

# **Los Grupos Cristalográficos Planos**

**Guillermo Melgarejo Marin**

Trabajo de fin de grado en Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Concepción Martínez Pérez  
28 de junio de 2017



# Summary

Many cultures throughout history have studied the regular tiling of surfaces. Since Archimedes, in the third century BC, many important mathematicians have used regular tilings to understand the geometry in mosaics and in great geometric works of art.

Firstly, we will clarify the mathematical basis of this work. We will use the first chapter as an introduction. We will define the ideas which we will use in the next chapters like groups, subgroups, homeomorphisms and we will state the first isomorphism theorem. We will also define cyclic and dihedral groups and consider the subgroups of the finite groups  $C_2$ ,  $C_2 \times C_2$ ,  $D_8$  and  $D_{12}$  because they are very important in the following chapters. In the second part of this chapter we will define the scalar product of two vectors, vector norm and distance between two points on the plane. Then we will define the orthogonal group  $O_2$  as the group of orthogonal matrices  $2 \times 2$  with coefficients in  $\mathbb{R}^2$  and the Euclidean group  $E_2$  as the group of orthogonal transformations. We denote the orthogonal transformation  $x \mapsto v + xM^t$  with  $v$  a vector and  $M$  an orthogonal matrix by the pair  $(v, M)$ . Inside  $E_2$  we have the subgroup  $T$  consisting of translations which are transformations of the form  $(v, I)$  where  $v \in \mathbb{R}^2$  and  $I$  is the identity matrix. We see  $O_2$  as the subgroup of  $E_2$  of transformations of the form  $(0, M)$  (that fix the origin). We will define an important application:  $\pi : E_2 \rightarrow O_2$  where  $\pi(v, M) = M$ . We will prove an important proposition:

**Proposition:**  $E_2 = TO_2$ ,  $T$  is a normal subgroup of  $E_2$  and  $T \cap O_2 = 1$ .

Immediately we will classify the elements of the orthogonal group and the elements of  $E_2$  as translations, symmetries, rotations and glide symmetries. In addition we will state the composition rules between the  $E_2$  elements. For instance the composition of a symmetry and a rotation is a symmetry and the composition of two symmetries is a rotation. Finally we will define isometry and we will prove that the isometries make up a group with the composition of functions. We will also show that any orthogonal transformation is an isometry.

In the second chapter we will introduce notions which will be important in the last chapter. In the first part of this chapter we will define the wallpaper groups:

**Definition:** A subgroup  $G$  of  $E_2$  is a wallpaper group if its translation group  $(G \cap T)$  is generated by two independent translations and  $\pi(G)$  is finite.

Associated to a wallpaper group we define a lattice and the points group of a wallpaper group. We will fix notation which will be very useful in both second and third chapters. We will classify the possible lattices. There are five possibilities: Oblique, rectangular, centred rectangular, square and hexagonal. In the second part of this chapter we will prove some theorems about the points group of a wallpaper group. One of the most important theorems in this chapter is the crystallographic restriction:

**Theorem:** The order of a rotation in a wallpaper group can only be 2, 3, 4 or 6.

Finally, we will prove that if two wallpaper groups are isomorphic then their points groups are also isomorphic.

In the third chapter we will classify all the wallpaper groups. For each type of lattice  $L$  we will

describe the orthogonal transformations which preserve  $L$ . These orthogonal transformations make up a group. We will fix some notation at the first of the chapter that will be very useful to follow the wallpaper groups classification:

- i) The letter  $p$  refers to the lattice and stands for the word primitive. When we view a lattice as being made up of primitive cells (copies of the basic parallelogram which do not contain any lattice points in their interiors) we call it a primitive lattice. In one case (the centred rectangular lattice) we take a non-primitive cell together with its centre as the basic building block, and use the letter  $c$  to denote the resulting centred lattice. The symbol for a reflection is  $m$  (for mirror) and  $g$  denotes a glide reflection.
- ii) The number 1 is used for the identity transformation and the numbers 2, 3, 4 and 6 indicate rotations of the corresponding order. Rotations of order two are usually called "half turns".

Next we will state a first wallpaper groups classification theorem. This classification is due to an important Russian mathematician called Fedorov.

In the rest of the chapter we will describe our classification of the crystallographic groups. Firstly we will classify the wallpaper groups depending on their lattice, so we will have five possibilities. For each type of lattice we will classify the groups depending on their points group. The following table summarizes our classification:

Type of lattice	Wallpaper group	Points group
Oblique	$p1$	$I$
Oblique	$p2$	$\langle I \rangle$
Rectangular	$pm$	$\langle B_0 \rangle$
Rectangular	$pg$	$\langle B_0 \rangle$
Rectangular	$p2mm$	$\langle B_0, B_\pi \rangle$
Rectangular	$p2mg$	$\langle B_0, B_\pi \rangle$
Rectangular	$p2gg$	$\langle B_0, B_\pi \rangle$
Centred rectangular	$cm$	$\langle B_0 \rangle$
Centred rectangular	$c2mm$	$\langle B_0, B_\pi \rangle$
Square	$p4$	$\langle A_{\frac{\pi}{2}} \rangle$
Square	$p4mm$	$\langle A_{\frac{\pi}{2}}, B_0 \rangle$
Square	$p4mg$	$\langle A_{\frac{\pi}{2}}, B_0 \rangle$
Hexagonal	$p3$	$\langle A_{\frac{2\pi}{3}} \rangle$
Hexagonal	$p3m1$	$\langle A_{\frac{2\pi}{3}}, B_0 \rangle$
Hexagonal	$p31m$	$\langle A_{\frac{2\pi}{3}}, B_{\frac{\pi}{3}} \rangle$
Hexagonal	$p6$	$\langle A_{\frac{\pi}{3}} \rangle$
Hexagonal	$p6m$	$\langle A_{\frac{\pi}{3}}, B_0 \rangle$

So there are seventeen wallpaper groups. In the last section of the chapter we will prove that all the wallpaper groups are different, that is, not two of them are isomorphic.

# Índice general

<b>Summary</b>	<b>III</b>
<b>1. Conceptos previos</b>	<b>1</b>
1.1. Grupos . . . . .	1
1.1.1. Ejemplos de grupos . . . . .	1
1.2. El plano y el grupo euclídeo . . . . .	2
<b>2. Retículos y grupos de puntos</b>	<b>9</b>
2.1. Retículos . . . . .	9
2.2. Grupo de puntos . . . . .	11
<b>3. Los grupos cristalográficos planos</b>	<b>15</b>
3.1. Notación previa . . . . .	15
3.2. Clasificación histórica de los grupos cristalográficos planos . . . . .	15
3.3. Clasificación de los grupos cristalográficos planos . . . . .	16
3.3.1. Introducción . . . . .	16
3.3.2. Grupos donde el retículo es oblículo . . . . .	17
3.3.3. Grupos donde el retículo es rectangular . . . . .	18
3.3.4. Grupos donde el retículo es rectangular centrado . . . . .	20
3.3.5. Grupos donde el retículo es cuadrado . . . . .	22
3.3.6. Grupos donde el retículo es hexagonal . . . . .	24
3.3.7. Teoremas para completar la clasificación . . . . .	27
<b>Bibliografía</b>	<b>29</b>



# Capítulo 1

## Conceptos previos

### 1.1. Grupos

**Definición 1.1.** *Un grupo  $(G, \cdot)$  es un conjunto con una operación interna que verifica:*

- i)  $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in G$
- ii) *Existe un elemento  $1 \in G$  que verifica  $1x = x1 = x, \forall x \in G$  (elemento neutro)*
- iii) *Para todo  $x \in G$  existe un elemento que denotaremos  $x^{-1} \in G$  tal que  $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$  (elemento inverso)*

**Definición 1.2.** *Si  $G$  es un grupo finito, llamaremos **orden** de  $G$  al número de elementos que tiene el grupo y lo denotaremos  $|G|$ .*

**Definición 1.3.** *Sea  $G$  un grupo y  $x \in G$ . Si existe un natural  $n$  tal que  $x^n = 1$ , al menor tal  $n$  se le llama orden de  $x$ . Si no existe  $n$  se dice que  $x$  no tiene orden finito.*

**Definición 1.4.** *Un **subgrupo** de un grupo  $G$  es un subconjunto de  $G$  que con la restricción de la operación de  $G$  es también grupo. Si  $H$  es subgrupo de  $G$ , se escribe  $H \leq G$ .*

**Observación 1.5.** *Todo subgrupo de un grupo finito tiene orden un divisor del orden del grupo.*

**Lema 1.6.** *Un subconjunto no vacío  $H$  de un grupo  $G$  es un subgrupo de  $G$  sí y solo sí  $xy^{-1}$  pertenece a  $H$  siempre que  $x$  e  $y$  pertenecen a  $H$ .*

**Definición 1.7.** *Un **homomorfismo** entre dos grupos  $(G, \cdot)$  y  $(H, \cdot)$  es una aplicación  $f : G \rightarrow H$  tal que  $f(ab) = f(a)f(b)$  para todo  $a, b \in G$ . Un homomorfismo biyectivo se llama **isomorfismo**.*

**Teorema 1.8.** *(Primer Teorema de Isomorfía) Sea  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos. La aplicación  $\bar{f} : G/\text{Ker}(f) \rightarrow f(G)$  dada por  $\bar{f}(x\text{Ker}(f)) = f(x)$  es un isomorfismo de grupos.*

#### 1.1.1. Ejemplos de grupos

**Definición 1.9.** *Dado un grupo  $G$  y un elemento  $x \in G$ , el conjunto  $\langle x \rangle = \{x^n | n \in \mathbb{Z}\}$  es subgrupo y se llama **subgrupo generado por el elemento  $x$** . Un grupo  $G$  se dice **cíclico** si existe  $x \in G$  tal que  $G = \langle x \rangle$ . Si  $x$  tiene orden  $n$ , se denota  $C_n$ .*

**Observación 1.10.** *Todo subgrupo de un grupo cíclico es cíclico.*

**Definición 1.11.** *Definimos el **grupo diédrico de orden  $2n$**  (y lo denotamos por  $D_{2n}$ ) como el grupo formado por los movimientos del plano que fijan un polígono de  $n$  lados. Este grupo  $D_{2n}$  contiene dos elementos  $a$  y  $b$ ,  $a$  un elemento de orden  $n$  (es decir  $a^n = 1$ ) y  $b$  un elemento de orden 2 (es decir  $b^2 = 1$ ) donde se verifica  $bab = a^{-1}$ . Los elementos de  $D_{2n}$  son  $\{1, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ba, ba^2, \dots, ba^{n-1}\}$ . Denotaremos  $D_{2n} = \langle a, b \rangle$ , ( $a$  es una rotación de ángulo  $2\pi/n$  y  $b$  una simetría).*

**Definición 1.12.** Dados dos grupos  $G$  y  $H$ , su producto directo es el conjunto  $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$  con la operación  $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$ . Los elementos de  $G \times H$  se suelen denotar  $gh$  (sin paréntesis).

Vamos a ver algunos ejemplos de subgrupos de ciertos grupos finitos. Estos grupos finitos son los que aparecerán en el tercer capítulo y serán necesarios para comprender las deducciones utilizadas en dicho capítulo.

**Ejemplo 1.13.** Ejemplos de grupos finitos y sus subgrupos no triviales (Consideramos los subgrupos triviales de un grupo el 1 y el total)

- i)  $C_2$  no tiene subgrupos no triviales.
- ii) Los subgrupos no triviales de  $C_2 \times C_2 = \langle a \rangle \times \langle b \rangle = \{1, a, b, ab\}$  son  $\langle a \rangle$ ,  $\langle b \rangle$  y  $\langle ab \rangle$ , todos isomorfos a  $C_2$ .
- iii) Los subgrupos no triviales de  $D_8 = \{1, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$  son  $\langle a \rangle$ , (isomorfo a  $C_4$ ),  $\{1, a^2, b, ba^2\}$  y  $\{1, a^2, ba, ba^3\}$ , (isomorfos a  $C_2 \times C_2$ ) y cinco grupos cíclicos de orden dos.
- iv) Los subgrupos no triviales de  $D_{12} = \{1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, b, ba, ba^2, ba^3, ba^4, ba^5\}$  son  $\langle a \rangle$  y  $\langle a^2 \rangle$  isomorfos a  $C_6$  y  $C_3$  respectivamente,  $\{1, a^3, b, ba^3\}$ ,  $\{1, a^3, ba, ba^4\}$  y  $\{1, a^3, ba^2, ba^5\}$  isomorfos a  $C_2 \times C_2$ ,  $\{1, a^2, a^4, b, ba^2, ba^4\}$  y  $\{1, a^2, a^4, ba, ba^3, ba^5\}$  isomorfos a  $D_6$  y siete subgrupos cíclicos de orden 2.

Para ii) notemos que el grupo  $C_2 \times C_2$  tiene orden 4, luego sus subgrupos no triviales deben tener orden 2. Para iii), los subgrupos de  $D_8$  tienen que tener orden un divisor de 8. Los elementos de orden 2 de  $D_8$  son:  $a, b, ba, ba^2$  y  $ba^3$ , cada uno generará un grupo cíclico de orden 2 y por tanto tenemos cinco subgrupos de  $D_8$  de orden 2. Hay dos elementos de orden 4 en  $D_8$  y podrían generarnos un subgrupo cíclico de orden 4:  $a$  y  $a^3$ . Pero estos elementos nos generan el mismo subgrupo de  $D_8$ , que es el que tiene por elementos  $\{1, a, a^2, a^3\}$ . Por último habrá dos subgrupos de orden 4 isomorfos a  $C_2 \times C_2$  que serán  $\langle a^2 \rangle \times \langle ba \rangle$  y  $\langle a^2 \rangle \times \langle b \rangle$ . Para iv) deduciríamos sus subgrupos de forma análoga que para el caso  $D_8$ .

