r)^{|D_i|}; r \in R\} = \omega(\text{rojo})^3 + \omega(\text{verde})^3 + \omega(\text{azul})^3 = x^3 + y^3 + z^3$$

$$\prod_{i=1,2} (x^3 + y^3 + z^3) = (x^3 + y^3 + z^3)^2 = x^6 + 2 \cdot x^3y^3 + 2 \cdot x^3z^3 + y^6 + 2 \cdot y^3z^3 + z^6.$$

Por lo tanto, llegamos a que es lo mismo.

Ejemplo 3.5. Inventario de T

Sea ahora T_2 el conjunto de las coloraciones que son constantes en cada D_i .

Consideramos de nuevo el cubo, por lo tanto, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ahora vamos a considerar $D_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $D_2 = \{5\}$ y $D_3 = \{6\}$, de manera que ahora los colores de 1, 2, 3 y 4 deben ser los mismos y por otro lado 5 y por otro 6; tomamos también $R = \{\text{rojo}, \text{verde}, \text{azul}\}$.

Aquí vemos $|D_1| = 4$, $|D_2| = 1$, $|D_3| = 1$ y $|R| = 3$.

Viendo de nuevo, que por un lado de la igualdad, tenemos:

$$\text{Inv}T = \sum_{f \in T_1} \omega(f) \quad \omega(f) = \prod_{d \in D} \omega(f(d))$$

de manera que, como 1, 2, 3 y 4 tienen el mismo $f(d)$, 5 otro diferente y 6 otro

$$\omega(f) = \omega(f(1))^4 \cdot \omega(f(5)) \cdot \omega(f(6)).$$

Si llamamos $\omega(\text{rojo}) = x; \omega(\text{verde}) = y; \omega(\text{azul}) = z$.

Como hay tres colores a elegir y se tienen que pintar cada partición de D del mismo color, como hay 3 particiones, hay por lo tanto $3^3 = 27$ sumandos en el $InvT$.

$$\begin{aligned} InvT &= \sum_{f \in T} (\omega(f(1))^4 \cdot \omega(f(5)) \cdot \omega(f(6))) = x^6 + y^6 + z^6 + 2xy^5 + 2xz^5 + 2x^5y + 2x^5z + 2y^5z + 2yz^5 \\ &\quad + x^2y^4 + x^2z^4 + y^2x^4 + y^2z^4 + z^2y^4 + z^2x^4 + 2xyz^4 + 2xzy^4 + 2yzx^4. \end{aligned}$$

Obtenemos el resultado anterior al agrupar los sumandos iguales.

Por otro lado, vemos que $\prod \sum \{\omega(r)^{|D_i|}; r \in R\}$. En estos casos, $|D_1| = 4$, $|D_2| = 1$ y $|D_3| = 1$, por tanto,

$$\begin{aligned} \sum \{\omega(r)^{|D_1|}; r \in R\} &= \omega(\text{rojo})^4 + \omega(\text{verde})^4 + \omega(\text{azul})^4 = x^4 + y^4 + z^4 \\ \sum \{\omega(r)^{|D_2|}; r \in R\} &= \sum \{\omega(r)^{|D_3|}; r \in R\} = \omega(\text{rojo}) + \omega(\text{verde}) + \omega(\text{azul}) = x + y + z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1,2,3} \{\omega(r)^{|D_i|}; r \in R\} &= (x^4 + y^4 + z^4) \cdot (x + y + z) \cdot (x + y + z) = x^6 + y^6 + z^6 + 2xy^5 + 2xz^5 + 2x^5y \\ &\quad + 2x^5z + 2y^5z + 2yz^5 + x^2y^4 + x^2z^4 + y^2x^4 + y^2z^4 + z^2y^4 + z^2x^4 + 2xyz^4 + 2xzy^4 + 2yzx^4. \end{aligned}$$

Por lo tanto, llegamos a que es lo mismo.

Teorema 3.6. (Redfield-Pólya) Sea $|D| = k$ y sea Z el polinomio asociado a la acción, es decir, el polinomio indicador de una acción, de G sobre D , se tiene:

$$ID = Z_{G,D} \left(\sum_{r \in R} \omega(r), \sum_{r \in R} \omega(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} \omega(r)^k \right).$$

Demostración. Sean W_1, \dots, W_p los pesos distintos de los diseños (es importante matizar que son los pesos distintos, un mismo peso puede ser de más de un diseño, es decir, no diferenciamos por diseños sino por pesos).

Sea, entonces, $F_i = \{f \in R_D | \omega(f) = W_i\}$ para $i = 1, \dots, p$. Vemos que f es una coloraciones y que las f que forman cada F_i tienen el mismo peso. Ya que puede haber más un diseño con el mismo peso, observamos que cada F_i es una unión de diseños.

Sea m_i el número de diseños distintos de hay de F_i .

De manera que las órbitas de la acción del grupo G sobre cada F_i (que es una acción restringida de la acción de G sobre R^D), son precisamente los m_i diseños que hay en F_i , ya que si le aplico la acción me lleva a otra f con peso W_i .

Por tanto, por el teorema de Burnside, que es el apartado *d*) del teorema 1.1, que cuenta cuantas órbitas hay diferentes, se tiene:

$$m_i = |G|^{-1} \sum_{g \in G} |\{f \in F_i | f^g = f\}|$$

Luego, aplicando la definición de ID tenemos:

$$\begin{aligned} ID &= \sum_i m_i \cdot W_i = \sum_i |G|^{-1} \sum_{g \in G} (|\{f \in F_i | f^g = f\}|) \cdot W_i \\ &= |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left(\sum_i |\{f \in F_i | f^g = f\}| \right) \cdot W_i \end{aligned}$$

Vemos que para cada $g \in G$, $(\sum_i |\{f \in F_i | f^g = f\}|) \cdot W_i$ es el inventario de $\{f \in R^D | f^g = f\}$, pues las F_i forman una partición de R^D en la que todos los elementos de F_i tienen el mismo peso. Así que podemos afirmar, por la definición de inventario, que:

$$ID = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left(\sum_{\substack{f \in R^D \\ f^g = f}} \omega(f) \right)$$

Vamos a considerar ahora que para cada elemento $g \in G$ y para cada $d \in D$ el conjunto

$$\{d, d^g, d^{g^2}, d^{g^3}, \dots, d^{g^{p+1}} = 1\}; d^{g^{p+1}} = d$$

De manera que con esto, se observa que proporciona para cada $g \in G$ una partición D_1, D_2, \dots de D , que son las órbitas en la acción de $\langle g \rangle$ sobre D .

Vamos a ver que $f \in \{f \in R^D | f^g = f\} \iff f$ es constante en cada D_i . Sabemos, por la definición de acción de G sobre R^D dada en la proposición 3.2, que $f^g(d) = f(d^{g^{-1}})$ donde G actúa sobre D y tenemos entonces, que $f^g(d) = f(d) \iff d^{g^{-1}} = d \iff d, d^{g^{-1}} \in G_i$, por lo tanto se cumple lo dicho.

