

# **Modelos de series temporales para predicción. Aplicación a la predicción de niveles de un río.**



**Sara Corral Lou**  
Trabajo de fin de grado en Matemáticas  
Universidad de Zaragoza

Directora del trabajo: Ana Carmen Cebrián  
Junio 2017



# Prólogo

Son muchos los campos en los que se desea conocer el comportamiento futuro de ciertos fenómenos con el objetivo de adelantarse a los acontecimientos. Debido a esta necesidad aparece el estudio de series temporales cuya principal finalidad es predecir lo que ocurrirá con una variable en el futuro a partir del comportamiento de esa variable en el pasado y de otros factores que puedan influir. La metodología actual para analizar series temporales es la concurrencia de varias líneas de trabajo desarrolladas en distintos campos científicos. Así pues, quedan bien diferenciados cinco campos de trabajo principales que han permitido la evolución de dicho análisis.

El primero aparece en la primera mitad del siglo XX y tiene sus orígenes en los estudios de series astronómicas y climáticas. Esto dio lugar a la teoría de procesos estocásticos estacionarios desarrollada por los matemáticos *Kolmogorov, Wiener y Cramer*. El segundo campo es el desarrollo de los métodos de alisado inventados con el fin de prever series de venta y producción por investigadores operativos en la década 1960-1970 e impulsado por las facilidades de cálculo que les proporcionaban los primeros ordenadores. El tercero, desarrollado en los años 70, es la teoría de predicción y control de sistemas lineales estimulada por el desarrollo de la ingeniería aeronáutica y espacial. El cuarto es desarrollado por estadísticos y economistas en los últimos veinte años del siglo XX y es la teoría de procesos no estacionarios y no lineales. Para terminar, el quinto campo se trata de los modelos multivariantes y los métodos de reducción de la dimensión en sistemas dinámicos.

Así pues, los métodos empleados para el análisis de series de tiempo actuales son deudores de las investigaciones de matemáticos, estadísticos, ingenieros, físicos y economistas durante el siglo XX para resolver el problema de predicción y control de variables para sistemas dinámicos.

Cabe destacar el trabajo realizado en los años 60 por los británicos *George E. P. Box (1919-2013)* y *Gwilym Jenkins (1932-1982)* ya que fruto de sus investigaciones es su célebre libro [2] *Box y Jenkins 1970* que marca un hito en el análisis de series temporales al presentar una metodología unificada para estudiar series estacionarias y no estacionarias, estacionales o no y aplicar estos modelos en la práctica.



# Summary

A time series  $\{X_t\}_{t \in T}$  is a set of variables indexed in time. In many fields knowing the future behaviour of some phenomena is really useful to plan and prevent. The main utility for the time series is to predict what will happen to a variable at the future knowing what has happened to this variable in the past and all the other facts which can modify this variable. Therefore, the study of the analysis methods and the prediction of the time series are a topic recently investigated in academic circles and it is in continuing development.

This work introduces the analysis of the time series showing them the basic concepts and results. The work is divided into two different parts. The first one (Chapters 1 and 2) talks about the theoretical part, where the basic concepts are defined to analyse a time serie. The second one (Chapter 3) shows a simple application of the analysis of a particular time serie through R, which is a frame and a program language with an analysis statistical view.

At the first chapter some basic ideas of stochastic processes and the analysis of time series are explained. It is really important the concept of stationary time series, due to the basic models of temporary series are generally models for the stationary series. It is introduced the process of white noise as one of the stationary processes more important because it is fundamental to define other concepts which are more complex. We call white noise to every process  $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  is a sequence of uncorrelated random variables, each with zero mean and variance  $\sigma^2$ . This is indicated by the notation  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ .

Generally, in practice, it is unusual to count with this type of series, so being able to transform any serial time to a stationary serie is really important to be able to proceed to the modelling of this. At this chapter the method of differencing let us get this transformation done.

Concepts as the autocovariance function  $\gamma(\cdot)$  and autocorrelation function  $\rho(\cdot)$  are basic for the study of any temporal series, and so the estimation of this functions from some given data.

At the end of the chapter it is considered the problem to predict variables of any stationary series having the goal to find a lineal combination of the past values which can predict with the minimum failure.

At the second chapter the lineal processes are presented, autoregressive process of order p,  $AR(p)$ , and moving-average process of order q,  $MA(q)$ , all of them defined for stationary series.

At the first part, an important parametric family of models for temporary series, the autoregressive moving-average, or  $ARMA(p, q)$ , processes. It is said that  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  is an  $ARMA(p, q)$  if it is stationary and can be expressed as

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$$

where  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$  and polynomials  $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$  y  $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$  haven't got common roots.

Secondly the autocovariance function and the autocorrelation of a process  $ARMA$  are calculated and the concept of the autocorrelation parcial function is defined and also the algorithm to calculate the autocorrelation partial function for an  $ARMA$  process.

At the third part of the chapter, the aim is to find the model  $ARMA(p, q)$  which represents those data the best. The  $ARMA$  models are models of stationary processes therefore, we just have to adjust an  $ARMA$  if

the serie is stationary. Once you have identified and adjusted the model, it is always necessary to prove its validity, which is developed at the end of the third section.

Eventually, at the last section two important extensions of the models *ARMA* are introduced. Firstly, a generalization of the *ARMA* processes which adds a wide range of non-stationary processes, the integrated *ARMA* processes or *ARIMA*. And secondly, an extension of the *ARIMA* processes (and so the *ARMA* processes) are the stationary processes *ARIMA* and the processes *SARIMA*.

At the forth chapter it is done an analysis of the level of the Ebro river in Tudela, Navarra. To do that we have the daily data from 28th November 2004 to 9th April 2012, data from the Ebro hydrographical confederation.

The goal is to predict the future values of the river level with the past values availables.

At the Anexo A you can find the code which has been used to program the practice part of the work.

# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>III</b>
<b>Summary</b>	<b>v</b>
<b>1. Introducción a las series temporales y conceptos básicos</b>	<b>1</b>
1.1. Series temporales . . . . .	1
1.1.1. Definiciones previas . . . . .	1
1.1.2. Tipos de series temporales . . . . .	2
1.1.3. Conversión a una serie estacionaria . . . . .	2
1.1.4. Función de autocovariancia y autocorrelación . . . . .	4
1.1.5. Estimación de la media y las funciones de autocovarianza y autocorrelación . . . . .	5
1.2. Predicción lineal de series temporales . . . . .	7
<b>2. Procesos ARMA y extensiones</b>	<b>9</b>
2.1. Procesos básicos . . . . .	9
2.1.1. Procesos lineales . . . . .	9
2.1.2. Procesos auto-regresivos . . . . .	9
2.1.3. Procesos de media móvil . . . . .	10
2.2. Procesos ARMA . . . . .	11
2.2.1. Función de autocovarianza, de autocorrelación y de autocorrelación parcial de un proceso <i>ARMA</i> . . . . .	12
2.3. Modelización con procesos ARMA . . . . .	14
2.3.1. Estimación de los parámetros . . . . .	14
2.3.2. Selección del orden $p$ y $q$ . . . . .	15
2.3.3. Diagnóstico del modelo . . . . .	16
2.4. Extensión de los procesos ARMA . . . . .	17
2.4.1. Procesos ARIMA . . . . .	17
2.4.2. Procesos SARIMA: Procesos estacionales ARIMA . . . . .	17
<b>3. Aplicación</b>	<b>19</b>
3.1. Análisis de la serie . . . . .	19
3.1.1. Introducción . . . . .	19
3.1.2. Análisis inicial . . . . .	19
3.2. Transformación de la serie a estacionaria: Diferenciación de la serie . . . . .	20
3.3. Selección del modelo . . . . .	21
3.3.1. Modelo seleccionado . . . . .	21
3.4. Validación del modelo . . . . .	22
3.5. Cálculo de predicciones . . . . .	23
<b>A. Código R</b>	<b>27</b>



# Capítulo 1

## Introducción a las series temporales y conceptos básicos

### 1.1. Series temporales

En este capítulo se presentan algunas ideas básicas de procesos estocásticos y del análisis de series de tiempo. De particular importancia son los conceptos de estacionariedad, las funciones de autocovarianza y autocorrelación que se desarrollaran a lo largo del capítulo. Se describen algunas técnicas estándar para la eliminación y estimación de la tendencia y estacionalidad de una serie temporal observada.

#### 1.1.1. Definiciones previas

**Definición 1.1.** Se denomina *proceso estocástico* a toda familia  $\{X_t\}_{t \in T}$  de variables o vectores aleatorios definidos sobre el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ .

**Definición 1.2.** Para  $p \geq 1$  definimos el espacio  $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  como el espacio de variables aleatorias reales  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $E(|X|^p) < \infty$ .

**Definición 1.3.** Llamamos *proceso estocástico de segundo orden* a todo proceso estocástico  $\{X_t\}_{t \in T}$  con valores en  $\mathbb{R}$  y  $X_t \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ , tal que su *función de medias*  $m(t)$  y su *función de covarianzas*  $\Gamma(s, t)$  son definidas  $\forall t \in T$  como:

- $m : T \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \mapsto m(t) = E(X_t)$
- $\Gamma : T^2 \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(s, t) \mapsto \Gamma(s, t) = Cov(X_s, X_t) = E(X_s X_t) - E(X_s)E(X_t)$

El proceso será *centrado* si  $\forall t \in T$  se tiene que  $m(t) = 0$ , en este caso  $\Gamma(s, t) = E(X_s X_t)$ .

**Definición 1.4.** Llamamos *serie temporal* a todo proceso estocástico de segundo orden indexado por  $\mathbb{N}$  o  $\mathbb{Z}$ . Sin pérdida de generalidad a partir de ahora se trabajará con  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ .

De una serie temporal nos interesa describir el pasado y realizar predicciones para el futuro. Para conseguir estos objetivos es necesario establecer un modelo de probabilidad que represente el comportamiento de las variables  $X_t$  de la serie y permita realizar inferencia.

Las series temporales aparecen en muchos campos del conocimiento

- Economía Tasas de desempleo, producto interior bruto anual, rendimientos mensuales obtenidos en la Bolsa de Madrid en el periodo 1988 a 2000,...

- Demografía Población Europea durante los años 2000 y 2017, mortalidad y natalidad anual de un país,...
- Climatológica Precipitaciones diarias, temperaturas máximas, emisiones anuales de  $CO_2$ , concentración media de nitratos en el agua,...
- Medicina Casos de gripe durante los meses de invierno de los últimos 10 años, número de vacunaciones en un centro médico,...

### 1.1.2. Tipos de series temporales

- **Serie estacionaria**

Una serie temporal  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es estacionaria si la función medias  $m(t)$  y la función covarianzas  $\Gamma(s, t)$  son invariantes por traslación de tiempo. Esto es:

1.  $E(X_t^2) < \infty$
2.  $m(t) = m \quad \forall t \in \mathbb{Z}$  y  $m$  constante
3.  $\Gamma(s, t) = Cov(X_s, X_t) = Cov(X_{s+h}, X_{t+h}) = \Gamma(s+h, t+h) \quad \forall s, t, h \in \mathbb{Z}$

En particular eso implica que una serie temporal estacionaria es una serie estable con valores que oscilan en torno a un nivel medio fijo con una variabilidad constante.

**Ejemplo 1.1.** Uno de los ejemplos mas importantes de proceso estacionario es el conocido como *ruido blanco* ya que presenta un papel fundamental en la definición de otros procesos mas complejos. Llamamos *ruido blanco* a todo proceso  $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  de variables aleatorias con la misma varianza, centradas e incorreladas. Se denotan como  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ .

- **Serie con tendencia**

Un modelo para series con tendencia es

$$X_t = m_t + Y_t$$

donde  $m_t$  es la componente de tendencia e  $Y_t$  es una serie estacionaria de media nula, e.d.,  $E(Y_t) = 0$

- **Serie estacional**

Es una serie cuyo comportamiento se repite periódicamente. Un modelo para una serie estacional es

$$X_t = s_t + Y_t$$

donde  $s_t$  es la componente estacional de periodo  $d$ , esto es  $s_{t-d} = s_t = s_{t+d}$ , e  $Y_t$  es una serie estacionaria de media nula. Se suele imponer que  $\sum_{i=1}^d s_i = 0$ .

- **Serie con tendencia y componente estacional**

Como su propio nombre indica, este es un tipo de serie que posee tanto componente de tendencia como componente estacional. Un modelo para este tipo de series es

$$X_t = m_t + s_t + Y_t$$

donde  $m_t$  es la componente de tendencia,  $s_t$  es la componente estacional e  $Y_t$  es una serie estacionaria de media nula.

### 1.1.3. Conversión a una serie estacionaria

Generalmente los modelos básicos de series temporales son modelos para series estacionarias pero raramente, en la práctica, aparecen series estacionarias. Por lo que poder transformar cualquier serie a

una serie estacionaria cobra una gran importancia para poder proceder a la modelización de ésta. Una serie puede no ser estacionaria en la varianza (cuando la variabilidad se modifica con el tiempo), en la media (cuando el nivel de la serie no es estable en el tiempo, pudiendo en particular tener tendencia creciente o decreciente), o en otras características de la distribución de las variables.

### Estabilización de la varianza

Para la estabilización de la varianza es necesario llevar a cabo algún tipo de transformación de los datos. La transformación mas común es trabajar con el *logaritmo* de los datos iniciales, pero ésta no es siempre la mejor opción. Las *transformaciones de Box y Cox* son una familia de transformaciones usadas en estadística para corregir la heterocedasticidad. Para ver una explicación mas detallada de la familia de transformaciones de Box y Cox ver [12, pág. 105-106].

### Estabilización de la media

Hay dos tipos de enfoques para la conversión de la serie no estacionaria en media a una estacionaria.

- El primer enfoque consiste en estimar las componentes deterministas  $m_t$  y  $s_t$  y una vez estimadas restarlas a la serie original con la esperanza de que la componente residual (o ruido)  $Y_t$  obtenida sea una serie temporal estacionaria.
- Otro enfoque ampliamente desarrollado por Box y Jenkins en [2] consiste en aplicar los operadores de diferenciación (tanto el operador diferencia  $\nabla$ , como el operador diferencia estacional de orden  $d$ ,  $\nabla_d$ ) hasta que las observaciones diferenciadas se parezcan a la realización de alguna serie temporal estacionaria.

La selección de la mejor técnica para obtener una serie estacionaria dependerá de diversos factores (si se necesitan estimadores de las componentes o no, si la componente estacional varía con el tiempo,...). En esta parte del capítulo se desarrollará el *método de diferenciación* que será el utilizado en la parte práctica del trabajo, capítulo 3.

(a) **Serie con tendencia**  $X_t = m_t + Y_t$

Definimos el operador diferencia como:

$$\nabla X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - B)X_t$$

donde  $B$  es el operador desplazamiento hacia atrás para el cual se define la siguiente operación:

$$B^j X_t = X_{t-j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Toda tendencia polinomial de orden  $k$  se reduce a una constante aplicando el operador

$$\nabla^k = (1 - B)^k = (1 - B) \dots (1 - B).$$

Por lo tanto si a una serie  $X_t = m_t + Y_t$  con una tendencia polinomial de orden  $k$  se le aplica el operador  $\nabla$   $k$  veces obtenemos:

$$\nabla^k X_t = a_k k! + W_t$$

donde  $a_k$  es el coeficiente de  $t^k$  y  $W_t$  es una serie estacionaria. Normalmente no sabemos el orden de la tendencia así pues aplicamos el operador  $\nabla$  tantas veces como sea necesario para que  $\nabla^k X_t$  sea estacionaria.

**Ejemplo 1.2.** Sea  $m_t = a_0 + a_1 t$  una tendencia polinomial de orden 1. Aplicando el operador  $\nabla$  se obtiene

$$\nabla m_t = m_t - m_{t-1} = a_0 + a_1 t - (a_0 + a_1(t-1)) = a_1$$

(b) **Serie estacional**  $X_t = s_t + Y_t$ 

En este caso definimos el operador diferencia estacional de orden  $d$  como:

$$\nabla_d X_t = X_t - X_{t-d} = (1 - B^d)X_t$$

Aplicando este operador a nuestra serie con componente estacional obtenemos

$$\nabla_d X_t = (1 - B^d)X_t = (1 - B^d)(s_t + Y_t) = s_t - B^d s_t + Y_t - B^d Y_t = s_t - s_{t-d} + Y_t - Y_{t-d} = Y_t - Y_{t-d}$$

que se trata de una serie estacionaria.

**Observación 1.1.** Es importante destacar que  $\nabla_d \neq \nabla^d$ .

(c) **Serie con tendencia y componente estacional**  $X_t = m_t + s_t + Y_t$ 

Para eliminar la tendencia y la componente estacional de nuestra serie vamos a proceder de la siguiente manera:

- (1) Aplicamos el operador  $\nabla_d$  a la serie  $X_t = m_t + s_t + Y_t$  con estacionalidad de periodo  $d$  y obtenemos

$$\nabla_d X_t = m_t - m_{t-d} + Y_t - Y_{t-d}$$

serie sin componente estacional con tendencia  $m_t - m_{t-d}$  posiblemente distinta a la de la serie inicial.

Puede suceder que al eliminar la componente estacional se anule la tendencia por lo que ya se tendría la serie estacionaria deseada. En caso contrario:

- (2) eliminamos la tendencia aplicando  $\nabla$  a  $\nabla_d X_t$  tantas veces como sea necesario para obtener una serie estacionaria.

#### 1.1.4. Función de autocovariancia y autocorrelación

Anteriormente se ha definido la función de covarianza como la función de dos parámetros definida por

$$\Gamma(s, t) = Cov(X_s, X_t)$$

En el caso de series estacionarias se puede definir la función de autocovarianza de la serie de la siguiente manera:

**Definición 1.5.** Sea  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  una serie estacionaria. Definimos la función de autocovarianza (ACFV) de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  en el retardo  $h$  como

$$\gamma(h) = Cov(X_{t+h}, X_t) = E(X_{t+h}X_t) \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

#### Propiedades básicas de $\gamma(\cdot)$

- $\gamma(0) > 0$

Se trata simplemente de la afirmación  $Var(X_t) > 0$ . Se tiene que si  $Var(X_t) = 0$  entonces  $X_t$  es una variable degenerada, es decir,  $X_t = cte$ .

- $|\gamma(h)| \leq \gamma(0)$

Se trata de una consecuencia inmediata del hecho de que las correlaciones son menores o iguales a 1 en valor absoluto (o la desigualdad de Cauchy-Schwarz).

- $\gamma(h) = \gamma(-h)$

La ACFV es una función simétrica.

- $\gamma(h)$  es una función no definida negativa

La demostración de esta propiedad se puede encontrar en [6, pág 8].

**Definición 1.6.** Sea  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  una serie estacionaria. Definimos la función de autocorrelación (ACF) de  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  a partir de la ACFV como

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

### 1.1.5. Estimación de la media y las funciones de autocovarianza y autocorrelación

Un proceso estacionario  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  bajo la hipótesis de normalidad queda totalmente caracterizado por su media  $\mu$  y su función de autocovarianza  $\gamma(\cdot)$ . Si se tiene un proceso estacionario pero no satisface las hipótesis de normalidad no queda totalmente caracterizado por  $\mu$  y  $\gamma(\cdot)$  pero a veces es suficiente, como en los procesos ARMA que se trabajarán en el capítulo 2.

