Aproximación de un número por racionales.
Fracciones continuas.

Miguel Cabezón Manchado
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Mario Pérez Riera.
27 de junio de 2017

Abstract

Let us start with a bit of irrational numbers history. The notion of irrational number early appeared in geometry. Ancient Greeks realised that rational numbers did not complete the whole straight line. Perhaps, the first one to verify it was the Greek Pythagoras of Samos (sixth century B.C.), who was famous because of his achievements in mathematics and philosophy. He noticed that the length of the hypotenuse of a right-angled triangle whose side length is equal to one could not have a rational value. Therefore, he deduced the existence of numbers which were unknown until that moment. The Pythagorean called them incommensurable numbers.

In the first chapter we see the approximation of irrationals by rationals. In order to study that, we start defining Farey fractions and some of their main properties until we are able to prove Dirichlet, Liouville and Hurwitz's theorems. In Dirichlet's theorem the important thing is to understand the relation between the irrationality of a number and its rational approximation, in this way when $\left|\alpha - \frac{a_n}{b_n}\right|$ "tends fastly to zero", α is irrational. Moreover, we see both some necessary and sufficient conditions for the irrationality of a number and the irrationality of number e. On the other hand, in Liouville's theorem we see that when the difference $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$ "tends too fast to zero" (more than $\frac{C(\alpha)}{q^n}$), then we prove that α is a transcendental number.

Finally, Hurwitz's theorem says that if α is an irrational number, then there are infinite fractions $\frac{p}{q}$ such that $0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$. In addition, we see that the constant $\sqrt{5}$ is the best possible in Hurwitz's theorem, which means that the theorem is not true if we introduce another constant M bigger than $\sqrt{5}$.

In the second chapter we deal with continued fractions. Continued fractions were firstly studied in the XVII and XVIII century. These fractions were found by chance. At first sight, developing a rational number as a continued fraction seems to be so easy and without importance, however it turns out that writing in this way provides us with different points of view in order to solve plenty of mathematical problems, especially in number theory.

The aim is to know how to find the first terms and the first convergents of the continued fraction of a given number . The convergents give somehow the best approximation by rationals, which allows improvements in Dirichlet's theorem in diophantine approximation.

In this chapter, we start with the Euclidean algorithm and we use it to build the expansion of any number by continued fractions. Studying uniqueness, we notice that any fixed rational number can only be showed as two simple continued fractions, $[a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j] = [a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j - 1, 1]$. After this, we introduce two sections which refer to infinite continued fractions and to irrational numbers. Both of them are very much related because any infinite continued fraction defines an irrational number and vice versa, the continued fraction of an irrational number is infinite. In these sections we add some properties which we will use to prove the main theorem of the chapter. This main theorem is compounded by several results of an infinite simple continued fraction's convergents. To some extent, this is a constructive, quantitative version of Dirichlet, Liouville and Hurwitz's theorems.

To finish this chapter, we concentrate on periodic continued fractions and we see that any periodic simple continued fraction is a cuadratic irrational number, and conversely. This result together with the third chapter allow us to see that the number e is not a cuadratic irrational number since its continued fraction is not periodic.

The third and last chapter is devoted to the number e. Let us start again with a bit of the history of the number e. The number e arises in mathematics almost thirty centuries after number π, in addition, its beginning was not geometrical as π but analitycal.

This irrational and transcendental number, basis of the natural logarithm, has its first reference with the Scottish mathematician John Napier in 1614, who introduced it in his work about logarithms. In the following years there was a lot of progress in logarithms, with mathematicians like Huygens and Mercator. Nevertheless, the first approximation to the numerical value of e was not through the notion of logarithm at all. This first value was obtained by Jacob Bernoulli while he was looking for the solution of the problem of compound interest, he reached the expression $e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. He used the binomial theorem to show that the limit lied between 2 and 3 so we could consider this to be the first approximation to e. However, the first time that e appears in its own right is in a letter that Leibniz wrote to Huygens although Leibniz used the notation b for what we now call e. But it was Leonhard Euler who introduced the number as e into the mathematic community. The letter e does not come from the first letter of its name, it is more likely that it comes from the word *exponential*, but it may come from the next vowel after a because Euler was already using the notation a in his work. Whatever the reason, the first appearance of e was in a letter that Euler wrote to Goldbach in 1731. Yet, it was in 1748 when Euler proved that $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Years later, Euler also developed the continued fraction of e and he was the first to prove its irrationality. Though in 1873 Charles Hermite proved its transcendence.

Once we have seen the importance of this number, in this work we develop the continued fraction of e, which is infinite so as a consequence e is irrational, and as it is not periodic e is not a cuadratic irrational number, as we have mentioned before. Finally, we prove that e is transcendental using some previous lemmas.

Índice general

Abstract III

1. Aproximación por racionales **1**
1.1. Teorema de Dirichlet . . . 1
1.1.1. Resultados previos . . . 1
1.1.2. Teorema de Dirichlet . . . 3
1.1.3. Consecuencias . . . 4
1.2. Teorema de Liouville . . . 5
1.2.1. Teorema de Liouville . . . 5
1.3. Teorema de Hurwitz . . . 6
1.3.1. Resultados previos . . . 6
1.3.2. Teorema de Hurwitz . . . 6

2. Fracciones continuas **9**
2.1. Fracciones continuas . . . 9
2.1.1. Algoritmo de Euclides . . . 9
2.1.2. Unicidad . . . 10
2.1.3. Fracciones continuas infinitas . . . 11
2.1.4. Números irracionales . . . 13
2.1.5. Teorema principal . . . 14
2.2. Fracciones continuas periódicas . . . 17
2.2.1. Fracción continua de $\sqrt{3}$. . . . 19

3. El número e **21**
3.1. Fracción continua e irracionalidad de e . . . 21
3.2. Trascendencia de e . . . 24

Bibliografía **27**

Capítulo 1

Aproximación por racionales

El concepto o la idea de número irracional apareció pronto en la geometría. Los antiguos griegos observaron que los números racionales no completaban la recta. Quizás el primero en constatarlo fue el célebre filósofo y matemático griego Pitágoras de Samos (582 a.C. $-$ 507 a.C.), quien estudiando un triángulo rectángulo con catetos de longitud uno, observó que la longitud de la hipotenusa de dicho triángulo no podía tener un valor racional. Con esto dedujo la existencia de unos números hasta entonces desconocidos. La Escuela Pitagórica llamó a dichos números inconmensurables. Aún hoy en día sigue habiendo números como la constante de Euler-Mascheroni, γ, que no sabemos si es racional o irracional.

En este capítulo utilizaremos principalmente resultados de [1], [2] y [6].

1.1. Teorema de Dirichlet

1.1.1. Resultados previos

Vamos a construir una tabla de la siguiente manera:

En la primera fila escribimos $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$. Para $n = 2, 3, \dots$ escribimos la fila n copiando la $(n-1)$ en orden pero insertando la fracción $\frac{a+c}{b+d}$ entre dos fracciones consecutivas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ de la fila $n-1$ siempre que $b+d \leq n$,

Por ejemplo, para la primera: como $1+1 \leq 2$ insertamos $\frac{0+1}{1+1}$ entre $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$ y así obtenemos la segunda fila: $\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$. Siguiendo de esta manera, la tercera (n=3) fila queda:$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$. Sucesivamente, las primeras cinco filas de la tabla son:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{0}{1} & & & & & & & & & & \frac{1}{1} \\[6pt]
\frac{0}{1} & & & & & \frac{1}{2} & & & & & \frac{1}{1} \\[6pt]
\frac{0}{1} & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} & & & \frac{1}{1} \\[6pt]
\frac{0}{1} & & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & & \frac{1}{1} \\[6pt]
\frac{0}{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{5} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{1}{1}
\end{array}
$$

Los elementos de la tabla se llaman fracciones de Farey. Los elementos que pertenecen a la fila n-ésima se dicen de orden n.

Proposición 1.1. *Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones consecutivas en la fila n-ésima, con $\frac{a}{b}$ a la izquierda y $\frac{c}{d}$ a la derecha, entonces $cb - ad = 1$.*

Demostración. Por inducción. Es cierto para n=1. Supongamos que es cierto para la fila $n-1$. Cualesquiera dos fracciones consecutivas en la fila n van a ser de una de las siguientes formas: $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ o $\frac{a}{b}$, $\frac{a+c}{b+d}$ o $\frac{a+c}{b+d}$, $\frac{c}{d}$ donde $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos consecutivas en la fila anterior. Entonces por hipótesis tenemos que $cb - ad = 1$, $(a+c)b - a(b+d) = cb - ad = 1$ o $c(b+d) - (a+c)d = cb - ad = 1$. Y queda probado por inducción. $\square$

Observación: con este resultado hemos visto que la fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible. Por lo tanto, todas las fracciones de Farey son irreducibles.

Proposición 1.2. *Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos fracciones de Farey de orden n consecutivas. Entonces $b+d \geq n+1$.*

Demostración. Lo hacemos por inducción. Es claro que para $n = 1$ las dos posibles fracciones de Farey son $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$, luego $1+1 \geq 1+1$. Ahora supongamos cierto para n.