Así para cada $g \in G$, por el lema 3.3, se tiene que $\sum \{\omega(f) | f \in R^D, f^g = f\}$ es el inventario del subconjunto de R^D formado por las coloraciones constantes en cada D_i .

Así que desarrollándolo, se tiene que

$$\sum \{\omega(f) | f \in R^D, f^g = f\} = \prod_i \sum_{r \in R} \omega(r)^{|D_i|}.$$

Como consideramos la acción de G sobre D , de manera que si a un elemento g le corresponde el monomial $t_1^{j_1} \cdot t_2^{j_2} \cdots t_k^{j_k}$ vemos que la partición D_1, D_2, \dots que hemos definido antes, está formada por j_1 conjuntos de cardinal 1, j_2 conjuntos de cardinal 2, ..., j_k conjuntos de cardinal k .

De esta forma, para cada $g \in G$ de tiene:

$$\prod_i \sum_{r \in R} \omega(r)^{|D_i|} = \left(\sum_{r \in R} \omega(r) \right)^{j_1} \left(\sum_{r \in R} \omega(r)^2 \right)^{j_2} \cdots \left(\sum_{r \in R} \omega(r)^k \right)^{j_k}$$

Y por lo tanto, de manera consecutiva, llegamos a que

$$ID = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left[\left(\sum_{r \in R} \omega(r) \right)^{j_1(g)} \left(\sum_{r \in R} \omega(r)^2 \right)^{j_2(g)} \cdots \left(\sum_{r \in R} \omega(r)^k \right)^{j_k(g)} \right]$$

Que como habíamos definido en el Capítulo 2

$$Z_{G,D}(t_1, \dots, t_n) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \left(t_1^{j_1} \cdot \dots \cdot t_n^{j_n} \right)$$

vemos que

$$ID = Z_{G,D} \left(\sum_{r \in R} \omega(r), \sum_{r \in R} \omega(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} \omega(r)^k \right).$$

□

La mayoría de los problemas que vamos a ver a continuación se reducen a medir inventarios, para ello la siguiente proposición nos va a servir.

Proposición 3.7. (Caso especial del teorema de Redfield-Pólya)

Si G actúa sobre D y R es el conjunto de colores, el número de diseños es $Z_{G,D}(|R|, \dots, |R|)$.

Demostración. Si todos los pesos de los diseños tienen peso 1 y el peso de cada diseño es 1, al realizar el inventario de diseños el número que aparece es el número de diseños diferentes. Sea

$$\begin{aligned} \omega(r) &= 1; r \in R \\ \omega(r)^2 &= 1; r \in R \\ &\vdots & \Rightarrow & \sum_{r \in R} \omega(r)^i = 1 + \dots + 1 = |R|, i = 1, \dots, k \\ \omega(r)^k &= 1; r \in R \end{aligned}$$

Luego,

$$ID = Z_{G,D} \left(\sum_{r \in R} \omega(r), \sum_{r \in R} \omega(r)^2, \dots, \sum_{r \in R} \omega(r)^k \right) = Z(|R|, \dots, |R|),$$

□

3.3. Ejemplos

A lo largo de este apartado vamos a ir viendo los distintos ejemplos en los que se puede utilizar el teorema de Redfield-Pólya.

En algunos ejemplos vamos a utilizar el teorema y en otros más sencillos, que comprobaremos que se obtiene lo mismo que en el capítulo 1.

Para la realización de los siguientes problemas nos hemos apoyado en SAGE, ya que el peso de los polinomios, como podremos comprobar, en ocasiones es grande:

Ejemplo 3.8. Formas de colorear un cubo con 3 colores

Vamos a utilizar para resolver este ejercicio el polinomio indicador de la acción del grupo G de los movimientos que dejan fijo un cubo sobre las 6 caras del cubo. Veremos que puede ser útil para la fórmula de Pólya, aunque realmente la respuesta la conocemos sin la utilidad de este teorema, la hemos calculado en el ejercicio 1.3.

Consideramos tres colores, por ejemplo, $R = \{\text{rojo}, \text{azul}, \text{verde}\}$, cuyos pesos son: $\omega(\text{rojo}) = x$, $\omega(\text{azul}) = y$ y $\omega(\text{verde}) = z$. De esta manera como lo que queremos colorear es un cubo $|D| = 6$ Como Z es el polinomio indicador de la acción de G sobre D , tendremos en este caso:

$$\begin{aligned} ID &= Z_{G,D} ((x+y+z), (x^2+y^2+z^2), (x^3+y^3+z^3), (x^4+y^4+z^4), (x^5+y^5+z^5), (x^6+y^6+z^6)) \\ &= Z(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6). \end{aligned}$$

El polinomio indicador del cubo es

$$Z_{G,D} = \frac{1}{24} (t_1^6 + 6t_1^2t_4 + 3t_1^2t_2^2 + 6t_2^3 + 8t_3^2).$$

Por lo tanto, llegamos al siguiente polinomio:

$$\begin{aligned} Z_{G,D} &= \frac{1}{24} \cdot ((x+y+z)^6 + 6 \cdot (x^4+y^4+z^4) \cdot (x+y+z)^2 + 3 \cdot (x^2+y^2+z^2)^2 \cdot (x+y+z)^2 \\ &\quad + 6 \cdot (x^2+y^2+z^2)^3 + 8 \cdot (x^3+y^3+z^3)^2) \end{aligned}$$

Que si lo desarrollamos nos da:

$$\begin{aligned} &x^6 + x^5y + 2x^4y^2 + 2x^3y^3 + 2x^2y^4 + xy^5 + y^6 + x^5z + 2x^4yz + 3x^3y^2z + 3x^2y^3z + 2xy^4z + y^5z + 2x^4z^2 + 2y^4z^2 \\ &+ 6x^2y^2z^2 + 3xy^3z^2 + 3x^3yz^2 + 2x^3z^3 + 3x^2yz^3 + 3xy^2z^3 + 2y^3z^3 + 2x^2z^4 + 2xyz^4 + 2y^2z^4 + xz^5 + yz^5 + z^6 \end{aligned}$$

De aquí podemos sacar muchas conclusiones, y plantearnos por lo tanto distintas preguntas:

- **¿Cuántas coloraciones distintas hay?**. Pregunta de la que ya sabemos la respuesta, ya que es el número de diseños; pero si no lo supiésemos bastaría con sustituir cada uno de los pesos por el valor 1, es decir, $x = y = z = 1$

Si lo realizamos, llegamos al resultado de 57

Para responder esta pregunta de otra manera, podríamos aplicar la proposición 3.7, utilizando que $|R| = 3$, que es lo mismo que sustituir cada peso por el valor 1 y sustituyendo en $Z_{G,D}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$, es decir, $Z_{G,D}(3, 3, 3, 3, 3, 3) = \frac{1}{24} (3^6 + 6 \cdot 3^2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3^3 + 3^2) = 57$.

