Espacios de funciones medibles

Ana Adell Lamora

Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Ana Peña y Pedro Miana
27 de junio de 2017

Prólogo

El propósito de este trabajo es estudiar los distintos tipos de convergencia en un espacio de medida y analizar las relaciones entre éstos (capítulo 2), una vez hayamos definido los conceptos básicos de los espacios L^p de funciones integrables (capítulo 1). Los espacios L^p son los espacios vectoriales normados más importantes en el contexto de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue. Los distintos tipos de convergencia ilustran la riqueza y diversidad de topologías que pueden darse en los espacios de Lebesgue.

En 1901, Henri Lebesgue, a partir de trabajos de otros matemáticos como Émile Borel y Camille Jordan, realizó importantes contribuciones a la teoría de la medida. Al año siguiente definió la integral de Lebesgue, que generaliza la noción de la integral de Riemann, extendiendo el concepto de área bajo una curva para incluir funciones discontinuas o funciones que presentan muchas oscilaciones.
El método de Lebesgue tiene en cuenta los valores de la función, dividiendo el rango en lugar de dividir el intervalo dominio de la función, como hace la integral de Riemann. El método de Lebesgue necesita calcular la longitud de conjuntos que no son intervalos, lo que acarrea la necesidad de construir la medida de Lebesgue.

En 1906 Maurice Fréchet introduce las nociones de espacio métrico, compacidad, completitud y separabilidad, discutiendo estas propiedades en algunos espacios especiales. En particular, consideró el espacio $C[a,b]$ de las funciones reales continuas en el intervalo $[a,b]$. Al aplicar estas ideas a otro de los grandes desarrollos de la época, la teoría de la integración de Lebesgue, se originaron otros tipos de espacios funcionales: los espacios $L^p[a,b]$, definidos como:

$$L^p[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ f \text{ es medible Lebesgue y } \|f\|_p := \left(\int_a^b |\, f\,|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

Para $p = 1$ este espacio estaba implícito ya en los trabajos de Lebesgue; el caso $p = 2$ aparece explícitamente en 1907 cuando Frigyes Riesz y Ellis Fischer descubren el famoso Teorema de Riesz-Fischer, según el cual el espacio métrico $L^2[a,b]$ es completo, separable e isomorfo al espacio de Hilbert de sucesiones l^2, definido como:

$$l_2 := \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} :\ \|x\|_2 \ := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\},$$

introducido por David Hilbert al estudiar la ecuación integral $f(x) + \int_a^b K(x,y)f(y)\, dy = g(x)$, donde f, g y K son funciones continuas. Una de las consecuencias inmediatas del teorema de Riesz-Fischer es que todos los resultados de Hilbert se generalizan inmediatamente al caso en que f, g y K son funciones de L^2 en lugar de continuas.
La distancia considerada en el espacio de sucesiones l^2 es

$$d(x,y) \ := \ \|x-y\|_2 \ := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2},$$

que es la generalización natural de la distancia euclídea para “ infinitas coordenadas".

Los espacios L^p y sus análogos l^p, para $1 < p < \infty$, fueron introducidos en 1910 por Riesz para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales con infinitas incógnitas y para estudiar el problema general de los momentos, es decir, caracterizar cuando existe una función f que cumple las condiciones:

$$\int_a^b f(x)g_n(x)\,dx = c_n,\ n = 1,2,\ldots$$

siendo (g_n) una sucesión de funciones y (c_n) una sucesión de escalares.

Aparecen aquí dos nociones importantes:

- La representación del dual de $L^p[a,b]$ como $L^q[a,b]$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.
- La convergencia débil de sucesiones.

Todos estas contribuciones preparan el camino para el desarrollo de una teoría abstracta de espacios normados. Esto aconteció en la tesis doctoral de Stefan Banach en 1920, en la que se da la definición axiomática de espacio vectorial real, normado y completo.

Después de haber estudiado los espacios L^p, nuestro objetivo será analizar la convergencia de sucesiones de funciones medibles. Aparte de los conceptos de convergencia puntual y convergencia uniforme, podemos estudiar en el contexto de los espacios normados otros tipos de convergencia.

Cuando hablamos de funciones f_n en un espacio de medida, realmente nos referimos a la clase de equivalencia $[f_n]$, por lo que nos limitamos a aquellos modos de convergencia que son insensibles al cambio arbitrario de f_n en un conjunto de medida nula. Así, reemplazamos la convergencia puntual por la convergencia en casi todo punto y la convergencia uniforme por la convergencia casi uniforme. A parte de estos tipos de convergencia, también estudiaremos la convergencia en L^p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y la convergencia en medida.
Así, una vez definidos estos conceptos, analizaremos las relaciones (y daremos una serie de contraejemplos) entre las diversas formas de convergencias en el caso general y también bajo condiciones adicionales (medida finita del espacio o dominación de la sucesión de partida).

Summary

Function spaces, in particular L^p spaces, play a central role in many questions in analysis. The special importance of L^p spaces may be said to derive from the fact that they offer a partial but useful generalization of the fundamental L^2 space of square integrable functions.
In order of logical simplicity, the space L^1 comes first since it occurs already in the description of functions integrable in the Lebesgue sense. Connected to it via duality is the L^∞ space of bounded functions, whose supremum norm carries over from the more familiar space of continuous functions.

The purpose of this paper is to examine the different modes of convergence in a measurable space and to develop the relations between them. This development is based in some simple facts concerning the L^p spaces.
A brief sketch of the chapters follows:

1. The L^p spaces.

Let $(X, \mathscr{A}, \mu)$ be a measure space. $f : X \to \mathbb{C}$ a measurable function in X, $1 \leqslant p < \infty$. We define:

$$\mathscr{L}^p(\mu) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ measurable } ; \int_X |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

and:

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

When $p = 1$ the space $\mathscr{L}^1(\mu)$ consists of all integrable functions on X and $\|f\|_1$ is a seminorm, since it satisfies:

1. $\|f\|_1 \geq 0, \forall f \in \mathscr{L}^1(\mu)$,
2. $\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \, \|f\|_1, \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in \mathscr{L}^1(\mu)$,
3. $\|f + g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1, \forall f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

The problem is that $\|f\|_1 = 0$ does not imply that $f = 0$, but merely $f = 0$ μ almost everywhere, it means: there exists a susbset $M \in \mathscr{A}$ with $\mu(M) = 0$ such as $f(x) = 0$ for all $x \in X \setminus M$. Therefore, the precise definition of a normed space requires introducing the equivalence relation, in which f and g are equivalent if $f = g$ μ a.e.
For this reason, we need to take the quotient space:

Let $N = \{f \in \mathscr{L}^1(\mu);\ f = 0\ \mu\text{−a.e.}\}$. It is easy to prove that N is a subspace of $\mathscr{L}^1(\mu)$. We denote:

$$L^1(\mu) = \mathscr{L}^1(\mu)/N.$$

Then, the map:

$$\|f + N\|_1 = \|f\|_1, \quad f + N \in L^1(\mu)$$

defined over every equivalence class is a norm. Then, $\mathscr{L}^1(\mu)$ is a is a normed vector space and we will use the notation $L^1(\mu)$.

For $1 \leqslant p < \infty$ the proof of the triangle inequality relies on a generalized version of the Cauchy-Schwarz inequality: this is Hölders inequality.

The Hölder and Minkowski inequalities

If the two exponents p and q satisfy $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, and the relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

holds, we say that p and q are **conjugate** or dual exponents. Here, we use the convention $\frac{1}{\infty} = 0$. Note that $p = 1, \infty$ corresponds to $q = \infty, 1$ respectively.

Hölder´s inequality:

Let $(X, \mathscr{A}, \mu)$ be a measure space. Suppose that $1 \leqslant p < \infty$ and $1 \leqslant q < \infty$ are conjugate exponents. If $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ and $g \in \mathscr{L}^q(\mu)$, then $fg \in \mathscr{L}^1(\mu)$ and:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Using Hölder´s inequality, we can prove the triangle inequality in the L^p spaces:

Minkowski´s inequality:

Let $(X, \mathscr{A}, \mu)$ be a measure space. If $f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $p \geqslant 1$, then $f + g \in \mathscr{L}^p(\mu)$ and:

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Then, $\| \ \|_p$ is a seminorm and taking the quotient space in the same way as before, we get $L^p(\mu)$ as a normed vector space, $1 \leqslant p < \infty$.

Completeness of L^p

Let $(X, \mathscr{A}, \mu)$ be a measure space.

- f_n is a Cauchy sequence in $L^p(\mu)$ if, given $\varepsilon > 0$, exists $M(\varepsilon) \geqslant 0$ such as if $m, n \geqslant M(\varepsilon)$, then $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$.

- f_n is a convergent sequence in $L^p(\mu)$ if, given $\varepsilon > 0$, exists $M(\varepsilon) \geqslant 0$ such as if $n \geqslant M(\varepsilon)$, then $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$.

The basic analytic fact is that $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$, is **complete** in the sense that every Cauchy sequence in the norm $\| \ \|_p$ converges to an element in $L^p(\mu)$. A complete normed linear space is ususally called a **Banach space**.
The importance of the completeness is that we are often just given a sequence f_n, and we still need to establish that f_n converges to something. Proving that f_n is a Cauchy sequence is one way to show that the sequence converges, although we do not know in advance what it converges to.

The case $p = \infty$

Let $(X, \mathscr{A}, \mu)$ be a measure space, $f : X \to \mathbb{C}$ a measurable function. The space $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ will be defined as all functions that are **"essentially bounded"** in the following sense:
We take the space $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ to consist of all (equivalence classes of) measurable functions on X, so that there exists a number $\alpha \geqslant 0$ such that $|f(x)| \leqslant \alpha$ μ a.e, i.e. $\mu(x \in X : \; |f(x)| > \alpha) = 0$.

Then, we define $\|f\|_\infty$ to be the infimum of all possible values α satisfying the above inequality. The quantity $\|f\|_\infty$ is called the **essential-supremum** of f.

We define:

$$\mathscr{L}^\infty(\mu) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \;\text{ measurable function } \;; \|f\|_\infty < \infty\}.$$

It is easy to prove that $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ is a vector space and $\| \; \|_\infty$ is a seminorm. Taking the quotient space we have $L^\infty(\mu)$ as a normed vector space.

2. Modes of Convergence.

Let $(X, \mathscr{A}, \mu)$ be a measure space. We consider the vector space:

$$L^0(\mu) := \{f : X \to \mathbb{C};\; f \text{ measurable function}\},$$

and let $(f_n), f \in L^0(\mu)$.

We will analize the following types of convergence:

- (f_n) **converges uniformly** to f if $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

- (f_n) **converges in** $L^\infty(\mu)$ to f if $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

- (f_n) **converges almost uniformly** to f if for every $\varepsilon > 0$ there is a set $E_\varepsilon \in \mathscr{A}$, with $\mu(E_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, such as (f_n) converges uniformly to f on $X \setminus E_\varepsilon$.

- (f_n) **converges almost everywhere** (a.e) to f if there exists a set $A \in X$, with $\mu(A) = 0$, such as $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, for every $x \in X \setminus A$.

- (f_n) **converges in** $L^p(\mu)$ to f, $1 \leqslant p < \infty$, if $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

- (f_n) **converges in measure** to f if for every $\alpha > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : \; |f_n(x) - f(x)| \;\geqslant\; \alpha\}) \;=\; 0.$$

The relationships between the various modes of convergence can be summarized in the diagram below. A solid line means that convergence in the mode at the tail of the arrow implies convergence in the mode at the head. A dashed line means that convergence in the mode at the tail of the arrow implies the existence of a subsequence that converges in the mode at the head of the arrow.

General measure spaces

The first diagram shows the general relationships between the different modes of convergence:

$$
\begin{tikzcd}
 & & a.e & \\
unif. \arrow[r] & L^{\infty} \arrow[r] & almost\ \ unif. \arrow[u] \arrow[r, bend left] & \mu \arrow[ul, dotted] \arrow[l, dotted] \\
 & & L^{p} \arrow[u, dotted] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Looking at the diagram, we realize that if (f_n) is a sequence which converges to a function g $[c]$, where $[c]$ denotes any type of convergence, and (f_n) converges almost everywhere to a function f, then we obtain that $f = g$ a.e.

As a consequence, to study a limit we have to analize the limit almost everywhere, because if it exists it must be that.

We will come now to one important theorem according to which convergence in measure implies L^p convergence under certain additional conditions.

VITALI´S CONVERGENCE THEOREM. *Let $(X, \mathscr{A}, \mu)$ be a measure space and let (f_n) be a sequence in $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. Then, (f_n) converges to f in $L^p(\mu)$ if and only if the following conditions are satisfied:*

1. *(f_n) converges in measure to f.*
2. *For each $\varepsilon > 0$ there exists a set $E_\varepsilon \in \mathscr{A}$, with $\mu(E_\varepsilon) < \infty$, such that if $F \in \mathscr{A}$, and $F \cap E_\varepsilon = \emptyset$, then:*

$$\int_F |f_n|^p \, d\mu \ < \ \varepsilon^p \text{, for every } n \in \mathbb{N}.$$

3. *For each $\varepsilon > 0$ there exists $\delta(\varepsilon) > 0$ such that if $E \in \mathscr{A}$ and $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$, then:*

$$\int_E |f_n|^p \, d\mu \ < \ \varepsilon^p \text{, for every } n \in \mathbb{N}.$$

This theorem is a generalization of the better-known dominated convergence theorem of Henri Lebesgue and it is useful when a dominating function cannot be found for the sequence of functions in question.