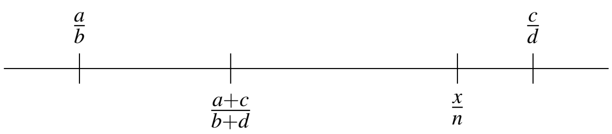
- Caso 1: $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ estaban ya en la fila $n-1$, entonces $b+d \geq n+1$ porque por construcción, si $b+d \leq n$, tendríamos que haber puesto la fracción intermedia $\frac{a+c}{b+d}$ en la fila n.
- Caso 2: $\frac{a}{b}$ o $\frac{c}{d}$ no estaban en la fila $n-1$, entonces una de las dos al menos es nueva en la fila n, entonces por inducción, $b \geq n$ o $d \geq n$, por lo que $b+d \geq n+1$. □

Corolario 1.1. *Las fracciones nuevas que aparecen en la fila n de la tabla de Farey son de la forma $\frac{x}{n}$.*

Pero lo que no está demostrado es que en la fila n aparezcan todas las fracciones irreducibles $\frac{x}{n}$. El siguiente resultado demuestra que sí:

Proposición 1.3. *Todas las fracciones irreducibles $\frac{x}{n}$ con $0 < x < n$ aparecen en la fila n de la tabla de Farey.*

Demostración. Sea $\frac{x}{n}$ una fracción irreducible, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{N}$, $0 < x < n$. Por construcción, no puede estar en la fila $n-1$ de la tabla, así que existirán dos fracciones consecutivas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ en la fila $n-1$ de modo que $\frac{a}{b} < \frac{x}{n} < \frac{c}{d}$. Queremos probar que $\frac{x}{n} = \frac{a+c}{b+d}$; si esto es así, $\frac{x}{n}$ aparecerá como nueva fracción en la fila n de la tabla de Farey. Supongamos, por ejemplo, que $\frac{a+c}{b+d} \leq \frac{x}{n}$; el caso $\frac{x}{n} \leq \frac{a+b}{c+d}$ es completamente análogo. La figura refleja esta situación, salvo que podría ser $\frac{a+c}{b+d} = \frac{x}{n}$.



Sabemos, por la proposición 1.2, que $b+d \geq n$, ya que $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son consecutivos en la fila $n-1$ de la tabla de Farey. Además,

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{bd} = \frac{1}{bd},$$

según la proposición 1.1. Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{bd} &= \left|\frac{c}{d} - \frac{x}{n}\right| + \left|\frac{x}{n} - \frac{a+c}{b+d}\right| + \left|\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}\right| \\ &= \frac{|cn-xd|}{dn} + \frac{|x(b+d)-n(a+c)|}{n(b+d)} + \frac{|b(a+c)-a(b+d)|}{b(b+d)} \\ &\geq \frac{1}{dn} + \frac{\varepsilon}{n(b+d)} + \frac{1}{b(b+d)}, \end{aligned}$$

donde $\varepsilon = |x(b+d)-n(a+c)| \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon \geq 0$. Para llegar al último paso hemos usado que $|cn-xd|$ es un entero no negativo que no puede ser 0 y que $|b(a+c)-a(b+d)| = 1$, según la proposición 1.1. Quitando denominadores, resulta

$$n(b+d) \geq b(b+d) + \varepsilon bd + dn,$$

de donde

$$n \geq b+d+\varepsilon d.$$

Puesto que $b+d \geq n$ y $\varepsilon \geq 0$, necesariamente debe ser $b+d = n$, $\varepsilon = 0$ y, finalmente, $\frac{x}{n} = \frac{a+c}{b+d}$, como queríamos probar. □

Acabamos de ver que la definición de fracciones de Farey propuesta (que es la de [6]) es la misma que si añadimos en la fila n todas las fracciones irreducibles con denominador hasta n (que es la definición de [3]).

Proposición 1.4. *Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones de Farey de orden n tales que no existe otra fracción de Farey de orden n entre ellas, entonces:*

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}\right| = \frac{1}{b(b+d)} \leq \frac{1}{b(n+1)}$$

y

$$\left|\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}\right| = \frac{1}{d(b+d)} \leq \frac{1}{d(n+1)}.$$

Demostración. Tenemos que

$$\left|\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}\right| = \frac{|ad-bc|}{b(b+d)} = \frac{1}{b(b+d)} \leq \frac{1}{b(n+1)};$$

por la proposición 1.1 y la 1.2. El segundo caso se prueba igual. □

Proposición 1.5. *Si n es un entero positivo y x es real, existe un número racional $\frac{a}{b}$ tal que $0 < b \leq n$ y $\left|x-\frac{a}{b}\right| \leq \frac{1}{b(n+1)}$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \leq x \leq 1$. Consideramos el conjunto de todas las fracciones de Farey de orden n y todas las fracciones del tipo $\frac{a+c}{b+d}$ descritas en la proposición 1.4. Para cualesquiera fracciones de Farey $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ el número x estará entre ambas o será igual a alguna de ellas, y por tanto, intercambiando $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ si fuera necesario, podemos decir que x está en el intervalo cerrado $[\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}]$. Entonces, por la proposición 1.4:

$$\left|x-\frac{a}{b}\right| \leq \left|\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}\right| \leq \frac{1}{b(n+1)}.$$ □

1.1.2. Teorema de Dirichlet

Teorema 1.1. *Si x es irracional, entonces existen infinitas fracciones $\frac{p}{q}$ (irreducibles) tales que $0 < \left|x-\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.*

Demostración. Para cada $n = 1,2,\ldots$ podemos encontrar por la proposición 1.5 a_n y b_n tal que $0 < b_n \leq n$ y

$$\left|x-\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{1}{b_n(n+1)} < \frac{1}{b_n^2}.$$

Muchos de los $\frac{a_n}{b_n}$ serán iguales entre ellos pero habrá infinitos diferentes. Ya que si no hubiera infinitos distintos, habría solo un número finito de valores distintos de $\left|x-\frac{a_n}{b_n}\right|$, $n = 1,2,\ldots$ Entonces habría entre esos valores un valor más pequeño de $\left|x-\frac{a_n}{b_n}\right|$ para algún n, sea $n = k$. Tendríamos que $\left|x-\frac{a_n}{b_n}\right| \geq \left|x-\frac{a_k}{b_k}\right|$ para todo $n = 1,2,\ldots$ Pero $\left|x-\frac{a_k}{b_k}\right| > 0$ ya que x es irracional y podemos encontrar para n suficientemente grande que

$$\frac{1}{n+1} < \left|x-\frac{a_k}{b_k}\right|.$$

Esto lleva a una contradicción ya que ahora tendríamos:

$$\left|x-\frac{a_k}{b_k}\right| \leq \left|x-\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{1}{b_n(n+1)} \leq \frac{1}{n+1} < \left|x-\frac{a_k}{b_k}\right|.$$ □

La condicion de que x sea irracional es necesaria ya que si x es cualquier número racional, podemos escribir $x = \frac{r}{s}$, $s > 0$. Entonces si $\frac{a}{b}$ es cualquier fracción tal que $\frac{a}{b} \neq \frac{r}{s}$ y $b > s$, tenemos:

$$\left|\frac{r}{s} - \frac{a}{b}\right| = \frac{|rb - as|}{sb} \geq \frac{1}{sb} > \frac{1}{b^2}$$

Entonces todas las fraciones $\frac{a}{b}$, $b > 0$ que satisfacen $\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^2}$ tienen denominadores $b \leq s$ y solo puede haber un número finito de esas fracciones.

1.1.3. Consecuencias

Proposición 1.6. *Un número real x es irracional si y solo si existe una sucesión de racionales $\frac{p_n}{q_n}$, $n = 1, 2, 3 \ldots$ tal que*

$$0 < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = o\left(\frac{1}{q_n}\right)$$

Demostración.
$\Longrightarrow$) Si x es irracional, por el teorema de Dirichlet existen infinitas fracciones $\frac{p_n}{q_n}$ tales que:

$$0 < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}.$$

$\Longleftarrow$) Sea $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{P}{Q}$ con $Q \in \mathbb{N}$, y sean $\frac{p_n}{q_n}$ tales que:

$$0 < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|.$$

Entonces,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|Pq_n - Qp_n|}{Qq_n} \geq \frac{1}{Qq_n}$$

porque $|Pq_n - Qp_n|$ es no negativo, entero y distinto de cero. Por tanto, $|x - \frac{p_n}{q_n}|$ no es $o\left(\frac{1}{q_n}\right)$, porque:

$$\frac{\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|}{\frac{1}{q_n}} = q_n\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = q_n\frac{|Pq_n - Qp_n|}{Qq_n} \geq \frac{1}{Q} \nrightarrow 0.$$ □

Proposición 1.7. *El número e es irracional.*

Demostración. Sea la sucesión de racionales $\frac{p_N}{q_N} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$. Por definición $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Nos fijamos que $q_N = N!$, por tanto multiplicando por $N!$ tenemos que:

$$N!\left(e - \frac{p_N}{q_N}\right) = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \ldots$$

Como el termino derecho es distinto de cero, llegamos a:

$$0 < N!\left|e - \frac{p_N}{q_N}\right| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \cdots < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^n} = \frac{1}{N}.$$

Por tanto hemos llegado a que $\left|e - \frac{p_N}{q_N}\right| = o\left(\frac{1}{q_N}\right)$, ya que $q_N\left|e - \frac{p_N}{q_N}\right| = \frac{1}{N} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$, por lo que por el resultado anterior e es irracional. □

1.2. Teorema de Liouville

En la demostración de la proposición 1.6 probamos que si x es un número racional entonces $\left|x-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{C(x)}{q}$ para cualquier fracción $\frac{p}{q} \neq x$. El teorema de Liouville es una extensión de este resultado a los números algebraicos.