- **¿Cuántas de estas coloraciones utilizan únicamente dos colores?**, para responder a esta pregunta iremos al polinomio resultante y buscaremos en cuales de ellas hay exactamente dos variables, observamos que son $x^5y, 2x^4y^2, 2x^3y^3, 2x^2y^4, xy^5, x^5z, y^5z, 2x^4z^2, 2y^4z^2, 2x^3z^3, 2y^3z^3, 2x^2z^4, 2y^2z^4, xz^5, yz^5$. Si ahora sumamos cuantos elementos hay de cada tipo, teniendo en cuenta que si su coeficiente es distinto de 1 se sumará tantas veces como diga su coeficiente, tenemos: 24 coloraciones diferentes.

Ejemplo 3.9. Formas de colorear un dodecaedro con 3 colores De la misma manera que el ejercicio anterior, para resolver este ejercicio vamos a utilizar el polinomio indicador de la acción del grupo que deja fijo un dodecaedro sobre las 12 caras de este. Consideramos los mismos colores de antes $R = \{\text{rojo}, \text{azul}, \text{verde}\}$, cuyos pesos son: $\omega(\text{rojo}) = x, \omega(\text{azul}) = y$ y $\omega(\text{verde}) = z$. En este caso, lo que queremos colorear es un dodecaedro $|D| = 12$ Como Z el polinomio indicador de la acción de G sobre D , tenemos en este caso:

$$\begin{aligned} ID &= Z_{G,D}((x+y+z), (x^2+y^2+z^2), (x^3+y^3+z^3), (x^4+y^4+z^4), (x^5+y^5+z^5), (x^6+y^6+z^6), \\ &\quad (x^7+y^7+z^7), (x^8+y^8+z^8), (x^9+y^9+z^9), (x^{10}+y^{10}+z^{10}), (x^{11}+y^{11}+z^{11}), (x^{12}+y^{12}+z^{12})) \\ &= Z_{G,D}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}). \end{aligned}$$

El polinomio indicador del dodecaedro es

$$Z_{G,D} = \frac{1}{60} (t_1^{12} + 24t_1^2t_5^2 + 15t_2^6 + 20t_3^4)$$

Por lo tanto, llegamos a el siguiente polinomio:

$$Z_{G,D} = \frac{1}{60} \cdot ((x+y+z)^{12} + 24 \cdot (x^5+y^5+z^5)^2 \cdot (x+y+z)^2 + 15 \cdot (x^2+y^2+z^2)^6 + 20 \cdot (x^3+y^3+z^3)^4)$$

Que si lo desarrollamos nos da:

$$\begin{aligned} &= x^{12} + x^{11}y + 3x^{10}y^2 + 5x^9y^3 + 12x^8y^4 + 14x^7y^5 + 24x^6y^6 + 14x^5y^7 + 12x^4y^8 + 5x^3y^9 + 3x^2y^{10} \\ &\quad + xy^{11} + y^{12} + x^{11}z + 3x^{10}yz + 11x^9y^2z + 33x^8y^3z + 66x^7y^4z + 94x^6y^5z + 94x^5y^6z + 66x^4y^7z \\ &\quad + 33x^3y^8z + 11x^2y^9z + 3xy^{10}z + y^{11}z + 3x^{10}z^2 + 11x^9yz^2 + 57x^8y^2z^2 + 132x^7y^3z^2 + 246x^6y^4z^2 \\ &\quad + 278x^5y^5z^2 + 246x^4y^6z^2 + 132x^3y^7z^2 + 57x^2y^8z^2 + 11xy^9z^2 + 3y^{10}z^2 + 5x^9z^3 + 33x^8yz^3 \\ &\quad + 132x^7y^2z^3 + 312x^6y^3z^3 + 462x^5y^4z^3 + 462x^4y^5z^3 + 312x^3y^6z^3 + 132x^2y^7z^3 + 33xy^8z^3 + 5y^9z^3 \\ &\quad + 12x^8z^4 + 66x^7yz^4 + 246x^6y^2z^4 + 462x^5y^3z^4 + 600x^4y^4z^4 + 462x^3y^5z^4 + 246x^2y^6z^4 + 66xy^7z^4 \\ &\quad + 12y^8z^4 + 14x^7z^5 + 94x^6yz^5 + 278x^5y^2z^5 + 462x^4y^3z^5 + 462x^3y^4z^5 + 278x^2y^5z^5 + 94xy^6z^5 \\ &\quad + 14y^7z^5 + 24x^6z^6 + 94x^5yz^6 + 246x^4y^2z^6 + 312x^3y^3z^6 + 246x^2y^4z^6 + 94xy^5z^6 + 24y^6z^6 + 14x^5z^7 \\ &\quad + 66x^4yz^7 + 132x^3y^2z^7 + 132x^2y^3z^7 + 66xy^4z^7 + 14y^5z^7 + 12x^4z^8 + 33x^3yz^8 + 57x^2y^2z^8 + 33xy^3z^8 \\ &\quad + 12y^4z^8 + 5x^3z^9 + 11x^2yz^9 + 11xy^2z^9 + 5y^3z^9 + 3x^2z^{10} + 3xyz^{10} + 3y^2z^{10} + xz^{11} + yz^{11} + z^{12}. \end{aligned}$$

De nuevo, planteamos algunas preguntas:

- **¿Cuántas coloraciones distintas hay?**, de esta pregunta ya sabemos la respuesta, ya que es el número de órbitas o diseños; pero si no lo supiésemos bastaría con sustituir cada uno de los pesos por el valor 1, es decir, $x = y = z = 1$

Si lo realizamos, llegamos al resultado de 9099

O podríamos aplicar la proposición 3.7, utilizando que $|R| = 3$, que es lo mismo que sustituir cada peso por el valor 1 y sustituyendo en $Z_{G,D}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12})$, es decir,
 $Z_{G,D}(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3) = \frac{1}{60} (3^{12} + 24 \cdot 3^2 \cdot 3^2 + 15 \cdot 3^6 + 20 \cdot 3^4) = 9099.$

- **¿En cuántas de estas coloraciones alguna cara es roja?**, para responder a esta pregunta vamos al polinomio resultante y buscamos en cuales de ellas aparece la variable x y las contamos, de manera que sumamos cuantos términos hay de cada tipo, teniendo en cuenta que si su coeficiente es distinto de 1 se suma tantas veces como diga su coeficiente. O sustituimos en el polinomio las variables $y = z = 1$ y dejamos la variable x como x y contamos en el nuevo polinomio obtenido todos los coeficientes que acompañen a x , es decir, todos salvo el término independiente, y obtenemos así cuantas tienen alguna cara de rojo. O por otro lado, haciendo el mismo procedimiento, el término independiente nos dice cuantas NO tienen alguna cara de rojo, bastará con restar al total de coloraciones aquella que no tiene caras rojas. De cualquiera de las formas, llegamos a que los cubos cuya alguna de sus caras es roja es 9003.

Ejemplo histórico

Ejemplo 3.10. Ejemplo histórico de los 4 interruptores

El problema histórico que nombramos en el capítulo anterior nos quedó pendiente de resolver. Recordamos que fue necesario un ordenador gigante para su resolución por desconocimiento del teorema.