We will also give several counterexamples which show that the implications that do not appear in the diagram are not satisfied.

Finite measure spaces

For finite measure spaces, almost everywhere and almost uniform convergence are equivalent. Convergence in measure is the weakest form of convergence since it is implied by the other forms. The following diagram summarizes the relationships between the different modes of convergence for finite measure spaces:

$$
\begin{tikzcd}
 & & a.e \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, bend left] & \\
unif. \arrow[r] & L^{\infty} \arrow[r] \arrow[dr] & almost\ \ unif. \arrow[r, bend left] & \mu \arrow[ul, dotted] \arrow[l, dotted] \\
 & & L^{p} \arrow[u, dotted] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

One fundamental result in finite measure spaces is:

EGOROFF´S THEOREM. *Let $(X, \mathscr{A}, \mu)$ be a measure space. We suppose that $\mu(X) < \infty$ and let (f_n) be a sequence of measurable functions which converges almost everywhere to a measurable function f. Then, (f_n) converges almost uniformly and in measure to f.*

Dominated convergence

If the sequence f_n is uniformly dominated by a function $g \in L^p$, then more relationships exist, as we summarize in the diagram below:

$$\begin{tikzcd}
unif \arrow[r] & L^\infty \arrow[r] & almost\ unif. \arrow[r, bend left] \arrow[d, shift left] \arrow[dr] & \mu \arrow[l, dotted] \arrow[d, shift left] \arrow[dl, dotted, shift left] \\
 & & a.e \arrow[u, shift left] \arrow[r, bend left] \arrow[ur] & L^p \arrow[l, dotted] \arrow[u, shift left] \arrow[ul, dotted, shift left]
\end{tikzcd}$$

Note that the even though we do not require X to be a finite measure space, all the convergence relationships for finite measure spaces continue to hold.

In this setting, almost everywhere and almost uniform convergence are equivalent. Also, L^p convergence and convergence in measure are equivalent.

Índice general

Capítulo 1

Espacios L^p

En este capítulo explicaremos diferentes conceptos y resultados necesarios para el estudio de los espacios L^p. La mayoría de estos resultados han sido tomados de [Rudin], [Bartle] y [Guzmán, Rubio].

Definición 1.0.1. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible en X. Definimos:

$$\mathscr{L}^1(\mu) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ medible } ; \int_X \mid f \mid d\mu < \infty\}, \text{ espacio vectorial sobre } \mathbb{C},$$

y sea:

$$\|f\|_1 := \int_X \mid f \mid d\mu.$$

Notar que $\|f\|_1$ es una semi-norma para $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$, ya que satisface:

1. $\|f\|_1 \geq 0, \forall f \in \mathscr{L}^1(\mu)$,
2. $\|f\|_1 = 0 \Longleftrightarrow f = 0$ μ-a.e,
3. $\|\alpha f\|_1 = \mid \alpha \mid \|f\|_1, \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall f \in \mathscr{L}^1(\mu)$,
4. $\|f + g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1, \forall f, g \in \mathscr{L}^1(\mu)$.

Para conseguir una norma en lugar de una semi-norma, podemos pasar al espacio cociente. Si $f = g$ μ- a.e, entonces $[f] = [g]$, donde $[f]$ denota la clase de equivalencia determinada por f y consiste en el conjunto de todas las funciones que son μ-equivalentes a f, es decir, las funciones que son iguales a f μ-a.e.

Para obtener esto necesitamos introducir algunos conceptos:

Proposición 1.0.2. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, y sea $p : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una seminorma. Entonces $N = \{x \in E, p(x) = 0\}$ es un subespacio de E.*

Demostración. Veamos que se cumplen las dos propiedades para ser un subespacio:

1. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in N$. Utilizando la tercera propiedad de la semi-norma obtenemos que $p(\alpha x) = \mid \alpha \mid p(x) = 0$, con lo que $\alpha x \in N$.

2. Sean $x, y \in N$. Utilizando la desigualdad triangular: $0 \leq p(x+y) \leq p(x) + p(y) = 0$, con lo que $x + y \in N$.

Por tanto N es un subespacio de E. □

Así pues, tiene sentido considerar el espacio cociente E/N, definido como:
Si $\bar{x} \in E/N$, entonces $\bar{x} = x + N = \{y \in E; \quad x - y \in N\}$.

Proposición 1.0.3. *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $p : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ una seminorma. Entonces $\bar{p} : E/N \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $\bar{p}(\bar{x}) = p(x)$ es una norma en E/N.*

Demostración. Veamos primero que la aplicación está bien definida: sean $x, y \in \bar{x}$, es decir, $x - y \in N$. Tenemos que probar que $p(x) = p(y)$:
$p(x) = p(x-y+y) \leqslant p(x-y)+p(y) = p(y)$, ya que $x-y \in N$. De la misma forma $p(y) = p(y-x+x) \leq p(y-x)+p(x) = p(x)$. Por tanto $p(x) = p(y)$.

Ahora veamos que se cumplen las diferentes propiedades de la norma. Sea $\bar{x} \in E/N$, $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. $\bar{p}(\bar{x}) \geq 0$,
2. $\bar{p}(\bar{x}) = 0 \Longleftrightarrow p(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in N \Longleftrightarrow \bar{x} = 0$,
3. $\bar{p}(\alpha\bar{x}) = p(\alpha x) =\mid \alpha \mid p(x) =\mid \alpha \mid \bar{p}(\bar{x})$,
4. $\bar{p}(\bar{x}+\bar{y}) = p(x+y) \leq p(x)+p(y) = \bar{p}(\bar{x})+\bar{p}(\bar{y})$.

Así pues, concluímos que $\bar{p}$ es una norma sobre E/N. □

Volviendo al estudio del espacio $\mathscr{L}^1(\mu)$, consideramos $N = \{f \in \mathscr{L}^1(\mu);\ f = 0 \quad \mu\text{-a.e}\}$ y denotamos:

$$L^1(\mu) = \mathscr{L}^1(\mu)/N.$$

Entonces, si $\bar{f} \in L^1(\mu)$, utilizando la propisición anterior, obtenemos que:

$$\|\bar{f}\|_1 = \|f\|_1 = \textstyle\int_X \mid f \mid d\mu.$$

Por convenio y en lo que sigue utilizaremos como notación $f \in L^1(\mu)$ en lugar de $\bar{f} \in L^1(\mu)$.

Ejemplos de espacios L^1

1. Sea $X = [0,1]$, μ =medida de Lebesgue:

   $$L^1(\mu) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ medible } ; \textstyle\int_0^1 \mid f(x) \mid dx < \infty\}.$$

   Las tres primeras propiedades de la norma se cumplen trivialmente. Veamos que se verifica la desigualdad triangular: sean $f, g \in L^1(\mu)$:

   $$\int_0^1 \mid f(x)+g(x) \mid dx \leq \int_0^1 \mid f(x) \mid dx + \int_0^1 \mid g(x) \mid dx.$$

2. Sea $(X = \mathbb{N}, \mathscr{A} = P(\mathbb{N}), \mu$ =medida de contar) un espacio de medida:

   $$L^1(\mu) = l_1 := \{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{C} : \ \|x\|_1 \ := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}.$$

   Veamos que se cumplen las propiedades de la norma:

   (a) $\|x\|_1 = 0$ sí y solo sí $x = 0$ se satisface trivialmente.

   (b) $\|\lambda x\|_1 = |\lambda|\,\|x\|_1$, para cualquier $x \in l_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

   $$\|\lambda x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|\,|x_n| = |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = |\lambda|\,\|x\|_1 .$$

(c) $\|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$, para cualesquiera $x, y \in l_1$:

$$\|x+y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|x_n| + |y_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| = \|x\|_1 + \|y\|_1 .$$

3. Sea $(X = \{1, 2, \ldots, n\}, \mathscr{A} = P(\mathbb{X}), \mu =$medida de contar$)$ un espacio de medida:

$$L^1(\mu) = l_1^n := \{x = \{x_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n : \ \|x\|_1 \ := \ \sum_{i=1}^{n} |x_i| < \infty\} = \mathbb{C}^n.$$

NOTA. La norma más habitual en $\mathbb{C}^n$ es:

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} , \text{ con } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Consideramos ahora $(X, \mathscr{A}, \mu)$ espacio de medida y sea el conjunto:

$$\{f : X \to \mathbb{C} \ \text{ medible; } \left(\int_X | f |^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} < \infty\}.$$

Por analogía a $\|\cdot\|_2$ es probable que $\left(\int_X | f |^2 \, d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$ sea una norma. Pasamos pues a una definición más general:

Definición 1.0.4. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible en X, $1 \leqslant p < \infty$. Definimos:

$$\mathscr{L}^p(\mu) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \ \text{ medible } ; \ \int_X | f |^p \, d\mu < \infty\},$$

y sea:

$$\|f\|_p := \left(\int_X | f |^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Proposición 1.0.5. $\mathscr{L}^p(\mu)$ *es un espacio vectorial.*

Demostración. Veamos que se cumplen las dos propiedades:

- Si $f \in \mathscr{L}^p(\mu)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ es claro que $\alpha f \in \mathscr{L}^p(\mu)$, ya que:

$$\int_X |\alpha f|^p \ d\mu = |\alpha|^p \int_X |f|^p \ d\mu.$$

- Si $f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)$ entonces $f + g \in \mathscr{L}^p(\mu)$:
Consideramos los conjuntos $A = \{x \in X : |f(x)| \geqslant |g(x)|\}$ y $B = \{x \in X : |f(x)| < |g(x)|\}$.
Entonces:

$$\int_X |f+g|^p \, d\mu = \int_A |f+g|^p \, d\mu + \int_B |f+g|^p \, d\mu \leqslant \int_A |2f|^p \, d\mu + \int_B |2g|^p \, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant 2^p \left(\|f^p\|_1 + \|g^p\|_1\right) < \infty,$$

por lo que $f + g \in \mathscr{L}^p(\mu)$.

Queda probado así que $\mathscr{L}^p(\mu)$ es un espacio vectorial. $\square$

A continuación, explicamos una serie de conceptos y resultados importantes que utilizaremos para probar que $\|f\|_p = (\int_X | f |^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$ es una seminorma:

Definición 1.0.6. En el intervalo $[1,\infty]$ se define una relación binaria simétrica de gran importancia: que dos elementos p y q sean conjugados entre sí significa que:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

interpretando también como válida esta relación en el caso $p=1, q=\infty$ o viceversa.
Los elementos p y q reciben el nombre de **exponentes conjugados**.

Una propiedad importante asociada a esta conjugación es la desigualdad de Hölder que explicaremos más adelante y para la cuál necesitamos el siguiente resultado:

Lema 1.0.7. *Sean $A,B>0$ y p,q exponentes conjugados, con $p>1$. Entonces se verifica:*

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q}.$$

Demostración. Sea α un número real satisfaciendo $0<\alpha<1$ y consideramos la función φ definida para $t>0$ como:

$$\varphi(t)=\alpha t-t^{\alpha}.$$

Es fácil de comprobar que $\varphi'(t)<0$ si $0<t<1$ y $\varphi'(t)>0$ para $t>1$, por lo que $t=1$ corresponde a un mínimo. Así pues, $\varphi(t)\geq\varphi(1)$ y $\varphi(t)=\varphi(1)$ sí y solo sí $t=1$. Llegamos a que:

$$t^{\alpha} \leqslant \alpha t+(1-\alpha), \text{ para } t>0.$$

Tomamos ahora $t=\dfrac{a}{b}$, con $a,b>0$, y multiplicamos por b, obteniendo así la desigualdad:

$$a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leqslant \alpha a+(1-\alpha)b,$$

donde la igualdad se cumple sí y solo sí $a=b$.

Por tanto, si p y q son exponentes conjugados y $\alpha=1/p$, podemos considerar $a=A^p$ y $b=B^q$, con $A,B>0$, obteniendo entonces la desigualdad:

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p}+\frac{B^q}{q},$$

que es lo que queríamos probar. □

En los espacios $\mathscr{L}^p$ la desigualdad triangular viene dada por la desigualdad de Minkowski que probaremos en este apartado como consecuencia de la desigualdad de Hölder:

Desigualdad de Hölder

Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida. Sean $f\in\mathscr{L}^p(\mu)$ y $g\in\mathscr{L}^q(\mu)$, donde $p\geqslant 1$ y $(1/p)+(1/q)=1$. Entonces $fg\in\mathscr{L}^1(\mu)$ y $\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q$.