1.2.1. Teorema de Liouville

Teorema 1.2. *Si α es algebraico de orden n, entonces existe alguna constante $C(\alpha) > 0$ tal que, para cualquier fracción $\frac{p}{q} \neq \alpha$ (donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$), se verifica*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{C(\alpha)}{q^n}.$$

Demostración. Sea α un número algebraico y $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ su polinomio mínimo. Sea $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $\frac{p}{q} \neq \alpha$. Aplicando el teorema del valor medio tenemos que existe ξ entre $\frac{p}{q}$ y α tal que

$$P'(\xi)(\alpha-\frac{p}{q}) = P(\alpha)-P(\frac{p}{q}).$$

Como $P(\alpha) = 0$, tenemos

$$P'(\xi)(\alpha-\frac{p}{q}) = -P(\frac{p}{q}).$$

Tomando valores absolutos,

$$\left|P'(\xi)\right|\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| = \left|P(\frac{p}{q})\right|.$$

Como P tiene coeficientes enteros y es de grado n, el valor de $P(\frac{p}{q})$ es un número racional con denominador q^n. Como P es irreducible, $P(\frac{p}{q}) \neq 0$. Por tanto, $\left|P(\frac{p}{q})\right| \geq \frac{1}{q^n}$. Luego siguiendo lo anterior, nos queda:

$$\left|P'(\xi)\right|\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| = \left|P(\frac{p}{q})\right| \geq \frac{1}{q^n},$$

es decir:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{1/|P'(\xi)|}{q^n}.$$

Otra vez, como P es irreducible, no tiene una raíz doble en α, luego $P'(\alpha) \neq 0$. Entonces, para ξ suficientemente cercano a α su derivada $P'(\xi)$ es distinta de cero. Además, para q suficientemente grande y ξ entre α y la mejor aproximación racional $\frac{p}{q}$ a α, $|P'(\xi)| \leq 2|P'(\alpha)|$.

Por tanto, existe un q_0 tal que para $q \geq q_0$:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{1/|P'(\xi)|}{q^n} \geq \frac{1/(2|P'(\alpha)|)}{q^n}.$$

Si tomamos $C(\alpha) = 1/(2|P'(\alpha)|)$ ya lo tenemos. □

Corolario 1.2. *Los números α que se «aproximan bien» por números racionales, en el sentido de que para todo $n \geq 1$ y para toda constante positiva C, existe un racional $\frac{p}{q}$ tal que*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^n}$$

son trascendentes, es decir, no algebraicos sobre $\mathbb{Q}$.

Corolario 1.3. *El número $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0{,}110001000000000000000001000\ldots$ es trascendente.*

Demostración. Sea
$$\frac{p}{q} = \sum_{n=1}^{N} 10^{-n!} \qquad \text{y} \qquad q = 10^{N!}.$$
Tenemos que
$$\begin{aligned}\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| &= \sum_{n=N+1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10^{(N+1)!}} + \left(\frac{1}{10^{(N+1)!}}\right)^{N+2} + \left(\frac{1}{10^{(N+1)!}}\right)^{(N+2)(N+3)} + \dots \\ &= \frac{1}{10^{(N+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{N+2}} + \frac{1}{10^{(N+2)(N+3)}} + \dots\right) \leq \frac{1}{10^{(N+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots\right) \\ &< \frac{2}{10^{(N+1)!}} = \frac{2}{q^{N+1}}.\end{aligned}$$
Ahora, dados n y C como en el corolario anterior solo hay que elegir N tal que $\frac{2}{q^{N+1}} \leq \frac{C}{q^n}$, es decir, $\frac{2}{C} \leq 10^{N!(N+1-n)}$. Por el corolario, α es trascendente. □

1.3. Teorema de Hurwitz

El teorema de Hurwitz que vamos a ver ahora no mejora el orden de aproximación cuadrático del teorema de Dirichlet, pero da más precisión al resultado.

1.3.1. Resultados previos

Lema 1.1. *Si x e y son enteros positivos, entonces no pueden darse a la vez las siguientes dos desigualdades:*
$$\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)$$
y
$$\frac{1}{x(x+y)} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+y)^2}\right).$$

Demostración. Las dos desigualdades se pueden escribir como:
$$\sqrt{5}xy \geq y^2 + x^2, \qquad \sqrt{5}x(x+y) \geq (x+y)^2 + x^2.$$
Sumando ambas desigualdades, tenemos que $\sqrt{5}(x^2 + 2xy) \geq 3x^2 + 2xy + 2y^2$, así que $2y^2 - 2(\sqrt{5} - 1)xy + (3 - \sqrt{5})x^2 \leq 0$. Multiplicando esto por 2, resulta $4y^2 - 4(\sqrt{5} - 1)xy + (5 - 2\sqrt{5} + 1)x^2 \leq 0$, $(2y - (\sqrt{5} - 1)x)^2 \leq 0$. Esto es imposible para enteros positivos x e y ya que $\sqrt{5}$ es irracional. □

1.3.2. Teorema de Hurwitz

Teorema 1.3. *Si ξ es irracional, entonces existen infinitas fracciones $\frac{p}{q}$ tales que*
$$0 < \left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}. \tag{1.1}$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Existen dos fracciones consecutivas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ en la sucesión de Farey de orden n tales que $\frac{a}{b} < \xi < \frac{c}{d}$. Entonces o $\xi < \frac{a+c}{b+d}$ o $\xi > \frac{a+c}{b+d}$.

Caso I: $\xi < \frac{a+c}{b+d}$. Supongamos que:
$$\xi - \frac{a}{b} \geq \frac{1}{b^2\sqrt{5}}, \qquad \frac{a+c}{b+d} - \xi \geq \frac{1}{(b+d)^2\sqrt{5}}, \qquad \frac{c}{d} - \xi \geq \frac{1}{d^2\sqrt{5}}.$$

Sumando las desigualdades obtenemos:

$$\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\geq\frac{1}{d^2\sqrt{5}}+\frac{1}{b^2\sqrt{5}},\qquad \frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}\geq\frac{1}{(b+d)^2\sqrt{5}}+\frac{1}{b^2\sqrt{5}}.$$

Entonces, teniendo en cuenta la proposición 1.1,

$$\frac{1}{bd}=\frac{cb-ad}{bd}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\geq\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{d^2}\Big)$$

y

$$\frac{1}{b(b+d)}=\frac{(a+c)b-(b+d)a}{b(b+d)}\geq\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{(b+d)^2}\Big).$$

Estas dos desigualdades contradicen el lema anterior. Por eso al menos una entre $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{a+c}{b+d}$ servirá como $\frac{p}{q}$ en este caso.

Caso II: $\xi>\frac{a+c}{b+d}$. Supongamos que:

$$\xi-\frac{a}{b}\geq\frac{1}{b^2\sqrt{5}},\qquad \xi-\frac{a+c}{b+d}\geq\frac{1}{(b+d)^2\sqrt{5}},\qquad \frac{c}{d}-\xi\geq\frac{1}{d^2\sqrt{5}}.$$

Sumando como antes obtenemos:

$$\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\geq\frac{1}{d^2\sqrt{5}}+\frac{1}{b^2\sqrt{5}},\qquad \frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}\geq\frac{1}{d^2\sqrt{5}}+\frac{1}{(b+d)^2\sqrt{5}},$$

lo que también contradice el lema 1.1, por lo que otra vez una entre $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{a+c}{b+d}$ servirá como $\frac{p}{q}$.

Hemos probado la existencia de algún $\frac{p}{q}$ que satisface la condición (1.1). Este $\frac{p}{q}$ depende de nuestra elección de n. De hecho, $\frac{p}{q}$ es o $\frac{a}{b}$ o $\frac{c}{d}$ o $\frac{a+b}{c+d}$, donde $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones consecutivas en la sucesión de Farey de orden n, y $\frac{a}{b}<\xi<\frac{c}{d}$. Usando la proposición 1.4 vemos que:

$$\Big|\xi-\frac{p}{q}\Big|<\Big|\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\Big|=\Big|\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}\Big|+\Big|\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}\Big|\leq\frac{1}{d(n+1)}+\frac{1}{b(n+1)}\leq\frac{2}{n+1}.$$

Queremos establecer que existen infinitas $\frac{p}{q}$ que cumplen (1.1).