## 1.2. El plano y el grupo euclídeo

**Definición 1.14.** Dados  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dos vectores fila en  $\mathbb{R}^n$ , se define el producto escalar de  $x$  por  $y$  como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = xy^t$$

donde el superíndice  $t$  indica la trasposición.

**Definición 1.15.** El par  $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  se denomina **plano euclídeo**.

**Definición 1.16.** Dado un vector  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ , llamamos **norma de  $x$**  al número

$$\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

**Definición 1.17.** Dados dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , se define la **distancia** entre  $x$  e  $y$  como

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

**Definición 1.18.** Una **matriz ortogonal** es una matriz cuadrada de dimensión  $n$  que multiplicada por su traspuesta da como resultado la matriz identidad, es decir, una matriz  $A$  tal que

$$AA^t = I$$

siendo  $I$  la matriz identidad  $n \times n$ .

**Lema 1.19.** Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $M$  una matriz ortogonal, se verifica:

$$\|xM\| = \|x\|$$

Demostración: La norma de un vector verifica:  $\|x\|^2 = xx^t$ . Por tanto,

$$\|xM\|^2 = xM(xM)^t = xIx^t = xx^t = \|x\|^2$$

Luego,  $\|xM\| = \|x\|$ . □

**Observación 1.20.** Las matrices ortogonales forman un grupo. En efecto, sean  $A$  y  $B$  dos matrices ortogonales,

$$(AB)(AB)^t = ABB^tA^t = AIA^t = AA^t = I$$

luego  $AB$  es ortogonal. Además  $A^t = A^{-1}$  también lo es.

**Definición 1.21.** Definimos el grupo de matrices ortogonales  $2 \times 2$  con coeficientes en  $\mathbb{R}$  como el **grupo ortogonal de dimensión 2** y lo representamos por  $O_2(\mathbb{R})$ .

**Definición 1.22.** Definimos **transformación ortogonal** como una aplicación  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\varphi(x) = v + xM^t$  donde  $x \in \mathbb{R}^2$ , y  $M \in O_2$ . (Recordemos que los elementos de  $\mathbb{R}^2$  son vectores fila).

Sea  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación ortogonal dada por  $\varphi(x) = v + xM^t$ , la parte lineal de  $\varphi$  es la aplicación  $f_M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donde  $f_M(x) = xM^t$  con  $x \in \mathbb{R}^2$ . Podemos pensar en cada transformación ortogonal como un par ordenado  $(v, M)$  en el cual  $v \in \mathbb{R}^2$  y  $M \in O_2$ . En el conjunto de tales pares definimos la operación

$$(v, M)(v_1, M_1) = (v + f_M(v_1), MM_1)$$

Veamos que esta operación corresponde a la composición de transformaciones. En efecto, sean  $\varphi = (v, M)$  y  $\varphi_1 = (v_1, M_1)$  dos transformaciones ortogonales,

$$\varphi \circ \varphi_1(x) = \varphi(v_1 + xM_1^t) = v + v_1M^t + xM_1^tM^t$$

De esto se puede deducir que la operación anterior define una estructura de grupo en el conjunto de transformaciones ortogonales.

**Observación 1.23.** La expresión de una transformación ortogonal cambiará si cambiamos el sistema de referencia. Recordemos que un sistema de referencia en  $\mathbb{R}^2$  consiste en un punto (origen) y una base de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.24.** Denotamos el grupo de las transformaciones ortogonales por  $E_2$ .

**Definición 1.25.** Una **traslación por el vector**  $v$  es una función  $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\tau(x) = v + x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^2$ . Como  $\tau(0) = v$ , una traslación queda determinada completamente si conocemos donde envía el origen.

**Observación 1.26.** Si tomamos dos traslaciones,  $\tau_1(x) = u + x$  y  $\tau_2 = w + x$ , entonces  $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$  es la traslación definida por  $\tau_1\tau_2(x) = v + w + x$ . De aquí se deduce que  $\tau_1^{-1}(x) = -v + x$  y que  $T$  es isomorfo al grupo aditivo  $(\mathbb{R}^2, +)$ .

**Observación 1.27.** El grupo ortogonal  $O_2$  se puede ver como un subgrupo de  $E_2$ : El subgrupo que consiste en transformaciones  $(0, M)$  con  $M \in O_2$ . Estas son precisamente las que fijan el origen. A partir de ahora identificaremos este grupo con  $O_2$ .

**Proposición 1.28.** Las traslaciones forman un subgrupo  $T$  de  $E_2$ . Se cumple:

- i)  $E_2 = TO_2$
- ii)  $T$  es subgrupo normal de  $E_2$
- iii)  $T \cap O_2 = I$

Demostración: Tomamos  $\tau_1, \tau_2 \in T$  definidas por  $\tau_1(x) = u + x$ ,  $\tau_2(x) = v + x \forall x \in \mathbb{R}^2$ . Entonces, por la observación 1.26 tenemos que  $\tau_2^{-1}(x) = -v + x$  y así,

$$\tau_1 \tau_2^{-1}(x) = \tau_1((-v) + x) = u + ((-v) + x) = (u - v) + x$$

Luego,  $\tau_1 \tau_2^{-1}$  es una traslación por el vector  $u - v$  y por lo tanto pertenece al subgrupo de traslaciones  $T$ . Si tomamos un elemento de  $E_2$  genérico  $(v, M)$ , este elemento puede ponerse como el producto de un elemento de  $T$  por un elemento de  $O_2$ , es decir,  $(v, M) = (v, I)(0, M)$  donde  $(v, I) \in T$  y  $(0, M) \in O_2$  y tenemos probado i).

Por definición tenemos que cada traslación no trivial mueve el origen, mientras que cada elemento de  $O_2$  deja fijo el origen. Esto nos prueba que la intersección de  $T$  y  $O_2$  es la identidad, y por tanto queda probado iii).

Por último vamos a probar que  $T$  es un subgrupo normal de  $E_2$ . Sean  $f \in E_2$ ,  $\tau \in T$  y  $\tau(0) = v$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}^2$  tenemos

$$f \tau f^{-1}(x) = f(v + f^{-1}(x)) = f(v) + f(f^{-1}(x)) = f(v) + x$$

Por lo tanto la conjugación  $f \tau f^{-1}$  es una traslación por el vector  $f(v)$ . Vemos que  $T$  es un subgrupo normal de  $E_2$  y queda probado ii).  $\square$

Vamos a enunciar sin demostración la clasificación de los elementos de  $O_2$  (esta clasificación se basa en el estudio de los posibles valores propios):

**Definición 1.29.** Los elementos de  $O_2$  son de uno de los tipos siguientes (veremos la descripción geométrica más adelante):

- i) **Rotación:** La matriz de una rotación viene dada por:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

donde  $\det A_\alpha = 1$ .

- ii) **Simetrías:** La matriz de una simetría es una matriz ortogonal  $M$  cuyo determinante es -1. Además si  $M$  es la matriz de una simetría, existe una matriz regular  $P$  tal que

$$B_0 = P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

y por tanto tenemos  $M^2 = I$ , siendo  $I$  la matriz identidad.

Ahora vamos a enunciar sin demostración la clasificación de los elementos de  $E_2$ .

**Definición 1.30.** Los elementos de  $E_2$  son de uno de los tipos siguientes:

- i) **Traslación:** Como hemos definido anteriormente, una traslación por el vector  $v$  es una función  $\tau: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\tau(x) = v + x, \forall x \in \mathbb{R}^2$ . Como  $\tau(0) = v$ , una traslación queda determinada completamente si conocemos donde envía el origen. Las traslaciones consisten en los elementos  $(v, I)$  y no tiene puntos fijos si  $v \neq 0$ .
- ii) **Rotación:** Una rotación con centro  $C$  y ángulo  $\alpha$  es un movimiento que hace girar los puntos del plano un ángulo  $\alpha$  de forma que siempre son equidistantes al centro  $C$ . Es decir, cada punto  $P$  del plano es enviado a un punto  $Q$  tal que  $P$  y  $Q$  están sobre una circunferencia de centro  $C$  y radio igual a la distancia desde  $P$  a  $C$ . Las rotaciones de centro el origen consisten en los elementos  $(0, A_\alpha)$  con  $A_\alpha$  la matriz de la definición 1.29 (i) ya que la aplicación  $x \rightarrow xA_\alpha^t$  es una rotación antihoraria de ángulo  $\alpha$  y centro el origen. Vamos a ver como calcular el centro de una rotación cualquiera: Tomamos una rotación genérica de la forma  $(v, A_\alpha)$ . El centro  $x$  de esta rotación es un punto fijo y debe cumplir  $v + xA_\alpha^t = x$ , es decir,  $v = x(I - A_\alpha^t)$ . Como la matriz  $A_\alpha^t$  es invertible por tener determinante distinto de cero, la matriz  $I - A_\alpha^t$  también es invertible y el sistema anterior tiene solución  $x$  que es el centro de la rotación.
- iii) **Simetría (o reflexión):** Una simetría (o reflexión) con respecto a una recta  $R$  es un movimiento del plano que actúa de la forma siguiente: Cada punto  $P$  del plano es enviado a un punto  $Q$  tal que existe un único punto sobre la recta  $R$  que denotaremos  $P'$  tal que la recta que une  $P$  y  $Q$  es perpendicular a la recta  $R$  y además se tiene la igualdad entre distancias  $d(P, P') = d(P', Q)$ . En general, una simetría es de la forma  $(v, M)$  con  $M$  una matriz como en la definición 1.29 (ii) y  $v$  vector propio de  $M$  de valor propio -1. Una simetría respecto al eje  $OX$  es de la forma  $(0, B_0)$  con  $B_0$  la matriz de la definición 1.29 (ii). En capítulos posteriores denotaremos  $B_\phi$  la matriz que representa una simetría respecto a una recta que pasa por el origen y tiene un ángulo  $\frac{\phi}{2}$  con el eje  $X$  positivo. Una simetría respecto a una recta paralela a la anterior tiene la forma  $(v, B_\phi)$ . El caso en el que el eje de la simetría es paralelo al eje  $OX$  aparece mucho en el último capítulo, por lo tanto vamos a ver como calcular la recta de puntos fijos (que será el eje de nuestra simetría) en este caso particular: Dichas simetrías son de la forma  $(v, B_0)$  con  $v = (\alpha, \beta)$  en principio cualquiera. El eje de simetría cortará al eje  $OY$  y por lo tanto el punto de corte  $(0, t)$  será un punto fijo, es decir, debe cumplir  $v + (0, t)B_0 = (0, t)$ . Así,

$$v + (0, t)B_0 = (\alpha, \beta) + (0, t)B_0 = (\alpha, \beta) + (0, -t) = (0, t)$$

y el resultado es:  $\alpha = 0$  y  $\beta = 2t$ . Por lo tanto una simetría cuyo eje es paralelo al eje  $OX$  es de la forma  $((0, 2t), B_0)$  y el eje de la simetría (la recta de puntos fijos) es la recta  $y = t$ .

- iv) **Simetría con deslizamiento:** Una simetría con deslizamiento consiste en una simetría seguida de una traslación en la dirección del eje de simetría. Una simetría con deslizamiento se puede expresar como  $(v, M)$  con  $M$  matriz ortogonal de valores propios 1 y -1 y  $v \notin S(1)$ . Tal y como en el caso de la simetría, las simetrías con deslizamiento respecto a un eje paralelo al eje  $OX$  nos aparecerán mucho en el capítulo 3, por lo tanto vamos a calcular la recta fija de la simetría con deslizamiento para este caso concreto: Las simetrías con deslizamiento cuyo eje es paralelo al eje  $OX$  son de la forma  $(v, B_0)$  con  $v = (\alpha, \beta)$  un vector cualquiera. En este caso el eje de la simetría también corta al eje  $OY$  en un punto  $(0, t)$ . Sin embargo ahora este punto del eje no es un punto fijo, sino que al aplicarle la simetría con deslizamiento irá a parar a otro punto del eje dependiendo de la traslación de nuestro movimiento. Por lo tanto el punto  $(0, t)$  ahora deberá ir a parar a otro punto de la forma  $(\alpha_1, t)$ , es decir,

$$v + (0, t)B_0 = (\alpha, \beta) + (0, t)B_0 = (\alpha, \beta) + (0, -t) = (\alpha_1, t)$$

y el resultado queda:  $\beta = 2t$  y  $\alpha \neq 0$  cualquiera. Por lo tanto una simetría con deslizamiento cuyo eje es paralelo al eje  $OX$  es de la forma  $((\alpha, 2t), B_0)$  con  $B_0$  la matriz de una simetría. Así la recta del deslizamiento es la recta  $y = t$  y  $\alpha$  es la magnitud del deslizamiento.

**Observación 1.31.** De la definición 1.30 se deduce que si tenemos un movimiento de la forma  $((\alpha, \beta), B_0)$ ,

- i) Si  $\alpha = 0$  estaríamos ante una simetría respecto a la recta  $y = \beta/2$ .
- ii) Si  $\alpha \neq 0$  estaríamos ante una simetría con deslizamiento respecto a la recta  $y = \beta/2$ .