Al igual que en los ejemplos anteriores definimos los conjuntos y el grupo, en este caso tenemos $D = \{0, 1\}^4$ y $G = S_4$ que actúa sobre D . Llamamos $R = \{0, 1\}$.

Para cada $\sigma \in S_4$, si $f \in \{D \rightarrow R\}$, se observa que con la definición dada en el capítulo 2 y la proposición 3.1 que dos funciones son esencialmente iguales $\Leftrightarrow f^\sigma(b_1, b_2, b_3, b_4) = f((b_1, b_2, b_3, b_4)^{\sigma^{-1}})$. Así dos funciones son esencialmente iguales \Leftrightarrow están en el mismo diseño.

Vamos a utilizar el polinomio indicador calculada en el ejercicio 2.7:

$$Z_{G,D} = \frac{1}{24} (t_1^{16} + 6t_1^8t_2^4 + 3t_1^4t_2^6 + 8t_1^4t_3^4 + 6t_1^2t_2^1t_4^3).$$

Consideramos, $|R| = 2$, luego

$$Z_{G,D}(t_1, t_2, t_3, t_4) = Z_{G,D}(2, 2, 2, 2) = \frac{1}{24} (2^{16} + 6 \cdot 2^8 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^4 \cdot 2^6 + 8 \cdot 2^4 \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot 2^3) = 3984$$

llegamos a que hay 3984 diseños o como decía el problema funciones esencialmente diferentes.

Ejemplo 3.11. Formas de numerar las caras de un cubo del 1 al 10 para que la suma de sus lados sea 12.

De nuevo, vamos a utilizar para resolver este ejercicio el *ID* que obtenemos del cubo. Consideramos diez coloraciones, en este caso son los valores que pueden tomar las caras del cubo, es decir, $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, cuyos pesos esta vez son: $\omega(1) = x, \omega(2) = x^2, \omega(3) = x^3, \omega(4) = x^4, \omega(5) = x^5, \omega(6) = x^6, \omega(7) = x^7, \omega(8) = x^8, \omega(9) = x^9$ y $\omega(10) = x^{10}$. Hemos elegido estos pesos porque nos interesa, ya que el exponente del polinomio que obtendremos nos dará la suma de los valores de los lados. De esta manera como lo que queremos colorear es un cubo $|D| = 6$. Como Z el polinomio

indicador de la acción de G sobre D , tenemos en este caso:

$$\begin{aligned} ID = Z_{G,D} &((x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x), \\ &(x^{20} + x^{18} + x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2), \\ &(x^{30} + x^{27} + x^{24} + x^{21} + x^{18} + x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^3), \\ &(x^{40} + x^{36} + x^{32} + x^{28} + x^{24} + x^{20} + x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4), \\ &(x^{50} + x^{45} + x^{40} + x^{35} + x^{30} + x^{25} + x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5), \\ &(x^{60} + x^{54} + x^{48} + x^{42} + x^{36} + x^{30} + x^{24} + x^{18} + x^{12} + x^6)) \\ &= Z(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6). \end{aligned}$$

El polinomio indicador del cubo es

$$Z_{G,D} = \frac{1}{24} (t_1^6 + 6t_1^2t_4 + 3t_1^2t_2^2 + 6t_2^3 + 8t_3^2).$$

Por lo tanto, llegamos al siguiente polinomio:

$$\begin{aligned} Z_{G,D} = \frac{1}{24} &[(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)^6 + 3(x^{20} + x^{18} + x^{16} + x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 \\ &+ x^6 + x^4 + x^2)^2(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)^2 + 6(x^{20} + x^{18} + x^{16} + x^{14} + x^{12} \\ &+ x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2)^3 + 6(x^{40} + x^{36} + x^{32} + x^{28} + x^{24} + x^{20} + x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4)(x^{10} + x^9 \\ &+ x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)^2 + 8(x^{30} + x^{27} + x^{24} + x^{21} + x^{18} + x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^3)^2] \end{aligned}$$

Por alguna razón SAGE no nos muestra todo el polinomio desarrollado, por suerte, nos permite realizar una operación que en este caso nos simplifica el ejercicio. En SAGE hay un comando, `.coeffs()` que nos da el coeficiente y el grado del polinomio al que acompaña, de esta manera sin necesidad de escribir todo el polinomio, lo conocemos:

$$\begin{aligned} [[1,6],[1,7],[3,8],[5,9],[10,10],[15,11],[29,12],[41,13],[68,14],[98,15],[146,16],[199,17], \\ [283,18],[368,19],[490,20],[616,21],[778,22],[937,23],[1137,24],[1314,25],[1526,26],[1705,27], \\ [1899,28],[2042,29],[2197,30],[2277,31],[2358,32],[2364,33],[2358,34],[2277,35],[2197,36], \\ [2042,37],[1899,38],[1705,39],[1526,40],[1314,41],[1137,42],[937,43],[778,44],[616,45], \\ [490,46],[368,47],[283,48],[199,49],[146,50],[98,51],[68,52],[41,53],[29,54],[15,55],[10,56], \\ [5,57],[3,58],[1,59],[1,60]]. \end{aligned}$$

Teniendo esto presente, vemos que lo que el enunciado nos pide es encontrar cuantas formas hay de colocar los números del 1 al 10 en un cubo, pudiendo repetirlos, de forma que su suma es 12, para ello, debemos fijarnos en el coeficiente que acompaña al monomio de grado 12, porque sabemos que todos los que tienen el mismo grado tienen el mismo peso, es decir, son de las coloraciones con ese peso, que en nuestro caso, nos da igual que sean distintos diseño, porque tal y como lo hemos definido lo que nos interesa es que la suma dé los lados de lo que obtenemos en el exponente, así que dicho coeficiente es el número de cubos que cumplen lo buscado. Sea entonces, [29, 12], decimos que son 29 las formas de numerar un cubo cumpliendo lo dicho.

Podemos decir que 29 casos se pueden sacar a mano y sin miedo a que se nos olvide ninguno; pero gracias a este polinomio podemos decir también, por ejemplo, que las formas de numerar un cubo para que la suma de sus caras sea 32 son 2358 o para que la suma de sus caras sea 43 son 937, que no son tan fáciles de hacer a mano como el primer ejemplo.