Demostración. El caso $p=1$ se cumple trivialmente, por lo que consideramos $p>1$. Supongamos que $f\in\mathscr{L}^p(\mu)$ y $g\in\mathscr{L}^q(\mu)$. Si $\|f\|_p=0$, entonces $f=0$ μ-a.e, lo que implica que $fg=0$ μ-a.e y en consecuencia $\|fg\|_1=0$. Análogamente si $\|g\|_q=0$.

Supongamos pues que $\|f\|_p\neq 0$ y $\|g\|_q\neq 0$. Notar que como $f\in\mathscr{L}^p(\mu)$ y $g\in\mathscr{L}^q(\mu)$ se verifica que $|f(x)|<\infty$ μ-a.e y $|g(x)|<\infty$ μ-a.e. El producto fg es medible y si tomamos en la desigualdad anterior $A=\dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ y $B=\dfrac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ obtenemos que:

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\,\|g\|_q} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p\,\|f\|_p^p}+\frac{|g(x)|^q}{q\,\|g\|_q^q}\ \ \mu\text{-a.e.}$$

Los dos términos de la derecha son integrables, por lo que fg es integrable. Integrando la desigualdad anterior:

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \ \|g\|_q} \ \leqslant \ \frac{1}{p} \ + \ \frac{1}{q} \ = \ 1,$$

obteniendo así la desigualdad de Hölder. □

Desigualdad de Minkowski

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $f, g \in \mathscr{L}^p(\mu)$, $p \geqslant 1$, entonces $f+g \in \mathscr{L}^p(\mu)$ y:

$$\|f+g\|_p \ \leqslant \ \|f\|_p \ + \ \|g\|_p .$$

Demostración. El caso $p = 1$ es trivial, así que supongamos $p > 1$. La suma $f+g$ es evidentemente medible y como:

$$|f+g|^p \ \leqslant (2 \sup\{|f| \ , \ |g|\})^p \ \leqslant \ 2^p \{|f|^p \ + \ |g|^p\},$$

obtenemos que $f+g \in \mathscr{L}^p(\mu)$. Además:

$$|f+g|^p \ = \ |f+g|\,|f+g|^{p-1} \ \leqslant \ |f|\,|f+g|^{p-1} \ + \ |g|\,|f+g|^{p-1} . \tag{1.1}$$

Teniendo en cuenta que $f+g \in \mathscr{L}^p(\mu)$, se tiene que $|f+g|^p \in \mathscr{L}^1(\mu)$, y como $p = (p-1)q$, llegamos a que $|f+g|^{p-1} \in \mathscr{L}^q(\mu)$. Por tanto podemos aplicar la desigualdad de Hölder, obteniendo así:

$$\int_X |f| \ |f+g|^{p-1} \ d\mu \ \leqslant \ \|f\|_p \ \left(\int_X \ |f+g|^{(p-1)q} \ d\mu \right)^{1/q} \ = \ \|f\|_p \ \|f+g\|_p^{p/q} .$$

De la misma forma:

$$\int_X |g| \ |f+g|^{p-1} \ d\mu \ \leqslant \ \|g\|_p \ \|f+g\|_p^{p/q} .$$

Aplicando las dos últimas desigualdades en la ecuación (1.1) obtenemos que:

$$\|f+g\|_p^p \ \leqslant \ \|f\|_p \ \|f+g\|_p^{p/q} \ + \ \|g\|_p \ \|f+g\|_p^{p/q} \ = \ \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right) \ \|f+g\|_p^{p/q} .$$

Si $A = \|f+g\|_p = 0$, la desigualdad de Minkowski es trivial. Si $A \neq 0$, podemos dividir la última desigualdad por $A^{p/q}$, y como $p - p/q = 1$ deducimos que:

$$\|f+g\|_p \ \leqslant \ \|f\|_p \ + \ \|g\|_p$$

como queríamos probar. □

Una vez verificada la desigualdad triangular tenemos que $\|f\|_p$ es una seminorma. Así, solo queda pasar al espacio cociente para poder conseguir una norma en los espacios $\mathscr{L}^p(\mu)$. Utilizamos el mismo procedimiento que antes:

Sea $N = \{f \in \mathscr{L}^p(\mu); \ f = 0 \ \ \mu\text{-a.e}\}$ y denotamos:

$$L^p(\mu) = \mathscr{L}^p(\mu)/N \ , 1 < p < \infty.$$

$L^p(\mu)$ es un espacio vectorial normado cuya norma viene dada por:

$$\|f\|_p = (\textstyle\int_X \mid f \mid^p d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

Ejemplos de espacios $L^p(\mu)$

Sea $(X=\mathbb{N}, \mathscr{A}=P(\mathbb{N}), \mu=$medida de contar$)$ un espacio de medida:

1. $l_p=\{x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{C}:\ \|x\|_p\ =\ \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\}$, $1\leqslant p<\infty$.

2. $l_p^n=\{x\in\mathbb{C}^n:\ \|x\|_p\ =\ \left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty\}\ =\mathbb{C}^n$, $1\leqslant p<\infty$.

El siguiente resultado, tomado de [Bartle], p.59, muestra la completitud de los espacios L^p:

Teorema 1.0.8. *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida. Entonces $L^p(\mu)$, $1\leqslant p<\infty$, es un espacio de Banach.*

Demostración. Ya ha sido demostrado anteriormente que L^p es un espacio vectorial normado. Pasamos pues a probar su completitud. Sea $(\bar{f}_n)$ una sucesión de Cauchy relativa a la norma $\|\ \|_p$ y sea (f_n) representantes de $(\bar{f}_n)$. Por tanto, dado $\varepsilon>0$, existe un $M(\varepsilon)$ tal que si $m,n\geqslant M(\varepsilon)$ se tiene que $\|f_m-f_n\|_p<\varepsilon$, es decir:

$$\int_X |f_m-f_n|^p\ d\mu\ =\ \|f_m-f_n\|_p^p\ <\ \varepsilon^p.$$

Tomando $\varepsilon=2^{-k}$, $k\in\mathbb{N}$, podemos encontrar una subsucesión (g_k) de (f_n) tal que $\|g_{k+1}-g_k\|_p<2^{-k}$. Definimos g como:

$$g(x)=|g_1(x)|\ +\ \sum_{k=1}^{\infty}|g_{k+1}(x)-g_k(x)|, \tag{1.2}$$

por lo que g es medible. Aplicando el lema de Fatou (ver Anexo, Lema 0.13) obtenemos:

$$\int_X |g|^p\ d\mu\ \leqslant\ \liminf_{n\to\infty}\int_X\left(|g_1|\ +\ \sum_{k=1}^{n}|g_{k+1}-g_k|\right)^p\ d\mu.$$

Tomamos la raíz p-ésima y aplicamos la desigualdad de Minkowski:

$$\left(\int_X |g|^p\ d\mu\right)^{1/p}\ \leqslant\ \liminf_{n\to\infty}\left(\|g_1\|_p\ +\ \sum_{k=1}^{n}\|g_{k+1}-g_k\|_p\right)\ \leqslant\ \|g_1\|_p\ +\ 1.$$

Así pues, si $E\ =\ \{x\in X:\ g(x)<+\infty\}$, entonces $E\in\mathscr{A}$ y $\mu(X\setminus E)=0$. Por tanto, las series en (1.2) convergen en casi todo punto y $g\chi_E$ pertenece a $L^p(\mu)$.

Así podemos definir f como:

$$f(x)=\begin{cases} g_1(x)\ +\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}(g_{k+1}(x)-g_k(x)), & si\quad x\in E,\\[2ex] 0, & si\quad x\notin E.\end{cases}$$

Observar que f es medible y como la serie es telescópica, se tiene que $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)$, $\forall x\in E$.

Por otro lado, tenemos que $|g_k|\ \leqslant\ |g_1|+\sum\limits_{j=1}^{k-1}\left|g_{j+1}-g_j\right|\ \leqslant\ g$, lo que implica que $|g_k|^p\leqslant g^p$. Aplicando el Teorema de la Convergencia Dominada (ver Anexo, Teorema 0.14):

$$\int_X g^p\ d\mu\ \geqslant\ \lim_{k\to\infty}\int_X |g_k|^p\ d\mu=\int_X\lim_{k\to\infty}|g_k|^p\ d\mu=\int_X |f|^p\ d\mu.$$

Además, $g^p \in L^1(\mu)$, es decir, $\int_X g^p \, d\mu < \infty$, de lo que deducimos que $f \in L^p$.

Veamos ahora que (f_n) converge a f en $L^p(\mu)$. Así, si $m \geqslant M(\varepsilon)$ y k es suficientemente grande, entonces:

$$\int_X |f_m - g_k|^p \, d\mu \; < \; \varepsilon^p.$$

Por tanto, aplicando el Lema de Fatou, concluímos que:

$$\int_X |f_m - f|^p \, d\mu \; \leqslant \; \liminf_{k\to\infty} \int_X |f_m - g_k|^p \, d\mu \; \leqslant \; \varepsilon^p,$$

para cualquier $m \geqslant M(\varepsilon)$. Queda así probado que la sucesión (f_n) converge a f en la norma de L^p. $\square$

Corolario 1.0.9. *Si (f_n) converge a f en $L^p(\mu)$, entonces existe una subsucesión (g_n) tal que (g_n) converge a f μ-a.e.*

Demostración. Se deduce inmediatamente del teorema anterior. $\square$

1.1 Espacios $\mathscr{L}^\infty$

Definición 1.1.1. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \to \mathbb{C}$ medible. Diremos que f es **esencialmente acotada** en X si existe $\alpha \geqslant 0$ tal que $|f(x)| \leqslant \alpha$ μ-a. e., es decir, $\mu(x \in X : |f(x)| > \alpha) = 0$.

El número α se llama **cota superior esencial**. Para estas funciones, el **supremo esencial** se define como el ínfimo de las cotas esenciales y se denota también $\|f\|_\infty$, es decir, denotando como S el conjunto de las cotas esenciales:

$$\|f\|_\infty := \text{ínf } S.$$

Como notación escribiremos que $\|f\|_\infty = \infty$ en el caso en que $S = \emptyset$.

Proposición 1.1.2. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \to \mathbb{C}$ medible y $S \neq \emptyset$. Entonces $\|f\|_\infty \in S$ y por lo tanto $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ μ-a.e.*

Demostración. Por la definición de $\|f\|_\infty$ sabemos que $\forall k \in \mathbb{N}$ se verifica que $\|f\|_\infty + \frac{1}{k} \in S$, es decir:

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \frac{1}{k} \;\; \mu\text{-a.e.}$$

Por tanto, existe un conjunto $N_k \in \mathscr{A}$, con $\mu(N_k) = 0$, tal que $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \dfrac{1}{k}$, $\forall x \in X \setminus N_k$.

Tomando $N = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$ obtenemos que $0 \leqslant \mu(N) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} N_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(N_k) = 0$, por lo que $\mu(N) = 0$.

Así pues, para $x \in X \setminus N$ tenemos que $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \dfrac{1}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Tomando el límite cuando k tiende a infinito, obtenemos que:

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \, , \forall x \in X \setminus N,$$

de lo que deducimos que $\|f\|_\infty \in S$. Así, $\|f\|_\infty$ es la mínima cota esencial de f. $\square$

Definición 1.1.3. *Definimos el espacio $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ como:*

$$\mathscr{L}^\infty(\mu) := \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \quad \textit{medible} \quad ; \; \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Proposición 1.1.4. $\| \; \|_\infty$ *es una seminorma y $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ es un espacio vectorial.*

Demostración. Vamos a comprobar primero que $\|f\|_\infty$ es una seminorma. Para ello utilizaremos la proposición anterior:

1. Sea $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$: Es claro que $\|f\|_\infty = \text{ínf}\, S \geqslant 0$.
   Por otro lado: $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow |f(x)| \leqslant 0$ μ-a.e $\Leftrightarrow f = 0$ μ-a.e.
2. Sean $f, g \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$: $|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ μ-a.e. Esto quiere decir que $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ es una cota esencial de $|f(x)+g(x)|$, por lo que $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

   Además, como $f, g \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ es claro que $\|f\|_\infty < \infty$ y $\|g\|_\infty < \infty$, de lo que se sigue que $\|f+g\|_\infty < \infty$, es decir, $f+g \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$.
3. Sea $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Como $|\alpha f(x)| = |\alpha|\,|f(x)| \leqslant |\alpha|\,\|f\|_\infty$ μ-a.e., tenemos que $\|\alpha f\|_\infty \leqslant |\alpha|\ \|f\|_\infty$.

   Por otra parte, $|f(x)| = \dfrac{1}{|\alpha|}\ |\alpha f(x)| \leqslant \dfrac{1}{|\alpha|}\ \|\alpha f\|_\infty$ μ-a.e., por lo que $\|f\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{|\alpha|}\ \|\alpha f\|_\infty$, luego $\|\alpha f\|_\infty \geqslant |\alpha|\ \|f\|_\infty$. Así, llegamos a que $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\ \|f\|_\infty$.

   Además, como $f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$ es claro que $\|f\|_\infty < \infty$, lo que implica que $\|\alpha f\|_\infty < \infty$, es decir, $\alpha f \in \mathscr{L}^\infty(\mu)$.