**Observación 1.32.** Vamos a enunciar las reglas de composición entre los elementos de  $E_2$  que utilizaremos más adelante:

- i) *Simetría  $\circ$  Simetría = Rotación.* En efecto si componemos dos simetrías  $(v, M), (v_1, M_1)$  obtenemos  $(v, M)(v_1, M_1) = (v + v_1M, MM_1)$  y como el determinante de la matriz de una simetría es  $-1$ , la matriz  $MM_1$  tendrá determinante  $1$  y por tanto es necesariamente la matriz de una rotación. Por lo tanto si componemos dos simetrías obtenemos una rotación.
- ii) *Rotación  $\circ$  Simetría (posiblemente con deslizamiento) = Simetría (posiblemente con deslizamiento).* Ahora, si componemos una rotación  $(v, M)$  y una simetría (posiblemente con deslizamiento)  $(w, N)$ , obtenemos  $(v, M)(w, N) = (v + wM, MN)$  y por lo tanto  $MN$  es el producto de una matriz de determinante  $1$  y una matriz determinante  $-1$  y así el determinante de la matriz  $MN$  es  $-1$  y necesariamente  $MN$  es la matriz de una simetría.
- iii) *Por último, (Simetría con deslizamiento) $^2$  = Traslación.* Si elevamos al cuadrado la matriz de una simetría obtenemos la matriz identidad, por tanto, si componemos una simetría con deslizamiento  $(v, M)$  consigo misma obtenemos  $(v, M)^2 = (v + vM, I)$ .

Decimos que  $(v, M)$  es una isometría directa cuando  $\det M = 1$  y una isometría opuesta cuando  $\det M = -1$ . Vamos a enunciar el teorema de la Clasificación de los elementos de  $E_2$  que es consecuencia de lo que acabamos de comentar anteriormente.

**Teorema 1.33.** (Clasificación de los elementos de  $E_2$ ) Cada isometría directa es una traslación o una rotación. Cada isometría opuesta es una simetría o una simetría con deslizamiento.

**Observación 1.34.** Utilizando la clasificación anterior, podemos también clasificar los elementos  $E_2$  en los dos tipos siguientes:

- i) *Transformaciones con puntos fijos: Rotaciones y simetrías.*
- ii) *Transformaciones sin puntos fijos: Traslaciones y simetrías con deslizamientos.*

Toda transformación ortogonal  $\varphi$  se puede poner como  $\varphi = \text{Traslación} \circ \varphi_1$ , con  $\varphi_1$  una transformación con puntos fijos (esta expresión no es única).

**Definición 1.35.** Definimos la aplicación  $\pi : E_2 \rightarrow O_2$  dada por  $\pi(v, M) = M$ .

**Observación 1.36.** Tenemos que  $\pi$  es un homomorfismo ya que:

$$\pi((v, M)(v_1, M_1)) = \pi(v + f_M(v_1), MM_1) = MM_1 = \pi(v, M)\pi(v_1, M_1)$$

y los elementos que van a parar a la identidad al aplicar  $\pi$  son precisamente las transformaciones de la forma  $(v, I)$ ,  $v \in \mathbb{R}^2$ , en otras palabras, el grupo de las traslaciones.

**Lema 1.37.** Sea  $g \in E_2$  y sea  $\pi(g) = h$ ,

- i) Si  $h$  es una rotación, entonces necesariamente  $g$  debe ser una rotación.
- ii) Si  $h$  es una simetría, entonces  $g$  podrá ser una simetría o una simetría con deslizamiento.

Demostración: Sea  $g = (v, M) \in E_2$  y sea  $h = \pi(g) = M$ : Si  $h$  es una rotación, por la definición 1.29, la matriz  $M$  debe tener necesariamente determinante 1 y por lo tanto  $g = (v, M)$  es una trasformación ortogonal donde  $M$  es la matriz de una rotación, por lo tanto  $g$  es una rotación. En cambio, si  $h$  es una simetría, nuevamente por la definición 1.29, la matriz  $M$  debe tener determinante -1 y por lo tanto  $g = (v, M)$  puede ser tanto una simetría o una simetría con deslizamiento. Por último si  $h = M = Id$ ,  $g = (v, I)$  necesariamente es una traslación.  $\square$

Nota: El lema anterior va a ser imprescindible para poder comprender el razonamiento de la clasificación de los grupos cristalográficos planos realizada en el capítulo 3.

**Observación 1.38.** *Del lema 1.37 se puede deducir que si  $h$  es una rotación,  $h = \pi(g)$  y  $g$  tienen el mismo orden.*

**Observación 1.39.** *Nos interesará ver  $D_8$  y  $D_{12}$  explícitamente como subgrupos de  $O_2$ :*

- i)  $D_8: I = I, a = A_{\pi/2}, a^2 = -I, a^3 = A_{3\pi/2}, b = B_0, ba = B_{3\pi/2}, ba^2 = B_\pi, ba^3 = B_{\pi/2}.$
- ii)  $D_{12}: I = I, a = A_{\pi/3}, a^2 = A_{2\pi/3}, a^3 = -I, a^4 = A_{4\pi/3}, a^5 = A_{5\pi/3}, b = B_0, ba = B_{5\pi/3}, ba^2 = B_{4\pi/3}, ba^3 = B_\pi, ba^4 = B_{2\pi/3}, ba^5 = B_{\pi/3}.$

Por ejemplo, para ii) el caso  $ba^5$  lo calculamos de la siguiente manera: Tenemos que  $ba^5 = B_0A_{5\pi/3}$ , por lo tanto  $x \rightarrow xA_{5\pi/3}^tB_0^t$ . Luego si aplicamos primero una rotación antihoraria de ángulo  $5\pi/3$  y después aplicamos una simetría respecto al eje  $OX$  obtenemos el mismo punto que si realizamos una simetría respecto a una recta que pasa por el origen y tiene un ángulo de  $\pi/6$  con el eje  $X$  positivo. Por lo tanto  $ba^5 = B_{\pi/3}$ .

**Definición 1.40.** *Una isometría es una función biyectiva  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva distancias entre puntos, es decir,*

$$\|g(x) - g(y)\| = \|x - y\|$$

para cada par de puntos  $x, y$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.41.** *Las isometrías del plano forman un grupo bajo la composición de funciones.*

Veamos que es un grupo. Si tomamos dos isometrías  $g$  y  $h$ , tenemos

$$\|g(h(x)) - g(h(y))\| = \|h(x) - h(y)\| = \|x - y\|$$

por lo tanto la composición de isometrías es efectivamente una isometría (la primera igualdad debido a que  $g$  es isometría y la segunda igualdad debido a que  $h$  es isometría). La composición de funciones es asociativa y la transformación identidad en el plano actúa como el elemento identidad. Finalmente, cada isometría  $g$  es una biyección y satisface

$$\|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)\| = \|g(g^{-1}(x)) - g(g^{-1}(y))\| = \|x - y\|$$

así  $g^{-1}$  también es una isometría y tenemos un grupo.

**Proposición 1.42.** *Toda transformación ortogonal es una isometría.*

Demostración: Dados dos elementos  $x, y \in \mathbb{R}^2$ , y  $\varphi$  una transformación ortogonal tenemos que probar que:

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$$

Tenemos por definición que  $\varphi(x) = v + xM^t$  y  $\varphi(y) = v + yM^t$ , por tanto:

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|v + xM^t - (v + yM^t)\| = \|xM^t - yM^t\| = \|(x - y)M^t\| = \|x - y\|$$

donde la última igualdad se sigue directamente del Lema 1.19. Por lo tanto toda transformación ortogonal es una función biyectiva que conserva distancias y así es una isometría.  $\square$

**Observación 1.43.** *También se puede probar la relación inversa. Es decir, toda isometría es una transformación ortogonal.*



## Capítulo 2

# Retículos y grupos de puntos

Nuestro objetivo es clasificar los grupos que surgen como grupos de simetría de patrones de repetición bidimensionales, o, como los llamaremos, *Grupos cristalográficos planos*. En este capítulo vamos a probar resultados que serán útiles para esa clasificación.

### 2.1. Retículos

**Definición 2.1.** Definimos un *retículo en  $\mathbb{R}^2$*  como un subgrupo aditivo generado por dos vectores independientes.

Sea  $T$  el subgrupo de traslaciones de  $E_2$  y  $\pi : E_2 \rightarrow O_2$  como hemos definido en el capítulo 1.

**Definición 2.2.** Sea  $G$  un subgrupo de  $E_2$ , escribimos  $H = G \cap T$  y  $J = \pi(G)$ , llamando *subgrupo de traslaciones de  $G$  a  $H$*  y *subgrupo de puntos de  $G$  a  $J$* .

La restricción de  $\pi$  a  $G$  es un homomorfismo suprayectivo que va desde  $G$  a  $J$ , cuyo núcleo es  $H$ . Por lo tanto,  $J$  es isomorfo al grupo cociente  $G/H$  por el *Primer Teorema de Isomorfía* (Teorema 1.8).

**Definición 2.3.** Un subgrupo de  $E_2$  es un *grupo cristalográfico* si su subgrupo de traslaciones  $H$  está generado por dos traslaciones independientes y su grupo de puntos  $J$  es finito.

La clasificación de los grupos cristalográficos la llevaremos a cabo en el siguiente capítulo. Antes necesitamos enunciar propiedades y teoremas sobre el subgrupo de traslaciones y el grupo de puntos de un grupo cristalográfico.

**Notación 2.4.** Desde este momento fijamos la siguiente notación:

- i)  $G$  grupo cristalográfico con subgrupo de traslaciones  $H$  y grupo de puntos  $J$ .
- ii)  $L$  la órbita del origen bajo la acción de  $H$  en  $\mathbb{R}^2$ . El conjunto  $L$  contiene al menos dos vectores independientes.
- iii) Seleccionamos un vector no nulo  $a$  de longitud mínima en  $L$ , y seguidamente elegimos un segundo vector  $b$  de  $L$  que sea oblícuo respecto a  $a$ , y cuya longitud sea mínima también.

**Teorema 2.5.** El conjunto  $L$  es el retículo expandido por  $a$  y  $b$ . Es decir,  $L$  consiste en todas las combinaciones lineales  $ma + nb$  donde  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Demostración: La correspondencia  $(v, I) \rightarrow v$  es un isomorfismo entre el subgrupo  $T$  de traslaciones de  $E_2$  y el grupo aditivo  $(\mathbb{R}^2, +)$ . Si restringimos esta aplicación a  $H$ , tenemos que el isomorfismo envía el subgrupo de traslaciones de  $G$ ,  $H$ , a  $L$ . Por lo tanto  $L$  es un subgrupo de  $\mathbb{R}^2$ , y como  $a$  y  $b$  los hemos tomado pertenecientes a  $L$ , cada punto  $ma + nb$  del retículo expandido por  $a$  y  $b$  pertenece a  $L$ . Usando los puntos de este retículo podemos dividir el plano en paralelogramos como ilustra la

Figura 2.1. Supongamos que existe  $x$  perteneciente a  $L$  pero sin embargo no perteneciente al retículo. Consideramos el paralelogramo que contiene a  $x$ , y una esquina  $c$  de este paralelogramo que sea lo más cercana posible a  $x$ . Entonces el vector  $x - c$  es no nulo, no es igual al vector  $a$  ni es igual al vector  $b$  y su longitud es menor que  $\|b\|$ . Tanto  $x$  como  $c$  pertenecen a  $L$ , por lo tanto tenemos que  $x - c$  pertenece a  $L$ . Ahora bien, no podemos tener  $\|x - c\| < \|a\|$  ya que  $a$  lo hemos supuesto de longitud mínima en  $L$ . Por otro lado, si  $\|a\| \leq \|x - c\| < \|b\|$ , como  $x - c$  es oblicuo respecto de  $a$  contradice con la elección de  $b$ . Así tenemos una contradicción. Por lo tanto no existe tal punto  $x$ , luego  $L$  es precisamente el retículo expandido por  $a$  y  $b$ .  $\square$

**Observación 2.6.** En consecuencia  $v \in L$  sí y solo sí la traslación  $(v, I)$  está en  $G$ .

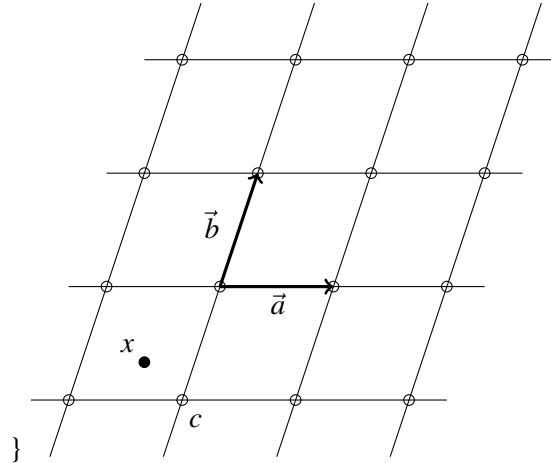


Figura 2.1: Explicación gráfica del teorema 2.5

**Definición 2.7.**  $L$  se llama retículo asociado a  $G$ .

Debemos clasificar los diferentes retículos en cinco tipos dependiendo a la forma básica del paralelogramo determinado por los vectores  $a$  y  $b$ . De las propiedades del retículo de  $G$  y el grupo de puntos de  $G$ ,  $J$ , vamos a intentar obtener información sobre  $G$ . Reemplazamos  $b$  por  $-b$  si es necesario para asegurar que  $\|a - b\| \leq \|a + b\|$ . Con esta suposición los diferentes retículos se pueden definir como sigue:

- Oblicuo:  $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| < \|a + b\|$ , (Figura izquierda de la Figura 2.2)
- Rectangular:  $\|a\| < \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$ , (Figura derecha de la Figura 2.2)
- Rectangular centrado  $\|a\| < \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|$ , (Figura 2.3)
- Cuadrado:  $\|a\| = \|b\| < \|a - b\| = \|a + b\|$ , (Figura izquierda de la Figura 2.4)
- Hexagonal:  $\|a\| = \|b\| = \|a - b\| < \|a + b\|$ , (Figura derecha de la Figura 2.4)

Vamos a ver gráficamente todos los posibles paralelogramos básicos descritos anteriormente:



Figura 2.2: Paralelogramos básicos oblicuo (Izquierda) y rectangular (Derecha)