Ejemplo 3.12. Formas de colorear un cubo con 7 colores distintos utilizando exactamente 3

Vamos a utilizar para resolver este ejercicio el polinomio indicador que obtenemos del cubo. Consideramos siete colores, por ejemplo, $R = \{\text{rojo}, \text{azul}, \text{verde}, \text{naranja}, \text{morado}, \text{blanco}, \text{amarillo}\}$, cuyos pesos son: $\omega(\text{rojo}) = x$, $\omega(\text{azul}) = y$, $\omega(\text{verde}) = z$, $\omega(\text{naranja}) = t$, $\omega(\text{morado}) = u$, $\omega(\text{blanco}) = v$

y $\omega(\text{amarillo}) = w$. De esta manera como lo que queremos colorear es un cubo, $|D| = 6$. Como Z es el polinomio indicador de la acción de G sobre D , tenemos en este caso:

$$\begin{aligned} ID &= Z_{G,D}((x+y+z+t+u+v+w), (x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2+w^2), (x^3+y^3+z^3+t^3+u^3+v^3+w^3), \\ &\quad (x^4+y^4+z^4+t^4+u^4+v^4+w^4), (x^5+y^5+z^5+t^5+u^5+v^5+w^5), (x^6+y^6+z^6+t^6+u^6+v^6+w^6)) \\ &= Z_{G,D}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6). \end{aligned}$$

El polinomio indicador del cubo es

$$Z_{G,D} = \frac{1}{24} (t_1^6 + 6t_1^2t_4 + 3t_1^2t_2^2 + 6t_2^3 + 8t_3^2).$$

Por lo tanto, llegamos al siguiente polinomio:

$$\begin{aligned} Z_{G,D} &= \frac{1}{24} ((x+y+z+t+u+v+w)^6 + 6(x^4+y^4+z^4+t^4+u^4+v^4+w^4)(x+y+z+t+u+v+w)^2 \\ &\quad + 3(x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2+w^2)^2(x+y+z+t+u+v+w)^2 \\ &\quad + 6(x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2+w^2)^3 + 8(x^3+y^3+z^3+t^3+u^3+v^3+w^3)^2) \end{aligned}$$

Que si lo desarrollamos nos da el polinomio del anexo A.1.

Con un polinomio como este nos resulta difícil trabajar, como lo que queremos es encontrar aquellas formas de colorear el cubo con tres colores, vamos a sustituir nuestras variables $(x, y, z, t, u, v, w) = (x, y, z, 0, 0, 0, 0)$ y nos aparecer el siguiente polinomio

$$\begin{aligned} Z_{G,D}(x, y, z, 0, 0, 0, 0) &= x^6 + x^5y + 2x^4y^2 + 2x^3y^3 + 2x^2y^4 + xy^5 + y^6 + x^5z + 2x^4yz + 3x^3y^2z + 3x^2y^3z \\ &\quad + 2xy^4z + y^5z + 2x^4z^2 + 3x^3yz^2 + 6x^2y^2z^2 + 3xy^3z^2 + 2y^4z^2 + 2x^3z^3 + 3x^2yz^3 \\ &\quad + 3xy^2z^3 + 2y^3z^3 + 2x^2z^4 + 2xyz^4 + 2y^2z^4 + xz^5 + yz^5 + z^6 \end{aligned}$$

Los sumandos en los que aparecen tres variables, son los que consideraremos que utilizan tres colores. Observamos que son los siguientes: $2x^4yz, 3x^3y^2z, 3x^2y^3z, 2xy^4z, 3x^3yz^2, 6x^2y^2z^2, 3xy^3z^2, 3x^2yz^3, 3xy^2z^3, 2xyz^4$. Por lo tanto, hay 30 formas de pintar el cubo con rojo, azul y verde, utilizando los tres colores.

Como cada combinación de colores de tres en tres es independiente del resto, basta realizar el mismo proceso con cada una de las distintas combinaciones, que son

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

Luego, en total, con 7 colores diferentes, el cubo se puede pintar utilizando exactamente 3 colores cada vez, de $30 \cdot 35 = 1050$ formas diferentes.

Apéndice A

Anexo I

A.1. Polinomio 7 colores

Por la longitud del polinomio vamos a añadirlo en un anexo. Tenemos el siguiente polinomio del ejercicio 3.12.

$$\begin{aligned} Z_{G,S} = \frac{1}{24} & ((x+y+z+t+u+v+w)^6 + 6(x^4+y^4+z^4+t^4+u^4+v^4+w^4)(x+y+z+t+u+v+w)^2 \\ & + 3(x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2+w^2)^2(x+y+z+t+u+v+w)^2 \\ & + 6(x^2+y^2+z^2+t^2+u^2+v^2+w^2)^3 + 8(x^3+y^3+z^3+t^3+u^3+v^3+w^3)^2) \end{aligned}$$

Que al desarrollarlo tenemos:

$$\begin{aligned} Z_{G,S} = & t^6 + t^5u + 2t^4u^2 + 2t^3u^3 + 2t^2u^4 + tu^5 + u^6 + t^5v + 2t^4uv + 3t^3u^2v + 3t^2u^3v + 2tu^4v + u^5v \\ & + 2t^4v^2 + 3t^3uv^2 + 6t^2u^2v^2 + 3tu^3v^2 + 2u^4v^2 + 2t^3v^3 + 3t^2uv^3 + 3tu^2v^3 + 2u^3v^3 + 2t^2v^4 + 2tuv^4 + tv^5 \\ & + 2u^2v^4 + uv^5 + v^6 + t^5w + 2t^4uw + 3t^3u^2w + 3t^2u^3w + 2tu^4w + u^5w + 2t^4vw + 5t^3uvw + 8t^2u^2vw \\ & + 5tu^3vw + 2u^4vw + 3t^3v^2w + 8t^2uv^2w + 8tu^2v^2w + 3u^3v^2w + 3t^2v^3w + 5tuv^3w + 3u^2v^3w + 2tv^4w \\ & + 2uv^4w + v^5w + 2t^4w^2 + 3t^3uw^2 + 6t^2u^2w^2 + 3tu^3w^2 + 2u^4w^2 + 3t^3vw^2 + 8t^2uvw^2 + 8tu^2vw^2 \\ & + 3u^3vw^2 + 6t^2v^2w^2 + 8tuv^2w^2 + 6u^2v^2w^2 + 3tv^3w^2 + 3uv^3w^2 + 2v^4w^2 + 2t^3w^3 + 3t^2uw^3 + 3tu^2w^3 \\ & + 2u^3w^3 + 3t^2vw^3 + 5tuvw^3 + 3u^2vw^3 + 3tv^2w^3 + 3uv^2w^3 + 2v^3w^3 + 2t^2w^4 + 2tuw^4 + 2u^2w^4 + 2tvw^4 \\ & + 2uvw^4 + 2v^2w^4 + tw^5 + uw^5 + vw^5 + w^6 + t^5x + 2t^4ux + 3t^3u^2x + 3t^2u^3x + 2tu^4x + u^5x + 2t^4vx \\ & + 5t^3uvx + 8t^2u^2vx + 5tu^3vx + 2u^4vx + 3t^3v^2x + 8t^2uv^2x + 8tu^2v^2x + 3u^3v^2x + 3t^2v^3x + 5tuv^3x \\ & + 3u^2v^3x + 2tv^4x + 2uv^4x + v^5x + 2t^4wx + 5t^3uwx + 8t^2u^2wx + 5tu^3wx + 2u^4wx + 5t^3vwx + 15t^2uvwx \\ & + 15tu^2vwx + 5u^3vwx + 8t^2v^2wx + 15tuv^2wx + 8u^2v^2wx + 5tv^3wx + 5uv^3wx + 2v^4wx + 3t^3w^2x \\ & + 8t^2uw^2x + 8tu^2w^2x + 3u^3w^2x + 8t^2vw^2x + 15tuvw^2x + 8u^2vw^2x + 8tv^2w^2x + 8uv^2w^2x + 3v^3w^2x \\ & + 3t^2w^3x + 5tuw^3x + 3u^2w^3x + 5tvw^3x + 5uvw^3x + 3v^2w^3x + 2tw^4x + 2uw^4x + 2vw^4x + w^5x + 2t^4x^2 \\ & + 3t^3ux^2 + 6t^2u^2x^2 + 3tu^3x^2 + 2u^4x^2 + 3t^3vx^2 + 8t^2uvx^2 + 8tu^2vx^2 + 3u^3vx^2 + 6t^2v^2x^2 + 8tuv^2x^2 \\ & + 6u^2v^2x^2 + 3tv^3x^2 + 3uv^3x^2 + 2v^4x^2 + 3t^3wx^2 + 8t^2uwx^2 + 8tu^2wx^2 + 3u^3wx^2 + 8t^2vwx^2 + 15tuvwx^2 \\ & + 8u^2vwx^2 + 8tv^2wx^2 + 8uv^2wx^2 + 3v^3wx^2 + 6t^2w^2x^2 + 8tuw^2x^2 + 6u^2w^2x^2 + 8tvw^2x^2 + 8uvw^2x^2 \\ & + 6v^2w^2x^2 + 3tw^3x^2 + 3uw^3x^2 + 3vw^3x^2 + 2w^4x^2 + 2t^3x^3 + 3t^2ux^3 + 3tu^2x^3 + 2u^3x^3 + 3t^2vx^3 \\ & + 5tuvx^3 + 3u^2vx^3 + 3tv^2x^3 + 3uv^2x^3 + 2v^3x^3 + 3t^2wx^3 + 5tuwx^3 + 3u^2wx^3 + 5tvwx^3 + 5uvwx^3 \\ & + 3v^2wx^3 + 3tw^2x^3 + 3uw^2x^3 + 3vw^2x^3 + 2w^3x^3 + 2t^2x^4 + 2tux^4 + 2u^2x^4 + 2tvx^4 + 2uvx^4 + 2v^2x^4 \\ & + 2twx^4 + 2uwx^4 + 2vwx^4 + 2w^2x^4 + tx^5 + ux^5 + vx^5 + wx^5 + x^6 + t^5y + 2t^4uy + 3t^3u^2y + 3t^2u^3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2tu^4y + u^5y + 2t^4vy + 5t^3uvy + 8t^2u^2vy + 5tu^3vy + 2u^4vy + 3t^3v^2y + 8t^2uv^2y + 8tu^2v^2y + 3u^3v^2y \\
& + 3t^2v^3y + 5tuv^3y + 3u^2v^3y + 2tv^4y + 2uv^4y + v^5y + 2t^4wy + 5t^3uwy + 8t^2u^2wy + 5tu^3wy + 2u^4wy \\
& + 5t^3vwy + 15t^2uvwy + 15tu^2vwy + 5u^3vwy + 8t^2v^2wy + 15tuv^2wy + 8u^2v^2wy + 5tv^3wy + 5uv^3wy \\
& + 2v^4wy + 3t^3w^2y + 8t^2uw^2y + 8tu^2w^2y + 3u^3w^2y + 8t^2vw^2y + 15tuvw^2y + 8u^2vw^2y + 8tv^2w^2y \\
& + 8uv^2w^2y + 3v^3w^2y + 3t^2w^3y + 5tuw^3y + 3u^2w^3y + 5tvw^3y + 5uvw^3y + 3v^2w^3y + 2tw^4y + 2uw^4y \\
& + 2vw^4y + w^5y + 2t^4xy + 5t^3uxy + 8t^2u^2xy + 5tu^3xy + 2u^4xy + 5t^3vxy + 15t^2uvxy + 15tu^2vxy \\
& + 5u^3vxy + 8t^2v^2xy + 15tuv^2xy + 8u^2v^2xy + 5tv^3xy + 5uv^3xy + 2v^4xy + 5t^3wxy + 15t^2uwxy \\
& + 15tu^2wxy + 5u^3wxy + 15t^2vwxy + 30tuvwxy + 15u^2vwxy + 15tv^2wxy + 15uv^2wxy + 5v^3wxy \\
& + 8t^2w^2xy + 15tuw^2xy + 8u^2w^2xy + 15tvw^2xy + 8v^2w^2xy + 5tw^3xy + 5uw^3xy + 5vw^3xy \\
& + 2w^4xy + 3t^3x^2y + 8t^2ux^2y + 8tu^2x^2y + 3u^3x^2y + 8t^2vx^2y + 15tuvx^2y + 8u^2vx^2y + 8tv^2x^2y \\
& + 3v^3x^2y + 8t^2wx^2y + 15tuwx^2y + 8u^2wx^2y + 15tvwx^2y + 8v^2wx^2y + 8tw^2x^2y + 8uw^2x^2y \\
& + 8vw^2x^2y + 3w^3x^2y + 3t^2x^3y + 5tux^3y + 3u^2x^3y + 5tvx^3y + 5uvx^3y + 3v^2x^3y + 5twx^3y + 5uwx^3y \\