#### Estimación de $\mu$

Un estimador natural de la media  $\mu$  de un proceso estacionario  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es la media muestral

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Se trata de un estimador insesgado, es decir,  $E(\bar{X}_n) = \mu$  con varianza

$$Var(\bar{X}_n) = \sum_{i,j=1}^n Cov(X_i X_j) = \sum_{i-j=-n}^n (n - |i-j|) \gamma(i-j) = \frac{1}{n} \sum_{|h|< n} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma(h),$$

que cumple la siguiente propiedad.

**Teorema 1.1.** Si  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es una serie estacionaria con media  $\mu$  y función de autocovarianza  $\gamma(\cdot)$ , se tiene que cuando  $n \rightarrow \infty$

$$Var(\bar{X}_n) = E[(\bar{X}_n - \mu)^2] \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \gamma(n) \rightarrow 0$$

y

$$nE[(\bar{X}_n - \mu)^2] \rightarrow \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) \quad \text{si} \quad \sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$$

*Demostración.*

$$nVar(\bar{X}_n) = \sum_{|h|< n} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma(h) \leq \sum_{|h|< n} |\gamma(n)|$$

Si  $\gamma(n) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{|h|< n} |\gamma(n)| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma(n)| = 0$  y por lo tanto  $Var(\bar{X}_n) \rightarrow 0$

Si  $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$  entonces por el teorema de la convergencia dominada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nVar(\bar{X}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|h|< n} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma(h) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h)$$

□

### Inferencia sobre $\mu$

Para hacer inferencia sobre  $\mu$  es necesario conocer la distribución de  $\bar{X}_n$ . Sea una serie de tiempo  $\{X_t\}$  gaussiana se tiene que

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sum_{|h|<n} \left(1 - \frac{|h|}{n}\right) \gamma(h)}{n}\right)$$

Para muchas series de tiempo no gaussianas cuando el tamaño de la muestra se hace grande se puede aproximar la distribución de  $\bar{X}_n$  por una normal de media  $\mu$  y varianza  $\frac{1}{n} \sum_{|h|<\infty} \gamma(h)$ . Véase [3, pág 219]. De este resultado se deduce que un intervalo de confianza al 0,95 para  $\mu$  es

$$\left(\bar{X}_n - 1'96v^{1/2}/\sqrt{n}, \bar{X}_n + 1'96v^{1/2}/\sqrt{n}\right)$$

donde  $v = \sum_{|h|<\infty} \gamma(h)$ . Por supuesto  $v$  generalmente no es conocido y por tanto debe ser estimado.

### Estimación de la función de autocovarianza $\gamma(\cdot)$ y autocorrelación $\rho(\cdot)$

**Definición 1.7.** Sea la serie temporal  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  se define *la función de autocovarianza muestral* y *la función de autocorrelación muestral* como

$$\tilde{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|h|} (X_{t+|h|} - \bar{X}_n)(X_t - \bar{X}_n)$$

y

$$\tilde{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}$$

respectivamente.

Éstos van a ser los estimadores de  $\gamma(\cdot)$  y  $\rho(\cdot)$ ,  $\hat{\gamma}(\cdot)$  y  $\hat{\rho}(\cdot)$ . Ambos estimadores son asintóticamente insesgados. Si solo se tienen los datos observados  $X_1, \dots, X_n$  es imposible dar estimaciones razonables de  $\gamma(h)$  y de  $\rho(h)$  para  $h \geq n$ . Incluso para  $h$  un poco por debajo de  $n$  las estimaciones  $\hat{\gamma}(h)$  y  $\hat{\rho}(h)$  no son fiables ya que hay pocos pares  $(X_{t+h}, X_t)$  disponibles. En [2, pág 33] Box y Jenkins sugieren que  $n$  debe ser al menos 50 y  $h$  debe ser menor o igual que  $\frac{n}{4}$ .

### Inferencia sobre la función de autocorrelación $\rho(\cdot)$

Para hacer inferencia relativa a  $\rho(h)$  necesitamos la distribución muestral de  $\hat{\rho}(h)$ . La distribución de  $\hat{\rho}(h)$  puede ser bien aproximada por una distribución normal cuando el tamaño de la muestra es grande. Se tiene que  $\hat{\rho}_k = (\hat{\rho}(1), \dots, \hat{\rho}(k))^t$  está distribuido para  $n$  grande de la siguiente manera

$$\hat{\rho}_k \sim N(\rho_k, n^{-1}W)$$

donde  $\rho_k = (\rho(1), \dots, \rho(k))^t$  y  $W$  es la matriz de covarianza cuyo elemento  $(i, j)$  viene dado por la *fórmula de Bartlett*

$$w_{i,j} = \sum_{k=1}^{\infty} \{\rho(k+i) + \rho(k-i) - 2\rho(i)\rho(k)\} \{\rho(k+j) + \rho(k-j) - 2\rho(j)\rho(k)\}$$

Se puede ver el desarrollo de este resultado en [3, pág 215].

## 1.2. Predicción lineal de series temporales

Se considera el problema de predecir valores  $X_{n+h}$ ,  $h > 0$  de una serie estacionaria con media  $\mu$  y función de autocovarianza  $\gamma$  conocidas, a partir de los valores  $X_1, \dots, X_n$ . El objetivo es encontrar la combinación lineal de  $\{X_n, \dots, X_1, 1\}$  que prediga  $X_{n+h}$  con el mínimo error cuadrático medio. Dicho estimador se denotará por  $P_n X_{n+h}$  o  $\hat{X}_{n+h}$  y será de la forma  $P_n X_{n+h} = a_0 + a_1 X_n + \dots + a_n X_1$  donde los coeficientes  $a_0, \dots, a_n$  se obtienen como los valores que minimizan

$$S(a_0, \dots, a_n) = E[(X_{n+h} - P_n X_{n+h})^2] = E[(X_{n+h} - (a_0 + a_1 X_n + \dots + a_n X_1))^2]$$

Puesto que  $S$  es una función cuadrática de  $a_0, \dots, a_n$  y mayor o igual que cero, está claro que hay al menos un valor  $(a_0, \dots, a_n)$  que minimiza  $S$  y dicho valor satisface

$$\frac{\partial S(a_0, \dots, a_n)}{\partial a_j} = 0 \quad \forall \quad j = 0, \dots, n \quad (1.1)$$

Al evaluar las derivadas 1.1 se obtienen las ecuaciones

$$E[X_{n+h} - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i X_{n+1-i}] = 0 \quad (1.2)$$

$$E[(X_{n+h} - a_0 - \sum_{i=1}^n a_i X_{n+1-i}) X_{n+1-j}] = 0 \quad (1.3)$$

donde  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Estas ecuaciones se conocen como las ecuaciones de predicción y sirven para obtener los valores de  $a_0, \dots, a_n$ . Se pueden escribir con notación vectorial de la siguiente manera

$$\begin{aligned} a_0 &= \mu(1 - \sum_{i=1}^n a_i) \\ \Gamma_n \mathbf{a}_n &= \boldsymbol{\gamma}_n(h) \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde

- $\mathbf{a}_n = (a_1, \dots, a_n)^t$
- $\Gamma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^n$
- $\boldsymbol{\gamma}_n(h) = (\gamma(h), \gamma(h+1), \dots, \gamma(h+n-1))'$

En consecuencia

$$P_n X_{n+h} = \mu + \sum_{i=1}^n a_i (X_{n+1-i} - \mu) \quad (1.5)$$

donde  $\mathbf{a}_n$  satisface 1.4. A partir de 1.5 el valor esperado del error de predicción es cero y el error de predicción en media cuadrática es

$$E[(X_{n+h} - P_n X_{n+h})^2] = \gamma(0) - 2 \sum_{i=1}^n a_i \gamma(h+i-1) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \gamma(i-j) a_j = \gamma(0) - a_n' \boldsymbol{\gamma}_n(h)$$

**Ejemplo 1.3.** Se han observado valores  $X_1$  y  $X_2$  de una serie de tiempo centrada con  $\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{(1-\phi^2)}$ ,  $\gamma(1) = \frac{\sigma^2 \phi}{(1-\phi^2)}$  y  $\gamma(2) = \frac{\sigma^2 \phi^2}{(1-\phi^2)}$ . Se quiere predecir el valor de  $X_3$  dados  $X_1$  y  $X_2$ . Se tiene por 1.4 y 1.5 que

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \begin{pmatrix} 1 & \phi \\ \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi^2 \end{pmatrix}$$

$(a_1, a_2)^t = (\phi, 0)^t$  es solución y por lo tanto se tiene que la mejor predicción lineal de  $X_3$  es  $P_2X_3 = \phi X_2$ .

**Proposición 1.1.** Las ecuaciones 1.2 y 1.3 determinan  $P_nX_{n+h}$  de manera única.

*Demostración.* Sean  $\{a_j, j = 1, \dots, n\}$  y  $\{b_j, j = 1, \dots, n\}$  dos soluciones y se define  $Z$  como la diferencia entre los predictores correspondientes, es decir

$$Z = b_0 - a_0 + \sum_{j=1}^n (b_j - a_j)X_{n-(j-1)}$$

Entonces

$$Z^2 = Z(b_0 - a_0 + \sum_{j=1}^n (b_j - a_j)X_{n+1-j})$$

Pero a partir de 1.2 y 1.3 se tiene que  $E(Z) = 0$  y  $E(ZX_{n+1-j}) = 0 \forall j = 1, \dots, n$ .