Supongamos que tenemos un $\frac{p_1}{q_1}$ que satisface (1.1). Entonces $\Big|\xi-\frac{p_1}{q_1}\Big|$ es positivo, y podemos elegir $n>2\Big/\Big|\xi-\frac{p_1}{q_1}\Big|$. La sucesión de Farey de orden n entonces nos da un $\frac{p}{q}$ que satisface (1.1) y, tal que

$$\Big|\xi-\frac{p}{q}\Big|\leq\frac{2}{n+1}<\Big|\xi-\frac{p_1}{q_1}\Big|.$$

Esto prueba que $\frac{p}{q}\neq\frac{p_1}{q_1}$, luego existen infinitos números racionales $\frac{p}{q}$ que cumplen la condición (1.1). $\square$

¿Podemos mejorar el teorema anterior? Es decir, ¿podemos sustituir $\sqrt{5}$ por una constante más grande? Terminamos este capítulo viendo que no.

Proposición 1.8. *Sea $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (es decir, el número áureo) y sea M un número real positivo. Entonces:*

- *Si $M>\sqrt{5}$, solo puede existir una cantidad finita de racionales $\frac{p}{q}$ tales que*

$$\Big|\varphi-\frac{p}{q}\Big|<\frac{1}{Mq^2}.$$

- *Si $M\geq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, no hay ningún racional que cumpla la desigualdad anterior.*

Demostración. Tenemos el polinomio $x^2-x-1=0$ cuyas raíces son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, por tanto: $x^2-x-1=(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2})$. Para enteros p,q con $q>0$,

$$0\neq\left|\frac{p}{q}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\left|\frac{p}{q}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{5}\right|=\left|\frac{p^2}{q^2}-\frac{p}{q}-1\right|=\left|\frac{p^2-pq-q^2}{q^2}\right|\geq\frac{1}{q^2}.$$

Esta última desigualdad se debe a que $|p^2-pq-q^2|$ es un entero no nulo. Luego

$$\frac{1}{q^2}\leq\left|\frac{p}{q}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|\left(\left|\frac{p}{q}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|+\sqrt{5}\right).$$

En resumen tenemos que:

$$\left|\varphi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{Mq^2}\implies\frac{1}{q^2}<\frac{1}{Mq^2}\left(\frac{1}{Mq^2}+\sqrt{5}\right)\implies M<\frac{1}{Mq^2}+\sqrt{5}.$$

Si existen infinitos racionales $\frac{p}{q}$ que cumplen $\left|\varphi-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{Mq^2}$, es inmediato que corresponden a infinitos valores de q, de donde $M\leq\sqrt{5}$. Por tanto, si $M>\sqrt{5}$ no existen infinitos q cumpliendo esa condición, luego es una cantidad finita.

Para la segunda parte, si existe al menos un $\frac{p}{q}$ con $q>1$, entonces $M<\frac{1}{M}+\sqrt{5}$, es decir, $M^2-\sqrt{5}M-1<0$ y de aquí también es inmediato que $M<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Por tanto, hemos visto que si $M\geq\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ no hay ningún racional. □

Capítulo 2

Fracciones continuas

Las fracciones continuas se empezaron a estudiar en el siglo XVII y XVIII. Estas fracciones se encontraron por casualidad. A primera vista, desarrollar un racional en la forma de una fracción continua parece lo más simple y menos significante, sin embargo resulta que escribirlo de esta manera proporciona distintos puntos de vista en muchos problemas matemáticos, en especial en los de teoría de números.

En este capítulo veremos por ejemplo en el apartado d) del teorema principal que el convergente $\frac{P_n}{Q_n}$ es la mejor aproximación a ξ por todas las fracciones racionales con denominador Q_n o menor.

Antes de empezar con el tema, vamos a mostrar como ejemplo algunas de las posibles aproximaciones del número π usando su fracción continua. Como se conocen más de 22 billones de cifras de π, cogemos las primeras, así $\pi = 3{,}141592654\dots$

Entonces,

$$\pi = 3{,}141592654\ldots = 3 + \frac{1}{7{,}062513305\ldots} \simeq 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}.$$

Esta aproximación a π es bastante útil debido a su gran simplicidad. El error es menor que 0,0013. Ahora, afinando un poco más,

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15{,}96695945\ldots}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1{,}003417099\ldots}}} \simeq 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \cdots = 3 + \frac{16}{113} = \frac{355}{113}.$$

Esta conocida aproximación de π es bastante buena ya que el error que cometemos es bastante pequeño (del orden de 10^{-7}). Además el numerador y denominador son números sencillos.

En este capítulo utilizaremos resultados de [4], [6], [7] y [8].

2.1. Fracciones continuas

2.1.1. Algoritmo de Euclides

Dada cualquier fracción racional $\frac{u_0}{u_1}$ con $(u_0, u_1) = 1$ y $u_1 > 0$, aplicamos el algoritmo de Euclides y obtenemos:

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_1 a_0 + u_2, \qquad 0 < u_2 < u_1;\\
u_1 &= u_2 a_1 + u_3, \qquad 0 < u_3 < u_2;\\
u_2 &= u_3 a_2 + u_4, \qquad 0 < u_4 < u_3;\\
&\dots\\
u_{j-1} &= u_j a_{j-1} + u_{j+1}, \qquad 0 < u_{j+1} < u_j;\\
u_j &= u_{j+1} a_j.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Si escribimos ξ_i en lugar de $\frac{u_i}{u_{i+1}}$ para todos los valores de i entre $0 \leq i \leq j$, las ecuaciones (2.1) se pueden poner como:

$$\xi_i = a_i + \frac{1}{\xi_{i+1}}, \qquad 0 \leq i \leq j-1; \qquad \xi_j = a_j \tag{2.2}$$

Si cogemos las dos primeras ecuaciones para $i = 0$ e $i = 1$, obtenemos:

$$\xi_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{\xi_2}}$$

De aquí, sustituimos ξ_2 por su valor en (2.2) y continuamos reemplazando $\xi_3, \xi_4, \ldots$ para obtener:

$$\frac{u_0}{u_1} = \xi_0 = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_{j-1} + \frac{1}{a_j}}}}}} \tag{2.3}$$

Este es el desarrollo en *fracción continua* de ξ_0 o de $\frac{u_0}{u_1}$. Los enteros a_i se llaman *cocientes parciales*. Por construcción tenemos que $\frac{u_0}{u_1}$ tiene denominador u_1 positivo, pero no podemos suponer lo mismo para u_0. Entonces, a_0 puede ser positiva, negativa o cero. Sin embargo, como $0 < u_2 < u_1$ deducimos que el cociente a_1 es positivo y de manera similar, $a_2, a_3, \ldots, a_j$ son enteros positivos. En el caso $j > 1$, tenemos que $a_j = \frac{u_j}{u_{j+1}}$ y $0 < u_{j+1} < u_j$ implica que $a_j > 1$.

Usaremos la notación $[a_0, a_1, \ldots, a_j]$ para referirnos a la fracción continua (2.3). En general, si $x_0, x_1, \ldots, x_j$ son números reales, todos positivos excepto quizás x_0, escribiremos

$$[x_0, x_1, \ldots, x_j] = x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{x_{j-1} + \frac{1}{x_j}}}}}}$$

Una fracción continua se dice *simple* si todos los x_i son enteros. Las siguientes expresiones pueden resultar útiles:

$$[x_0, x_1, \ldots, x_j] = x_0 + \frac{1}{[x_1, \ldots, x_j]} = \left[x_0, x_1, \ldots, x_{j-2}, x_{j-1} + \frac{1}{x_j}\right].$$

2.1.2. Unicidad

Vemos que por ejemplo la fracción $\frac{51}{22}$ se puede desarrollar como fracción continua como $\frac{51}{22} = [2, 3, 7]$. Sin embargo también se puede expresar como $[2, 3, 6, 1]$, pero resulta que son las dos únicas representaciones posibles de $\frac{51}{22}$. En general, cualquier fracción continua simple tiene una forma alternativa:

$$\frac{u_0}{u_1} = [a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j] = [a_0, a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j - 1, 1]. \tag{2.4}$$

El siguiente resultado establece que solo hay dos desarrollos de un número racional en fracción simple:

Teorema 2.1. *Si $[a_0, a_1, \ldots, a_j] = [b_0, b_1, \ldots, b_n]$, donde estas fracciones continuas finitas son simples, y si $a_j > 1$ y $b_n > 1$, entonces $j = n$ y $a_i = b_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.*

Demostración. Escribimos $y_i = [b_i, b_{i+1}, \dots, b_n]$ y observamos que:

$$y_i = [b_i, b_{i+1}, \dots, b_n] = b_i + \frac{1}{[b_{i+1}, b_{i+2}, \dots, b_n]} = b_i + \frac{1}{y_{i+1}}. \tag{2.5}$$

Entonces tenemos que $y_i > b_i$ e $y_i > 1$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$; además, $y_n = b_n > 1$. Consecuentemente, $b_i = [y_i]$ con $0 \leq i \leq n$. Si definimos $\xi_i = [a_i, a_{i+1}, \dots, a_j]$, entonces llegamos a que $a_i = [\xi_i]$, $0 \leq i \leq j$. En particular, $b_0 = [y_0] = [\xi_0] = a_0$