Concluímos pues que $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ es un espacio vectorial y $\|\ \|_\infty$ es una seminorma. □

Una vez probado que $\|\ \|_\infty$ es una seminorma, pasamos al espacio cociente para poder conseguir una norma en los espacios $\mathscr{L}^\infty(\mu)$. Utilizamos el mismo procedimiento que antes:

Sea $N = \{f \in \mathscr{L}^\infty(\mu);\ f = 0\ \ \mu\text{-a.e}\}$ y denotamos:

$$L^\infty(\mu) = \mathscr{L}^\infty(\mu)/N.$$

$L^\infty(\mu)$ es un espacio vectorial normado cuya norma viene dada por:

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\, S,$$

donde S es el conjunto de las cotas esenciales.

Ejemplos de espacios L^∞

Sea $(X = \mathbb{N}, \mathscr{A} = P(\mathbb{N}), \mu =$medida de contar$)$ un espacio de medida:

$$l^\infty = \{x \in \mathbb{C}^n\ :\ \|x\|_\infty\ =\ \sup\{|x_n| :\ n \in \mathbb{N}\} < \infty\}.$$

Teorema 1.1.5. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. $(L^\infty, \|\ \|_\infty)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Ya ha sido demostrado que $L^\infty(\mu)$ es un espacio vectorial normado. Pasamos pues a probar su completitud. Sea $(\bar{f}_n)$ una sucesión de Cauchy relativa a la norma $\|\ \|_\infty$ y sea (f_n) representantes de $(\bar{f}_n)$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geqslant n_0$ se tiene que $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

Por otro lado, $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty$ μ-a.e, luego existe un conjunto $A_{n,m}$ con $\mu(A_{n,m}) = 0$ tal que $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty$ $\forall x \in X \setminus A_{n,m}$, por lo que tomando $A = \bigcup\limits_{m,n} A_{m,n}$ es claro que $\mu(A) = 0$.
Notar que si $x \notin A$ se verifica que $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon,\ \forall n, m \geqslant n_0$, lo que implica que $f_n(x)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$. Así, como $\mathbb{C}$ es un espacio completo sabemos que $f_n(x)$ también es una sucesión convergente en $\mathbb{C}$, por lo que $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Definimos por tanto $f : X \to \mathbb{C}$ medible dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & si \quad x \in X \setminus A, \\ \\ 0, & si \quad x \in A. \end{cases}$$

Por tanto, si $x \notin A$ y $n \geqslant n_0$ obtenemos:

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|\lim_{m\to\infty} f_m(x) - f_n(x)\right| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \lim_{m\to\infty} \|f_m(x) - f_n(x)\|_\infty < \varepsilon.$$

Por tanto ε es cota esencial de $f - f_n$ $\forall n \geqslant n_0$, de modo que $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon$.
Así pues, $f - f_n \in L^\infty(\mu)$, lo que implica que $f \in L^\infty(\mu)$ y f_n converge a f en $L^\infty(\mu)$, probando así que $L^\infty(\mu)$ es espacio de Banach. □

Proposición 1.1.6. *Si $f_n \to f$ en $L^\infty(\mu)$, entonces $f_n \to f$ μ-a.e.*

Demostración. Supongamos que (f_n) converge a f en $L^\infty(\mu)$, es decir, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
Utilizando la proposición 1.2.2 se tiene que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty \ \mu\text{-a.e},$$

por lo que f_n converge a f μ-a.e. □

Proposición 1.1.7. *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces:*

$$f \in L^\infty(\mu) \ \Leftrightarrow \ f \ \textit{acotada}.$$

Además, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \ , x \in \Omega\}$.

Demostración. Supongamos que f está acotada. Entonces $M = \sup\{|f(x)|, x \in \Omega\} < \infty$, lo que implica que $\|f\|_\infty \leqslant M < \infty$, es decir, $f \in L^\infty(\mu)$.

Por otro lado, supongamos que f no está acotada y veamos que $f \notin L^\infty$. Como f no está acotada existe $N \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \Omega$ tal que $|f(x_0)| > N$. Además, f es continua, luego existe $B(x_0, \varepsilon)$ entorno de x_0 tal que $|f(x)| > N$, $\forall x \in B(x_0, \varepsilon)$. Teniendo en cuenta que $m(B(x_0, \varepsilon)) > 0$ llegamos a que N no es cota esencial de f. Por tanto $f \notin L^\infty$.

Para terminar, supongamos que $\|f\|_\infty \lneqq M = \sup\{|f(x)|, x \in \Omega\}$. Por la definición de supremo existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\|f\|_\infty < |f(x_0)|$. Por continuidad sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $\|f\|_\infty < |f(x)|$, $\forall x \in B(x_0, \delta)$, por lo que $\|f\|_\infty$ no es cota esencial, llegando a una contradicción. Así pues, concluímos que $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \ , x \in \Omega\}$. □

1.2 Relaciones entre espacios L^p

En esta sección analizaremos las relaciones de contenido que se dan entre los diferentes espacios estudiados a lo largo del capítulo:

Proposición 1.2.1. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $\mu(X) < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant p \leqslant \infty$, entonces:*

$$L^\infty(\mu) \subseteq L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu) \subseteq L^1(\mu).$$

Demostración. Sea $f \in L^\infty(\mu)$. Como $\|f\|_\infty$ es la mínima cota esencial de f, resulta que:

$$\textstyle\int_X |f|^p \ d\mu \leqslant \int_X \|f\|_\infty^p \ d\mu = \mu(X) \, \|f\|_\infty^p < \infty,$$

por lo que $f \in L^p(\mu)$ y queda probado el primer contenido.

Supongamos ahora que $f \in L^p(\mu)$ y sea r tal que $1 \leqslant r \leqslant p$. Consideramos los conjuntos:

$$A = \{x \in X : |f(x)| \leqslant 1\}, \; B = \{x \in X : |f(x)| > 1\}.$$

Obtenemos así:

$$\int_X |f|^r \, d\mu = \int_A |f|^r \, d\mu \; + \; \int_B |f|^r \, d\mu \; \leqslant \; \int_A 1 \, d\mu \; + \; \int_B |f|^p \, d\mu \leqslant \mu(A) + \|f\|_p^p < \infty,$$

lo que prueba que $f \in L^r(\mu)$.

Por último, supongamos que $r < p$. Entonces es claro que $p/r > 1$ y aplicando la desigualdad de Hölder:

$$\int_X |f(x)|^r \, d\mu \; \leqslant \; \left(\int_X |f(x)|^{r\frac{p}{r}} \, d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_X 1^{\frac{p}{p-r}} \, d\mu \right)^{\frac{p-r}{p}}.$$

Por tanto, $\|f\|_r = \left(\int_X |f(x)|^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \mu(X)^{\frac{p-r}{rp}} = \|f\|_p \; \mu(X)^{\frac{p-r}{rp}}$.

Cuando $p = \infty$ se tiene, análogamente:

$$\|f\|_r^r = \int_X |f(x)|^r \, d\mu \; \leqslant \; \int_X \|f\|_\infty^r \, d\mu = \mu(X) \, \|f\|_\infty^r.$$

Notar que en el caso $\mu(X) = 1$ se tiene que $\|f\|_r \leqslant \|f\|_p$. □

Ejemplos

Consideramos el espacio de medida $(X = [0,1], \mathscr{A} = B([0,1]), dx)$. Veamos algunos ejemplos en los que el contenido es estricto entre los espacios L^p:

- $L^\infty \subsetneqq L^p$:
  Sea $f(x) = \log x$. Es claro que $f \in L^p(\mu)$ y $f \notin L^\infty(\mu)$.
- $L^p \subsetneqq L^r$, $1 \leqslant r < p$:
  Sea $f(x) = \frac{1}{x^{1/p}}$. Es claro que $f \in L^r(\mu)$ y que $f \notin L^p(\mu)$ ya que:

$$\int_0^1 |f(x)|^r \, d\mu = \int_0^1 \frac{1}{x^{r/p}} \, dx < \infty, \quad \int_0^1 |f(x)|^p \, d\mu = \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx = \infty.$$

Proposición 1.2.2. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $1 \leqslant r \leqslant p \leqslant \infty$, entonces:*

$$l^1 \subseteq l^r \subseteq l^p \subseteq l^\infty.$$

Demostración. Sea $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^p$. Entonces se verifica $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, lo que implica:

$$\lim_{n \to \infty} |x_n|^p = 0 \; \Rightarrow \; \lim_{n \to \infty} |x_n| = 0.$$

Por tanto , como $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\}$ es claro que $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$, es decir, $l^p \subseteq l^\infty$.
Además, observar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$|x_n| = (|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p,$$

lo que implica que $\|x\|_\infty = \sup\{|x_n|, n \in \mathbb{N}\} \leqslant \|x\|_p$.

Por otro lado, si $1 \leqslant r \leqslant p$:

$$\|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r \, |x_n|^{p-r} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r \, \|x\|_\infty^{p-r} = \|x\|_r^r \, \|x\|_\infty^{p-r} \leqslant \|x\|_r^r \, \|x\|_r^{p-r} = \|x\|_r^p,$$

por lo que $l^r \subseteq l^p$. □

1.3 Más propiedades de los espacios L^p

En esta sección demostraremos una serie de resultados importantes de los espacios L^p, que serán útiles para el estudio de los tipos de convergencia en el siguiente capítulo.

Proposición 1.3.1. *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida, $f : X \to \mathbb{C}$ medible. Si $f \in L^p(\mu),\ 1 < p < \infty$, entonces el conjunto $E = \{x \in X :\ f(x) \neq 0\}$ es σ- finito.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea el conjunto $E_n = \{x \in X :\ |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\}$. Entonces tenemos que:

$$\{x \in X :\ f(x) \neq 0\} \ = \ \{x \in X :\ |f(x)| > 0\} \ = \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n^p}\mu(E_n) \ \leqslant \ \displaystyle\int_{E_n} |f|^p \ d\mu \ \leqslant \ \int_X |f|^p \ d\mu < \infty.$
Por tanto, $\mu(E_n) < \infty$ y $\{x \in X :\ f(x) \neq 0\}$ es σ- finito. □

Proposición 1.3.2. *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida, $f \in L^p(\mu),\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$ y sea $E_n = \{x \in X;\ |f(x)| \geqslant n\}$. Entonces se verifica:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0.$$

Demostración. Para $1 \leqslant p < \infty$, sea $f \in L^p(\mu)$. Notar que:

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu \ \geqslant \ \int_{En} |f(x)|^p \, d\mu \ \geqslant \ \int_{En} n^p d\mu \ = \ n^p \ \mu(En).$$

Por tanto, obtenemos que $0 \ \leq \ \mu(E_n) \ \leq \ \dfrac{1}{n^p}\displaystyle\int_X |f(x)|^p \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Por otro lado, para $p = \infty$, sea $f \in L^\infty(\mu)$, es decir, $\|f\|_\infty < \infty$. Como f es esencialmente acotada se verifica que $\mu(E_n) = 0,\ \forall n \geqslant n_0$. □

Proposición 1.3.3. *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida, $f \in L^p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$ y sea $E_n = \{x \in X;\ |f(x)| \geqslant n\}$. Entonces se verifica:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n)n^p = 0.$$

Demostración. Sea $f \in L^p,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Igual que antes:

$$\int_X |f(x)|^p \, d\mu \ \geqslant \ \int_{En} |f(x)|^p \, d\mu \ \geqslant \ \int_{En} n^p d\mu \ = \ n^p \ \mu(En).$$

Sea ahora $\upsilon(E) = \displaystyle\int_E |f(x)|^p \, d\mu$, $\forall E \in \mathscr{A}$. Como $f \in L^p$, es claro que $\upsilon(E)$ tiene medida finita. Además, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X;\ |f(x)| \geqslant n\} = \{x \in X;\ f = \infty\}$. Teniendo en cuenta que $f < \infty$ μ-a.e. por estar en $L^p(\mu)$, obtenemos que $\mu\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$. Así pues, utilizando la Proposición 0.9 del Anexo:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} |f(x)|^p \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \upsilon(E_n) = \upsilon(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} |f(x)|^p \, d\mu = 0.$$

Utilizando la primera desigualdad de la demostración obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)n^p = 0$, como queríamos demostrar. □

A continuación demostramos un resultado importante que establece la conexión entre la norma p de una función $f \in L^p$ y su respectiva función de distribución:

Proposición 1.3.4. *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida σ-finito y $f\in L^p(\mu)$, $1\leqslant p<\infty$. Se define la función de distribución de f como: $w_f(t)=\mu\{x\in X:|f(x)|>t\}$, donde $t\geqslant 0$. Entonces se verifica que:*

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \int_0^\infty pt^{p-1}w_f(t)\, dt.$$

Demostración. Para $1\leqslant p<\infty$ y $x\in X$, aplicando el teorema de Fubini (ver Anexo, teorema 0.16), se tiene que:

$$\int_0^\infty pt^{p-1}w_f(t)\, dt \;=\; \int_0^\infty pt^{p-1}\left[\int_X \chi_{\{x;|f(x)|>t\}}(x)\, d\mu\right] dt = \text{(Fubini)} =$$

$$= \int_X \left[\int_0^\infty \chi_{\{x;|f(x)|>t\}}(x)\; pt^{p-1}\, dt\right] d\mu = \int_X \left[\int_0^\infty \chi_{[0,|f(x)|]}(t) pt^{p-1} dt\right] d\mu = \int_X \left[\int_0^{|f(x)|} pt^{p-1} dt\right] d\mu \; =$$

$$= \int_X |f(x)|^p \, d\mu,$$

obteniendo así la igualdad del enunciado. □

Pasamos a demostrar dos resultados que serán utilizados para demostrar el teorema de Vitali en el siguiente capítulo.