& + 5vwx^3y + 3w^2x^3y + 2tx^4y + 2ux^4y + 2vx^4y + 2wx^4y + x^5y + 2t^4y^2 + 3t^3uy^2 + 6t^2u^2y^2 + 3tu^3y^2 \\
& + 2u^4y^2 + 3t^3vy^2 + 8t^2uvy^2 + 8tu^2vy^2 + 3u^3vy^2 + 6t^2v^2y^2 + 8tuv^2y^2 + 6u^2v^2y^2 + 3tv^3y^2 + 3uv^3y^2 \\
& + 2v^4y^2 + 3t^3wy^2 + 8t^2uwy^2 + 8tu^2wy^2 + 3u^3wy^2 + 8t^2vwy^2 + 15tuvwy^2 + 8u^2vwy^2 + 8tv^2wy^2 \\
& + 8uv^2wy^2 + 3v^3wy^2 + 6t^2w^2y^2 + 8tuw^2y^2 + 6u^2w^2y^2 + 8tvw^2y^2 + 8uvw^2y^2 + 6v^2w^2y^2 + 3tw^3y^2 \\
& + 3uw^3y^2 + 3vw^3y^2 + 2w^4y^2 + 3t^3xy^2 + 8t^2uxy^2 + 8tu^2xy^2 + 3u^3xy^2 + 8t^2vxy^2 + 15tuvxy^2 + 8u^2vxy^2 \\
& + 8tv^2xy^2 + 8uv^2xy^2 + 3v^3xy^2 + 8t^2wxy^2 + 15tuwxy^2 + 8u^2wxy^2 + 15tvwx^2y + 15uvwxy^2 + 8v^2wxy^2 \\
& + 8tw^2xy^2 + 8uw^2xy^2 + 8vw^2xy^2 + 3w^3xy^2 + 6t^2x^2y^2 + 8tux^2y^2 + 6u^2x^2y^2 + 8tvx^2y^2 + 8uvx^2y^2 \\
& + 6v^2x^2y^2 + 8twx^2y^2 + 8uwx^2y^2 + 8vwx^2y^2 + 6w^2x^2y^2 + 3tx^3y^2 + 3ux^3y^2 + 3vx^3y^2 + 3wx^3y^2 + 2x^4y^2 \\
& + 2t^3y^3 + 3t^2uy^3 + 3tu^2y^3 + 2u^3y^3 + 3t^2vy^3 + 5tuvy^3 + 3u^2vy^3 + 3tv^2y^3 + 3uv^2y^3 + 2v^3y^3 + 3t^2wy^3 \\
& + 5tuwy^3 + 3u^2wy^3 + 5tvwy^3 + 5uvw^3y + 3v^2wy^3 + 3tw^2y^3 + 3uw^2y^3 + 3vw^2y^3 + 2w^3y^3 + 3t^2xy^3 \\
& + 5tuxy^3 + 3u^2xy^3 + 5tvxy^3 + 5uvxy^3 + 3v^2xy^3 + 5twxy^3 + 5uwxy^3 + 5vwxy^3 + 3w^2xy^3 + 3tx^2y^3 \\
& + 3ux^2y^3 + 3vx^2y^3 + 3wx^2y^3 + 2x^3y^3 + 2t^2y^4 + 2tuy^4 + 2u^2y^4 + 2tv^4 + 2uv^4 + 2v^2y^4 + 2twy^4 \\
& + 2uwy^4 + 2vwy^4 + 2w^2y^4 + 2txy^4 + 2uxy^4 + 2vxy^4 + 2wxy^4 + 2x^2y^4 + ty^5 + uy^5 + vy^5 + wy^5 + xy^5 \\
& + y^6 + t^5z + 2t^4uz + 3t^3u^2z + 3t^2u^3z + 2tu^4z + u^5z + 2t^4vz + 5t^3uvz + 8t^2u^2vz + 5tu^3vz + 2u^4vz \\
& + 3t^3v^2z + 8t^2uv^2z + 8tu^2v^2z + 3u^3v^2z + 3t^2v^3z + 5tuv^3z + 3u^2v^3z + 2tv^4z + 2uv^4z + v^5z + 2t^4wz \\
& + 5t^3uwz + 8t^2u^2wz + 5tu^3wz + 2u^4wz + 5t^3vwz + 15t^2uvwz + 15tu^2vwz + 5u^3vwz + 8t^2v^2wz \\
& + 15tuv^2wz + 8u^2v^2wz + 5tv^3wz + 5uv^3wz + 2v^4wz + 3t^3w^2z + 8t^2uw^2z + 8tu^2w^2z + 3u^3w^2z \\
& + 8t^2vw^2z + 15tuvw^2z + 8u^2vw^2z + 8tv^2w^2z + 8uv^2w^2z + 3v^3w^2z + 3t^2w^3z + 5tuw^3z + 3u^2w^3z \\
& + 5tvw^3z + 5uvw^3z + 3v^2w^3z + 2tw^4z + 2uw^4z + 2vw^4z + w^5z + 2t^4xz + 5t^3uxz + 8t^2u^2xz + 5tu^3xz \\
& + 2u^4xz + 5t^3vxz + 15t^2uvxz + 15tu^2vxz + 5u^3vxz + 8t^2v^2xz + 15tuv^2xz + 8u^2v^2xz + 5tv^3xz + 5uv^3xz \\
& + 2v^4xz + 5t^3wxz + 15t^2uwxz + 15tu^2wxz + 5u^3wxz + 15t^2vwxz + 30tuvwxz + 15u^2vwxz + 15tv^2wxz \\
& + 15uv^2wxz + 5v^3wxz + 8t^2w^2xz + 15tuw^2xz + 8u^2w^2xz + 15tvw^2xz + 15uvw^2xz + 8v^2w^2xz + 5tw^3xz \\
& + 5uw^3xz + 5vw^3xz + 2w^4xz + 3t^3x^2z + 8t^2ux^2z + 8tu^2x^2z + 3u^3x^2z + 8t^2vx^2z + 15tuvx^2z + 8u^2vx^2z \\
& + 8tv^2x^2z + 8uv^2x^2z + 3v^3x^2z + 8t^2wx^2z + 15tuwx^2z + 8u^2wx^2z + 15tvwx^2z + 15uvwx^2z + 8v^2wx^2z \\
& + 8tw^2x^2z + 8uw^2x^2z + 8vw^2x^2z + 3w^3x^2z + 3t^2x^3z + 5tu^3z + 3u^2x^3z + 5tvx^3z + 5uvx^3z + 3v^2x^3z \\
& + 5twx^3z + 5uwx^3z + 5vwx^3z + 3w^2x^3z + 2tx^4z + 2ux^4z + 2vx^4z + 2wx^4z + x^5z + 2t^4yz + 5t^3uyz \\
& + 8t^2u^2yz + 5tu^3yz + 2u^4yz + 5t^3vyz + 15t^2uvyz + 15tu^2vyz + 5u^3vyz + 8t^2v^2yz + 15tuv^2yz + 8u^2v^2yz \\
& + 5tv^3yz + 5uv^3yz + 2v^4yz + 5t^3wyz + 15t^2uwyz + 15tu^2wyz + 5u^3wyz + 15t^2vwyz + 30tuvwyz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 15u^2vwyz + 15tv^2wyz + 15uv^2wyz + 5v^3wyz + 8t^2w^2yz + 15tuw^2yz + 8u^2w^2yz + 15tvw^2yz \\
& + 15uvw^2yz + 8v^2w^2yz + 5tw^3yz + 5uw^3yz + 5vw^3yz + 2w^4yz + 5t^3xyz + 15t^2uxyz + 15tu^2xyz \\
& + 5u^3xyz + 15t^2vxyz + 30tuvxyz + 15u^2vxyz + 15tv^2xyz + 15uv^2xyz + 5v^3xyz + 15t^2wxyz + 30tuwxyz \\
& + 15u^2wxyz + 30tvwxyz + 30uvwxyz + 15v^2wxyz + 15tw^2xyz + 15uw^2xyz + 15vw^2xyz + 5w^3xyz \\