Esto nos da el comienzo de la demostración por inducción. Ahora supongamos que $\xi_i = y_i$ y $a_i = b_i$ para algún i y demostremos que $\xi_{i+1} = y_{i+1}$ y $a_{i+1} = b_{i+1}$. Para verlo, usamos las ecuaciones (2.2) y (2.5) y sus análogas con ξ_i para escribir:

$$\frac{1}{\xi_{i+1}} = \xi_i - a_i = y_i - b_i = \frac{1}{y_{i+1}} \implies \xi_{i+1} = y_{i+1} \implies a_{i+1} = [\xi_{i+1}] = [y_{i+1}] = b_{i+1}$$

Debemos probar que las fracciones continuas tienen la misma longitud, esto es $j = n$. Supongamos que $j < n$. Por el argumento anterior tenemos que $\xi_j = y_j$, $a_j = b_j$. Pero $\xi_j = a_j$ e $y_j > b_j$ por (2.5), y por tanto tenemos una contradicción. Si hubiésemos supuesto que $j > n$, habríamos llegado a una contradicción de manera simétrica, y por tanto, $j = n$ y el teorema está probado. □

Teorema 2.2. *Cualquier fracción continua finita simple representa un número racional. Recíprocamente, cualquier número racional se puede expresar como una fracción continua finita simple, exactamente de dos maneras.*

Demostración. La primera afirmación se puede probar por inducción en el número de términos de la fracción continua, usando la fórmula

$$[a_0, a_1, \dots, a_j] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_j]}.$$

La segunda afirmación se sigue del desarrollo de $\frac{u_0}{u_1}$ en una fracción continua finita simple de la sección 2.1.1, junto a las ecuaciones (2.4) y (2.1). □

2.1.3. Fracciones continuas infinitas

Sean $a_0, a_1, a_2, \dots$ una sucesión infinita de enteros, todos positivos salvo quizás a_0. Definimos dos sucesiones de enteros $\{P_n\}$ y $\{Q_n\}$ inductivamente como sigue:

$$\begin{aligned} &P_{-2} = 0, \quad P_{-1} = 1, \quad P_i = a_i P_{i-1} + P_{i-2} \quad \text{para } i \geq 0; \\ &Q_{-2} = 1, \quad Q_{-1} = 0, \quad Q_i = a_i Q_{i-1} + Q_{i-2} \quad \text{para } i \geq 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Observemos que $Q_0 = 1$, $Q_1 = a_1$, así que $1 = Q_0 \leq Q_1 < Q_2 < Q_3 < \dots < Q_n < \dots$

Teorema 2.3. *Para cualquier número real positivo x,*

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x] = \frac{xP_{n-1} + P_{n-2}}{xQ_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

Demostración. Si $n = 0$, el resultado hay que interpretarlo como

$$x = \frac{xP_{-1} + P_{-2}}{xQ_{-1} + Q_{-2}},$$

lo cual es verdad por las ecuaciones (2.6). Si $n = 1$, el resultado es

$$[a_0, x] = \frac{xP_0 + P_{-1}}{xQ_0 + Q_{-1}},$$

lo cual se puede comprobar con (2.6) y el hecho de que $[a_0, x] = a_0 + \frac{1}{x}$.

Establecemos el teorema en general por inducción. Suponiendo que el resultado se cumple para $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, x]$, vemos que:

$$\begin{aligned}[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, x] &= \left[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x}\right] \\ &= \frac{(a_n + \frac{1}{x})P_{n-1} + P_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{x})Q_{n-1} + Q_{n-2}} \\ &= \frac{x(a_nP_{n-1} + P_{n-2}) + P_{n-1}}{x(a_nQ_{n-1} + Q_{n-2}) + Q_{n-1}} = \frac{xP_n + P_{n-1}}{xQ_n + Q_{n-1}}. \qquad \square\end{aligned}$$

Teorema 2.4. *Si definimos $r_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ para todos los enteros $n \geq 0$, entonces $r_n = \frac{P_n}{Q_n}$.*

Demostración. Aplicamos el teorema 2.3 con a_n en vez de x y entonces con las ecuaciones (2.6) llegamos a:

$$r_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{a_nP_{n-1} + P_{n-2}}{a_nQ_{n-1} + Q_{n-2}} = \frac{P_n}{Q_n}. \qquad \square$$

Teorema 2.5. *Para todo $i \geq 1$ se cumplen las siguientes ecuaciones:*

$$P_iQ_{i-1} - P_{i-1}Q_i = (-1)^{i-1} \quad y \quad r_i - r_{i-1} = \frac{(-1)^{i-1}}{Q_iQ_{i-1}} \quad para\ i \geq 1;$$

$$P_iQ_{i-2} - P_{i-2}Q_i = (-1)^i a_i \quad y \quad r_i - r_{i-2} = \frac{(-1)^i a_i}{Q_iQ_{i-2}} \quad para\ i \geq 2.$$

La fracción $\frac{P_i}{Q_i}$ es irreducible, esto es, $(P_i, Q_i) = 1$.

Demostración. Las ecuaciones (2.6) implican que $P_1Q_0 - P_0Q_1 = 1$. Continuando la demostración por inducción, suponemos que $P_{i-1}Q_{i-2} - P_{i-2}Q_{i-1} = (-1)^{i-2}$. Otra vez usamos (2.6) para obtener $P_iQ_{i-1} - P_{i-1}Q_i = (a_iP_{i-1} + P_{i-2})Q_{i-1} - P_{i-1}(a_iQ_{i-1} + Q_{i-2}) = -(P_{i-1}Q_{i-2} - P_{i-2}Q_{i-1}) = (-1)^{i-1}$. Esto prueba el primer resultado del teorema. Dividimos por $Q_{i-1}Q_i$ para llegar al segundo resultado, la fórmula para $r_i - r_{i-1}$. Además, la fracción $\frac{P_i}{Q_i}$ es irreducible ya que cualquier factor de P_i y Q_i es también un factor de $(-1)^{i-1}$.

Las otras fórmulas se pueden derivar de la misma manera de (2.6), aunque en este caso no se necesita inducción. $P_iQ_{i-2} - P_{i-2}Q_i = (a_iP_{i-1} + P_{i-2})Q_{i-2} - P_{i-2}(a_iQ_{i-1} + Q_{i-2}) = a_i(P_{i-1}Q_{i-2} - P_{i-2}Q_{i-1}) = (-1)^i a_i$. La igualdad final se puede obtener dividiendo por $Q_{i-2}Q_i$. $\square$

Teorema 2.6. *Los valores r_n definidos en el teorema 2.4 satisfacen la cadena infinita de desigualdades*

$$r_0 < r_2 < r_4 < r_6 < \cdots < r_7 < r_5 < r_3 < r_1.$$

Demostración. Las igualdades del teorema 2.5 para $r_i - r_{i-1}$ y $r_i - r_{i-2}$ implican que $r_{2j} < r_{2j+2}, r_{2j-1} > r_{2j+1}$ y $r_{2j} < r_{2j-1}$ ya que los Q_i son positivos para $i \geq 0$ y los a_i son positivos para $i \geq 1$. Entonces tenemos $r_0 < r_2 < r_4 < \cdots$ y $r_1 > r_3 > r_5 > \cdots$. Para probar que $r_{2n} < r_{2j-1}$, ponemos los resultados anteriores juntos de la forma:

$$r_{2n} < r_{2n+2j} < r_{2n+2j-1} < r_{2j-1}. \qquad \square$$

La sucesión $r_0, r_2, r_4, \ldots$ es monótona creciente y está acotada superiormente por r_1 por lo que tiene límite. Análogamente, la sucesión $r_1, r_3, r_5, \ldots$ es monótona decreciente y está acotada inferiormente por r_0, por lo que también tiene límite. Estos dos límites son el mismo ya que, por el teorema 2.5, la diferencia $r_i - r_{i-1}$ tiende a cero cuando $i \to \infty$ ya que los enteros Q_i aumentan con i.

Estos teoremas sugieren la siguiente definición.

Definición. Una sucesión infinita $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de enteros, todos positivos salvo quizás a_0, determina una *fracción continua infinita simple* $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$. El valor de $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ se define como $\lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Teorema 2.7. *El valor de cualquier fracción continua simple infinita* $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ *es irracional.*

Demostración. Escribiendo $\theta = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ vemos por el teorema 2.6 que θ se encuentra entre r_n y r_{n+1}, así que $0 < |\theta - r_n| < |r_{n+1} - r_n|$. Multiplicando por Q_n, y usando el resultado del teorema 2.5 que nos dice que $|r_{n+1} - r_n| = (Q_n Q_{n+1})^{-1}$, tenemos:

$$0 < |Q_n\theta - P_n| < \frac{1}{Q_{n+1}}.$$

Los enteros Q_n aumentan con n, luego de la proposición 1.6 se deduce que θ es irracional.

□

2.1.4. Números irracionales

Si comenzamos con un número irracional $\xi = \xi_0$ podemos desarrollarlo en una fracción continua infinita simple. Para hacer esto, definimos $a_0 = [\xi_0]$, $\xi_1 = \frac{1}{\xi_0 - a_0}$ y luego $a_1 = [\xi_1]$, $\xi_2 = \frac{1}{\xi_1 - a_1}$ y por recurrencia tenemos:

$$a_i = [\xi_i], \qquad \xi_{i+1} = \frac{1}{\xi_i - a_i}. \tag{2.7}$$

Los a_i son enteros por definición y los ξ_i son irracionales ya que ξ_1 es irracional por (2.7) y el hecho de que ξ_0 lo es, ξ_2 lo es por serlo ξ_1 y así sucesivamente.