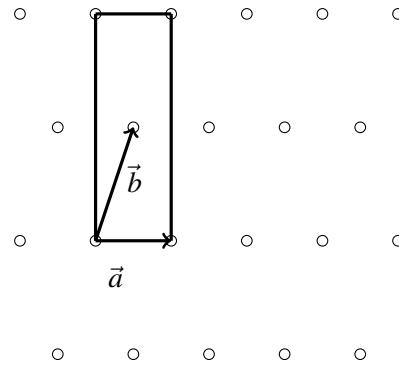


Figura 2.3: Paralelogramo básico rectangular centrado

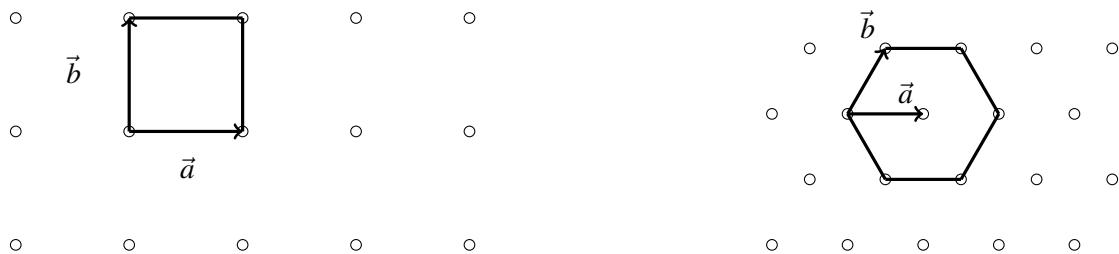


Figura 2.4: Paralelogramo básico cuadrado (Izquierda) y hexagonal (Derecha)

Si nos fijamos en todas las posibilidades, parece que nos hemos olvidado de dos posibilidades. Por un lado  $\|a\| = \|b\| < \|a-b\| < \|a+b\|$ . Aquí el paralelogramo básico es un rombo como indica la Figura 2.5. Las diagonales de un rombo se cortan entre sí en ángulos rectos. Así tenemos una estructura rectangular centrada cuyos rectángulos están basados en los vectores  $a-b$  y  $a+b$ . Nos damos cuenta de que al pasar este retículo a un retículo rectangular centrado, el vector  $a-b$  ya no es un vector mínimo pero eso no es influyente ya que no lo utilizaremos en la clasificación del capítulo 3. Otra posibilidad que parece que hemos olvidado anteriormente es  $\|a\| < \|b\| = \|a-b\| = \|a+b\|$  pero es totalmente imposible que se de este caso ya que si  $\|a-b\| = \|b\| = \|a+b\|$  necesariamente  $a = 0$ , por lo tanto tendríamos una contradicción

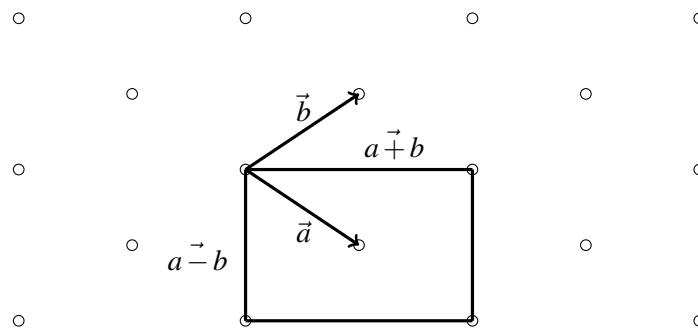


Figura 2.5: Paralelogramo básico del rombo

De ahora en adelante, cuando veamos  $O_2$  como el subgrupo de  $E_2$  formado por los elementos que fijan el origen supondremos que el origen es un punto del retículo.

## 2.2. Grupo de puntos

El grupo de puntos  $J$  es, por su propia definición, un subgrupo de  $O_2$ . Enunciamos y demostramos un teorema importante sobre la acción del grupo de puntos  $J$ :

**Teorema 2.8.** *La acción del grupo de puntos  $J$  en  $\mathbb{R}^2$  preserva el retículo  $L$ .*

Demostración: El grupo de puntos, siendo un subgrupo de  $O_2$ , actúa en el plano de forma usual (fijando el origen). Sea  $M \in J$  tal que  $\pi(g) = M$  donde  $g = (v, M) \in G$ , y sea  $x \in L$ , debemos demostrar que  $f_M(x)$  pertenece a  $L$ . Denotamos por  $\tau$  la traslación  $(x, I)$  y por la observación 2.6 tenemos  $\tau \in G$ . Dado que  $H$  es el núcleo del homomorfismo  $\pi : G \rightarrow J$ , es un subgrupo normal de  $G$  y por lo tanto  $g\tau g^{-1} \in H$ . Luego,

$$\begin{aligned} g\tau g^{-1} &= (v, M)(x, I)(-f_M^{-1}(v), M^{-1}) = (v, M)(x - f_M^{-1}, M^{-1}) = \\ &= (v + f_M(x - f_M^{-1}, MM^{-1}) = (v + f_M(x) - v, I) = (f_M(x), I) \in H \end{aligned}$$

Y consecuentemente por la observación 2.6,  $f_M(x)$  es un punto del retículo  $L$  como requeríamos.  $\square$

Ahora vamos a enunciar y demostrar uno de los resultados más importantes de cara a la clasificación de los grupos cristalográficos planos. El resultado prueba cuales de los subgrupos de  $O_2$  pueden ser grupos de puntos de un grupo cristalográfico. Esto se suele llamar "*La restricción cristalográfica*".

**Teorema 2.9.** *El orden de una rotación del grupo de puntos de un grupo cristalográfico sólo puede ser 2, 3, 4 ó 6.*

Demostración: Cada rotación  $g$  en un grupo cristalográfico  $G$  tiene un orden finito por la observación 1.38, y el hecho de que grupo de puntos de un grupo cristalográfico es por definición finito. Si tenemos una rotación de orden  $q$ , una potencia adecuada de esta rotación es una rotación antihoraria mediante  $2\pi/q$ . Vamos primero a aclarar esto último: Tenemos una rotación de orden  $q$ , por tanto  $q\alpha = 2k\pi$  siendo  $\alpha$  el ángulo que gira la rotación de orden  $q$  y  $k$  un número entero. Veamos que  $k$  es primo con  $q$ . Suponemos que  $k$  y  $q$  no son primos, entonces existe un entero  $p$  que divide a  $q$  y a  $k$  a la vez, es decir,  $p|q$  y  $p|k$ . Así nos queda  $\frac{q}{p}\alpha = 2\pi\frac{k}{p}$  donde  $\frac{q}{p}$  y  $\frac{k}{p}$  son enteros. Por lo tanto tenemos que el orden de la rotación es divisor de  $\frac{q}{p} < q$ , lo que es una contradicción, ya que habíamos supuesto que el orden de la rotación era exactamente  $q$ . Por lo tanto tenemos que  $k$  y  $q$  son primos entre sí y existe un  $n$  tal que  $kn = 1 \pmod{q}$ , es decir,  $kn = 1 + k'q$  para cierto entero  $k'$  y por lo tanto  $n\alpha = \frac{2\pi}{q}nk = \frac{2\pi}{q} + 2\pi k'$ . Así queda claro que una potencia adecuada es una rotación antihoraria mediante  $2\pi/q$ . En ese caso, la matriz de la rotación será:

$$A_{2\pi/q} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{q}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{q}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) \end{bmatrix}.$$

y pertenece a  $J$ . Como antes, vamos a usar  $a$  para denotar un vector no nulo de mínima longitud en el retículo  $L$  de  $G$ . Sabemos que  $J$  actúa en  $L$  por el Teorema 2.8, así  $f_A(a)$  pertenece a  $L$ . Si el ángulo formado por el vector  $a$  y el vector  $f_A(a)$  es menor que  $\pi/3$ , la longitud del vector  $f_A(a) - a$  es menor que la longitud del vector  $a$ , lo cual nos llevaría a una contradicción con la elección de  $a$ . Esto ocurre cuando el orden de la rotación es mayor que 6. Cuando el vector  $a$  y el vector  $f_A(a)$  formen exactamente un ángulo de  $\pi/3$ , la longitud del vector  $f_A(a) - a$  será igual a la longitud del vector  $a$  ya que el triángulo formado por  $a$ ,  $f_A(a)$  y  $f_A(a) + a$  es equilátero. Si el ángulo que forman los vectores  $a$  y  $f_A(a)$  es mayor que  $\pi/3$ , la longitud del vector  $f_A(a) - a$  será mayor que la longitud del vector  $a$  y no estaremos cometiendo ninguna contradicción. Suponemos que  $q$  es mayor que 6. Por lo tanto  $2\pi/q$  es un ángulo menor que  $\pi/3$  y así  $f_A(a) - a$  es un vector en  $L$  que es más pequeño que  $a$ , lo que contradice nuestra elección inicial de  $a$  y por tanto  $q$  no puede ser mayor que 6. Por otro lado, si  $q$  es igual a 5, el ángulo entre  $f_A^2(a)$  y  $-a$  es  $\pi/5$  (Si  $q = 5$ , el ángulo que forman  $a$  y  $f_A(a)$  es  $2\pi/5$ , luego el ángulo que forma  $a$  y  $f_A^2(a)$  será de  $4\pi/5$ , y tenemos que el ángulo que forman  $f_A^2(a)$  y  $-a$  es de  $\pi - 4\pi/5$ , es decir,  $\pi/5$ ). Por lo tanto  $f_A^2(a) + a$  yace en  $L$  y es de longitud menor que la longitud de  $a$ , lo que vuelve a contradecir nuestra elección inicial de  $a$ . Por tanto, queda probado que el orden de una rotación de un grupo cristalográfico solo puede ser 2, 3, 4 ó 6.  $\square$

**Teorema 2.10.** *El grupo de puntos de un grupo cristalográfico está generado por una rotación a través de uno de los ángulos  $0, \pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$  y posiblemente una simetría.*

Demostración: Tenemos que  $J$  es un subgrupo finito de  $O_2$ , por tanto sus elementos solo pueden ser rotaciones en torno al origen de orden 2, 3, 4 ó 6 o simetrías por el Teorema 2.9. Las rotaciones forman un grupo abeliano, luego si tuvieramos por ejemplo una rotación de orden 3 y una rotación de orden 4, al componerlas tendríamos una rotación de orden 12. Lo mismo sucede si tomamos una rotación de orden 6 y una rotación de orden 4. Razonando así deducimos que las rotaciones forman un grupo cíclico generado por una rotación  $\sigma$  de uno de los ordenes anteriores. Ahora bien, si tenemos dos simetrías en  $J$ , su producto sería una rotación por la observación 1.32 y por tanto estaría en el cíclico anterior. Luego para generar  $J$  basta con la rotación  $\sigma$  y una simetría.  $\square$

**Teorema 2.11.** *Un isomorfismo entre dos grupos cristalográficos planos lleva traslaciones a traslaciones, rotaciones a rotaciones, simetrías a simetrías y simetrías con deslizamiento a simetrías con deslizamiento.*

Demostración: Sea  $\varphi : G \rightarrow G_1$  un isomorfismo entre grupos cristalográficos, y sea  $\tau$  una traslación en  $G$ . Traslaciones y simetrías con deslizamiento tienen orden infinito mientras que rotaciones y simetrías son de orden finito. Por lo tanto  $\varphi(\tau)$  debe ser, o bien una traslación o bien una simetría con deslizamiento. Asumimos que  $\varphi(\tau)$  es una simetría con deslizamiento y elegimos una traslación  $\tau_1$  de  $G_1$  cuya dirección sea no paralela al eje de la simetría con deslizamiento. Esto implica que ni  $\tau_1$  ni  $\tau_1^2$  comutan con  $\varphi(\tau)$ . Si  $\varphi(g) = \tau_1$ , entonces  $g$  tiene que ser una traslación o una simetría con deslizamiento. Así  $g^2$  es una traslación, ya que al elevar al cuadrado una traslación o una simetría con deslizamiento siempre obtendremos una traslación por la observación 1.32, y por lo tanto comuta con  $\tau$  debido a que dos traslaciones siempre comutan, contradiciendo el hecho de que  $\varphi(g^2) = \tau_1^2$  no comuta con  $\varphi(\tau)$ . Por tanto, traslaciones se corresponden con traslaciones y simetrías con deslizamiento se corresponden con simetrías con deslizamiento. Por otro lado, las simetrías tienen orden 2, luego la imagen de una simetría bajo un isomorfismo es, o bien una simetría o bien una rotación de orden 2. Tomamos  $g \in G$  una simetría cuya imagen  $\varphi(g)$  sea una rotación de orden 2 y veamos que llegamos a una contradicción. Tomamos una traslación  $\tau$  de  $G$  en una dirección que no sea perpendicular al eje de  $g$ . Entonces  $\tau g$  es una simetría con deslizamiento, pero

$$\varphi(\tau g) = \varphi(\tau)\varphi(g)$$

que es el producto de una traslación y una rotación de orden 2, y por la observación 1.32, es una rotación de orden dos. Así, llegamos a una contradicción y por tanto las simetrías se corresponden con simetrías. Finalmente, se deduce que las rotaciones se corresponderán con rotaciones.  $\square$

**Observación 2.12.** *Como consecuencia, un isomorfismo lleva elementos con (sin) puntos fijos a elementos con (sin) puntos fijos.*

**Teorema 2.13.** *Si dos grupos cristalográficos son isomorfos, entonces sus grupos de puntos son también isomorfos.*

Demostración: Sean  $G$  y  $G_1$  grupos cristalográficos con subgrupos de traslaciones  $H$  y  $H_1$  y grupos de puntos  $J$  y  $J_1$  respectivamente. Si  $\varphi : G \rightarrow G_1$  es un isomorfismo tenemos  $\varphi(H) = H_1$  por el teorema anterior. Por lo tanto  $\varphi$  induce un isomorfismo de  $G/H$  a  $G_1/H_1$ . El resultado se sigue porque  $J$  es isomorfo con  $G/H$  por definición y  $J_1$  es isomorfo con  $G_1/H_1$ .  $\square$

Terminamos el capítulo con un par de observaciones técnicas:

**Definición 2.14.** *Sea  $G$  grupo cristalográfico con grupo de puntos  $J$  y  $h \in J$  simetría. Si existe una simetría  $g \in G$  con  $\pi(g) = h$  diremos que  $h$  escinde en  $G$ . Si además, para todo elemento  $g \in G$  tal que  $\pi(g) = h$  y toda descomposición  $g = \tau g_1$  con  $g_1$  transformación con puntos fijos,  $\tau$  traslación se tiene que  $\tau, g_1 \in G$  diremos que  $h$  escinde totalmente en  $G$ .*



# Capítulo 3

## Los grupos cristalográficos planos

En este capítulo vamos a clasificar todos los grupos cristalográficos planos. Dado un retículo  $L$ , en primer lugar averiguaremos que transformaciones ortogonales preservan dicho retículo. Tales transformaciones forman un grupo que debe contener al grupo de puntos de cualquier grupo cristalográfico que preserva  $L$ . Todos los grupos que encontramos son esencialmente diferentes, es decir, no hay dos de ellos isomorfos. Esto lo probaremos al final del capítulo.