En consecuencia  $E(Z^2) = 0$  y  $Z = 0$ . □

Si  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es una serie de tiempo estacionaria, las ecuaciones 1.4 y 1.5 resuelven completamente el problema de determinar el mejor predictor lineal  $P_nX_{n+h}$  de  $X_{n+h}$  a partir de  $\{X_1, \dots, X_n\}$ . Sin embargo, este enfoque directo requiere resolver un sistema de  $n$  ecuaciones lineales, que puede resultar computacionalmente costoso para  $n$  grande. Para simplificar este problema, utilizamos el predictor de un solo paso  $P_nX_{n+1}$  (basado en  $n$  observaciones previas) para simplificar el cálculo de  $P_{n+1}X_{n+2}$ , es decir, utilizar un algoritmo recursivo. Dos de los ejemplos más importantes de algoritmos recursivos son *el algoritmo de Durbin-Levinson* y *el algoritmo de innovaciones*. Ambos algoritmos quedan ampliamente desarrollados en [4, pág. 63-75].

# Capítulo 2

## Procesos ARMA y extensiones

En este tema introducimos una importante familia de modelos para series temporales estacionarias, los procesos de media móvil auto-regresivo o ARMA. Los procesos ARMA desempeñan un papel clave en el modelado de series de tiempo.

### 2.1. Procesos básicos

#### 2.1.1. Procesos lineales

**Definición 2.1.** Se dice que una serie de tiempo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es un *proceso lineal* si se puede expresar como

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k Z_{t-k}$$

donde  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 < \infty$ ,  $a_k \in \mathbb{R}$  y  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ . Al ser combinación lineal de  $\{Z_t\}$  se trata de un proceso estacionario.

#### 2.1.2. Procesos auto-regresivos

**Definición 2.2.** Se dice que una serie de tiempo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es un *proceso auto-regresivo de orden p, AR(p)*, si es estacionario y se puede expresar como

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

donde  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ .

Un  $AR(p)$  tiene solución estacionaria y ésta es causal (concepto que será explicado mas adelante) si el polinomio auto-regresivo  $\phi(z) = 1 - \sum_{k=1}^p \phi_k z^k$  tiene todas sus raíces fuera del disco unidad cerrado, es decir,  $\phi(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{ta q } |z| \leq 1$ . La función de autocovarianza de un  $AR(p)$  no posee una forma explícita excepto en el caso  $AR(1)$ .

**Ejemplo 2.1.** Sea  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  un proceso  $AR(1)$ ,  $X_t$  puede expresarse como

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t \tag{2.1}$$

La solución será estacionaria siempre que  $|\phi| < 1$  ya que  $1 - \phi z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{1}{\phi}$  y  $|z| > 1 \Leftrightarrow |\phi| < 1$ . De 2.1 se obtiene de manera recursiva la siguiente relación:

$$X_t = \phi(\phi X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t = \phi^2 X_{t-2} + \phi Z_{t-1} + Z_t = \phi^2(\phi X_{t-3} + Z_{t-2}) + \phi Z_{t-1} + Z_t = \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k}$$

Por lo tanto sea  $h \geq 0$

$$\gamma(h) = Cov(X_{t+h}, X_t) = Cov\left(\sum_{l=0}^{\infty} \phi^l Z_{(t+h)-l}, \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k Z_{t-k}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{k+h} \phi^k Cov(Z_{(t+h)-l}, Z_{t-k})$$

Obsévese que si  $(t+h)-l \neq t-k$ , es decir,  $l \neq k+h$  por la incorrelación de las variables  $\{Z_t\} \forall t \in \mathbb{Z}$  se tiene que  $Cov(Z_{(t+h)-l}, Z_{t-k}) = 0$  y por tanto

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} \phi^{k+h} \phi^k = \sigma^2 \phi^h \sum_{k=0}^{\infty} (\phi^2)^k = \frac{\sigma^2 \phi^h}{1 - \phi^2}$$

Por la paridad de la función de autocovarianza se tiene que  $\forall h \in \mathbb{Z}$

$$\gamma(h) = \frac{\sigma^2 \phi^{|h|}}{1 - \phi^2}$$

### 2.1.3. Procesos de media móvil

**Definición 2.3.** Se dice que una serie de tiempo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es un *proceso de media móvil de orden q, MA(q)*, si es estacionario y  $\forall t \in \mathbb{Z}$  puede expresarse como

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$$

con  $\theta_0 = 1$  y  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ .

Notar que un  $MA(q)$  es un caso particular de un proceso lineal.

#### Función de autocovarianza de un proceso $MA(q)$

La función de autocovarianza de un proceso  $MA(q)$  viene dada por la siguiente expresión

$$\gamma(h) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ (\theta_{|h|} + \theta_1 \theta_{|h|+1} + \dots + \theta_{q-|h|} \theta_q) \sigma^2 & \text{si } |h| = 1, \dots, q \\ 0 & \text{si } |h| > q \end{cases}$$

Es importante destacar que para retardos mayores que  $q$  la función de autocovarianza de un proceso  $MA(q)$  se anula y por lo tanto sucederá lo mismo con la función de autocorrelación dada la definición de ésta. Este hecho es importante para identificar el rango de valores en el que se mueve  $q$  a la hora de modelizar una serie de datos a través de un proceso de media móvil.

**Ejemplo 2.2.** Sea  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  un proceso  $MA(1)$ ,  $X_t$  puede expresarse como

$$X_t = \theta Z_{t-1} + Z_t$$

Por lo tanto

$$\gamma(h) = Cov(X_{h+t}, X_t) = Cov(X_h, X_0) = Cov[\theta Z_{h-1} + Z_h, \theta Z_{-1} + Z_0]$$

puesto que  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E(\theta^2 Z_{t-1} Z_{-1} + \theta Z_{t-1} Z_0 + \theta Z_t Z_{-1} + Z_t Z_0) \\ \gamma(t) &= \begin{cases} (\theta^2 + 1) \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ \theta \sigma^2 & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

## 2.2. Procesos ARMA

**Definición 2.4.** Se dice que una serie de tiempo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es un proceso  $ARMA(p, q)$  si es estacionario y si puede expresarse como:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \dots - \phi_p X_{t-p} = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$$

siendo  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$  y los polinomios  $\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$  y  $\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$  no poseen raíces comunes.

Conviene expresar la definición en términos del operador retardo,  $B$ , visto en el capítulo anterior.

$$\phi(B)X_t = \theta(B)Z_t \quad (2.2)$$

donde  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$  y  $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q$ .

Los procesos  $AR(p)$  y  $MA(q)$  no son sino casos particulares de los procesos  $ARMA(p, q)$ , que se obtienen con  $\theta(z) \equiv 1$  y  $\phi(z) \equiv 1$ , respectivamente.

### Condición para la existencia y unicidad de una solución estacionaria de un proceso ARMA

La condición para que un proceso  $ARMA(p, q)$  posea una solución estacionaria y que ésta a su vez sea única, es que

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad tq \quad |z| = 1$$

En efecto, si  $\phi(z) \neq 0 \quad \forall z$  en el círculo unidad entonces  $\exists \delta > 0$  t.q. se puede escribir el desarrollo en series de potencias de  $\frac{1}{\phi(z)}$  de la siguiente manera

$$\frac{1}{\phi(z)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi_j z^j \quad 1 - \delta < |z| < 1 + \delta \quad y \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\chi_j| < \infty$$

Por lo tanto se define el operador  $\chi(B) = \frac{1}{\phi(B)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \chi_j B^j$  y aplicándolo a la ecuación 2.2 se obtiene

$$X_t = \chi(B)\theta(B)Z_t = \psi(B)Z_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j} \quad (2.3)$$

Dónde los coeficientes  $\{\psi_j\}$  no tienen una forma explícita, en general, vienen dados por

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j = \chi(z)\theta(z) = \frac{\theta(z)}{\phi(z)} \quad (2.4)$$

Un caso sencillo en el que si se puede encontrar la expresión explícita de los coeficientes es en el caso que se tenga un proceso  $ARMA(1, 1)$ , ejemplo que se muestra a continuación.

**Ejemplo 2.3.** Sea  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  un proceso  $ARMA(1, 1)$  que satisface la siguiente relación

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1} \quad con \quad |\phi| < 1 \quad (2.5)$$

de 2.3 y 2.4 se tiene que

$$(1 - \phi z)(\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \dots) = 1 + \theta z$$

$$\psi_0 + \psi_1 z + \psi_2 z^2 + \dots - \phi \psi_0 z - \phi \psi_1 z^2 - \dots = 1 + \theta z$$

Identificando coeficientes se tiene que

$$\psi_0 = 1$$

$$\psi_1 - \phi\psi_0 = \theta \Rightarrow \psi_1 = \theta + \phi$$

$$\psi - \phi\psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi(\theta + \phi)$$

...

En resumen

$$\begin{cases} \psi_0 = 1 \\ \psi_j = (\phi + \theta)\phi^{j-1} & j \geq 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Es decir

$$X_t = Z_t + (\phi + \theta) \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{j-1} Z_{t-j}$$

### Causalidad e invertibilidad

**Definición 2.5.** Un proceso  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  ARMA( $p, q$ ) se dice *causal* si  $\exists$  constantes  $\{\psi_t\}$  con  $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$  de manera que

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

La causalidad es equivalente a la condición

$$\phi(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad tq \quad |z| \leq 1$$

La demostración se puede encontrar en [3, pág 85].

La causalidad permite que el proceso  $\{X_t\}$  pueda ser expresado en términos de los valores pasados del proceso ruido blanco  $\{Z_t\}$ .

**Definición 2.6.** Un proceso  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  ARMA( $p, q$ ) se dice *invertible* si  $\exists$  constantes  $\{\pi_j\}$  con  $\sum_{j=0}^{\infty} |\pi_j| < \infty$  de manera que

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j X_{t-j}$$

La invertibilidad es equivalente a la condición

$$\theta(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad tq \quad |z| \leq 1$$

La demostración se puede encontrar en [3, pág 87].