Además, $a_i \geq 1$ para $i \geq 1$ ya que $a_{i-1} = [\xi_{i-1}]$ y el hecho de que ξ_{i-1} sea irracional implica que

$$a_{i-1} < \xi_{i-1} < 1 + a_{i-1}, \quad 0 < \xi_{i-1} - a_{i-1} < 1, \quad \xi_i = \frac{1}{\xi_{i-1} - a_{i-1}} > 1, \quad a_i = [\xi_i] \geq 1.$$

Luego repetimos (2.7) en la forma $\xi_i = a_i + \frac{1}{\xi_{i+1}}$ hasta obtener:

$$\begin{aligned}
\xi = \xi_0 = a_0 + \frac{1}{\xi_1} &= [a_0, \xi_1] \\
&= \left[a_0, a_1 + \frac{1}{\xi_2}\right] = [a_0, a_1, \xi_2] \\
&\ldots \\
&= \left[a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{\xi_n}\right] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \xi_n].
\end{aligned}$$

Esto sugiere pero no establece que ξ es el valor de la fracción continua infinita $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ determinada por los enteros a_i. Para probar esto usamos el teorema 2.3 para escribir:

$$\xi = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \xi_n] = \frac{\xi_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\xi_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} \tag{2.8}$$

con P_i y Q_i definidos como en (2.6). Por el teorema 2.5 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\xi - r_{n-1} = \xi - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} &= \frac{\xi_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\xi_n Q_{n-1} + Q_{n-2}} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \\
&= \frac{-(P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1})}{Q_{n-1}(\xi_n Q_{n-1} + Q_{n-2})} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(\xi_n Q_{n-1} + Q_{n-2})}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Esta fracción tiende a cero cuando n tiende a infinito porque los enteros Q_n aumentan de valor con n y ξ_n es positivo. Entonces $\xi - r_{n-1}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito y con la definición de fracción continua finita simple:

$$\xi = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, a_2, \ldots].$$

Resumimos los resultados de las secciones 2.1.3 y 2.1.4 en el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Cualquier número irracional ξ solo se puede expresar de una manera, con el procedimiento que se sigue en* (2.7)*, como una fracción continua simple infinita* $[a_0, a_1, a_2, \dots]$*. Recíprocamente, cualquier fracción continua simple infinita determinada por los enteros a_i (que son todos positivos para $i > 0$) representa un número irracional, ξ. La fracción continua simple finita $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ tiene un valor racional $\frac{P_n}{Q_n}$, y se llama n-ésimo convergente de ξ. Las ecuaciones* (2.6) *relacionan P_i y Q_i con a_i. Para $n = 0, 2, 4, \dots$ estos convergentes forman una sucesión monótona creciente con ξ como límite. De manera similar, para $n = 1, 3, 5, \dots$ los convergentes forman una sucesión monótona decreciente que tiende a ξ. Los denominadores Q_n de los convergentes forman una sucesión monótona creciente de enteros positivos para $n > 0$.*

2.1.5. Teorema principal

En el capítulo 1 en los teorema de Dirichlet y de Hurwitz hemos tratado la existencia de fracciones $\frac{p}{q}$ que se aproximan al número irracional ξ. En el siguiente teorema lo que vemos es la manera de encontrar esas fracciones a través de los convergentes de las fracciones continuas. Además, estas últimas serán las mejores posibles.

Por ejemplo, los apartados a) y g) se refieren al teorema de Dirichlet y a la proposición 1.6, mientras que el apartado h) tiene que ver con el teorema de Hurwitz. Por otro lado los apartados b) y c) son el error relativo y absoluto de los convergentes, que vemos que cada vez es menor, es decir, cada vez nos acercamos más al valor de ξ. Por último el apartado e) nos dice que si $n \geq 1$, entonces $\frac{P_n}{Q_n}$ es la mejor aproximación de ξ entre todos los $\frac{h}{k}$ con $k \leq Q_n$.

Teorema 2.9. *Sea $\xi = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ una fracción continua simple infinita y sean $\frac{P_n}{Q_n}$ sus convergentes. Se cumplen las siguientes propiedades (donde $\frac{h}{k}$ denota siempre un racional, con $k \in \mathbb{N}$):*

a) $\frac{1}{Q_n Q_{n+2}} \leq \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})} < \left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}, \forall n \geq 0$.

b) $|\xi Q_{n+1} - P_{n+1}| < |\xi Q_n - P_n|, \forall n \geq 0.$

c) $\left|\xi - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| < \left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right|, \forall n \geq 0.$

d) Si $n \geq 0$ y $\frac{h}{k} \neq \frac{P_n}{Q_n}$ tal que $|\xi k - h| < |\xi Q_n - P_n|$, entonces $k \geq Q_{n+1}$.

e) Si $n \geq 1$ y $\left|\xi - \frac{h}{k}\right| < \left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right|$, entonces $k > Q_n$.

f) Si $\left|\xi - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{2k^2}$, entonces $\frac{h}{k} = \frac{P_n}{Q_n}$ para algún $n \geq 0$.

g) De cada dos convergentes consecutivos de ξ, al menos uno cumple

$$\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{2Q_n^2}$$

(salvo quizás los dos primeros).

h) De cada tres convergentes consecutivos de ξ, al menos uno cumple

$$\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}Q_n^2}.$$

Demostración. a) Para la primera desigualdad tenemos que $a_i \geq 1, \forall i \geq 1$. En particular, $a_{n+2} \geq 1$. Por tanto:

$$Q_n + Q_{n+1} \leq Q_n + a_{n+2}Q_{n+1} \overset{(2.6)}{=} Q_{n+2},$$

luego,

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+2}} \leq \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})}.$$

Para la segunda, sabemos que $a_{n+1} = [\xi_{n+1}]$ y es claro que

$$1 + a_{n+1} > \xi_{n+1}.$$

Teniendo en cuenta (2.6), vemos que $Q_n + Q_{n+1} = Q_n + a_{n+1}Q_n + Q_{n-1} > \xi_{n+1}Q_n + Q_{n-1}$. Luego,

$$\frac{1}{Q_n(\xi_{n+1}Q_n+Q_{n-1})} > \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})}.$$

Usando (2.9),

$$\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \frac{1}{Q_n(\xi_{n+1}Q_n+Q_{n-1})} > \frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n+1})}.$$

Para la última desigualdad usamos (2.9), (2.7) y (2.6) y tenemos:

$$\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| \overset{(2.9)}{=} \frac{1}{Q_n(\xi_{n+1}Q_n+Q_{n-1})} \overset{(2.7)}{<} \frac{1}{Q_n(a_{n+1}Q_n+Q_{n-1})} \overset{(2.6)}{=} \frac{1}{Q_nQ_{n+1}}.$$

b) Usando a) tenemos que:

$$|\xi Q_{n+1} - P_{n+1}| = Q_{n+1}\left|\xi - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| \overset{a)}{<} Q_{n+1}\frac{1}{Q_{n+1}Q_{n+2}} \overset{a)}{<} \frac{1}{Q_n+Q_{n+1}} \overset{a)}{<} Q_n\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| = |\xi Q_n - P_n|.$$

c) Por definición $Q_n \leq Q_{n+1}$, entonces $\frac{1}{Q_{n+1}} \leq \frac{1}{Q_n}$:

$$\left|\xi - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right| = \frac{1}{Q_{n+1}}|\xi Q_{n+1} - P_{n+1}| \overset{b)}{<} \frac{1}{Q_{n+1}}|\xi Q_n - P_n| \leq \frac{1}{Q_n}|\xi Q_n - P_n| = \left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right|.$$

d) Suponemos que $|\xi k - h| < |\xi Q_n - P_n|$ y consideramos las ecuaciones lineales en α y β:

$$\begin{cases} \alpha Q_n + \beta Q_{n+1} = k, \\ \alpha P_n + \beta P_{n+1} = h. \end{cases}$$

Por el teorema 2.5, el determinante de los coeficientes es ± 1. Por tanto estas ecuaciones tienen solución entera α y β (con Cramer, el denominador es ± 1). Vamos a distinguir casos,según los valores de α y β.

Si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, nos quedaría que $h = 0$ y $k = 0$, lo cual no puede ser. Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$, entonces $k = \beta Q_{n+1}$ y como $\beta \in \mathbb{Z}$, tenemos que $|\beta| \geq 1$ y se llega a que $k \geq Q_{n+1}$ y el resultado ya estaría. Si $\beta = 0$ y $\alpha \neq 0$, tenemos que $h = \alpha P_n$ y $k = \alpha Q_n$ y

$$|\xi k - h| = |\xi \alpha Q_n - \alpha P_n| = |\alpha||\xi Q_n - P_n| \overset{|\alpha|\geq 1}{\geq} |\xi Q_n - P_n|,$$

lo cual es una contradicción con la hipótesis. Por tanto, solo nos queda considerar el caso $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Vamos a proceder por reducción al absurdo, suponiendo que $k < Q_{n+1}$. Empezamos probando que α y β tienen signos opuestos.