Proposición 1.3.5. *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida y sea $f\in L^p(\mu)$. Para cada $\varepsilon>0$ existe un conjunto $E_\varepsilon\in\mathscr{A}$ con $\mu(E_\varepsilon)<\infty$ tal que si $F\in\mathscr{A}$, y $F\cap E_\varepsilon=\emptyset$, entonces:*

$$\int_F |f|^p \, d\mu \;<\; \varepsilon^p.$$

Demostración. Como $f\in L^p(\mu)$, es claro que $|f|^p\in L^1(\mu)$, por lo que podemos definir la siguiente medida (ver Anexo, proposición 0.12):

$$\beta(E)=\int_E |f|^p \, d\mu,\;\; E\in\mathscr{A}.$$

Consideramos los conjuntos: $X_k=\{x\in X;\ |f(x)|^p\ >\dfrac{1}{k}\},\;\; k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\;\; ,X_0=\{x\in X;\ f(x)=0\}$.

Se ve inmediatamente que $X\setminus X_0=\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$ y que $X_k\subseteq X_{k+1}$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Además:

$$\mu(X_k)=\int_{X_k} 1\, d\mu \;\leqslant\; k\int_{X_k} |f(x)|^p\, d\mu \;\leqslant\; k\int_X |f(x)|^p\, d\mu \;=\; k\|f\|_p^p<\infty.$$

Por otro lado, utilizando la Proposición 0.9 del Anexo: $\beta(X)=\beta(X\setminus X_0)=\beta(\bigcup_{k=1}^{\infty} X_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\beta(X_k)$.

Tenemos que probar que $\beta(F)=\int_F |f|^p\, d\mu<\varepsilon^p$:

- Si $\beta(X)=0$ es obvio que $\beta(F)=0$ para todo $F\subseteq X$.
- Si $\beta(X)\neq 0$, tiene que ser $\beta(X)>0$. Como $\beta(X)=\lim\limits_{k\to\infty}\beta(X_k)$ sabemos que existe k_0 tal que $\beta(X_{k_0})>\beta(X)-\varepsilon^p$, es decir, $\beta(X)-\beta(X_{k_0})<\varepsilon^p$.
  Por tanto, hemos demostrado que dado $\varepsilon>0$ existe $X_{k_0}\in\mathscr{A}$, con $\mu(X_{k_0})<\infty$, tal que $\beta(X\setminus X_{k_0})<\varepsilon^p$. Así pues, si $F\in\mathscr{A}$ es tal que $F\cap X_{k_0}=\emptyset$, se tiene que $F\subset X\setminus X_{k_0}$ y, en consecuencia, $\beta(F)<\beta(X\setminus X_{k_0})<\varepsilon^p$, como queríamos probar.

□

Proposición 1.3.6. *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida y sea $f\in L^1(\mu)$. Para cada $\varepsilon>0$ existe $\delta(\varepsilon)>0$, tal que si $E\in\mathscr{A}$ y $\mu(E)<\delta(\varepsilon)$, entonces:*

$$\left|\int_E f\,d\mu\right| \leqslant \int_E |f|\,d\mu \;<\; \varepsilon\,.$$

Demostración. Vamos a probarlo para diferentes tipos de funciones:

1. Sea $A \in \mathscr{A}$ y supongamos que $f = \chi_A$. Entonces:

$$\int_E |f|\,d\mu = \mu(E\cap A) \leqslant \mu(E) < \delta.$$

   Tomando $\delta = \varepsilon$ se tiene el resultado.

2. Sean $A_i \in \mathscr{A},\ i = 1,\dots,n$, y supongamos que $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\chi_{A_i},\ a_i \geqslant 0$. Entonces:

$$\int_E |f|\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mu(E\cap A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mu(E) < \delta \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

   Tomando $\delta = \varepsilon / \sum_{i=1}^{n} a_i$ se tiene el resultado.

3. Sea f una función integrable no negativa. Entonces, por el Teorema 0.11 del Anexo, existe una sucesión de funciones simples medibles no negativas s_n tal que para cada $x \in X$ se tiene que:

$$0 \leqslant s_1(x) \leqslant s_2(x) \leqslant \ldots \leqslant s_n(x) \leqslant f(x) \;\text{ y }\; \lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x).$$

   Como $f \in L^1(\mu)$, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada para obtener que $\lim_{n\to\infty}\int_X (f-s_n)\,d\mu = 0$. Por tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n\to\infty}\int_X (f-s_n)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n \geqslant n_0$.
   Además, por el apartado 2 sabemos que para s_{n_0} existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, con $E \in \mathscr{A}$, entonces $\int_E s_{n_0}\,d\mu = \int_E |s_{n_0}|\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. Así pues:

$$\int_E |f|\,d\mu \;=\; \int_E f\,d\mu \;=\; \int_E f - s_{n_0}\,d\mu + \int_E s_{n_0}\,d\mu \;<\; 2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4. Sea $f \in L^1(\mu)$. Entonces es claro que $|f| \in L^1(\mu)$. Por el apartado 3 sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$, para $E \in \mathscr{A}$, entonces $\int_E |f|\,d\mu < \varepsilon$.

Queda probado entonces que para cualquier función perteneciente a $L^1(\mu)$ se satisface la desigualdad del enunciado. $\square$

Capítulo 2

Tipos de convergencia

En este capítulo mencionaremos los tipos de convergencia de una sucesión de funciones medibles en un espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$, y estudiaremos las relaciones entre los distintos modos de convergencia. La mayor parte de los resultados que aparecen en este capítulo han sido tomados de [Bartle], [Munroe], [Wheeden, Zygmund] y [Guzmán, Rubio].

2.1 Nociones básicas

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Consideramos el espacio vectorial:

$$L^0(\mu) = \{f : X \to \mathbb{C};\ f \text{ medible}\},$$

y sean (f_n) y $f \in L^0(\mu)$.

Definición 2.1.1. La sucesión (f_n) **converge uniformemente** a f si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ y $x \in X$, entonces $|f_n(x) - f(x)| \; < \; \varepsilon$.
Equivalentemente, (f_n) converge uniformemente a f si se verifica:

$$\operatorname*{lím}_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Definición 2.1.2. Sean (f_n) y f tal que $f_n - f \in L^\infty(\mu)$. Diremos que (f_n) **converge en** $L^\infty(\mu)$ a f si se verifica que:

$$\operatorname*{lím}_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Por ejemplo, si consideramos $f_n(x) = x$ y $f(x) = x$ en el espacio $(\mathbb{R}, dx)$, es obvio que (f_n) converge a f en L^∞.

Proposición 2.1.3. *Sean $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ funciones medibles. Entonces, $\operatorname*{lím}_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ sí y solo sí existe $A \in X$, con $\mu(A) = 0$ tal que (f_n) converge a f uniformemente en $X \setminus A$.*

Demostración. Supongamos que $\operatorname*{lím}_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Por definición de $\| \ \|_\infty$ sabemos que existe $A_n \in X$, con $\mu(A_n) = 0$, tal que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \; \|f_n(x) - f(x)\|_\infty$, con $x \in X \setminus A_n$.
Consideramos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y es obvio que $\mu(A) = 0$. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\sup_{x \,\in\, X\setminus A} |f_n(x) - f(x)| \; \leqslant \; \|f_n(x) - f(x)\|_\infty$, y como $\operatorname*{lím}_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$ concluimos que (f_n) converge uniformemente a f en $X \setminus A$.

Por otro lado, supongamos que existe $A \in X$, con $\mu(A) = 0$ tal que (f_n) converge a f uniformemente en $X \setminus A$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X\setminus A} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Además, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup\limits_{x\in X\setminus A} |f_n(x) - f(x)|$ μ-a.e, luego $\sup\limits_{x\in X\setminus A} |f_n(x) - f(x)|$ es una cota esencial de $|f_n(x) - f(x)|$. Por tanto, $\|f_n - f\|_\infty \leqslant \sup\limits_{x\in X\setminus A} |f_n(x) - f(x)|$, de lo que deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. $\square$

Definición 2.1.4. La sucesión (f_n) **converge casi uniformemente** a f si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $E_\varepsilon \in \mathscr{A}$, con $\mu(E_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, tal que (f_n) converge uniformemente a f en $X \setminus E_\varepsilon$.

La sucesión (f_n) se dice que es una **secuencia de Cauchy casi uniforme** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $E_\varepsilon \in \mathscr{A}$, con $\mu(E_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, tal que (f_n) es una sucesión de Cauchy uniforme en $X \setminus E_\varepsilon$.

Definición 2.1.5. La sucesión (f_n) **converge en casi todo punto** (a.e) a f si existe un conjunto $A \in X$, con $\mu(A) = 0$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, para todo $x \in X \setminus A$.

Es obvio que la convergencia uniforme implica la convergencia a.e.

Definición 2.1.6. Sean $f_n, f \in L^p(\mu)$:
La sucesión (f_n) **converge en** $L^p(\mu)$ a f, $1 \leqslant p < \infty$, si se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

En este caso, también podemos decir que la secuencia (f_n) converge a f en media (de orden p).

La sucesión (f_n) se dice de **Cauchy en** $L^p(\mu)$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geqslant n_0$, entonces:

$$\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Se prueba fácilmente que si (f_n) converge a f en $L^p(\mu)$, entonces (f_n) es una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$.

Por último vamos a definir otro tipo de convergencia que es a menudo de interés:

Definición 2.1.7. La sucesión (f_n) se dice que **converge en medida** a f si para cada $\alpha > 0$ se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha\}) = 0.$$

La sucesión (f_n) se dice de **Cauchy en medida** si para cada $\alpha > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geqslant n_0$ se verifica:

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geqslant \alpha\}) < \varepsilon.$$

Cabe destacar que si (f_n) converge uniformemente a f, el conjunto $\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha\}$ es vacío para n suficientemente grande. Por tanto la convergencia uniforme implica la convergencia en medida.

2.2 Relación entre los distintos modos de convergencia

Caso general

Pasamos a analizar las relaciones entre los tipos de convergencia:

Teorema 2.2.1. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces se cumple:*

$$\begin{tikzcd}
& & a.e & \\
unif. \arrow[r] & L^{\infty} \arrow[r] & casi\ \ unif. \arrow[u] \arrow[r, bend left] & \mu \arrow[l, dashed] \arrow[ul, dashed] \\
& & L^{p} \arrow[u, dashed] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

donde μ representa la convergencia en medida y $\dashrightarrow$ indica la convergencia de una subsucesión.

Demostración. Sean $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ funciones medibles. Veamos que se cumplen las distintas implicaciones:

- $unif. \longrightarrow L^{\infty} \longrightarrow casi\ \ unif.$
  Se siguen inmediatamente de la proposición 2.1.3.

- $casi\ \ unif. \longrightarrow \mu$
  Supongamos que (f_n) converge casi uniformemente a f, y sean $\alpha, \varepsilon > 0$. Entonces existe un conjunto $E_\varepsilon \in \mathscr{A}$, con $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ tal que (f_n) converge a f uniformemente en $X \setminus E_\varepsilon$. Por tanto, si n es suficientemente grande, el conjunto $\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha\}$ tiene que estar contenido en E_ε. Así pues:
  $$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha\}) \leqslant \mu(E_\varepsilon) < \varepsilon,$$
  o lo que es lo mismo, (f_n) converge a f en medida.

- $\mu \dashrightarrow casi\ \ unif.$
  Supongamos ahora que (f_n) converge en medida a f. Entonces (f_n) es una sucesión de Cauchy en medida y, por tanto, dado $\varepsilon > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, existe (f_{n_k}) tal que:
  $$\mu\{x \in X;\ \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \geqslant \frac{1}{2^k}\} < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$
  Consideramos el conjunto $A_k = \{x \in X;\ \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| \geqslant \frac{1}{2^k}\}$.
  Puesto que $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$, se tiene que (f_{n_k}) converge a.e. sí y solo sí $\sum_{j=1}^{\infty} f_{n_{j+1}} - f_{n_j}$ converge a.e.

  Por otro lado, notar que: $\mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

  Definimos ahora $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Como $\{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\}$ es decreciente y $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) < \infty$, tenemos que:
  $$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0.$$
  Además, si $x \notin A$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin \bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k$, por lo que $x \notin A_k$ para todo $k \geqslant n_0$.