### 3.1. Notación previa

**Definición 3.1.** *Definimos celosía como una teselación periódica del plano que se puede formar a partir de un bloque que se repite por traslación en dos direcciones diferentes  $a$  y  $b$ . Una celosía primitiva es un bloque que se repite para formar la celosía. Asociada a la celosía tenemos el retículo  $L$  generado por  $a$  y  $b$ .*

El grupo cristalográfico asociado a una celosía será el grupo de las transformaciones de  $E_2$  que preservan dicha celosía. A partir de aquí se puede probar que su grupo de puntos debe ser finito (ya que en otro caso tendría rotaciones de orden infinito que no pueden preservar  $L$ ) y contiene el grupo de las traslaciones generado por las traslaciones  $a$  y  $b$ . Luego es un grupo cristalográfico según la definición 2.3.

Antes de empezar la clasificación añadiremos varias indicaciones sobre la notación. Cada grupo cristalográfico tiene un nombre formado por varios símbolos (internacionalmente conocidos)  $p, c, m, g$  y los enteros 1, 2, 3, 4 y 6. Las letras  $p$  y  $c$  se refieren al tipo de celosía o reticulado del cristal. Si la celosía se forma simplemente a partir de una celosía primitiva que se traslada, lo denotamos por  $p$ . En ocasiones, más concretamente cuando el retículo asociado sea de tipo rectangular centrado, resulta útil unir dos celosías primitivas para formar un bloque que al trasladarlo genera también toda la celosía. En este caso, lo denotamos por  $c$ . La letra  $m$  se usa para denotar las simetrías (mirror) que contiene el grupo y la letra  $g$  se usa para denotar una simetría con deslizamiento (glide) contenida en el grupo. Finalmente el entero 1 es usado para la transformación identidad, y los enteros 2, 3, 4 y 6 indican las rotaciones del orden correspondiente. Las rotaciones de orden 2 también las llamamos "medio giros".

También aclaramos la notación de las figuras que aparecen en este capítulo. Los segmentos en negrita son ejes de simetrías. Los segmentos de líneas a trozos son ejes de simetrías con deslizamiento. Los círculos blancos muestran los centros de rotación de orden dos. Los círculos de color gris muestran los centros de rotación de orden tres. Los cuadrados muestran los centros de rotación de orden cuatro. Y por último los círculos de color negro muestran los centros de rotación de orden seis.

### 3.2. Clasificación histórica de los grupos cristalográficos planos

Distintas culturas a lo largo de la historia han utilizado la técnica de teselar superficies para formar pavimentos o muros de mosaicos. El primer matemático que hizo un estudio acerca de los polígonos

regulares que pueden cubrir el plano fue Arquímedes en el siglo III a. C. Más adelante fueron los matemáticos árabes los que a partir del estudio de la geometría empezaron a investigar el problema de la teselación de los espacios bidimensionales, lo que supuso la contribución española más importante al arte geométrico. Los motivos decorativos de los azulejos de La Alhambra de Granada son actualmente utilizados para la enseñanza de la simetría en todo el mundo. Después del estudio de las simetrías en diferentes objetos, el primer matemático que realizó clasificaciones y estudió la relación entre la simetría y la cristalográfica fue el ruso Fedorov. Su resultado más conocido es su prueba en 1891 del teorema que enunciamos a continuación en el que muestra que sólo hay 17 grupos cristalográficos planos y los ordenó según el orden máximo de las rotaciones. Esto también fue demostrado independientemente por George Pólya en 1924. Por último, también es importante nombrar al artista holandés M.C. Escher quien estudió otros tipos de teselaciones del plano lo que motivó su interés por el palacio de La Alhambra. M.C. Escher también trabajó con teselaciones regulares pero destacó especialmente por su estudio de teselaciones irregulares. Escher consiguió muchas obras de arte a partir de ese estudio.

**Teorema 3.2** (Fedorov). *Existen 17 grupos cristalográficos planos y se pueden agrupar según el orden máximo de las rotaciones de la siguiente manera:*

- a) *Grupos de simetría sin rotaciones: p1, pm, pg, cm*
- b) *Grupos de simetría con rotaciones de orden dos: p2, p2mm, p2mg, p2gg, c2mm*
- c) *Grupos de simetría con rotaciones de orden tres: p3, p31m, p3m1*
- d) *Grupos de simetría con rotaciones de orden cuatro: p4, p4mm, p4mg*
- e) *Grupos de simetría con rotaciones de orden seis: p6, p6mm*

La clasificación que realizaremos en las siguientes secciones es diferente a la que realizó Fedorov en 1891. Como hemos dicho anteriormente, Fedorov realizó su clasificación ordenando los grupos cristalográficos según el orden máximo de las rotaciones. Sin embargo, en nuestra clasificación nos centraremos en las transformaciones ortogonales que preservan un determinado tipo de retículo y a partir de ahí diferenciaremos los grupos cristalográficos planos según su correspondiente grupo de puntos.

### 3.3. Clasificación de los grupos cristalográficos planos

#### 3.3.1. Introducción

Inicialmente fijamos la siguiente notación. Tomamos los vectores  $a$  y  $b$  como los vectores asociados a las traslaciones necesarias para generar una celosía. No hay problema en asumir que  $a$  yace en el eje  $X$  positivo y  $b$  está en el primer cuadrante. Recordamos que  $a$  y  $b$  generan un retículo  $L$  y tal y como hemos hecho antes supondremos que  $a$  tiene longitud mínima excepto en el caso rectangular centrado. Tomamos  $A_\theta$  como la matriz que representa una rotación antihoraria de ángulo  $\theta$  respecto al origen, mientras que  $B_\phi$  representa una simetría respecto a una recta que pasa por el origen y tiene un ángulo  $\frac{\phi}{2}$  con el eje  $X$  positivo.

Ahora vamos a enunciar una clasificación y una descripción de las principales características de todos los grupos cristalográficos planos. Haremos esta clasificación separando varios casos dependiendo las propiedades que tiene el retículo  $L$ . Tal y como hacíamos en el capítulo anterior, distinguiremos cinco posibles formas del retículo: Oblícuo, rectangular, rectangular centrado, cuadrado o hexagonal. Dentro de cada caso diferenciaremos cada grupo cristalográfico según sus correspondientes grupos de puntos. Primero vamos a realizar una tabla que resuma los diferentes tipos de retículos y los grupos que hay en cada tipo.

Tipo del retículo	Mayor grupo de puntos posible	Tipos de isomorfía	Grupos cristalográficos
Oblicuo	$\{-I, +I\}$	$C_2$	p1, p2
Rectangular	$\{-I, +I, B_0, B_\pi\}$	$C_2 \times C_2$	pm, pg, p2mm, p2mg, p2gg
Rectangular centrado	$\{-I, +I, B_0, B_\pi\}$	$C_2 \times C_2$	cm, c2mm
Cuadrado	$\langle A_{\pi/2}, B_0 \rangle$	$D_8$	p4, p4mm, p4mg
Hexagonal	$\langle A_{\pi/3}, B_0 \rangle$	$D_{12}$	p3, p3m1, p31m, p6, p6mm

En esta tabla recogemos el mayor grupo de puntos posible que fija cada tipo de retículo y cual es el tipo de isomorfía de dichos grupos de puntos. En todos los casos fijamos como origen un punto del retículo  $L$  y analizamos las transformaciones que preservan el retículo y fijan dicho punto. En el caso oblicuo, las únicas transformaciones ortogonales que preservan la celosía son la identidad y la rotación de orden  $\pi$ , por lo tanto el mayor grupo de puntos posible será  $\{-I, I\}$  y este grupo es isomorfo al grupo cíclico de orden 2. Tanto en el caso rectangular como en el caso rectangular centrado las transformaciones ortogonales que preservan nuestra celosía son las mismas: La transformación identidad, una rotación de orden dos respecto del origen, una simetría respecto al eje X y una simetría respecto al eje Y. Por tanto el máximo grupo de puntos posible será  $\{-I, I, B_0, B_\pi\}$  que es un grupo isomorfo al grupo  $C_2 \times C_2$ . En el caso donde el retículo es cuadrado, tenemos que las transformaciones ortogonales que preservan la celosía son el grupo generado por una rotación de orden 4,  $\langle A_{\frac{\pi}{2}} \rangle$  y una simetría respecto a un eje horizontal. Tal y como hemos definido el grupo diédrico anteriormente, tenemos que las transformaciones ortogonales que preservan nuestra celosía forman el grupo diédrico  $D_8$ . Por último, las transformaciones ortogonales que preservan la celosía en el caso de que el retículo sea hexagonal son el grupo generado por una rotación de orden 6,  $\langle A_{\frac{\pi}{3}} \rangle$  y una simetría respecto a un eje horizontal. Por tanto, dada la definición de grupo diédrico, las transformaciones que preservan nuestra celosía forman el grupo diédrico  $D_{12}$ . Recordamos que por 1.37 una rotación en  $J$  corresponde a una rotación en  $G$  y una simetría en  $J$  puede corresponder a una simetría en  $G$  o a una simetría con deslizamiento en  $G$  según la simetría escinda o no.

### 3.3.2. Grupos donde el retículo es oblicuo

Las únicas transformaciones ortogonales que preservan el retículo  $L$  son la identidad y la rotación de ángulo  $\pi$  y centro el origen. Podemos suponer que el vector  $a$  es la dirección horizontal. Por lo tanto, el grupo de puntos  $J$  de  $G$  es un subgrupo de  $\{-I, +I\}$ .

#### Grupo de puntos I

(1) **p1:** El primer grupo que describimos es el grupo cirstalográfico plano más sencillo. En este caso el grupo de puntos  $J$  sólo contiene la matriz identidad. Los elementos de  $G$  tienen la forma  $(ma + nb, I)$  donde  $m, n \in \mathbb{Z}$ . (*Figura izquierda de la Figura 3.1*)

**Notación:** Se llama  $p1$ , p debido a que la celosía queda generada por una celosía primitiva que se traslada y 1 debido a que no hay rotaciones de ningún orden en este grupo.

#### Grupo de puntos $\{-I, I\}$

(2) **p2:** En este caso el grupo de puntos  $J$  es  $\{-I, +I\}$ . El grupo  $G$  contiene un medio giro y podemos tomar el punto fijo de esta rotación como el origen y suponer que la transformación ortogonal  $(0, -I)$  pertenece a  $G$ . Los elementos de  $G$  que no son traslaciones tienen la forma

$$(ma + nb, I)(0, -I) = (ma + nb, -I)$$

donde  $m, n \in \mathbb{Z}$ . En otras palabras, tenemos todos los medios giros respecto a los puntos  $\frac{1}{2}ma + \frac{1}{2}nb$ . El cálculo del centro se hace según la definición 1.30. (*Figura derecha de la Figura 3.1*).

**Notación:** Este grupo se llama  $p2$ , p debido a que la celosía queda generada por una celosía primitiva que se traslada y 2 debido a que la rotación de mayor orden que aparece en este grupo es de orden dos.

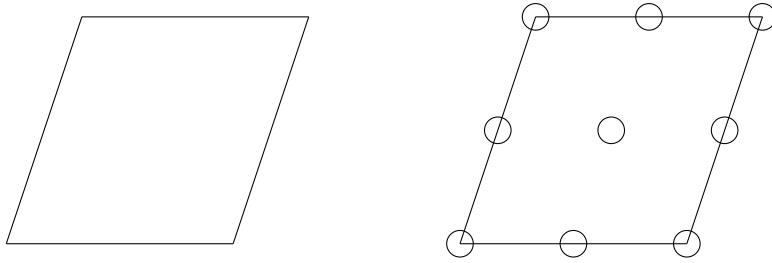


Figura 3.1: Celosías de los grupos p1, p2 respectivamente

### 3.3.3. Grupos donde el retículo es rectangular

Ahora, a diferencia del primer caso, tenemos hasta cuatro transformaciones ortogonales que preservan nuestro retículo: La identidad, un medio giro respecto al origen, una simetría respecto al eje X y una simetría respecto al eje Y. Por tanto el grupo de puntos de  $G$  es un subgrupo de  $\{-I, +I, B_0, B_\pi\}$ . Buscamos grupos cristalográficos planos que no hayamos visto anteriormente, ignorando las posibilidades de p1 y p2. Además, el caso en el que  $\{I, B_\pi\}$  sea el grupo de puntos es análogo al caso  $\{I, B_0\}$  y da lugar a grupos isomorfos por lo que solo consideraremos  $\{I, B_0\}$ . Notemos que ahora podemos suponer que el vector  $a$  es la dirección horizontal y  $b$  es la dirección vertical.