Primero, si $\beta < 0$ tenemos que $\alpha Q_n = k - \beta Q_{n+1}$, por lo que $\alpha > 0$ ya que k y Q_{n+1} son positivos. Segundo, si $\beta > 0$, entonces, como $\beta \in \mathbb{Z}$, $k < \beta Q_{n+1}$ y por tanto $\alpha Q_n = k - \beta Q_{n+1} < 0$, de donde $\alpha < 0$. Luego, en efecto, α y β tienen signos opuestos.

Ahora por el teorema 2.8 tenemos que $\xi Q_n - P_n$ y $\xi Q_{n+1} - P_{n+1}$ tienen signos opuestos y por tanto $\alpha(\xi Q_n - P_n)$ y $\beta(\xi Q_{n+1} - P_{n+1})$ tienen mismo signo. Por lo que de las ecuaciones que definen α y β obtenemos:

$$\xi k - h = \xi(\alpha Q_n + \beta Q_{n+1}) - (\alpha P_n + \beta P_{n+1}) = \alpha(\xi Q_n - P_n) + \beta(\xi Q_{n+1} - P_{n+1}).$$

Como los dos términos de la derecha tienen el mismo signo, el valor absoluto de la suma es igual a la suma por separado de los valores absolutos, es decir:

$$|\xi k-h| = |\alpha(\xi Q_n - P_n)| + |\beta(\xi Q_{n+1} - P_{n+1})| > |\alpha(\xi Q_n - P_n)| \underset{|\alpha|\geq 1}{\geq} |\xi Q_n - P_n|.$$

Y llegamos a contradicción, por tanto $k \geq Q_{n+1}$.

e) Veamos que si $k \leq Q_n$, entonces $\left|\xi - \frac{h}{k}\right| \geq \left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right|$. Por hipótesis, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{Q_n}$, y por definición de convergentes $k \leq Q_n < Q_{n+1}$. Por tanto,

$$\left|\xi - \frac{h}{k}\right| = \frac{1}{k}|\xi k - h| \overset{d)}{\geq} \frac{1}{k}|\xi Q_n - P_n| \geq \frac{1}{Q_n}|\xi Q_n - P_n| = \left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right|.$$

f) Vale con probar el resultado en el caso $(h,k)=1$. Sean $\frac{P_j}{Q_j}$ los convergentes de la fracción continua simple de ξ, y supongamos que $\frac{h}{k}$ no es un convergente. Tenemos que las desigualdades $Q_n \leq k < Q_{n+1}$ determinan un entero n. Para este n, $|\xi k - h| \geq |\xi Q_n - P_n|$ por d).

Por tanto, tenemos que

$$|\xi Q_n - P_n| \leq |\xi k - h| = k\left|\xi - \frac{h}{k}\right| \overset{\text{hipót.}}{<} \frac{1}{2k},$$

luego,

$$\left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \frac{1}{2kQ_n}.$$

Como $kP_n - hQ_n$ es entero, llegamos a:

$$\frac{|kP_n - hQ_n|}{kQ_n} = \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{h}{k}\right| \leq \left|\xi - \frac{P_n}{Q_n}\right| + \left|\xi - \frac{h}{k}\right| < \frac{1}{2kQ_n} + \frac{1}{2k^2},$$

por lo que nos queda que $|kP_n - hQ_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{Q_n}{k} \leq 1$, es decir, $\frac{h}{k} = \frac{P_n}{Q_n}$.

g) Por el teorema 2.8, ξ está entre $\frac{P_n}{Q_n}$ y $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ (esto es porque los convergentes de orden par son una sucesión creciente y por tanto se acercan a ξ por la izquierda mientras que los de orden impar forman una sucesión decreciente y se acercan al límite ξ por la derecha). Por tanto tenemos que:

$$\left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| = \left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \xi\right| + \left|\frac{P_n}{Q_n} - \xi\right|.$$

Si el resultado fuera falso tendríamos que:

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}} = \frac{|P_{n+1}Q_n - Q_{n+1}P_n|}{Q_nQ_{n+1}} = \left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right| \geq \frac{1}{2Q_{n+1}^2} + \frac{1}{2Q_n^2} = \frac{Q_n^2 + Q_{n+1}^2}{2Q_n^2Q_{n+1}^2}.$$

Y llegaríamos a que $2Q_nQ_{n+1} \geq Q_n^2 + Q_{n+1}^2$, que es lo mismo que $(Q_{n+1} - Q_n)^2 \leq 0$, lo cual es falso.

h) Sea $\beta_{n+1} = \frac{Q_{n-1}}{Q_n}$; por (2.8) tenemos que $\xi = \frac{\xi_n P_{n-1} + P_{n-2}}{\xi_n Q_{n-1} + Q_{n-2}}$, si $n \geq 2$. Ahora usando (2.9):

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \xi\right| = \frac{1}{Q_n(\xi_{n+1}Q_n + Q_{n-1})} = \frac{1}{Q_n^2(\xi_{n+1} + \beta_{n+1})}.$$

Ahora vemos que no puede cumplirse

$$\xi_i + \beta_i \leq \sqrt{5} \tag{2.10}$$

para tres valores de i consecutivos, $i = n-1, n, n+1$.

Suponemos que (2.10) se cumple para $i = n-1$ e $i = n$. Vamos a ver qué pasa con $i = n+1$. Tenemos que:

$$\xi_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\xi_n} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\beta_n} = \frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}} = \frac{a_{n-1}Q_{n-2} + Q_{n-3}}{Q_{n-2}} = a_{n-1} + \beta_{n-1}.$$

Despejando $\frac{1}{\xi_n}$ y $\frac{1}{\beta_n}$, sumando y usando (2.10) para $i = n-1$:

$$\frac{1}{\xi_n} + \frac{1}{\beta_n} = \xi_{n-1} + \beta_{n-1} \leq \sqrt{5}.$$

Y,

$$1 = \frac{1}{\xi_n}\xi_n \leq \left(\sqrt{5} - \frac{1}{\beta_n}\right)(\sqrt{5} - \beta_n) = 6 - \sqrt{5}\left(\beta_n + \frac{1}{\beta_n}\right).$$

Entonces $\beta_n + \frac{1}{\beta_n} \leq \sqrt{5}$ y como β_n es un número positivo llegamos a $\beta_n^2 - \sqrt{5}\beta_n + 1 < 0$ y la desigualdad es estricta por ser β_n racional. De la última desigualdad se llega fácil a que $\beta_n > \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

De la misma manera si (2.10) se cumple para $i = n$ e $i = n+1$, llegamos a que $\frac{1}{\beta_{n+1}} < \sqrt{5} - \beta_{n+1}$ y que $\beta_{n+1} > \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ y llegamos a:

$$a_n = \frac{1}{\beta_{n+1}} - \beta_n < \sqrt{5} - \beta_{n+1} - \beta_n < \sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1) = 1,$$

lo cual es falso, por lo que (2.10) no puede darse para tres valores de n consecutivos y se tiene el resultado. □

2.2. Fracciones continuas periódicas

Una fracción continua infinita simple $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ se dice *periódica* si existe un entero n tal que $a_r = a_{n+r}$ para todo r suficientemente grande. Entonces una fracción continua periódica se puede escribir de la siguiente forma:

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_j, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \ldots] = [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_j, \overline{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}}]; \quad (2.11)$$

donde la barra sobre $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ indica que ese bloque de enteros se repite indefinidamente.

Teorema 2.10. *Cualquier fracción continua simple periódica es un número irracional cuadrático, y viceversa.*

Demostración.

$\Longrightarrow$) Escribamos ξ para la fracción periódica de (2.11) y θ para la parte periódica pura, $\theta = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}}] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \theta]$. Entonces por (2.8) tenemos que:

$$\theta = \frac{\theta P_{n-1} + P_{n-2}}{\theta Q_{n-1} + Q_{n-2}},$$

y esto es una ecuación cuadrática en θ. Por tanto θ o es un número irracional cuadrático o es un número racional, pero esto último lo podemos descartar por el teorema 2.7.

Ahora podemos escribir ξ en términos de θ:

$$\xi = [b_0, b_1, \ldots, b_j, \theta] = \frac{\theta m + m'}{\theta q + q'},$$

donde $\frac{m'}{q'}$ y $\frac{m}{q}$ son los dos últimos convergentes de $[b_0, b_1, \ldots, b_j]$. Pero θ es de la forma $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, y entonces ξ es de forma similar ya que, como θ, podemos descartar la posibilidad de que ξ sea racional.