La invertibilidad permite que  $Z_t$  se exprese en términos de  $X_s$  con  $s \leq t$ . Observar que la causalidad y la invertibilidad no son propiedades de  $X_t$  sino mas bien de la relación entre los procesos  $\{X_t\}$  y  $\{Z_t\}$

**Proposición 2.1.** Si  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es un proceso ARMA( $p, q$ ) definido por 2.2 donde  $\theta(z) \neq 0$  si  $|z| = 1$  entonces siempre es posible encontrar polinomios  $\tilde{\phi}(z)$  y  $\tilde{\theta}(z)$  y una secuencia de ruidos blancos  $\{W_t\}$  de manera que

$$\tilde{\phi}(B)X_t = \tilde{\theta}(B)W_t$$

donde  $\tilde{\phi}(z), \tilde{\theta}(z)$  son distintos de 0  $\forall z \in \mathbb{C}$  tq  $|z| \leq 1$ . Véase [3, pág 127]

Esta es una proposición importante ya que permite, sin pérdida de generalidad, representar cualquier proceso ARMA que no sea causal y/o invertible mediante un modelo equivalente que si lo sea. Por ello se puede centrar la atención en los modelos ARMA causales e invertibles.

### 2.2.1. Función de autocovarianza, de autocorrelación y de autocorrelación parcial de un proceso ARMA

El objetivo de esta sección es el cálculo de la ACVF y la ACF de un proceso ARMA, así como la presentación y el cálculo de la función de autocorrelación parcial, PACF.

### Función de autocovarianza de un proceso ARMA

Sea  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  un proceso  $ARMA(p, q)$  con solución

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}$$

y sea  $h \geq 0$  se tiene que

$$\gamma(h) = Cov(X_{t+h}, X_t) = Cov\left(\sum_{l=0}^{\infty} \psi_l Z_{(t+h)-l}, \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_l \psi_j Cov(Z_{(t+h)-l}, Z_{t-j})$$

Obsérvese que si  $(t+h)-l \neq t-j$ , es decir,  $l = h+j$  se tiene que  $Cov(Z_{(t+h)-l}, Z_{t-j}) = 0$  y por lo tanto

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{h+j}$$

Debido a la paridad de la función de autocovarianza se tiene que

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{|h|+j} \quad (2.7)$$

Nótese que la ACVF no posee una expresión explícita general en términos de los coeficientes  $\phi$  y  $\theta$  (ya que los coeficientes  $\{\psi_i\}$  no la tienen) y requiere la solución de sistemas de ecuaciones no lineales que deben resolverse mediante algoritmos numéricos. Un caso particular sencillo que si posee expresión explícita es para un  $ARMA(1, 1)$ .

**Ejemplo 2.4.** Sea  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  un proceso  $ARMA(1, 1)$  satisfaciendo 2.5. Se tiene por 2.7 que

$$\gamma(0) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 = \sigma^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^2\right) = \sigma^2 \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} (\phi + \theta)^2 \phi^{-2j-2}\right] = \sigma^2 \left[1 + (\phi + \theta)^2 \phi^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} (\phi^2)^j\right] = \sigma^2 \left[1 + \frac{(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2}\right]$$

$$\gamma(1) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+1} = \sigma^2 (\psi_0 \psi_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \psi_{j+1}) = \sigma^2 [(\phi + \theta) + (\phi + \theta)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{2j-1}] = \sigma^2 [(\phi + \theta) + \frac{\phi(\phi + \theta)^2}{1 - \phi^2}]$$

y finalmente para  $h \in \mathbb{Z}$  tq  $|h| > 1$  se tiene

$$\gamma(h) = \sigma^2 (\psi_0 \psi_h + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \psi_{j+h}) = \sigma^2 [(\phi + \theta) \phi^{h-1} + (\phi + \theta)^2 \phi^{h-2} \sum_{j=1}^{\infty} (\phi^2)^j] = \phi^{h-1} \gamma(1)$$

### Función de autocorrelación de un proceso ARMA

Recuérdese que la ACF es la función  $\rho(\cdot)$  que se define a partir de la ACVF como

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} \quad \forall h \in \mathbb{Z}$$

calculada ya en el apartado anterior.

**Ejemplo 2.5.** Sea  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  un proceso  $ARMA(1, 1)$  satisfaciendo 2.5. Una vez calculada su función de autocovarianza se obtiene de manera inmediata

$$\begin{aligned} \rho(0) &= 1 \\ \rho(1) &= \frac{\theta^2 \phi + \theta \phi^2 + \theta + \phi}{\theta^2 + 2\phi\theta + 1} \\ \rho(h) &= \phi^{h-1} \rho(1) \end{aligned}$$

donde  $h \in \mathbb{Z}$  tq  $|h| > 1$ .

### Función de autocorrelación parcial de un proceso ARMA

La función de autocorrelación parcial *PACF* en el retardo  $h$  de una serie estacionaria es la función de correlación entre  $X_t$  y  $X_{t-h}$  una vez eliminada la dependencia lineal debida a las variables intermedias. Para su cálculo se procede de la siguiente manera:

1. Se elimina de  $X_t$  el efecto de  $X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}$  mediante la regresión:

$$X_t = \beta_1 X_{t-1} + \dots + \beta_{h-1} X_{t-h+1} + U_t$$

donde la variable  $U_t$  recoge la parte de  $X_t$  no común con  $X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}$

2. Se elimina de  $X_{t-h}$  el efecto de  $X_{t-1}, \dots, X_{t-h+1}$  mediante la regresión:

$$X_{t-h} = \gamma_1 X_{t-1} + \dots + \gamma_{h-1} X_{t-h+1} + V_t$$

donde, de nuevo,  $V_t$  contiene la parte de  $X_{t-h}$  no común con las observaciones intermedias.

3. El coeficiente de correlación simple entre  $U_t$  y  $V_t$  es el coeficiente de correlación parcial entre  $X_t$  y  $X_{t-h}$  que se denotará por  $\alpha(h)$ .

### Algoritmo de cálculo de la función de autocorrelación parcial de un proceso ARMA

La PACF de un proceso ARMA es la función  $\alpha(\cdot)$  definida de la siguiente manera:

$$\alpha(0) = 1$$

$$\alpha(h) = \phi_{hh} \quad h \geq 1$$

donde  $\phi_{hh}$  es la última componente del vector  $\phi_h = \Gamma_h^{-1} \gamma_h$  en el cual

$$\Gamma_h = [\gamma(i-j)]_{i,j=1}^h$$

$$\gamma_h = (\gamma(1), \dots, \gamma(h))^t$$

Veáse [3, pág. 171] para el desarrollo de este resultado.

## 2.3. Modelización con procesos ARMA

Dada una serie de datos, el objetivo es buscar el modelo  $ARMA(p,q)$  que mejor represente esos datos. Esto incluye: la elección de  $p$  y  $q$ , la estimación de la media, de los coeficientes  $\{\phi_i \mid i = 1, \dots, p\}$   $\{\theta_i \mid i = 1, \dots, q\}$  de ambos polinomios y de  $\sigma^2$ . Los modelos ARMA son modelos de procesos estacionarios por lo tanto, sólo debe ajustarse un ARMA si la serie es estacionaria.

Una vez identificado y ajustado el modelo, siempre es necesario comprobar su validez. Esta parte es la de validación del modelo y es fundamental en todo análisis de datos.

### 2.3.1. Estimación de los parámetros

Existen varios métodos de estimación pero el más frecuente es el método de máxima verosimilitud debido a la buenas propiedades que poseen los estimadores máximo verosímiles. Bajo condiciones bastante generales, los estimadores máximo verosímiles, son insesgados y asintóticamente normales con varianzas al menos tan pequeñas como las de cualquier otro estimador lineal e insesgado que resultan ser los mas eficientes.

Otros métodos para la estimación de los parámetros son el método de mínimos cuadrados, el método

de Yule Walker, el de las innovaciones,... Estos métodos y otros quedan ampliamente desarrollados en el capítulo 5 de [4].

### Estimación máximo verosímil

Si la serie es gaussiana, la muestra  $\mathbf{X}_n^t = \{X_1, \dots, X_n\}$  se puede interpretar como una observación de una variable aleatoria normal multivariante de dimensión  $n$  con matriz de varianzas  $\Gamma_n$  desconocida. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que  $\mu = 0$  ya que si  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es una serie estacionaria con media  $\mu$  siempre se puede definir la serie centrada  $\{Y_n\}_{t \in \mathbb{Z}}$  definida de la siguiente manera  $Y_n = X_n - \mu$ . La función de verosimilitud se obtiene a partir de la función de densidad

$$L(\Gamma_n) = (2\pi)^{-n/2} (\det \Gamma_n)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{X}_n^t \Gamma_n^{-1} \mathbf{X}_n\right)$$

En un ARMA los elementos de  $\Gamma_n$  se pueden expresar en términos del vector de parámetros  $\beta = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, \sigma^2)$ . Los estimadores máximo verosímiles de dichos parámetros,  $\hat{\beta} = (\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q, \hat{\sigma}^2)$ , serán aquellos que maximicen la función de verosimilitud. Para encontrarlos se deben recurrir a algoritmos numéricos.

Los estimadores máximo verosímiles se desarrollan suponiendo que la distribución conjunta de la muestra es normal multivariante. Sin embargo, se ha probado que incluso aunque la serie  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  no sea gaussiana, sólo exigiendo que  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$ , la función de verosimilitud considerada se puede ver como una medida de bondad de ajuste del modelo y que los estimadores obtenidos maximizándola, si la muestra es grande tienen las mismas propiedades que los estimadores máximo verosímiles por lo que se les sigue denotando de la misma manera aunque estrictamente no lo son. Véase [4, pág. 158-164].

#### 2.3.2. Selección del orden $p$ y $q$

Existen diversos tipos de criterios para seleccionar el orden del modelo.

- Algunos se utilizan de forma preliminar ya que no requieren la estimación del modelo (criterios basados en la ACF y la PACF) que se explicarán en la parte práctica del trabajo.
- Otros son de carácter confirmatorio y sólo se pueden calcular tras haber estimado los modelos que se requieren comparar (criterios basados en la comparación de la bondad de ajuste de los modelos).