#### Grupo de puntos $C_2$ : $\{I, B_0\}$

(3) **pm:** Es el grupo más sencillo entre los que tienen retículo rectangular, en el que  $G$  contiene una simetría  $g$ . Tomando el origen en el eje de la simetría podemos suponer  $g = (0, B_0)$ . Los elementos que no son traslaciones son  $(v, B_0) = (v, I)(0, B_0)$  con  $v = ma + nb$  perteneciente al retículo. Son simetrías posiblemente con deslizamiento respecto a rectas horizontales que pasan a través de puntos del retículo o yacen a mitad de camino entre puntos del retículo. Así la simetría escinde y vamos a comprobar que lo hace totalmente:  $(ma + nb, B_0) = (w, I)g_1$  con  $g_1$  con puntos fijos implica  $g_1 = (nb, B_0)$ . Luego  $w = ma$  y ambos  $(w, I), g_1$  están en  $G$ . (Figura izquierda de la Figura 3.2)

**Notación:** Se llama pm con m debido a que existe una simetría como hemos indicado.

(4) **pg:** Ahora suponemos que  $G$  no contiene simetrías. En este caso el grupo contiene una simetría con deslizamiento  $g$  ya que contiene algún elemento  $g$  tal que  $\pi(g) = B_0$ . Podemos poner  $g = (ma + nb, B_0)$ . Eligiendo el origen en la recta de simetría podemos suponer que  $n = 0$ . Por lo tanto tenemos que  $g = (ma, B_0)$ . Como hemos comentado en 1.32, si componemos la misma simetría con deslizamiento dos veces obtenemos una traslación. Por lo tanto,

$$g^2 = (ma, B_0)^2 = (ma + maB_0, B_0^2) = (2ma, I) = (ka, I) \in T$$

donde  $k = 2m$  es un entero. Por tanto nuestra simetría con desplazamiento tiene la forma  $(\frac{1}{2}ka, B_0)$  con  $k$  entero. Vamos comprobar que  $k$  debe ser impar. Suponemos que  $k$  es par, entonces  $(-\frac{1}{2}ka, I)$  es una traslación en  $G$ , y la simetría

$$(0, B_0) = (-\frac{1}{2}ka, I)(\frac{1}{2}ka, B_0)$$

pertenece a  $G$ , contradiciendo nuestra hipótesis inicial de que  $G$  no contiene simetrías. Por tanto  $k$  debe ser impar y

$$(\frac{1}{2}a, B_0) = (-\frac{1}{2}(k-1)a, I)(\frac{1}{2}ka, B_0)$$

pertenece a  $G$ . Podemos por tanto suponer  $g = (\frac{1}{2}a, B_0)$ . Los elementos de  $G$  que no son traslaciones tienen la forma

$$(ma + nb, I)(\frac{1}{2}a, B_0) = ((m + \frac{1}{2})a + nb, B_0)$$

donde  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Son simetrías con deslizamiento respecto a rectas horizontales que, o bien pasan a través de puntos del retículo o yacen a mitad de camino entre puntos del retículo. (*Figura derecha de la Figura 3.2*)

**Notación:** Se llama  $pg$  con  $g$  debido a que existe una simetría con deslizamiento en el grupo.

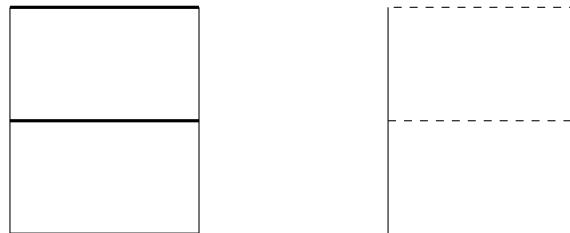


Figura 3.2: Celosías de los grupos pm y pg respectivamente

Desde ahora asumimos que el grupo de puntos es  $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$ . Hay tres posibilidades según lo acordado, solo uno, ninguno o los dos de  $B_0, B_\pi$  puede ser realizado por simetrías en  $G$ . De aquí vamos a obtener tres nuevos grupos cristalográficos planos: Uno que contenga simetrías tanto en el eje horizontal como en el eje vertical (es decir las dos simetrías se escinden en el grupo), otro que solo contenga simetrías en uno de los ejes (es decir solo una simetría se escinde en el grupo) y otro que no contenga simetrías (es decir ninguna de las dos simetrías se escinde en el grupo).

### Grupo de puntos $C_2 \times C_2$ : $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$

(5) **p2mm:** En el primero de estos casos, el grupo contiene dos simetrías con ejes de simetría perpendiculares, una simetría respecto un eje horizontal y una simetría respecto un eje vertical. Además también contiene medios giros en las intersecciones de los ejes de simetría. Eligiendo como origen la intersección de ambos ejes podemos suponer que  $(0, B_0), (0, B_\pi)$  pertenecen a  $G$ . Los elementos de  $G$  que no son traslaciones son:

- (1)  $(ma + nb, B_0)$  simetrías (posiblemente con deslizamiento) respecto a rectas horizontales a mitad de camino entre los puntos del retículo.
- (2)  $(ma + nb, B_\pi)$  simetrías (posiblemente con deslizamiento) respecto a rectas verticales a mitad de camino entre los puntos del retículo.
- (3)  $(ma + nb, -I)$  medio giro de centro  $\frac{m}{2}a + \frac{n}{2}b$ .

(*Figura izquierda de la Figura 3.3*)

**Notación:** Se llama  $p2mm$ , el 2 debido a que las rotaciones de mayor orden que aparecen son de orden dos, y mm debido a que contiene dos simetrías como antes hemos indicado.

(6) **p2mg:** Ahora suponemos que  $G$  contiene una simetría respecto a un eje horizontal pero no contiene una simetría en un eje vertical. Además de la simetría indicada, contiene medios giros y una simetría con deslizamiento respecto a un eje vertical. Una elección óptima del origen es en la intersección entre el eje horizontal y la recta vertical del desplazamiento y argumentando de forma parecida al caso (4)  $pg$ , nos permite asumir que  $(0, B_0)$  y  $(\frac{1}{2}b, B_\pi)$  pertenecen a  $G$ . El producto

$$(\frac{1}{2}b, B_\pi)(0, B_0) = (\frac{1}{2}b, -I)$$

es el medio giro sobre  $\frac{1}{4}b$ . Los elementos de  $G$  que no son traslaciones son:

- (1)  $(ma + nb, B_0)$  simetrías (posiblemente con deslizamiento) respecto a rectas horizontales que pasan por puntos del retículo o a mitad de camino entre los puntos del retículo.

(2)  $(ma + (n + \frac{1}{2})b, B_\pi)$  simetrías con deslizamiento respecto a rectas verticales que pasan por puntos del retículo o a mitad de camino entre los puntos del retículo.

(3)  $(ma + (n + \frac{1}{2})b, -I)$  medio giro de centro  $\frac{m}{2}a + \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})b$ .

Intercambiando en la discusión horizontal y vertical llegamos a un grupo cristalográfico isomorfo. (Figura central de la Figura 3.3)

**Notación :** Se llama  $p2mg$ , el 2 debido a que la rotación de mayor orden es de orden dos, m debido a que contiene una simetría respecto a un eje horizontal y g debido a que contiene una simetría con deslizamiento respecto al eje vertical.

(7) **p2gg:** Por último, suponemos que en  $G$  no hay simetrías. El grupo contiene dos simetrías con deslizamiento y un medio giro. Los ejes de las simetrías con deslizamiento son perpendiculares. Como antes, eligiendo como origen el punto de corte de los ejes podemos suponer que  $(\frac{1}{2}a, B_0)$  y  $(\frac{1}{2}, B_\pi)$  pertenecen a  $G$ . Los elementos de  $G$  que no son traslaciones son simetrías con deslizamiento como las de (6)(2) pero respecto a ejes horizontales y verticales y medios giros como los de (6)(3). (Figura derecha de la Figura 3.3)

**Notación :** Se llama  $p2gg$ , el 2 debido a que las rotaciones de mayor orden que contiene son de orden dos y gg debido a que contiene dos simetrías con deslizamiento.

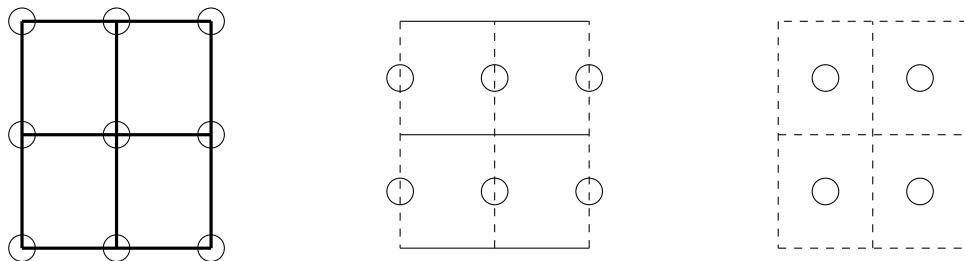


Figura 3.3: Celosías de los grupos p2mm, p2mg y p2gg respectivamente

No hemos considerado el caso en el que el grupo de puntos sea  $\langle -I \rangle$  ya que es fácil ver que el grupo obtenido es isomorfo a  $p2$ .

### 3.3.4. Grupos donde el retículo es rectangular centrado

En este caso la celosía primitiva va a estar formada por un bloque, constituido por la unión de dos celosías primitivas, que se traslada. Las transformaciones ortogonales que preservan el retículo  $L$  son las mismas que en el caso rectangular: la identidad, medio giro respecto al origen, una simetría respecto al eje X y una simetría respecto al eje Y. Por lo tanto el grupo de puntos  $J$  debe ser de nuevo un subgrupo de  $\{-I, +I, B_0, B_\pi\}$ . Como antes, el vector  $a$  es la dirección horizontal pero ahora la dirección vertical es  $2b - a$ . Vamos a descubrir dos nuevos grupos (es fácil ver que otras elecciones del grupo de puntos dan lugar a grupos de los y considerados antes):

#### Grupo de puntos $C_2$ : $\{I, B_0\}$

(8) **cm:** En este caso el grupo contiene un elemento  $g = (v, B_0)$ , que cumple que su imagen por  $\pi$  es  $B_0$ . Este elemento es una simetría posiblemente con deslizamiento y eligiendo el origen en el eje de la simetría podemos suponer que  $v = ma$ . Si elevamos al cuadrado este elemento vamos a obtener una traslación tal y como ha sucedido en el caso (4). Por tanto  $2ma = ka$  para cierto entero  $k$ . Vamos a diferenciar dos casos:

(i) Si  $k$  es par, la simetría

$$(0, B_0) = \left(-\frac{1}{2}ka, I\right) \left(\frac{1}{2}ka, B_0\right)$$

pertenece a  $G$ . Los elementos de  $G$  que no son traslaciones tienen la forma

$$(ma + nb, B_0) = ((m + \frac{1}{2}n)a + \frac{1}{2}n(2b - a), B_0)$$

donde  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Tomando  $n$  par y  $m = -\frac{1}{2}n$  se producen todas las simetrías respecto a ejes horizontales que pasan a través de puntos del retículo. Si  $n$  es par pero  $m \neq \frac{1}{2}n$ , son simetrías con deslizamiento. Finalmente, si  $n$  es impar, tenemos simetrías con deslizamiento a lo largo de rectas que yacen a mitad de camino entre puntos del retículo. La parte de traslación de cada una de estos deslizamientos es un múltiplo impar de  $\frac{1}{2}a$ .

(ii) Si  $k$  es impar, entonces

$$(\frac{1}{2}(2b - a), B_0) = (-\frac{1}{2}(k + 1)a + b, I)(\frac{1}{2}ka, B_0)$$

pertenece a  $G$ . Esta es otra vez una simetría y cambiando el origen a un punto de su eje nos lleva nuevamente al caso previo. (*Figura izquierda de la Figura 3.4*)

Una consecuencia de lo anterior es que en este grupo la simetría  $B_0$  escinde pero no totalmente. Para verlo observemos que  $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(2b-a), B_0) \in G$  y se puede poner como  $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(2b-a), B_0) = (\frac{1}{2}a, I)(\frac{1}{2}(2b-a), B_0)$  con  $(\frac{1}{2}a, I)$  traslación y  $(\frac{1}{2}(2b-a), B_0)$  transformación con puntos fijos pero ninguno de ellos está en  $G$ .

**Notación:** Este grupo se llama *cm*, c debido a que la celosía queda generada por la traslación de un bloque y dicho bloque está formado por dos celosías primitivas unidas y m debido a que el grupo contiene simetrías.

### Grupo de puntos $C_2 \times C_2$ : $\{\mathbf{I}, -\mathbf{I}, B_0, B_\pi\}$

(9) **c2mm:** En este caso el grupo de puntos contiene dos simetrías con ejes perpendiculares y un medio giro. Repitiendo un razonamiento parecido al del caso anterior se prueba que eligiendo adecuadamente el origen podemos suponer que  $G$  contiene las simetrías  $(0, B_0)$  y  $(0, B_\pi)$ . Los elementos de  $G$  que no son traslaciones son:

(1)  $((m + \frac{1}{2}n)a + \frac{1}{2}n(2b-a), B_0)$  simetría posiblemente con deslizamiento de eje horizontal por puntos del retículo o una simetría con deslizamiento de eje horizontal por puntos a medio camino entre los del retículo.