  Así pues, si $x \notin A$ tenemos que $\left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right| < \frac{1}{2^k}$, para todo $k \geqslant n_0$, lo que implica que

$\sum_{j=1}^{\infty} \left| f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) \right|$ converge absolutamente para todo $x \in X \setminus A$ y, por tanto, $\sum_{j=1}^{\infty} f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)$ converge $\mu-$a.e.
Podemos definir entonces:

$$g(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x), & si \quad x \in X \setminus A, \\ \\ 0, & si \quad x \in A. \end{cases}$$

Así tenemos que $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = g(x)$ $\mu-$a.e.

Veamos ahora que (f_{n_k}) converge casi uniformemente a g, es decir, que $\sum_{j=1}^{\infty} f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)$ converge casi uniformemente. Definimos para ello el conjunto $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Entonces:

$$\mu(B) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Además, si $x \notin B$ tenemos que $x \notin A_k$ para todo $k \geqslant 1$, por lo que $\left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right| \leqslant \frac{1}{2^k}$, para todo $k \geqslant 1$ y para todo $x \notin B$.
Por otro lado, como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty$ podemos aplicar el criterio M de Weierstrass (ver [Conway], p.29) para deducir que $\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)$ converge uniformemente en $X \setminus B$.

Por tanto, hemos demostrado que si (f_n) es una sucesión de Cauchy en medida entonces existe una subsucesión $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ y una función medible g tal que (f_{n_k}) converge a g casi uniformemente.
Así pues, tenemos que:

- (f_n) converge a f en medida, lo que implica que (f_{n_k}) converge a f en medida.
- (f_{n_k}) converge a g casi uniformemente, lo que implica que (f_{n_k}) converge a g en medida.

Así, para concluir solo tenemos que probar que $f = g$ μ a.e.
Como (f_{n_k}) converge a f y a g en medida se tiene que para todo $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\{x \in X : \, |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0 \text{ y } \lim_{k\to\infty} \mu(\{x \in X : \, |f_{n_k}(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0.$$

Por otro lado, $|f(x) - g(x)| \leqslant |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - g(x)|$, luego si $|f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon$, entonces tiene que ser $|f(x) - f_{n_k}(x)| \geqslant \varepsilon/2$ o $|f_{n_k}(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon/2$.
Por tanto:

$$\{x \in X; \, |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq \{x \in X; \, |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\} \bigcup \{x \in X; \, |f_{n_k}(x) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\},$$

de lo que deducimos:

$$\mu(\{x \in X; \, |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}) \subseteq \mu(\{x \in X; \, |f_{n_k}(x) - f(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\}) + \mu(\{x \in X; \, |f_{n_k}(x) - g(x)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\}).$$

Es claro que los dos términos de la derecha tienden a 0 puesto que (f_{n_k}) converge a f y a g en medida. Así pues, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$\mu(\{x \in X : \, |f(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\}) = 0,$$

por lo que $f = g$ μ a.e.

- $L^p \longrightarrow \mu$, $1 \leqslant p < \infty$
  Supongamos que (f_n) converge a f en $L^p(\mu)$ y consideramos el conjunto
  $E_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha\},\ \alpha > 0$. Entonces:

$$\int_X |f_n - f|^p \ d\mu \ \geqslant \int_{E_n} |f_n - f|^p \ d\mu \ \geqslant \ \alpha^p \ \mu(E_n).$$

  Como $\alpha > 0$, se sigue que si $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$, por lo que (f_n) converge a f en medida.

- $casi\ unif. \longrightarrow a.e$
  Supongamos que (f_n) converge a f casi uniformemente en X. Entonces, si para todo $k \in \mathbb{N}$ tomamos $\varepsilon = \frac{1}{k}$, es claro que existe A_k, con $\mu(A_k) \leqslant \frac{1}{k}$, tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x \,\in\, X\setminus\, A_k} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

  Tomando $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ obtenemos que $\mu(A) \leqslant \mu(A_k) \leqslant \frac{1}{k}$, $\forall\, k$, lo que implica que $\mu(A) = 0$.
  Además, si consideramos $x \notin A$, tiene que ser $x \notin A_k$ para algún k, y por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

  por lo que (f_n) converge a f a.e.

A partir de estas implicaciones podemos deducir el resto:

- Como $L^p \longrightarrow \mu$ y $\mu \dashrightarrow casi\ \ unif.$ es claro que $L^p \dashrightarrow casi\ \ unif.$

- Como $\mu \dashrightarrow casi\ \ unif.$ y $casi\ unif. \longrightarrow a.e$ es claro que $\mu \dashrightarrow a.e.$.

- Como $L^p \dashrightarrow casi\ \ unif.$ y $casi\ unif. \longrightarrow a.e$ es claro que $L^p \dashrightarrow a.e.$

$\square$

NOTA
Supongamos que (f_n) converge a g $[c]$, donde $[c]$ indica cualquier tipo de convergencia de las definidas anteriormente, y que (f_n) converge a f a.e. Entonces obtenemos que $f = g$ a.e.
En efecto, si (f_n) converge a g $[c]$, observando el diagrama de flechas vemos que existe una subsucesión $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ tal que (f_{n_k}) converge a g a.e. Como (f_n) converge a f a.e. es claro que (f_{n_k}) converge a f a.e, de lo que deducimos que $f = g$ a.e.
Como consecuencia, para estudiar un límite hay que mirar el límite en casi todo punto, porque de existir tiene que ser ese.

Contraejemplos

A continuación vamos a estudiar diferentes contraejemplos que muestran que las implicaciones que no aparecen en el diagrama no se dan:

1. $unif. \not\longrightarrow L^p$
   Consideramos la sucesión $f_n = n^{-1/p}\ \chi_{[0,n]}$ definida en el espacio de medida $(\mathbb{R}, dx)$. Entonces f_n converge uniformemente a la función $f = 0$, pero no converge en $L^p(\mu)$.

Demostración. Es claro que f_n converge uniformemente a f, ya que se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| n^{-1/p}\ \chi_{[0,n]}(x) - 0 \right| = \lim_{n\to\infty} n^{-1/p} = 0.$$

Veamos ahora que f_n no converge en $L^p(\mu)$ a f:

$$\left\{ \int |\, f_n - f\,|^p\, d\mu \right\}^{1/p} = \left\{ \int |\, n^{-1/p}\ \chi_{[0,n]}\ |^p\, d\mu \right\}^{1/p} = \left\{ \int_0^n \frac{1}{n}\, d\mu \right\}^{1/p} = 1\ \not\to\ 0.$$

Deducimos de esto que tampoco existe ninguna subsucesión $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ tal que f_{n_k} converge a 0 en L^p, por lo que $unif. \not\dashrightarrow L^p$. □

2. casi unif. $\not\longrightarrow L^\infty$
Consideramos la sucesión $f_n = x^n$ definida en el espacio de medida $([0,1), dx)$. Entonces f_n converge casi uniformemente a $f = 0$, pero no converge en L^∞.

Demostración. Es obvio que si $x \in [0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Además, sabemos que si f_n converge a f en L^∞, entonces f_n converge a f μ-a.e. Así pues, si f_n converge en L^∞ a alguna f, esta f tiene que ser 0 μ-a.e, luego $\|f_n - f\|_\infty = 1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 1 \neq 0$, por lo que f_n no converge en L^∞.

Veamos que hay convergencia casi uniforme: sea $\varepsilon > 0$ y $E_\varepsilon = (1-\varepsilon, 1)$. Entonces $\mu(E_\varepsilon) = \varepsilon$ y se verifica que:

$$\sup_{x\ \in\ [0,1)\setminus E_\varepsilon} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\ \in\ [0,1-\varepsilon)} |x^n|\ =\ (1-\varepsilon)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

por lo que f_n converge casi uniformemente a 0 en $[0,1)$ y queda probado que la convergencia casi uniforme no implica la convergencia en L^∞. □

Además, como $\|f_n - f\|_\infty = 1$, es evidente que tampoco existe ninguna subsucesión $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ tal que f_{n_k} converge a 0 en L^∞, de lo que deducimos que casi unif.$\not\dashrightarrow L^\infty$.

3. $a.e. \not\longrightarrow L^\infty$
Consideramos la sucesión $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ definida en el espacio de medida $(\mathbb{R}, dx)$. Entonces f_n converge en casi todo punto a $f = 0$ pero no converge en $L^\infty(\mu)$.

Demostración. Es claro que f_n converge en casi todo punto a $f = 0$, ya que, por la propia definición de la función característica, f_n vale 0 en casi todo punto salvo en los $x \in [n, n+1]$. Por otro lado, $\|f_n - f\|_\infty = \left\|\chi_{[n,n+1]}\right\|_\infty = 1 \not\to 0$, por lo que f_n no converge a 0 en $L^\infty(\mu)$ y tampoco hay ninguna subsucesión $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ que converja a 0 en L^∞, es decir, a.e. $\not\dashrightarrow L^\infty$.

Con esta misma sucesión también se prueba que $a.e. \not\longrightarrow casi\ \ unif.$ □

4. $\mu \not\longrightarrow L^p$
Consideramos la sucesión $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ definida en el espacio de medida $([0,1], dx)$. Entonces f_n converge en medida a $f = 0$ pero no converge en L^p.

Demostración. Es claro que f_n converge en medida a f, ya que, para cada $\alpha > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in [0,1];\ \left| n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \right|\ \geqslant\ \alpha\} = \lim_{n\to\infty} \mu([0, \frac{1}{n}])\ =\ 0.$$

Veamos ahora que f_n no converge a f en L^p :

$$\|f_n - f\|_p \;=\; \left(\int_0^1 \mid n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \mid^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \;=\; \left(\int_0^{\frac{1}{n}} n^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \;=\; n^{1-\frac{1}{p}}$$

y $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1-\frac{1}{p}} \neq 0$, por lo que f_n no converge a f en L^p. □

5. *a.e.* $\not\longrightarrow \mu$
   Consideramos la sucesión $f_n = \chi_{[n,\infty)}$ definida en el espacio de medida $(\mathbb{R}, dx)$. Entonces f_n converge a $f = 0$ a.e. pero no converge en medida.

   Demostración. Es claro que f_n converge a f a.e, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{[n,\infty)} = 0$.
   Por otro lado, es inmediato ver que f_n no converge a f en medida, ya que para $0 < \alpha \leqslant 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in \mathbb{R};\ \left|\chi_{[n,\infty)}(x)\right| \;\geqslant\; \alpha\} \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu([n,\infty)) \;=\infty.$$

   Además, tampoco existe ninguna subsucesión $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ tal que f_{n_k} converge a 0 en medida, de lo que deducimos que *a.e.* $\not\dashrightarrow \mu$. □

6. $casi\;\; unif. \not\longrightarrow L^p$
   Consideramos la sucesión $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ definida en el espacio de medida $([0,1], dx)$. Entonces f_n converge a $f = 0$ casi uniformemente pero no converge en L^p.

   Demostración. Ya ha sido probado en el contraejemplo 4 que f_n no converge a f en L^p. Veamos que hay convergencia casi uniforme: sea $\varepsilon > 0$ y $E_\varepsilon = [0,\varepsilon]$, es decir, $\mu(E_\varepsilon) = \varepsilon$. Notar que para $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$. Por tanto, es inmediato que:

$$\sup_{x\,\in\,[0,1]\setminus E_\varepsilon} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\,\in\,(\varepsilon,1]} \left| n\chi_{[0,\frac{1}{n}]} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

   por lo que f_n converge casi uniformemente a f. □

7. $L^p \not\longrightarrow$ *a.e.*
   Sea el espacio de medida $([0,1], dx)$. La sucesión:
   $f_1 = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$, $f_2 = \chi_{[\frac{1}{2},1]}$, $f_3 = \chi_{[0,\frac{1}{4}]}$, $f_4 = \chi_{[\frac{1}{4},\frac{2}{4}]}$, $f_5 = \chi_{[\frac{2}{4},\frac{3}{4}]}$, $f_6 = \chi_{[\frac{3}{4},1]}$, $f_7 = \chi_{[0,\frac{1}{8}]}, \ldots$, converge en L^p a $f = 0$ pero no converge a.e.

   Demostración. La convergencia en L^p se deduce inmediatamente.
   Por otro lado, f_n es una sucesión de funciones que va tomando los valores 0 y 1 dependiendo del intervalo en el que estemos, por lo que para todo $x \in [0,1]$ es obvio que no existe $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ y, en consecuencia, f_n no converge a f a.e. □

<u>Consecuencias</u>:

- $L^p \not\longrightarrow$ a.e, $\quad \mu \not\longrightarrow$ a.e, $\quad L^p \not\longrightarrow$ casi unif. y $\mu \not\longrightarrow$ casi unif.
  Se deducen inmediatamente del contraejemplo 7. En efecto, f_n converge en L^p a 0, lo que implica que hay convergencia en medida. Por otro lado, como f_n no converge a 0 a.e. tampoco converge casi uniformemente.

- a.e. $\not\longrightarrow$ casi unif. y a.e. $\not\dashrightarrow L^p$
  Se deduce de lo visto anteriormente.

Vamos a explicar un teorema a continuación según el cual, a partir de ciertas condiciones adicionales, podemos probar que la convergencia en medida implica la convergencia en L^p (ver [Bartle], p.76).