A continuación se explica una medida bondad del ajuste utilizada con frecuencia en el análisis confirmatorio, *el criterio AIC*.

#### Criterio de información de Akaike (AIC)

El criterio AIC es una medida de la calidad relativa de un modelo estadístico para un conjunto de datos dado. El AIC maneja un *trade-off* entre la bondad de ajuste del modelo y la complejidad de éste. Dicho criterio mide la bondad de ajuste en términos de su verosimilitud.

$$AIC(\hat{\beta}) = -2 \ln(L(\hat{\beta})) + 2(p + q + 1)$$

Otro criterio similar es el AIC corregido (AICC)

$$AICC = -2 \ln(L(\hat{\beta})) + \frac{2(p + q + 1)n}{(n - p - q - 2)}$$

Ambos métodos son asintóticamente equivalentes.

### 2.3.3. Diagnóstico del modelo

Las técnicas de validación se basan en los residuos que comparan los valores observados con los valores predichos por el modelo ajustado. Para validar un modelo es necesario saber cómo es el comportamiento de los residuos cuando el modelo es adecuado, por lo tanto, si los residuos no presentan ese comportamiento se concluirá que el modelo no es adecuado.

Los residuos de un modelo ARMA vienen dados por

$$\widehat{W}_t = \frac{X_t - \widehat{X}_t(\widehat{\phi}_1, \dots, \widehat{\phi}_p, \widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_q)}{\sqrt{r_{t-1}(\widehat{\phi}_1, \dots, \widehat{\phi}_p, \widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_q)}}$$

donde  $r_t = \widehat{E}[(X_{t+1} - \widehat{X}_{t+1})^2]$  es un estimador del error cuadrático medio de  $\widehat{X}_t$ . Si el modelo planteado es adecuado,  $\widehat{W}_t$  debe tener propiedades similares a las de una serie  $WN(0, \sigma^2)$ . Si es conveniente se puede trabajar también con los residuos reescalados

$$\widehat{R}_t = \frac{\widehat{W}_t}{\widehat{\sigma}}$$

con  $\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \widehat{W}_i^2}{n}}$ . Cuando el modelo es adecuado los residuos reescalados deben presentar esperanza nula, varianza constante e igual a 1 e incorrelación; la incorrelación es la condición central para validar el modelo. Otra propiedad que se suele validar es la normalidad de los residuos pero un resultado de [3, Sección 10.8] hace que esta condición no sea imprescindible para estimar y hacer inferencia sobre los parámetros del modelo, pero es una propiedad deseable. Si la serie es normal, la incorrelación es equivalente a la independencia y por lo tanto podemos asegurar que no queda información por modelizar.

#### Herramientas estadísticas para las comprobaciones sobre los residuos reescalados

- **Esperanza nula y varianza constante e igual a 1**

Principalmente se comprueban estudiando el gráfico de los residuos a lo largo del tiempo. Otras técnicas mas teóricas vienen ampliamente desarrolladas en [8, pág. 326-327]

- **Incorrelación**

Se dispone de diferentes técnicas para la comprobación de la incorrelación de los residuos. La primera es representar el correlograma de la ACF de los residuos. Otra técnica es el test de *Ljung-Box* el cual permite contrastar si los  $h$  primeros retardos de la función de autocorrelación de los residuos son nulos simultáneamente. El test de Ljung-Box contrasta la hipótesis  $\rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(h) = 0$  (hipótesis nula) contra a la hipótesis  $\rho(i) \neq 0$  para algún  $i \in \{1, \dots, h\}$  (hipótesis alternativa). El estadístico que se utiliza para contrastar las hipótesis es

$$T = n(n+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

donde  $\hat{\rho}_k$  es la autocorrelación de la muestra en el retardo  $k$ ,  $n$  el tamaño de la muestra y  $h$  es el número de retardos para el que se quiere probar la hipótesis. Bajo la hipótesis nula el estadístico  $T$  sigue una distribución  $\chi^2_h$ . Para un nivel de significación  $\alpha$ , la región crítica para el rechazo de la hipótesis nula es  $T > \chi^2_{1-\alpha,h}$  donde  $\chi^2_{1-\alpha,h}$  es el  $\alpha$ -cuantil de la distribución chi cuadrado con  $h$  grados de libertad. Si se aplica el test a los residuos de un modelo los grados de libertad deben ser ajustados para reflejar la estimación de parámetros. Por ejemplo, para un modelo ARMA( $p, q$ ) los grados de libertad serán  $h - p - q$ .

## 2.4. Extensión de los procesos ARMA

Los procesos no estacionarios más importantes son los *procesos integrados* que tienen la propiedad fundamental que al diferenciarlos se obtienen procesos estacionarios.

**Definición 2.7.** Un proceso es *integrado de orden*  $h \geq 0$  cuando al diferenciarlo  $h$  veces se obtiene un proceso estacionario.

### 2.4.1. Procesos ARIMA

Ya se ha visto la importancia de los modelos *ARMA* para representar series estacionarias. Una generalización de esta clase de procesos que incorpora una amplia gama de series no estacionarias es proporcionada por los procesos integrados *ARIMA*, es decir, los procesos que se reducen a los *ARMA* cuando se diferencian un número finito de veces.

**Definición 2.8.** Sea  $d$  un entero no negativo, entonces una serie de tiempo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es *un proceso ARIMA*  $(p, d, q)$  si  $Y_t := (1 - B)^d X_t \quad \forall t \in \mathbb{Z}$  es un proceso *ARMA*  $(p, q)$ . Esta definición significa que  $X_t$  satisface una ecuación de la forma

$$\phi^*(B)X_t := \phi(B)(1 - B)^d X_t = \theta(B)Z_t \quad (2.8)$$

donde

$$\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$$

$\phi(z)$  y  $\theta(z)$  son dos polinomios de grado  $p$  y  $q$  respectivamente

$$\phi(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{Z} \quad \text{tq } |z| \leq 1$$

El polinomio  $\phi^*(B) := \phi(B)(1 - B)^d$  tiene una raíz de orden  $d$  en  $z = 1$

El proceso *ARIMA*  $(p, d, q)$   $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es estacionario  $\Leftrightarrow d = 0$ . En el caso  $d = 0$  se trata de un proceso *ARMA*  $(p, q)$

### 2.4.2. Procesos SARIMA: Procesos estacionales ARIMA

Los procesos *ARIMA*  $(p, d, q)$  permiten representar series con tendencia. Los procesos *SARIMA* permiten representar series que además tienen un comportamiento estacional. Los más sencillos representan series que aplicando el operador  $\nabla_d$  se convierten en estacionarias.

**Definición 2.9.** Si  $d$  y  $D$  son enteros no negativos, la serie de tiempo  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  sigue un proceso *SARIMA*  $(p, d, q) \times (P, D, Q)_s$  con periodo  $s$  si la serie diferenciada  $Y_t = (1 - B)^d (1 - B^s)^D X_t$  es un proceso *ARMA* causal definido por

$$\phi(B)\Phi(B^s)Y_t = \theta(B)\Theta(B^s)Z_t$$

donde  $\{Z_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$  y

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p$$

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_1 z - \dots - \Phi_P z^P$$

$$\theta(z) = 1 + \theta_1 z + \dots + \theta_q z^q$$

$$\Theta(z) = 1 + \Theta_1 z + \dots + \Theta_Q z^Q$$

Nótese que el proceso  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  es causal  $\Leftrightarrow \phi(z) \neq 0$  y  $\Phi(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| \leq 1$ .



# Capítulo 3

## Aplicación

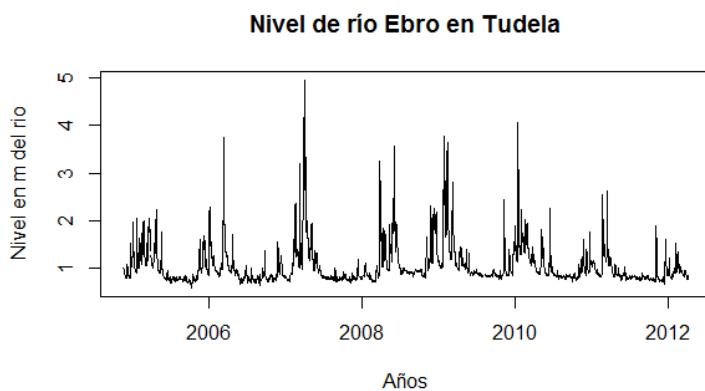
### 3.1. Análisis de la serie

#### 3.1.1. Introducción

Se desea realizar un análisis del nivel del río Ebro en el municipio de Tudela, Navarra. Para ello se cuenta con datos diarios desde el día 28 de noviembre de 2004 al 9 de abril de 2012<sup>1</sup>. Se va a trabajar con un fichero que tiene tres columnas: el año (de 2004 a 2012), el día (de 1 a 365) y el nivel diario del río Ebro en Tudela (medido en metros). Definimos los valores de la variable del nivel del río, 'NivelT', como un objeto de R de tipo serie de tiempo con comienzo en el día 332 del año 2004 Y fin el día 99 del año 2012. La frecuencia será 365 ya que los datos de los que se disponen son diarios.

#### 3.1.2. Análisis inicial

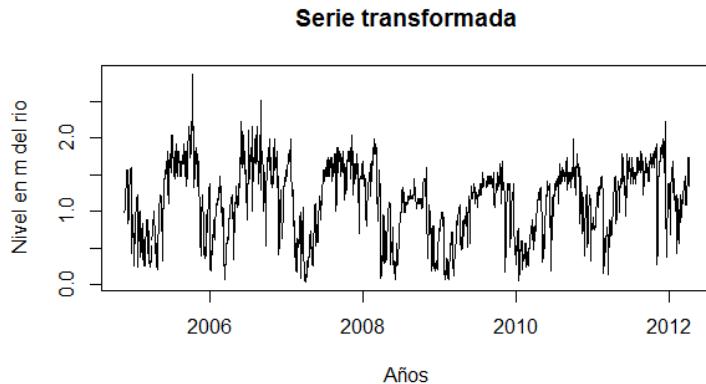
Una vez definida la serie se representa gráficamente para hacer un análisis previo de la misma.