(2)  $((m + \frac{1}{2}n)a + \frac{1}{2}n(2b-a), B_\pi)$  simetría posiblemente con deslizamiento de eje vertical por puntos del retículo o una simetría con deslizamiento de eje horizontal por puntos a medio camino entre los del retículo.

(3)  $((m + \frac{1}{2}n)a + \frac{1}{2}n(2b-a), -\mathbf{I})$  medios giros de centro  $\frac{1}{2}(m + \frac{1}{2}n)a + \frac{1}{4}(2b-a)$ .

(*Figura derecha de la Figura 3.4*)

**Notación:** Este grupo se llama *c2mm*, c debido a que la celosía queda generada por la traslación de un bloque que a su vez está formado por dos celosías primitivas unidas, 2 debido a que las rotaciones de mayor orden son de orden dos y mm debido a que el grupo contiene dos simetrías.

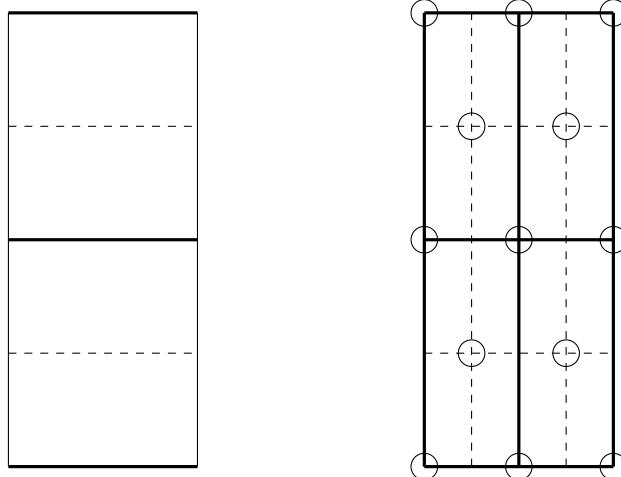


Figura 3.4: Celosías de los grupos *cm* y *c2mm* respectivamente

Por último observamos que el grupo de puntos  $\langle B_\pi \rangle$  da lugar a un grupo isomorfo a *cm* y el grupo de puntos  $\langle -I \rangle$  produce otro grupo isomorfo a *p2*.

### 3.3.5. Grupos donde el retículo es cuadrado

En este caso el grupo de transformaciones ortogonales que preservan el retículo es el grupo diédrico de orden ocho formado por una rotación de orden cuatro y una simetría respecto a un eje horizontal. El grupo de puntos *J* es un subgrupo de este grupo. Ahora, *a* es la dirección horizontal y *b* la vertical.

#### Grupo de puntos $C_4 = \langle A_{\pi/2} \rangle$

(10) **p4**: Este grupo contiene rotaciones de orden cuatro y rotaciones de orden dos. En este caso el grupo de puntos está generado por  $A_{\frac{\pi}{2}}$ . Como las rotaciones escinden, eligiendo como origen el centro de rotación podemos suponer que *G* contiene el elemento  $g = (0, A_{\pi/2})$ . Los elementos de *G* que no son traslaciones son:

- (1)  $(ma + nb, A_{\pi/2})$  rotaciones de centro  $\frac{m-n}{2}a + \frac{m+n}{2}b$  y ángulo  $\pi/2$ .
- (2)  $(ma + nb, -I)$  medios giros de centro  $\frac{m}{2}a + \frac{n}{2}b$ .
- (3)  $(ma + nb, A_{3\pi/2})$  rotaciones de centro  $\frac{m+n}{2}a + \frac{n-m}{2}b$  y ángulo  $3\pi/2$ .

(Figura izquierda de la Figura 3.5)

**Notación:** Este grupo se llama *p4*, el 4 debido a que las rotaciones de mayor orden que contiene el grupo son de orden cuatro.

#### Grupo de puntos $D_8 = \langle B_0, A_{\pi/2} \rangle$

(11) **p4mm**: El grupo contiene una rotación de orden cuatro y una simetría, es decir,  $B_0$  escinde en *G*. Los ejes de las simetrías forman un ángulo de cuarenta y cinco grados entre sí. Podemos elegir como origen el centro de la rotación y suponer que  $g = (0, A_{\pi/2})$  está en *G*. Si la simetría es  $(ma + nb, B_0)$ , *n* debe ser entero para que este elemento preserve el retículo y como no tiene deslizamiento *m* = 0 y el elemento  $(-nb, I)(nb, B_0) = (0, B_0)$  está en *G*. Los elementos de *G* que no son traslaciones son de uno de los tipos siguientes:

- (1)  $(ma + nb, A_{\pi/2})$ ,  $(ma + nb, -I)$ ,  $(ma + nb, A_{3\pi/2})$  son rotaciones.
- (2)  $(ma + nb, B_0)$ ,  $(ma + nb, B_\pi)$  son simetrías posiblemente con deslizamiento.
- (3)  $(ma + nb, B_{\pi/2})$ ,  $(ma + nb, B_{3\pi/2})$  son simetrías posiblemente con deslizamiento.

(Figura central de la Figura 3.5)

**Notación:** Este grupo se llama  $p4mm$ , el 4 debido a que las rotaciones de mayor orden que contiene el grupo son de orden cuatro y  $mm$  debido a las dos simetrías nombradas anteriormente.

(12) **p4mg:** Suponemos que el grupo de puntos  $J$  está generado por  $A_{\frac{\pi}{2}}$  y  $B_0$  pero que en este caso la simetría respecto a un eje horizontal  $B_0$  no se escinde en  $G$ . El grupo contiene una rotación de orden cuatro. Elegimos como origen su punto fijo y podemos suponer que  $g = (0, A_{\pi/2})$  está en  $G$ . Tomamos un elemento de  $G$ ,  $g = (ma + nb, B_0)$ , que define una simetría con deslizamiento que va a parar a  $B_0$ . Si elevamos  $g$  al cuadrado sabemos por la observación 1.32 que obtenemos una traslación. La traslación obtenida al elevar el elemento  $g$  al cuadrado es una traslación de vector  $2ma$  y por tanto  $2m$  debe ser un entero. Veamos que  $2m$  debe ser impar por una reducción al absurdo. Suponemos que  $2m$  es par, entonces la simetría

$$(nb, B_0) = (-ma, I)(ma + nb, B_0)$$

pertenece a  $G$  y tenemos una contradicción ya que hemos supuesto que la simetría  $B_0$  no se escinde en  $G$ . Por lo tanto necesariamente  $2m$  debe ser impar y

$$\left(\frac{1}{2}a + nb, B_0\right) = \left(\left(\frac{1}{2} - m\right)a, I\right)(ma + nb, B_0)$$

es un elemento de  $G$ . También tenemos que son elementos de  $G$

$$(0, A_{\frac{\pi}{2}})\left(\frac{1}{2}a + nb, B_0\right) = \left(\frac{1}{2}b - na, B_{\frac{\pi}{2}}\right)$$

y

$$\left(\frac{1}{2}b - na, B_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{2} - n\right)(a + b), I\right)$$

demonstrando que  $\frac{1}{2} - n$  es un número entero. Por tanto podemos concluir que el deslizamiento

$$\sigma = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, B_0\right) = \left(\left(\frac{1}{2} - n\right)b, I\right)\left(\frac{1}{2}a + nb, B_0\right)$$

pertenece a  $G$  por lo comentado anteriormente. Los elementos que no son traslaciones son:

(1) Rotaciones como las rotaciones de (11) ( $p4mm$ )

(2) Si componemos  $(ma + nb, I) \circ \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, B_0\right)$  obtenemos  $\left((m + \frac{1}{2})a + (n + \frac{1}{2})b, B_0\right)$  que son simetrías con deslizamiento respecto a ejes horizontales situados a  $\frac{1}{4}$  de puntos del retículo. Por otro lado si componemos  $(ma + nb, I) \circ \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, B_0\right) \circ (0, -I)$  obtenemos  $\left((m + \frac{1}{2})a + (n + \frac{1}{2})b, B_{\pi}\right)$  que son simetrías con deslizamiento respecto a ejes verticales situados a  $\frac{1}{4}$  de puntos del retículo.

(3) Por último si componemos  $(ma + nb, I) \circ \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, B_0\right) \circ (0, A_{\pi/2})$  obtenemos  $\left((m + \frac{1}{2})a + (n + \frac{1}{2})b, B_{3\pi/2}\right)$  que son simetrías posiblemente con deslizamiento y forman un ángulo  $3\pi/4$  con el eje  $X$  positivo. Si pasan por puntos del retículo hay deslizamiento seguro y sino pasan por puntos del retículo entonces posiblemente haya deslizamiento. Si componemos  $(ma + nb, I) \circ \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b, B_0\right) \circ (0, A_{3\pi/2})$  obtenemos  $\left((m + \frac{1}{2})a + (n + \frac{1}{2})b, B_{\pi/2}\right)$  que son simetrías posiblemente con deslizamiento cuyos ejes forman un ángulo  $\pi/4$  con el eje  $X$  positivo. Si pasan por puntos del retículo hay deslizamiento seguro y sino pasan por puntos del retículo entonces posiblemente haya deslizamiento.

(Figura derecha de la Figura 3.5)

**Notación:** Este grupo se llama  $p4mg$ , el 4 debido a que las rotaciones de mayor orden que contiene el grupo son de orden cuatro,  $m$  debido a que el grupo contiene simetrías y  $g$  debido a que el grupo también contiene simetrías con deslizamiento.

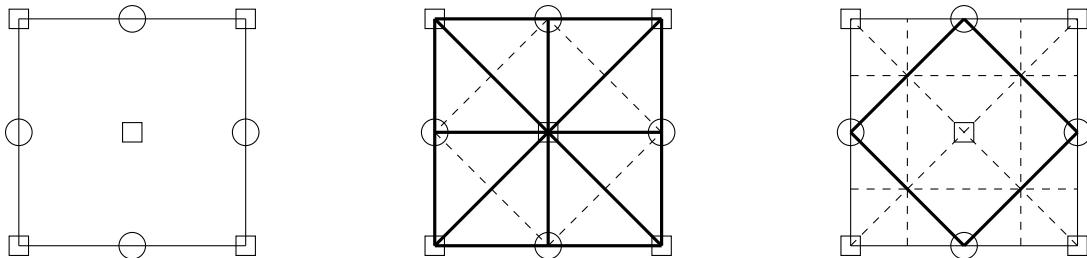


Figura 3.5: Celosías de los grupos p4, p4mm y p4mg respectivamente

**Observación 3.3.** Si el retículo del grupo cristalográfico es cuadrado, su grupo de puntos es un subgrupo de  $\{I, A_{\pi/2}, -I, A_{3\pi/2}, B_0, B_{\pi/2}, B_\pi, B_{3\pi/2}\}$ . Si consideramos todos los subgrupos de este grupo que no contengan una rotación de orden cuatro se puede probar que dichos subgrupos son grupos de puntos de grupos cristalográficos que hemos visto con anterioridad:

Grupo de puntos	Grupo cristalográfico
$\{I\}$	p1
$\{-I, +I\}$	p2
$\langle B_0 \rangle$	pm o pg
$\langle B_\pi \rangle$	pm o pg
$\langle B_0, B_\pi \rangle$	p2mm, p2mg o p2gg
$\langle B_{\pi/2} \rangle$	cm
$\langle B_{3\pi/2} \rangle$	cm
$\langle B_{\pi/2}, B_{3\pi/2} \rangle$	c2mm

### 3.3.6. Grupos donde el retículo es hexagonal

En este caso el grupo de puntos  $J$  debe estar contenido en el grupo diédrico de orden 12 generado por  $A_{\frac{\pi}{3}}$  y  $B_0$ . Vamos a descubrir nuevos grupos cristalográficos dependiendo de que  $J$  contenga rotaciones de orden 3 o rotaciones de orden 6. En este caso  $a$  es la dirección horizontal. Aclaramos que no vamos a entrar en profundidad en describir los elementos de cada grupo que aparecen en esta sección.

#### Grupo de puntos $C_3 = \langle A_{2\pi/3} \rangle$

(13) **p3**: Es el grupo más sencillo cuando el retículo es hexagonal. El grupo contiene rotaciones de orden tres y eligiendo como origen el centro podemos suponer que  $g = (0, A_{2\pi/3})$  pertenece a  $G$ . (Figura izquierda de la Figura 3.6)

**Notación:** Este grupo se llama  $p3$ , el 3 debido a que las rotaciones de mayor orden que contiene el grupo son de orden tres.

#### Grupo de puntos $D_6$

(14) **p3m1**: En este caso el grupo de puntos  $J$  está generado por  $A_{2\pi/3}$  y  $B_0$ . El grupo contiene una rotación de orden 3 que eligiendo otra vez el origen de forma adecuada se puede suponer que es de la forma  $(0, A_{2\pi/3})$ . (Figura central de la Figura 3.6)

**Notación:** Este grupo se llama  $p3m1$ , el 3 debido a que las rotaciones de mayor orden que contiene el grupo son de orden tres y m debido a que el grupo contiene una simetría.