Teorema 2.2.2 (Teorema de la convergencia de Vitali). *Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida y sea (f_n) una sucesión en $L^p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. Entonces (f_n) converge a f en $L^p(\mu)$ sí y solo sí se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *(f_n) converge en medida a f.*

2. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto $E_\varepsilon \in \mathscr{A}$ con $\mu(E_\varepsilon) < \infty$ tal que si $F \in \mathscr{A}$, y $F \cap E_\varepsilon = \emptyset$, entonces:*

$$\int_F |f_n|^p \; d\mu \; < \; \varepsilon^p \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3. *Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $E \in \mathscr{A}$ y $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$, entonces:*

$$\int_E |f_n|^p \; d\mu \; < \; \varepsilon^p \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que (f_n) converge a f en $L^p(\mu)$. Veamos que se cumplen las tres propiedades:

1. Ya ha sido probado anteriormente que la convergencia en L^p implica la convergencia en medida.

2. Sea $E \in \mathscr{A}$. Consideramos las medidas:

$$\beta(E) = \int_E |f|^p \; d\mu, \;\; \beta_n(E) = \int_E |f_n|^p \; d\mu, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta que $\Big| \|f_n\|_p - \|f\|_p \Big| \leqslant \|f_n - f\|_p$, si (f_n) converge a f en L^p, es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, lo que implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n(X) = \beta(X)$.
Lo mismo ocurre para cualquier conjunto $E \in \mathscr{A}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n(E) = \beta(E)$, ya que si (f_n) converge a f en L^p, también se satisface que $f_n\chi_E$ converge a $f\chi_E$ en L^p.

Por la Proposición 1.3.5. del capítulo 1, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $A_\varepsilon \in \mathscr{A}$, con $\mu(A_\varepsilon) < \infty$ tal que $\beta(X \setminus A_\varepsilon) < (\varepsilon/2)^p$. Aplicando este razonamiento, para $n = 1,2,\dots,n_0$, sabemos que existe $B_{n,\varepsilon}$, con $\mu(B_{n,\varepsilon}) < \infty$, tal que $\beta_n(X \setminus B_{n,\varepsilon}) < \varepsilon^p$.
Definimos entonces $B_\varepsilon = \bigcup\limits_{n=1}^{n_0} B_{n,\varepsilon}$, y obtenemos que $\mu(B_\varepsilon) = \mu(\bigcup\limits_{n=1}^{n_0} B_{n,\varepsilon}) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{n_0} \mu(B_{n,\varepsilon}) < \infty$. Además, $\beta_n(X \setminus B_\varepsilon) \leqslant \beta_n(X \setminus B_{n,\varepsilon}) < \varepsilon^p$.

Tomamos ahora $E_\varepsilon = A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$ y es obvio que $\mu(E_\varepsilon) \leqslant \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) < \infty$. Además:

- Para $n = 1,2,\dots,n_0$:

$$\beta_n(X \setminus E_\varepsilon) = \int_{X \setminus E_\varepsilon} |f_n|^p \; d\mu = \int_{(X\setminus A_\varepsilon) \,\cap\, (X\setminus B_\varepsilon)} |f_n|^p \; d\mu \leqslant \int_{X\setminus B_\varepsilon} |f_n|^p \; d\mu = \beta_n(X \setminus B_\varepsilon) < \varepsilon^p.$$

- Para $n > n_0$:
$$\beta_n(X \setminus E_\varepsilon) \leqslant \int_{X\setminus A_\varepsilon} |f_n|^p \ d\mu.$$
Por otro lado, como (f_n) converge a f en L^p, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n > n_0$. Así pues:
$$\left(\int_{X\setminus A_\varepsilon} |f_n|^p \ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{X\setminus A_\varepsilon} |f_n - f|^p \ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{X\setminus A_\varepsilon} |f|^p \ d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant \|f_n - f\|_p + (\beta(X \setminus A_\varepsilon))^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Por tanto, $\beta_n(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon^p$, para $n > n_0$.

Deducimos entonces que $\beta_n(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon^p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, si $F \in \mathscr{A}$ es tal que $F \cap E_\varepsilon = \emptyset$, tiene que ser $F \subseteq X \setminus E_\varepsilon$, por lo que $\beta_n(F) \leqslant \beta_n(X \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon^p$, como queríamos demostrar.

3. Como (f_n) converge a f en L^p, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n > n_0$.

Por la Proposición 1.3.6. del capítulo 1, sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe δ_0 tal que si $\mu(E) < \delta_0$, con $E \in \mathscr{A}$, se verifica que $\int_E |f|^p \ d\mu \ < \ (\varepsilon/2)^p$. De la misma forma, para $n = 1, \ldots, n_0$, existe δ_n tal que si $\mu(E) < \delta_n$, con $E \in \mathscr{A}$, se verifica que $\int_E |f_n|^p \ d\mu \ < \ \varepsilon^p$.

Consideramos $\delta = \text{mín}\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n_0}\}$ y tenemos que:

- Si $E \in \mathscr{A}$ es tal que $\mu(E) < \delta$, entonces es obvio que $\mu(E) < \delta_n$, para todo $n = 1, \ldots, n_0$. Por tanto:
$$\int_E |f_n|^p \ d\mu < \varepsilon^p, \ \ n = 1, \ldots, n_0.$$
- Si $n > n_0$ se verifica que:
$$\left(\int_E |f_n|^p \ d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f_n - f|^p \ d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |f|^p \ d\mu\right)^{1/p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
por lo que $\int_E |f_n|^p \ d\mu < \varepsilon^p$, para todo $n > n_0$.

Concluímos entonces que $\int_E |f_n|^p \ d\mu < \varepsilon^p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, como queríamos probar.

$\Leftarrow$) Supongamos ahora que se satisfacen las tres propiedades. Vamos a ver que (f_n) converge a f en $L^p(\mu)$:
Sea $\varepsilon > 0$. Por el apartado (2) sabemos que existe E_ε, con $\mu(E_\varepsilon) < \infty$, tal que si $F \in \mathscr{A}$, y $F \cap E_\varepsilon = \emptyset$, entonces:
$$\int_F |f_n|^p \ d\mu \ < \ \varepsilon^p \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}.$$
Consideramos pues $F = X \setminus E_\varepsilon$ y aplicamos la Desigualdad de Minkowski a $f_n - f_m \ = \ (f_n - f_m)\chi_{E_\varepsilon} \ + f_n\chi_F \ - \ f_m\chi_F$, obteniendo que:
$$\|f_n - f_m\|_p \ \leqslant \ \left\{\int_{E_\varepsilon} |f_n - f_m|^p \ d\mu\right\}^{1/p} \ + \ 2\varepsilon, \tag{2.1}$$
para $n, m \in \mathbb{N}$. Sea ahora $\alpha = \varepsilon[\mu(E_\varepsilon)]^{-1/p}$ y $H_{nm} = \{x \in E_\varepsilon : |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \alpha\}$. En vista de la tercera condición sabemos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$, tal que si $H_{nm} \in \mathscr{A}$ y $\mu(H_{nm}) < \delta(\varepsilon)$, entonces:

$$\int_{H_{nm}} |f_n|^p \ d\mu \ < \ \varepsilon^p \text{ , para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Además, como (f_n) converge en medida a f sabemos que (f_n) es una sucesión de Cauchy en medida, luego existe $K(\varepsilon)$ tal que si $n,m \geqslant K(\varepsilon)$, entonces $\mu(H_{nm}) < \delta(\varepsilon)$. Aplicando otra vez la Desigualdad de Minkowski junto con la condición (3), obtenemos:

$$\left\{ \int_{E_\varepsilon} |f_n - f_m|^p \, d\mu \right\}^{1/p} \leqslant \left\{ \int_{E_\varepsilon \setminus H_{nm}} |f_n - f_m|^p \, d\mu \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{H_{nm}} |f_n|^p \ d\mu \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{H_{nm}} |f_m|^p \ d\mu \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \ \alpha[\mu(E_\varepsilon)]^{1/p} \ + \ \varepsilon \ + \ \varepsilon \ = \ 3\varepsilon,$$

cuando $n,m \geqslant K(\varepsilon)$. Combinando esto con la ecuación (2.1) deducimos que (f_n) es una sucesión de Cauchy y por tanto es convergente en L^p. Como (f_n) converge en medida a f , se sigue por unicidad que (f_n) converge a f en L^p. □

Caso finito

Antes de analizar las relaciones entre los distintos modos de convergencia, vamos a explicar un resultado relevante en el caso finito, tomado de [Bartle], p.74.

Teorema 2.2.3 (Teorema de Egoroff). *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Supongamos que $\mu(X) < \infty$ y que (f_n) es una sucesión de funciones medibles que converge en casi todo punto a una función f medible. Entonces (f_n) converge casi uniformemente y en medida a f.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que (f_n) converge a f en todo punto de X y consideramos el conjunto:

$$E_n(m) \ = \ \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in X : \ |f_k(x) - f(x)| \ \geqslant \ \frac{1}{m} \right\},$$

con $n,m \in \mathbb{N}$. Es claro que $E_n(m) \in \mathscr{A}$ y que $E_{n+1}(m) \subseteq E_n(m)$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, se sigue que:

$$\{x \in X; \ \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\} \ \subset \ \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus E_n(m)) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m),$$

por lo que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n(m) = \emptyset$.

Por otro lado, como $\mu(X) < \infty$, obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n(m)) = 0$. Si $\varepsilon > 0$, tomamos k_m de forma que $\mu(E_{k_m}(m)) < \varepsilon/2^m$ y $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_{k_m}(m)$. Así pues, es claro que $E_\varepsilon \in \mathscr{A}$ y $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$. Además, si $x \notin E_\varepsilon$, entonces $x \notin E_{k_m}(m)$, por lo que:

$$|f_k(x) - f(x)| \ < \ \frac{1}{m},$$

para todo $k \geqslant k_m$. Deducimos pues que (f_k) es uniformemente convergente en $X \setminus E_\varepsilon$, lo que implica que (f_n) converge casi uniformemente a f y, por tanto, también converge en medida. □

Teorema 2.2.4. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y supongamos que $\mu(X) < \infty$. Entonces se cumple:*

$$\begin{tikzcd}
 & & a.e \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, bend left] & \\
unif. \arrow[r] & L^\infty \arrow[r] \arrow[dr] & casi\ \ unif. \arrow[r, bend left] & \mu \arrow[l, dotted] \arrow[ul, dotted] \\
 & & L^p \arrow[u, dotted] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sean $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ funciones medibles. La mayoría de las implicaciones han sido estudiadas en el caso general. Como ahora tenemos que $\mu(X) < \infty$, aparecen tres nuevos casos que pasamos a demostrar:

- $a.e \longrightarrow casi\ unif.$ y, por lo tanto, $a.e \longrightarrow \mu$
  Se siguen del teorema de Egoroff.

- $L^\infty \longrightarrow L^p$, $1 \leqslant p < \infty$
  Se sigue inmediatamente de la desigualdad $\|f\|_p \leqslant \mu(X)\,\|f\|_\infty$, vista en el capítulo 1.

$\square$

Contraejemplos

1. a.e $\not\longrightarrow$ unif.
   Consideramos la sucesión $f_n(x) = x^n$ definida en el espacio de medida $([0,1], dx)$. f_n converge a.e. a $f = 0$ pero no converge uniformemente.

   Demostración. La convergencia a.e. es evidente, ya que $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ para todo $x \in [0,1)$.
   Por otro lado, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |x^n| = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, por lo que f_n no converge uniformemente a $f = 0$. $\square$

2. $\mu \not\longrightarrow$ unif.
   Consideramos la sucesión $f_n(x) = x^n$ definida en el espacio de medida $([0,1], dx)$. f_n converge en medida a $f = 0$ pero no converge uniformemente.

   Demostración. La convergencia en medida es evidente, ya que para $\alpha > 0$ se tiene que
   $\lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in [0,1];\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \alpha\}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in [0,1];\ |x^n| \geqslant \alpha\}\right) = 0.$
   Que f_n no converge uniformemente a f ya ha sido probado en el anterior apartado.

   $\square$

Caso dominado

Vamos a estudiar la relación entre los distintos tipos de convergencia cuando la sucesión en cuestión está dominada por una función del espacio L^p.

Teorema 2.2.5. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y supongamos que la sucesión (f_n) está dominada por una función g en L^p, $1 \leqslant p < \infty$. Entonces se verifica:*

$$\begin{tikzcd}
unif \arrow[r] & L^\infty \arrow[r] & casi\ unif. \arrow[r, bend left] \arrow[d, bend left] \arrow[dr] & \mu \arrow[l, dotted] \arrow[dl] \arrow[d, bend left] \\
 & & a.e \arrow[u, bend left] \arrow[r, bend left] \arrow[ur, dotted] & L^p \arrow[l, dotted] \arrow[u, bend left] \arrow[ul, dotted]
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sean $f_n, f : X \to \mathbb{C}$ funciones medibles. Veamos que se cumplen las distintas implicaciones:

- $a.e \longrightarrow casi\ unif.$ y, por lo tanto, $a.e \longrightarrow \mu$

  Para probar este resultado utilizaremos las mismas ideas de la demostración del teorema de Egoroff. Supongamos que (f_n) converge a f en casi todo punto, verificando que $|f_n| \leqslant g$, con g una función integrable. Consideramos el conjunto:

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{m} \right\}.$$

  Solo tenemos que probar que $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n(m)) = 0$. Como (f_n) converge a f a.e, se sigue que para cada m:

$$\{x \in X;\ \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus E_n(m)) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m).$$

  Por tanto, $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m)) = 0$. Como $E_{n+1}(m) \subset E_n(m)$, solo necesitamos probar que

  $\mu(E_n(m)) < \infty$ para algún n, ya que en ese caso $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n(m)) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m)) = 0$.