En primer lugar se observa en el gráfico que la serie no es estacionaria. Presenta cierto comportamiento periódico anual. Esta periodicidad se podía intuir por la física de los datos ya que el nivel de un río se ve afectado principalmente por factores climatológicos los cuales varían según la estación del año. A simple vista el gráfico no presenta una tendencia claramente definida.

<sup>1</sup>Datos proporcionados por la Confederación Hidrográfica del Ebro, CHE

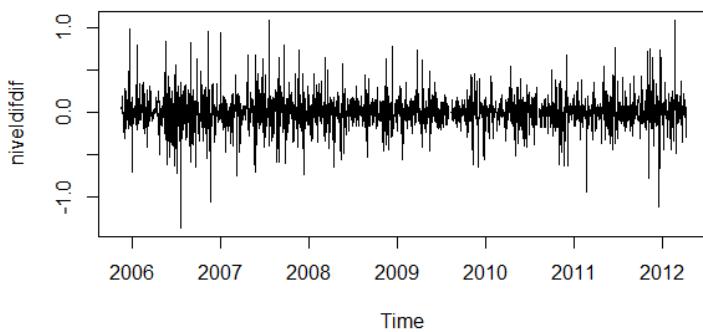
Se observa heterocedasticidad por lo tanto es necesario transformar la variable para salvar problemas de heterogeneidad en la varianza. Sea  $\{X_t\}$  la serie original se tiene que la mejor transformación para estabilizar la varianza es  $\frac{1}{X_t^2}$ , dicha transformación se ha obtenido de la familia de transformaciones de Box-Cox con la función 'boxCox' del paquete [5] de R. La siguiente gráfica muestra la serie transformada



Se observa una mejora notable en la heterocedasticidad de los datos.

### 3.2. Transformación de la serie a estacionaria: Diferenciación de la serie

Se observa que la serie transformada se trata de una serie con tendencia y componente estacional. Como se ha explicado en la sección 1.1.3, con el fin de convertir la serie a una estacionaria, primero se aplica el operador  $\nabla_d$  con  $d = 365$ , quedando así una serie sin componente estacional pero posiblemente con tendencia, y a continuación se aplica el operador  $\nabla$  las veces necesarias para eliminar la tendencia, en este caso se ha aplicado el operador  $\nabla$  una sola vez. La serie resultante posee la siguiente gráfica



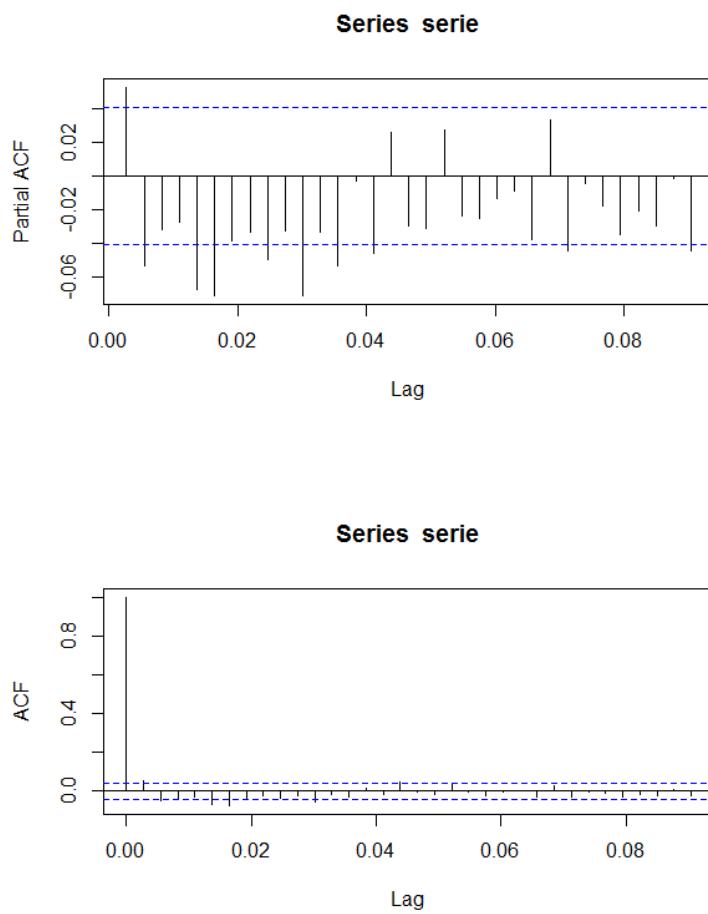
A continuación se desea comprobar si la serie obtenida es estacionaria o no. Para ello se utiliza el 'kpss.test' en el cual la hipótesis nula es la estacionariedad de la serie.

```
KPSS Test for Level Stationarity
data: niveldifdif
KPSS Level = 0.0011972, Truncation lag parameter = 11, p-value = 0.1
Warning message:
In kpss.test(niveldifdif) : p-value greater than printed p-value
```

El test devuelve un p-valor mayor que 0,1, por lo que no se rechaza que la serie sea estacionaria (hipótesis nula) a un nivel de significación  $\alpha = 0,5$ .

### 3.3. Selección del modelo

Para la selección preliminar del mejor modelo *ARMA* para modelizar la serie estacionaria, se utilizará el correlograma de la *ACF* y la *PACF*, y el criterio *AIC*. Los correlogramas resultan útiles ya que la *ACF* de un proceso *MA*( $q$ ) se anula para los retardos mayores que  $q$ , y la *PACF* de un proceso *AR*( $p$ ) se anula para los retardos mayores que  $p$ . Véase [8, pág. 163-165]



Se comprueba que en el caso del correlograma de la *PACF* para retardos mayores que 14, éste se anula y en el caso de la *ACF* es para retardos mayores que 6. Por lo tanto se va a seleccionar el modelo *ARMA*( $p, q$ ) con menor valor *AIC* entre todos los modelos *ARMA* con  $p \in [0, 14]$  y con  $q \in [0, 6]$ . El mínimo *AIC* se alcanza en el modelo *ARMA*(6, 5).

#### 3.3.1. Modelo seleccionado

El modelo seleccionado cuenta con la siguiente información:

```
Series: serie
ARIMA(6,0,5)           with non-zero mean
```

Coefficients:

ar1	ar2	ar3	ar4	ar5	ar6	ma1	ma2	ma3	
0.4559	-0.1119	0.2555	-0.5776	0.7507	-0.0745	-0.4402	0.0381	-0.2798	
s.e.	0.0737	0.0474	0.0344	0.0705	0.0422	0.0218	0.0735	0.0470	0.0350
ma4	ma5	mean							
0.5376	-0.8013	2e-04							
s.e.	0.0735	0.0407	8e-04						

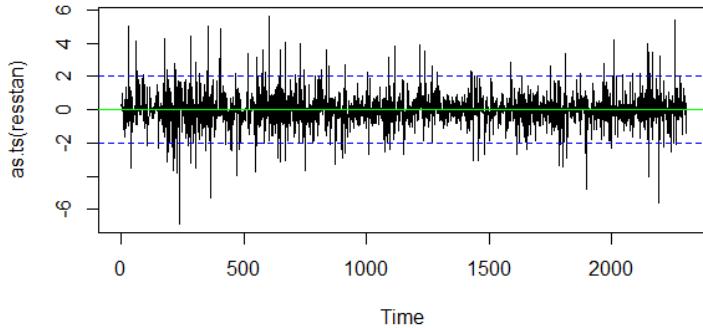
sigma^2 estimated as 0.03574: log likelihood=555.54  
AIC=-1085.08 AICc=-1084.92 BIC=-1010.27

### 3.4. Validación del modelo

En primer lugar se calculan los residuos del modelo seleccionado  $ARMA(2,2)$  y se transforman ya que se busca que tengan varianza igual a 1 con el fin de trabajar con los residuos reescalados.

```
> residuos<-ARMA65$resid[is.na(ARMA65$resid)==F]
> var(residuos)
[1] 0.0360381
> resstan<-residuos/(sum(residuos**2)/length(residuos))**0.5
> var(resstan) #varianza de los residuos estandarizados; sale muy próxima a 1
[1] 1.000429
```

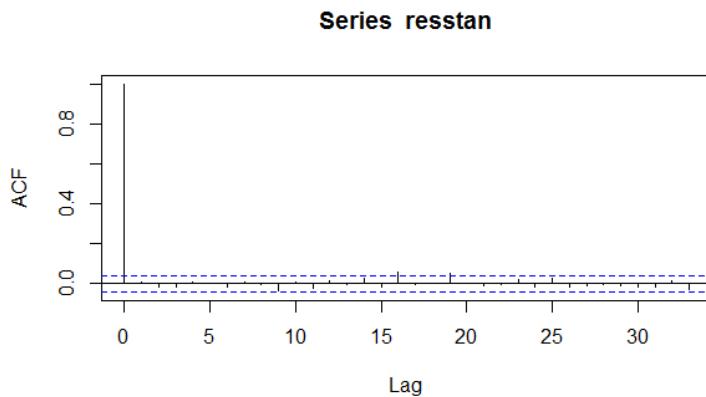
A continuación se debe comprobar que los residuos tienen media nula y varianza constante. Si se hace un estudio gráfico se observa que la serie se mueve en torno al cero aunque el análisis gráfico no permite asegurar la hipótesis de homocedasticidad. De acuerdo al resultado de [1], incluso en presencia de heterocedasticidad, los estimadores de un modelo  $ARMA$  son consistentes.