- (15) **p31m:** El grupo de puntos está generado por  $A_{\frac{2\pi}{3}}$  y  $B_{\frac{\pi}{3}}$ .  $G$  contiene una rotación de orden 3 y elegimos como origen su punto fijo. Así  $(0, A_{\frac{2\pi}{3}})$  pertenece a  $G$ . Sea un elemento de  $G$ ,  $g = (ma + nb, B_{\frac{\pi}{3}})$ , cuya imagen por  $\pi$  es la simetría  $B_{\frac{\pi}{3}}$ . Ahora,

$$(ma + nb, B_{\frac{\pi}{3}})^2 = ((m+n)(a+b), I),$$

así  $(m+n)$  es entero. También tenemos

$$(0, A_{\frac{2\pi}{3}})(ma + nb, B_{\frac{\pi}{3}}) = (m(b-a) - na, B_{\pi})$$

y

$$(m(b-a) - na, B_{\pi})^2 = (m(2b-a), I),$$

mostrando que  $m$  es un entero. Por lo tanto  $m$  y  $n$  son enteros y la simetría

$$(0, B_{\frac{\pi}{3}}) = (-ma - nb, I)(ma + nb, B_{\frac{\pi}{3}})$$

pertenece a  $G$ . Los elementos de  $G$  tienen la forma  $(ma + nb, M)$  donde  $m, n \in \mathbb{Z}$  y  $M$  es una de las matrices  $I, A_{\frac{2\pi}{3}}, A_{\frac{4\pi}{3}}, B_{\frac{\pi}{3}}, B_{\pi}, B_{\frac{5\pi}{3}}$ . Los tres primeros casos son rotaciones y los tres últimos son simetrías posiblemente con deslizamiento. Por ejemplo,

$$(ma + nb, B_{\pi}) = ((m + \frac{1}{2}n)a + \frac{1}{2}n(2b-a), B_{\pi})$$

es una simetría en un eje vertical cuando  $n = 0$  y un deslizamiento cuando  $n \neq 0$ . (*Figura derecha de la Figura 3.6*)

**Notación:** Este grupo se llama  $p31m$ , el 3 debido a que las rotaciones de mayor orden que contiene el grupo son de orden 3, y m debido a que el grupo contiene simetrías.

### Grupo de puntos $C_6 = \langle A_{\pi/3} \rangle$

- (16) **p6:** Este grupo contiene una rotación de orden seis que como antes podemos suponer que es  $g = (0, A_{\pi/3})$ . Los elementos que no son simetrías son rotaciones. (*Figura izquierda de la Figura 3.7*)

**Notación:** Este grupo se llama  $p6$ , el 6 debido a que las rotaciones de mayor orden que contiene el grupo son de orden seis.

### Grupo de puntos $D_{12}$

- (17) **p6m:** El grupo contiene rotaciones de orden seis y una simetría posiblemente con deslizamiento. Razionando de forma parecida a casos anteriores se puede comprobar que este nuevo grupo contiene simetrías cuyos ejes pasan todos por los centros de las rotaciones. Además en los centros de orden seis se cortan seis ejes de simetría que forman ángulos de treinta grados entre sí. (*Figura derecha de la Figura 3.7*)

**Notación:** Este último grupo se llama  $p6m$ , el 6 debido a que las rotaciones de mayor orden que contiene el grupo son de orden seis y m debido a que el grupo contiene simetrías.

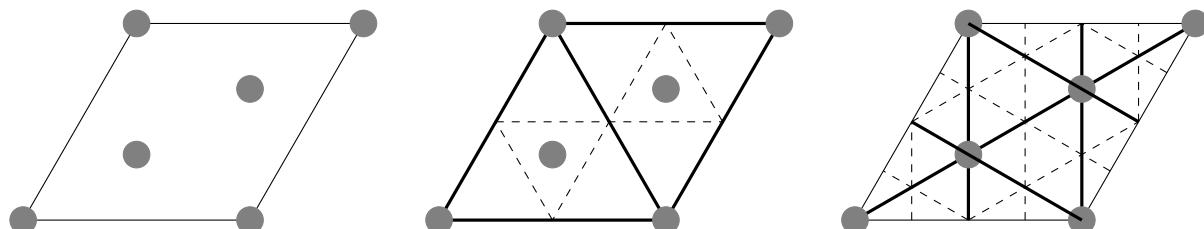


Figura 3.6: Celosías de los grupos  $p3$ ,  $p3m1$  y  $p31m$  respectivamente

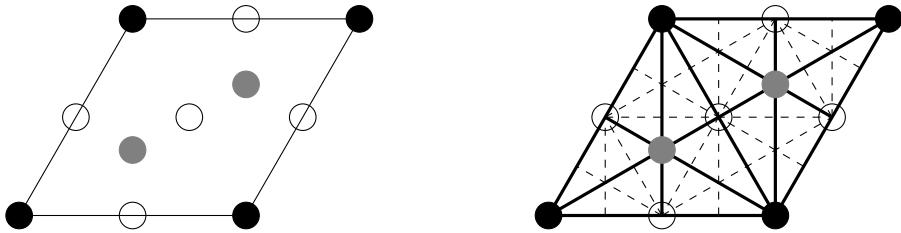


Figura 3.7: Celosías de los grupos p6 y p6mm respectivamente

**Observación 3.4.** Si el retículo del grupo cristalográfico es hexagonal, su grupo de puntos es un subgrupo del grupo diédrico de orden 12 (generado por  $A_{\pi/3}$  y  $B_0$ ). Si consideramos todos los subgrupos de este grupo que no contengan una rotación de orden tres se puede probar que dichos subgrupos son grupos de puntos de grupos cristalográficos que hemos visto con anterioridad:

Grupo de puntos	Grupo cristalográfico
$\{I\}$	p1
$\{-I, +I\}$	p2
$\langle B_{k\pi/3} \rangle, 0 \leq k \leq 5$	cm
$\langle B_0, B_\pi \rangle$	c2mm
$\langle B_{\pi/3}, B_{4\pi/3} \rangle$	c2mm
$\langle B_{2\pi/3}, B_{5\pi/3} \rangle$	c2mm

Haciendo un resumen obtenemos que hemos encontrado diecisiete grupos cristalográficos planos diferentes:  $p1$ ,  $p2$ ,  $pm$ ,  $pg$ ,  $p2mm$ ,  $p2mg$ ,  $p2gg$ ,  $cm$ ,  $c2mm$ ,  $p4$ ,  $p4mm$ ,  $p4mg$ ,  $p3$ ,  $p3m1$ ,  $p31m$ ,  $p6$ ,  $p6m$ .

**Teorema 3.5.** Existen diecisiete grupos cristalográficos diferentes y son los descritos anteriormente.

Vamos a realizar una tabla como resumen de los grupos:

Tipo del retículo	Grupo cristalográfico	Grupo de puntos
Oblicuo	p1	I
Oblicuo	p2	$\langle -I \rangle$
Rectangular	pm	$\langle B_0 \rangle$
Rectangular	pg	$\langle B_0 \rangle$
Rectangular	p2mm	$\langle B_0, B_\pi \rangle$
Rectangular	p2mg	$\langle B_0, B_\pi \rangle$
Rectangular	p2gg	$\langle B_0, B_\pi \rangle$
Rectangular centrado	cm	$\langle B_0 \rangle$
Rectangular centrado	c2mm	$\langle B_0, B_\pi \rangle$
Cuadrado	p4	$\langle A_{\frac{\pi}{2}} \rangle$
Cuadrado	p4mm	$\langle A_{\frac{\pi}{2}}, B_0 \rangle$
Cuadrado	p4mg	$\langle A_{\frac{\pi}{2}}, B_0 \rangle$
Hexagonal	p3	$\langle A_{\frac{2\pi}{3}} \rangle$
Hexagonal	p3m1	$\langle A_{\frac{2\pi}{3}}, B_0 \rangle$
Hexagonal	p31m	$\langle A_{\frac{2\pi}{3}}, B_{\frac{\pi}{3}} \rangle$
Hexagonal	p6	$\langle A_{\frac{\pi}{3}} \rangle$
Hexagonal	p6m	$\langle A_{\frac{\pi}{3}}, B_0 \rangle$

### 3.3.7. Teoremas para completar la clasificación

Para completar la clasificación de los grupos cristalográficos planos hay que probar que no hay dos que sean isomorfos entre sí. Sabemos por el Teorema 2.13 que si dos grupos cristalográficos son isomorfos, entonces sus grupos de puntos son isomorfos. Por lo tanto solo tenemos que comprobar que no son isomorfos los grupos que tengan el mismo grupo de puntos. Reagrupando los grupos según su grupo de puntos encontramos cuatro opciones:

**Teorema 3.6.** *No hay dos de  $p2$ ,  $pm$ ,  $pg$ ,  $cm$  que sean isomorfos. (Grupo de puntos  $C_2$ )*

Demostración: Entre estos sólo  $p2$  contiene rotaciones así que no puede ser isomorfo a ninguno de los otros. De los tres grupos restantes,  $pg$  es el único donde la simetría no escinde, consecuentemente,  $pg$  no es isomorfo a  $pm$  o  $cm$ , ni a  $p2$  por lo citado al inicio de la demostración. Finalmente, notamos que tenemos un deslizamiento en  $pm$  y lo escribimos como una simetría seguido por una traslación, entonces la simetría y la traslación pertenecen a  $pm$  ya que la simetría escinde totalmente. Sin embargo,  $cm$  contiene deslizamientos que no pertenecen a  $cm$ , es decir, la simetría no escinde totalmente. Por ejemplo, consideramos el deslizamiento

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(2b-a), B_0\right) = \left(\frac{1}{2}a, I\right)\left(\frac{1}{2}(2b-a), B_0\right)$$

tal y como hemos explicado en el grupo cristalográfico (8)  $cm$ . Por lo tanto,  $pm$  no es isomorfo a  $cm$ .  $\square$

**Teorema 3.7.** *No hay dos de  $p2mm$ ,  $p2mg$ ,  $p2gg$ ,  $c2mm$  que sean isomorfos. (Grupo de puntos  $C_2 \times C_2$ )*

Demostración: Entre estos,  $p2gg$  es el único que no contiene una simetría, es decir, no escinde ninguna de las simetrías y así no puede ser isomorfo a ninguno de los otros. De los tres grupos restantes, solo  $p2mm$  contiene las partes constitutivas de cada uno de sus deslizamientos, es decir, las dos simetrías escinden totalmente y consecuentemente  $p2mm$  no es isomorfo a  $p2mg$  o  $c2mm$ . Finalmente, notamos que los ejes de todas las simetrías en  $p2mg$  son horizontales, así el producto de dos simetrías es una traslación. Pero en  $c2mm$  hay simetrías con ejes horizontales y simetrías con ejes verticales, y el producto de uno de ellos es una rotación de orden 2 (medio giro). Además en  $p2mg$  solo escinde una de las dos simetrías. En cambio en  $c2mm$  se escinden las 2 simetrías pero no totalmente. Por lo tanto concluimos que  $p2mg$  no es isomorfo a  $c2mm$ .  $\square$

**Teorema 3.8.**  *$p4mm$  no es isomorfo a  $p4mg$ . (Grupo de puntos  $D_8$ )*

Demostración: Cada rotación de orden 4 en  $p4mm$  puede ser escrita como el producto de dos simetrías que ambas pertenecen a  $p4mm$  ya que en este grupo las dos simetrías escinden totalmente. La correspondiente sentencia no es cierta para  $p4mg$  ya que en este grupo solo escinde una de las dos simetrías. Por ejemplo  $(a, A_{\frac{\pi}{2}})$  no puede ser factorizado en  $p4mg$  como el producto de dos simetrías ya que es un giro de centro  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$  y por ese punto no pasa ningún eje de simetría. Por lo tanto concluimos que  $p4mm$  no es isomorfo a  $p4mg$ .  $\square$

**Teorema 3.9.**  *$p3m1$  no es isomorfo a  $p31m$ . (Grupo de puntos  $D_6$ )*

Demostración: En  $p31m$  cada rotación de orden 3 puede ser escrita como producto de dos simetrías ya que las dos simetrías escinden totalmente. Sin embargo en el caso de  $p3m1$  la sentencia anterior no es cierta ya que solo una de las dos simetrías escinde. Por ejemplo, se puede probar que  $(a, A_{\frac{2\pi}{3}})$  no puede ser factorizado en  $p3m1$  como el producto de dos simetrías. Por lo tanto concluimos que  $p31m$  no es isomorfo a  $p3m1$ .  $\square$

**Teorema 3.10.** *Hay exactamente 17 grupos cristalográficos planos que son los descritos anteriormente y además son esencialmente distintos, es decir, no hay dos de ellos que sean isomorfos entre sí.*

Esto completa nuestra clasificación de cuerpos cristalográficos planos.



# Bibliografía

- [1] M.A. ARMSTRONG, *Groups and symmetry*, Springer-Verlag, 1988. <https://superoles.files.wordpress.com/2014/10/lluvia.pdf>.
- [2] A. CORRAL, <http://www.acorral.es/index3.html>.
- [3] H.S.M. COXETER, *Introduction to Geometry*, Wiley, 1969. <http://plouffe.fr/simon/math/Wiley%20-%20Coxeter%20-%20Introduction%20To%20Geometry.pdf>.
- [4] H.S.M. COXETER, *M.C. Escher; Art and Science*, Elsevier, 1986.
- [5] D.W. FARMER, *Groups and Symmetry: A Guide to Discovering Mathematics*, American Mathematical Society, 1996.
- [6] B. GRUNBAUM, *What Symmetry groups are present at the Alhambra*, American Mathematical Society, 2006.
- [7] B. GRUNBAUM, C.G. SHEPHARD, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman and Company, 1987.
- [8] P.J. MORANDI, *Symmetry Groups: Classification of Wallpaper Patterns*, New Mexico State University. <http://sierra.nmsu.edu/morandi/OldWebPages/Math526Spring2007/Math526text2007-01-10.pdf>.
- [9] R. NÚÑEZ, <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0084-02/capitulo4.html>.
- [10] A. RAMÍREZ, C. USÓN, *Los 17 grupos de simetría en el arte mudéjar aragonés*, Fundación Ramón J. Sender, 2002.
- [11] F. RIVERO, <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol6/frivero.pdf>.
- [12] H. WEYL, *Symmetry*, Princeton, 1952. <http://ricardoheras.com/wp-content/uploads/2013/11/H.-Weyl-Symmetry.pdf>.