  Por la hipótesis del enunciado es claro que $|f| \leqslant g$ a.e, por lo que para cada k se verifica que $|f_k - f| \leqslant 2g$ a.e. Así pues:

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{m} \right\} \subset \left\{ x \in X : g(x) \geqslant \frac{1}{2m} \right\} \bigcup A,$$

  donde $\mu(A) = 0$. Como g es integrable se sigue que $\mu(E_n(m)) < \infty$ y así podemos concluir que (f_n) converge casi uniformemente y en medida a f.

- $a.e \longrightarrow L^p$

  Se sigue del Teorema 0.15 del Anexo.

- $\mu \longrightarrow L^p$

  Supongamos que (f_n) converge en medida a f. Entonces existe una subsucesión $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ tal que (f_{n_k}) converge a f a.e. Como $|f_n| \leqslant g$ a.e , es claro que $|f_{n_k}| \leqslant g$ a.e. y, por tanto, $|f| \leqslant g$ a.e. Así pues, obtenemos que $|f_n - f| \leqslant 2g$ a.e. y, como $g \in L^p$, deducimos que $f_n - f \in L^p$.
  En el capítulo 1 habíamos demostrado que , si $f \in L^p$:

$$\|f\|_p^p = \int_0^{\infty} pt^{p-1} \mu\{x \in X : |f(x)| > t\}\, dt.$$

  Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} pt^{p-1} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > t\}\, dt.$$

  Veamos si podemos meter el límite dentro:

$$h_n(t) = pt^{p-1}\mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > t\} \leqslant pt^{p-1}\mu\{x \in X : 2g(x) > t\} = h(t)\ ,\ t \in (0,\infty).$$

  Notar que $\int_0^{\infty} h(t)dt = \|2g\|_p^p < \infty$, es decir, $h \in L^1(0,\infty)$. Por tanto, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = \int_0^{\infty} pt^{p-1} \lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > t\}\, dt.$$

  Como (f_n) converge a f en medida es claro que $\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > t\} = 0$, luego $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p^p = 0$, es decir, (f_n) converge a f en L^p.

- $casi\ unif. \longrightarrow L^p$

  Como $casi\ unif. \longrightarrow a.e.$ y $a.e. \longrightarrow L^p$ es claro que $casi\ unif. \longrightarrow L^p$.

$\square$

Anexo

Aquí explicamos algunos de los conceptos que han sido utilizados a lo largo del trabajo y que son de vital importancia a la hora de comprender la materia. La mayoría de ellos han sido tomados de [Royden].

Definición 0.1. Decimos que un conjunto no vacío V es un **espacio vectorial** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, o $\mathbb{K}$-espacio vectorial, si en él se han definido dos operaciones, una interna y otra externa, llamadas respectivamente suma y producto por un escalar que pasamos a describir.

La suma de dos elementos (o vectores) $u, v \in V$ da lugar a otro elemento de V, que denotamos $u+v$, cuyas propiedades(ya conocidas) son:

- Asociativa: $u+(v+w) = (u+v)+w$, $\forall u, v, w \in V$;
- Conmutativa: $u+v = v+u$, $\forall u, v \in V$;
- Elemento neutro: existe $e \in V$ tal que $e+v = v+e = v$, $\forall v \in V$;
- Elemento opuesto: para cada $v \in V$ existe w tal que $v+w = w+v = e$.

El producto de un escalar, o elemento del cuerpo $\mathbb{K}$, por un vector da lugar a otro elemento de V, y tiene las propiedades:

- $a(u+v) = au+av$, $\forall a \in \mathbb{K}$, $\forall u, v \in V$,
- $(a+b)u = au+bu$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$,
- $a(bu) = (ab)u$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\forall u \in V$,
- $1u = u$, $\forall u \in V$, donde 1 es la unidad para el producto en $\mathbb{K}$.

Definición 0.2. Un **espacio vectorial normado** es un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ junto con una norma $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. $\|v\| \geq 0$, $\forall v \in V$,
2. $\|v\| = 0$ sí y solo sí $v = 0$,
3. $\|\alpha v\| = \mid \alpha \mid \|v\|$, $\forall v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$,
4. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in V$.

Diremos que $\|\cdot\|$ es una **semi-norma** para V cuando se cumplen todas las propiedades salvo la segunda.

Definición 0.3. Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. La aplicación $d : V \text{ x } V \to \mathbb{R}$ dada por $d(u, v) = \|u-v\|$ se conoce como **función distancia** o métrica asociada a la norma $\|\cdot\|$, y de las propiedades de ésta se verifica que $\forall u, v, w \in V$:

1. $d(u, v) \geq 0$,

2. $d(u,v) = 0$ sí y solo sí $u = v$,
3. Es simétrica: $d(u,v) = \|u-v\| = \|(-1)(v-u)\| = |-1|\,\|v-u\| = \|v-u\| = d(v,u)$,
4. Satisface la desigualdad triangular: $d(u,v) = \|u-v\| = \|u-w+w-v\| \leq \|u-w\| + \|w-v\| = d(u,w)+d(w,v)$.

Cualquier conjunto con una función distancia d satisfaciendo las cuatro propiedades recibe el nombre de **espacio métrico** con métrica d.

Una vez mencionada la función distancia, y para poder hablar de espacios de Banach, definimos los siguientes conceptos:

Definición 0.4. Sea (E,d) un espacio métrico. Una sucesión $(a_n) \subset E$ es de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n,a_m) < \varepsilon$, $\forall n,m \geq n_0$.
Una sucesión $(a_n) \subset E$ es convergente si dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(a,a_n) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

Definición 0.5. Un conjunto E se dice **espacio de Banach** sobre los números complejos si se cumplen las siguientes propiedades:

- E es un espacio vectorial,
- E es un espacio normado,
- E es *completo* con respecto a su norma, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejemplos

Algunos ejemplos de espacios de Banach son:

1. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$,
2. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$,
3. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, donde $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$, con $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,
4. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, donde $\|x\|_2 = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$, con $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definición 0.6. Un **espacio de medida** es una terna $(X,\mathscr{A},\mu)$ donde X es un conjunto, $\mathscr{A}$ es una σ-álgebra sobre X, es decir:

1. $X \in \mathscr{A}$,
2. Si $E_k \in \mathscr{A}$ para $k = 1,2,\ldots$, entonces $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{k=\infty} E_k \in \mathscr{A}$,
3. Si $P \in \mathscr{A}$, entonces $P^c = X \setminus P \in \mathscr{A}$.

y $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0,\infty]$ es una aplicación (llamada medida) que tiene las propiedades:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. μ es completamente aditiva, es decir, para cada sucesión $\{E_k\}$ de elementos de $\mathscr{A}$ tal que $E_i \bigcap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$, se verifica:

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{k=\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Los elementos de $\mathscr{A}$ se denominan **conjuntos medibles**.

Definición 0.7. Sea $(X,\mathscr{A},\mu)$ un espacio de medida. Diremos que X es un conjunto **σ- finito** si es la unión contable de conjuntos medibles de medida finita.

Propiedad μ-a.e

Dado un espacio de medida $(X, \mathscr{A}, \mu)$, diremos que una cierta propiedad referida a los puntos de X es cierta μ-en casi todo punto (μ-a.e) si existe un subconjunto $N \in \mathscr{A}$, con $\mu(N) = 0$ tal que la propiedad es cierta en $X \setminus N$.
Por ejemplo, para dos funciones f, g, si $f = g$ μ-a.e significa que existe un subconjunto $N \in \mathscr{A}$ con $\mu(N) = 0$ tal que $f(x) = g(x)$ al menos para todo $x \in X \setminus N$.

Definición 0.8. Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida, $f : X \to \mathbb{C}$. Diremos que f es una función **medible** si $f^{-1}(G)$ es un conjunto medible para cada abierto G de X.

Pasamos ahora a probar una serie de resultados utilizados a lo largo del trabajo:

Proposición 0.9. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se verifican las siguientes propiedades:*

- *Si $E_1, E_2, \ldots, E_N$ es una sucesión finita de conjuntos medibles disjuntos entre sí:*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{N} E_n) = \sum_{n=1}^{N} \mu(E_n).$$

- *Si $E_n \in \mathscr{A}$ es una sucesión no decreciente de conjuntos medibles, de modo que $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

- *Si $E_n \in \mathscr{A}$ es una sucesión no creciente de conjuntos medibles, de modo que $E_{n+1} \subseteq E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siempre que $\mu(E_1) < \infty$, se tiene:*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Definición 0.10. Una **función simple** es una función $s : X \to \mathbb{C}$ que toma solamente un número finito de valores.
La forma canónica de s es:

$$s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}$$

donde $c_1, \ldots, c_n$ son los distintos valores que toma la función s y $A_j = s^{-1}(c_j) = \{x \in X : \ s(x) = c_j\}$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

El siguiente teorema es fundamental para muchos resultados en teoría de la medida:

Teorema 0.11 (Teorema de aproximación). *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : X \to [0, \infty]$ una función medible. Entonces existe una sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones simples medibles tal que:*

1. $0 \leqslant s_1(x) \leqslant \ldots \leqslant s_n(x) \leqslant f(x)$, *para todo* $x \in X$,
2. $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$.

Pasamos a enunciar un resultado importante en la integración de funciones medibles no negativas:

Proposición 0.12. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Dada una función medible $f : X \to [0, \infty]$, la aplicación:*

$$\lambda : E \in \mathscr{A} \to \lambda(E) = \int_E f \, d\mu \in [0, \infty]$$

es una medida.

A continuación enunciamos un lema muy relevante en teoría de la medida:

Lema 0.13 (Lema de Fatou). *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida, $E \in \mathscr{A}$ y sean $f_n : E \to [0, \infty]$ funciones medibles, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces se verifica:*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

El siguiente teorema es importante a la hora de estudiar la convergencia de sucesiones que están dominadas por una función:

Teorema 0.14 (Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue). *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida. Consideramos (f_n) una sucesión de funciones medibles tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ y tal que existe una función integrable g verificando: $|f_n| \leqslant g$ en casi todo punto. Entonces f_n y f son integrables y se cumple que:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

A partir de este teorema se deduce el siguiente resultado:

Teorema 0.15. *Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio de medida y sea (f_n) una sucesión en $L^p(\mu)$ que converge en casi todo punto a una función medible f. Si existe $g \in L^p(\mu)$ tal que:*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \, , \, x \in X \, , \, n \in \mathbb{N},$$

entonces f pertenece a $L^p(\mu)$ y (f_n) converge en $L^p(\mu)$ a f.

Enunciamos a continuación un teorema muy importante para el cálculo de integrales respecto de una medida producto:

Teorema 0.16 (Teorema de Fubini para funciones no negativas). *Sean $(X, \mathscr{A}, \mu)$ y $(Y, \mathscr{B}, \upsilon)$ espacios de medida $\sigma-$ finitos y sea $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ una función medible. Entonces:*

- *La función φ con valores en $[0, +\infty]$ definida en X por:*

  $$\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\upsilon = \int_Y f(x,y) \, d\upsilon(y)$$

  es $\mathscr{A}$-medible.

- *La función ψ con valores en $[0, +\infty]$ definida en Y por:*

  $$\psi(y) = \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$$

  es $\mathscr{B}$-medible.

- *Se verifica que: $\int_{X\times Y} f \, d(\mu \otimes \upsilon) = \int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\upsilon$. Es decir:*

  $$\int_{X\times Y} f(x,y) \, d(\mu \otimes \upsilon)(x,y) = \int_X \left[\int_Y f(x,y) \, d\upsilon(y) \right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right] d\upsilon(y).$$

Bibliografía

[Wheeden,Zygmund] RICHARD L.WHEEDEN Y ANTONI ZYGMUND, *Measure and integral. An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, Ed. Board, New York, 1977.

[Bartle] ROBERT G.BARTLE, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley, New York 1966.

[Munroe] M.E.MUNROE, *Measure and Integration*, 2.ª ed., Addison-Wesley, 1971.

[Guzmán, Rubio] MIGUEL DE GUZMÁN, BALDOMERO RUBIO, *Integración: teoría y técnicas*, Ed. Alhambra, Madrid, 1979.

[Rudin] WALTER RUDIN, *Análisis real y complejo*, 3.ª ed. Mc Graw-Hill, USA, 1988.

[Conway] JOHN B.CONWAY, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1973.

[Royden] H.L.ROYDEN, *Real Analysis*, 2.ª ed. Mac Millan, New York, 1963.