Ahora, se debe comprobar la incorrelación de los residuos. Se disponen de diferentes técnicas:

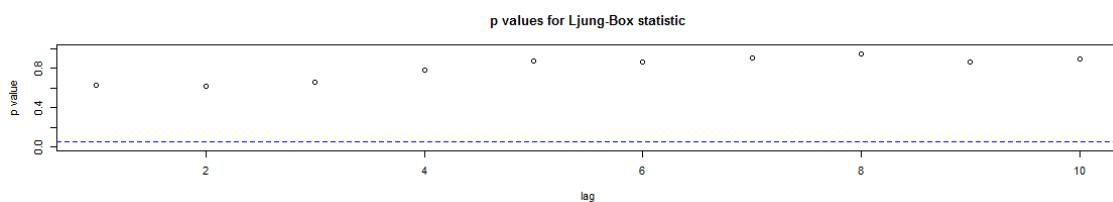
#### Gráfico ACF de la serie de los residuos

Si los residuos son incorrelados, aproximadamente el 95 % de los retardos (excepto el de orden 0) debe estar dentro de las bandas de confianza. En el correlagrama de la ACF se observa que solo dos retardos, el retardo 16 y el 19, que se salen fuera de la banda, y además lo hacen mínimamente, por lo que no se rechaza la incorrelación.



### Test de Ljung-Box

El test de Ljung-Box permite contrastar si los  $h$  primeros retardos de la función de autocorrelación de los residuos son nulos simultáneamente. Mediante un bucle se aplica el test de Ljung-Box para los  $h = 12$  primeros retardos. Los p-valores obtenidos mediante dicho test se representan en la siguiente gráfica



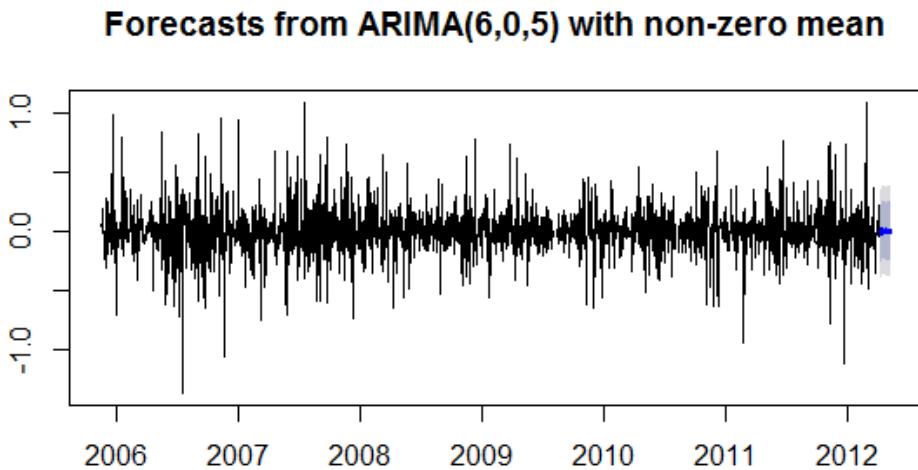
Todos son mayores que 0,05 por lo que no se rechaza la hipótesis nula, es decir los  $h$  primeros retardos son incorrelados simultáneamente, a un nivel de significación  $\alpha = 0,05$ .

## 3.5. Cálculo de predicciones

Uno de los principales intereses de estudiar el comportamiento de series temporales y buscar modelos que se ajusten a ellas, es poder predecir datos futuros. Se quieren hacer predicciones tanto de la serie estacionaria como de la serie original del mes siguiente, es decir, mayo de 2012.

### Predicción de la serie estacionaria

```
> predARMA65<-predict(ARMA65,30)
> predARMA65
Time Series:
Start = c(2012, 100)
End = c(2012, 129)
Frequency = 365
[1] -0.0040497982 -0.0235517394 -0.0061503438  0.0169979332 -0.0015990159
[6]  0.0245292487  0.0019294353 -0.0149035176  0.0134475181 -0.0082939823
[11]  0.0083750726  0.0164616945 -0.0145991660  0.0096878554 -0.0017597189
[16] -0.0081694249  0.0191636688 -0.0085296186  0.0013069713  0.0091722435
[21] -0.0151640825  0.0123654584  0.0011420996 -0.0083678943  0.0148134890
[26] -0.0111771753  0.0009117048  0.0102703523 -0.0131479282  0.0113394112
```



Las predicciones de la serie estacionaria se mueven en torno al cero al igual que la serie. El área gris clara representa el intervalo de confianza de las predicciones al 95 % y el oscuro al intervalo de confianza al 80 %.

### Predicción de la serie original

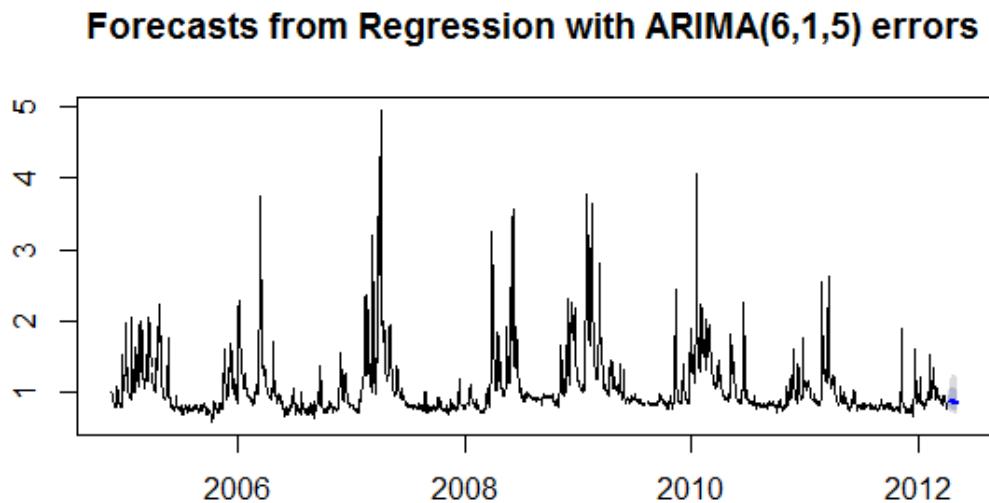
Utilizando la función 'Arima', con el fin de predecir los valores de la serie original, el autor del paquete [7] dice que dicha función permite un periodo estacional hasta 350 pero generalmente en la práctica se quedará sin memoria cada vez que el periodo sea mayor que 200. Por lo tanto, si se quieren obtener predicciones de la serie original no se puede utilizar el procedimiento descrito. Como alternativa, en vez de eliminar la componente estacional  $s_t$  diferenciando la serie original, se va a estimar y una vez estimada se le restará a la serie original para obtener una serie sin componente estacional. Hay muchos métodos para estimar la componente estacional pero en este caso se va a estimar  $s_t$  como suma de armónicos.

Así pues, las predicciones del nivel del río Ebro en el municipio de Tudela de los cinco primeros días del mes de mayo de 2012 son las siguientes.

	Point Forecast	Lo 80	Hi 80	Lo 95	Hi 95
2012.2712	0.8686082	0.8166249	0.9319771	0.7926284	0.9716833
2012.2740	0.8671177	0.7959707	0.9615414	0.7647538	1.0259203
2012.2767	0.8743753	0.7895470	0.9941357	0.7535809	1.0814403
2012.2795	0.8767288	0.7829571	1.0149854	0.7440948	1.1209478
2012.2822	0.8754646	0.7754839	1.0278096	0.7347319	1.1493181

La primera columna de la tabla obtenida muestra el día, la segunda la predicción del caudal del río, las dos siguientes muestran la cota inferior y superior del intervalo de confianza para el valor de la predicción al 80 % y las dos últimas lo mismo pero para el 95 %. Para ver el resto de las predicciones numéricas véase A.

La gráfica siguiente muestra la predicción completa para el mes de mayo de 2012.



El área gris clara representa el intervalo de confianza de las predicciones al 95 % y el oscuro al intervalo de confianza al 80 %. Se prevee un descenso del caudal del río Ebro en el municipio de Tudela para el mes de mayo de 2014.



# Bibliografía

- [1] BOUBACAR MAINASSARA Y. AND FRANCQ C., *Estimating structural VARMA models with uncorrelated but non-independent error terms* *Journal of Multivariate Analysis* **102** (2011), 496-505.
- [2] BOX G.E.P AND JENKINS G.M, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Revised Edition Holden-Day, San Francisco 1976.
- [3] BROCKWELL P.J AND DAVIS R.A, *Time Series: Theory and Methods*, Colorado State University,1987.
- [4] BROCKWELL P.J AND DAVIS R.A, *Introduction to Time Series and Forecasting*, Second Edition
- [5] FOX J. AND WEISBERG S., *An R Companion to Applied Regression* ,Second Edition. <http://socsciv.socsci.mcmaster.ca/jfox/Books/Companion>.
- [6] FULLER W.A, *Introduction to Statistical Time Series*, Iowa State University,1976.
- [7] HYNDMAN, R.J, *Forecasting functions for time series and linear models*. ,R package version 8.0 <http://github.com/robjhyndman/forecast>.
- [8] PEÑA D., *Análisis de series temporales*, Alianza Editorial. Madrid,2010.
- [9] R CORE TEAM. R FOUNDATION FOR STATISTICAL COMPUTING, *A Language and Environment for Statistical Computing*, Vienna,2017. <https://www.R-project.org/>.
- [10] SHUMWAY, R.H AND STOFFER D.S, *Time series analysis and its applications with R examples*, Second Edition. Springer,2006.
- [11] TRAPLETTI A. AND HORNIK K., *tseries: Time Series Analysis and Computational Finance* ,R package version 0.10-41. <https://CRAN.R-project.org/package=tseries>.
- [12] VILAR FERNÁNDEZ J.M, *Modelos estadísticos aplicados*, Segunda Edición. A Coruña, 2006.