& + 8t^2x^2yz + 15tux^2yz + 8u^2x^2yz + 15tvx^2yz + 15uvx^2yz + 8v^2x^2yz + 15twx^2yz + 15uwx^2yz + 15vwx^2yz \\
& + 8w^2x^2yz + 5tx^3yz + 5ux^3yz + 5vx^3yz + 5wx^3yz + 2x^4yz + 3t^3y^2z + 8t^2uy^2z + 8tu^2y^2z + 3u^3y^2z \\
& + 8t^2vy^2z + 15tuvy^2z + 8u^2vy^2z + 8tv^2y^2z + 8uv^2y^2z + 3v^3y^2z + 8t^2wy^2z + 15tuwy^2z + 8u^2wy^2z \\
& + 15tvwy^2z + 15uvwy^2z + 8v^2wy^2z + 8tw^2y^2z + 8uw^2y^2z + 8vw^2y^2z + 3w^3y^2z + 8t^2xy^2z + 15tuxy^2z \\
& + 8u^2xy^2z + 15tvxy^2z + 15uvxy^2z + 8v^2xy^2z + 15twxy^2z + 15uwxy^2z + 15vwxy^2z + 8w^2xy^2z + 8tx^2y^2z \\
& + 8ux^2y^2z + 8vx^2y^2z + 8wx^2y^2z + 3x^3y^2z + 3t^2y^3z + 5tuy^3z + 3u^2y^3z + 5tvy^3z + 5uvy^3z + 3v^2y^3z \\
& + 5twy^3z + 5uwy^3z + 5vwy^3z + 3w^2y^3z + 5txy^3z + 5uxy^3z + 5vxy^3z + 5wxy^3z + 3x^2y^3z + 2ty^4z \\
& + 2uy^4z + 2vy^4z + 2wy^4z + 2xy^4z + y^5z + 2t^4z^2 + 3t^3uz^2 + 6t^2u^2z^2 + 3tu^3z^2 + 2u^4z^2 + 3t^3vz^2 \\
& + 8t^2uvz^2 + 8tu^2vz^2 + 3u^3vz^2 + 6t^2v^2z^2 + 8tuv^2z^2 + 6u^2v^2z^2 + 3tv^3z^2 + 3uv^3z^2 + 2v^4z^2 + 3t^3wz^2 \\
& + 8t^2uwz^2 + 8tu^2wz^2 + 3u^3wz^2 + 8t^2vwz^2 + 15tvwxz^2 + 3uy^3z^2 + 3uw^2z^3 + 5wxyz^3 + 2uvz^4 \\
& + 15tuvwz^2 + 8u^2vwz^2 + 8tv^2wz^2 + 8uv^2wz^2 + 3v^3wz^2 + 6t^2w^2z^2 + 8tuw^2z^2 + 6u^2w^2z^2 + 8tvw^2z^2 \\
& + 8uvw^2z^2 + 6v^2w^2z^2 + 3tw^3z^2 + 3uw^3z^2 + 3vw^3z^2 + 2w^4z^2 + 3t^3xz^2 + 8t^2uxz^2 + 8tu^2xz^2 + 3u^3xz^2 \\
& + 8t^2vxz^2 + 15tuvxz^2 + 8u^2vxz^2 + 8tv^2xz^2 + 8uv^2xz^2 + 3v^3xz^2 + 8t^2wxz^2 + 15tuwxyz^2 + 8u^2wxz^2 \\
& + 15uvwxz^2 + 8v^2wxz^2 + 8tw^2xz^2 + 8uw^2xz^2 + 8vw^2xz^2 + 3w^3xz^2 + 6t^2x^2z^2 + 8tux^2z^2 + 6u^2x^2z^2 \\
& + 8tvx^2z^2 + 8uvx^2z^2 + 6v^2x^2z^2 + 8twx^2z^2 + 8uwx^2z^2 + 8vwx^2z^2 + 6w^2x^2z^2 + 3tx^3z^2 + 3ux^3z^2 \\
& + 3vx^3z^2 + 3wx^3z^2 + 2x^4z^2 + 3t^3yz^2 + 8t^2uyz^2 + 8tu^2yz^2 + 3u^3yz^2 + 8t^2vyz^2 + 15tuvyz^2 + 8u^2vyz^2 \\
& + 8tv^2yz^2 + 8uv^2yz^2 + 3v^3yz^2 + 8t^2wyz^2 + 15tuwy^2z + 8u^2wyz^2 + 15tvwy^2z + 15uvwy^2z + 8v^2wyz^2 \\
& + 8tw^2yz^2 + 8uw^2yz^2 + 8vw^2yz^2 + 3w^3yz^2 + 8t^2xyz^2 + 15tuxyz^2 + 8u^2xyz^2 + 15tvxyz^2 + 15uvxyz^2 \\
& + 8v^2xyz^2 + 15twxyz^2 + 15uwxyz^2 + 15vwxyz^2 + 8w^2xyz^2 + 8tx^2yz^2 + 8ux^2yz^2 + 8vx^2yz^2 + 8wx^2yz^2 \\
& + 3x^3yz^2 + 6t^2y^2z^2 + 8tuy^2z^2 + 6u^2y^2z^2 + 8tv^2z^2 + 8uv^2z^2 + 6v^2y^2z^2 + 8twy^2z^2 + 2v^2z^4 + 2twz^4 \\
& + 8uwy^2z^2 + 8vwy^2z^2 + 6w^2y^2z^2 + 8txy^2z^2 + 8uxy^2z^2 + 8vxy^2z^2 + 8wxy^2z^2 + 6x^2y^2z^2 + 3ty^3z^2 \\
& + 3vy^3z^2 + 3wy^3z^2 + 3xy^3z^2 + 2y^4z^2 + 2t^3z^3 + 3t^2uz^3 + 3tu^2z^3 + 2u^3z^3 + 3t^2vz^3 + 5tuvz^3 + 3u^2vz^3 \\
& + 3tv^2z^3 + 3uv^2z^3 + 2v^3z^3 + 3t^2wz^3 + 5tuwz^3 + 3u^2wz^3 + 5tvwz^3 + 5uvwz^3 + 3v^2wz^3 + 3tw^2z^3 \\
& + 3vw^2z^3 + 2w^3z^3 + 3t^2xz^3 + 5tuxz^3 + 3u^2xz^3 + 5tvxz^3 + 5uvxz^3 + 3v^2xz^3 + 5twxz^3 + 5uwxz^3 \\
& + 5vwxz^3 + 3w^2xz^3 + 3tx^2z^3 + 3ux^2z^3 + 3vx^2z^3 + 3wx^2z^3 + 2x^3z^3 + 3t^2yz^3 + 5tuyz^3 + 3u^2yz^3 \\
& + 5tvyz^3 + 5uvyz^3 + 3v^2yz^3 + 5twyz^3 + 5uwyz^3 + 5vwyz^3 + 3w^2yz^3 + 5txyz^3 + 5uxyz^3 + 5vxyz^3 \\
& + 3x^2yz^3 + 3ty^2z^3 + 3uy^2z^3 + 3vy^2z^3 + 3wy^2z^3 + 3xy^2z^3 + 2y^3z^3 + 2t^2z^4 + 2tu^2z^4 + 2u^2z^4 + 2tvz^4 \\
& + 2uwz^4 + 2vwz^4 + 2w^2z^4 + 2txz^4 + 2uxz^4 + 2vxz^4 + 2wxz^4 + 2x^2z^4 + 2tyz^4 + 2uyz^4 + 2vyz^4 + 2wyz^4 \\
& + 2xyz^4 + 2y^2z^4 + tz^5 + uz^5 + vz^5 + wz^5 + xz^5 + yz^5 + z^6
\end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] LIDL, R. Y PILZ, G. (1997), *Applied Abstract Algebra*. EEUU: Editorial Board (Springer), ISBN:0-387-98290-6.
- [2] JIMÉNEZ SERAL, P. (1993-1994), *Apuntes Álgebra V*.
- [3] JIMÉNEZ SERAL, P. (2014-2015), *Apuntes Teoría de Galois* .