$\Longleftarrow$) Sean $\xi = \xi_0$ cualquier racional cuadrático de la forma $\xi = \xi_0 = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$ con $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, $c \neq 0$ y b no es un cuadrado perfecto ya que ξ es irracional. Ahora multiplicamos numerador y denominador por $|c|$:

$$\xi_0 = \frac{ac + \sqrt{bc^2}}{c^2} \quad \text{o} \quad \xi_0 = \frac{-ac + \sqrt{bc^2}}{-c^2} \qquad \text{según sea } c \text{ positivo o negativo.}$$

Podemos escribir $\xi_0 = \frac{ac+\sqrt{bc^2}}{c^2}$ de la forma:

$$\xi_0 = \frac{m_0+\sqrt{d}}{q_0},$$

donde $q_0|(d-m_0^2)$, $d,m_0,q_0 \in \mathbb{Z}, q_o \neq 0$ y $d>0$ no es un cuadrado perfecto. Vamos a obtener una fórmula del desarrollo de la fracción continua de $\xi_0 = [a_0,a_1,a_2,\dots]$.

En primer lugar, empezamos con ξ_0, m_0, q_0 como antes, y $a_0 = [\xi_0]$. Si ξ_n, a_n, q_n, m_n son conocidas, entonces cogemos

$$m_{n+1} = a_n q_n - m_n, \quad q_{n+1} = \frac{d-m_{n+1}^2}{q_n}, \quad \xi_{n+1} = \frac{m_{n+1}+\sqrt{d}}{q_{n+1}}, \quad a_{n+1} = [\xi_{n+1}] \tag{2.12}$$

Esto determina sucesiones ξ_n, m_n, q_n, a_n que son, al menos, reales. Ahora usamos inducción para probar que m_n y q_n son enteros tales que $q_n \neq 0$ y $q_n|(d-m_n^2)$. Esto se cumple para $n=0$.

Suponemos cierto para el paso n-ésimo y observamos que $m_{n+1} = a_n q_n - m_n$ es entero. Entonces la ecuación:

$$q_{n+1} = \frac{d-m_{n+1}^2}{q_n} = \frac{d-m_n^2}{q_n} + 2a_n m_n - a_n^2 q_n$$

demuestra que q_{n+1} es entero. Además q_{n+1} no puede ser cero ya que si lo fuera, tendríamos que $d = m_{n+1}^2$, pero hemos dicho antes que d no es un cuadrado perfecto. Finalmente, tenemos que $q_n = \frac{d-m_{n+1}^2}{q_{n+1}}$, así que $q_{n+1}|(d-m_{n+1}^2)$. Y vemos que

$$\xi_n - a_n = \frac{-a_n q_n + m_n + \sqrt{d}}{q_n} = \frac{\sqrt{d}-m_{n+1}}{q_n} = \frac{d-m_{n+1}^2}{q_n(\sqrt{d}+m_{n+1})} = \frac{q_{n+1}}{\sqrt{d}+m_{n+1}} = \frac{1}{\xi_{n+1}},$$

que satisface (2.7) y por tanto hemos probado que $\xi_0 = [a_0,a_1,a_2,\dots]$ con a_n definidos en (2.12).

Por ξ_n' denotamos el conjugado de ξ_n, esto es, $\xi_n' = \frac{m_n-\sqrt{d}}{q_n}$. Como el conjugado del cociente es igual al cociente de los conjugados, cogiendo conjugados en (2.8) tenemos que:

$$\xi_0' = \frac{\xi_n' P_{n-1} + P_{n-2}}{\xi_n' Q_{n-1} + Q_{n-2}}.$$

Despejando para ξ_n', nos queda:

$$\xi_n' = -\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} \left(\frac{\xi_0' - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}}{\xi_0' - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}} \right).$$

Cuando n tiende a infinito, tenemos que $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} \to \xi_0$ y $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} \to \xi_0$, que es distinto de ξ_0', por lo que el paréntesis anterior tiende a 1 cuando n va a infinito.

Por tanto, para un n suficientemente grande, por ejemplo, $n>N$, con N fijo, la fracción del paréntesis es positiva, y así ξ_n' es negativo. Sin embargo ξ_n es positivo para $n \geq 1$ y entonces $\xi_n - \xi_n' > 0$ para $n>N$. Pero $\xi_n - \xi_n' = \frac{2\sqrt{d}}{q_n}$, así que $q_n > 0$ para $n>N$.

También se sigue de (2.12) que:

$$\begin{aligned} &q_n q_{n+1} = d - m_{n+1}^2 \leq d, \qquad q_n \leq q_n q_{n+1} \leq d, \\ &m_{n+1}^2 < m_{n+1}^2 + q_n q_{n+1} = d, \qquad |m_{n+1}| < \sqrt{d} \qquad \text{para } n>N. \end{aligned}$$

Como d es un entero positivo fijo concluimos que q_n y m_{n+1} adoptan solo un número fijo de posibles valores para $n>N$. Por tanto, los pares ordenados (m_n,q_n) pueden adoptar solo un número fijo de posibles pares de valores para $n>N$, y entonces hay enteros positivos j y k tales que $m_j = m_k$ y $q_j = q_k$. Podemos suponer que $j<k$, y por (2.12), esto implica que $\xi_j = \xi_k$ y:

$$\xi_0 = [a_0,a_1,\dots,a_{j-1},\overline{a_j,a_{j+1},\dots,a_{k-1}}].$$

Y el teorema queda probado. □

Por último vamos a ver un ejemplo de fracción continua periódica.

2.2.1. Fracción continua de $\sqrt{3}$.

Para calcular su desarrollo, el primer término a_0 es la parte entera del número, por tanto $a_0 = 1$. Se podría escribir:

$$\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} - 1 = 1 + \sqrt{3} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}+1} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{3}+1}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \sqrt{3} - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{\sqrt{3}+1}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}} = \ldots$$

A partir de aquí vemos que vuelve a salir el término $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, por tanto la sucesión se vuelve periódica y llegamos a ver que $\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, \ldots] = [1, \overline{1, 2}]$.

Capítulo 3

El número e

Este número irracional y trascendente, base del logaritmo neperiano, tiene su primera referencia con el matemático escocés John Napier en 1614. Sin embargo la primera aproximación numérica de su valor la obtuvo Jacob Bernoulli llegando a la conocida expresión $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Pero fue Leonhard Euler quien lo presentó como e a la comunidad matemática. En 1873 Charles Hermite demostró su trascendencia.

Otra propiedad que se conjetura acerca del número e es su normalidad: se cree que sus dígitos en cualquier base tienen una distribución uniforme, es decir todas las cifras tienen la misma probabilidad de aparecer, y esto mismo para las parejas de cifras, tríos, etc.

En este capítulo veremos algunas propiedades, así como su desarrollo en fracción continua infinita. Utilizaremos los resultados de [3], [5] y [8].

3.1. Fracción continua e irracionalidad de e

Antes de empezar con el teorema vemos el valor de e, la base de los logaritmos naturales. Como sabemos, las primeras cifras decimales de e son$e = 2{,}718281828\ldots$. Desarrollando esta aproximación racional como una fracción continua, encontramos que:

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,\ldots],$$

y entonces conjeturamos que

$$e = [2;1,2,1,1,4,1,1,\ldots,2k,1,1,\ldots]. \tag{3.1}$$

Teorema 3.1. *El desarrollo del número e en fracción continua simple es*

$$e = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,\ldots,1,2n,1,\ldots].$$

En particular, el número e es irracional.

Demostración. Una vez observado cómo parece que es la fracción continua de e, sea:

$$\xi = [2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,\ldots,1,2n,1,\ldots],$$

esto es, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$ y $a_{3k-1} = 2k$, $a_{3k} = 1$ y $a_{3k+1} = 1$ para $k > 0$.

La sucesión de los convergentes de ξ empezaría con:

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{2}{1}, \qquad \frac{A_1}{B_1} = \frac{3}{1}$$

y luego continuamos obteniendo:

k	1	2	3
$\frac{A_{3k-1}}{B_{3k-1}}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{87}{32}$	$\frac{1264}{465}$
$\frac{A_{3k}}{B_{3k}}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{106}{39}$	$\frac{1457}{536}$
$\frac{A_{3k+1}}{B_{3k+1}}$	$\frac{19}{7}$	$\frac{193}{71}$	$\frac{2721}{1001}$

Como $a_{3k-1} = 2k$ y $a_{3k} = 1$ y $a_{3k+1} = 1$, es claro que los convergentes $\frac{A_{3k+1}}{B_{3k+1}}$ nos darían las aproximaciones más eficientes con el mínimo esfuerzo. De hecho, podemos encontrar esos convergentes resolviendo las fórmulas recursivas (2.6) solo para estos términos:

$$\begin{aligned} A_{3k+1} &= 1 \cdot A_{3k} + A_{3k-1} = (A_{3k-1} + A_{3k-2}) + A_{3k-1} = 2A_{3k-1} + A_{3k-2} = 2(2kA_{3k-2} + A_{3k-3}) + A_{3k-2} \\ &= (2(2k)+1)A_{3k-2} + 2A_{3k-3} = (2(2k)+1)A_{3k-2} + A_{3k-3} + (A_{3k-4} + A_{3k-5}) \\ &= (2(2k)+1)A_{3k-2} + (A_{3k-3} + A_{3k-4}) + A_{3k-5}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$A_{3k+1} = 2(2k+1)A_{3(k-1)+1} + A_{3(k-2)+1} \quad \text{para} \quad k \geq 2,$$

y de una manera similar:

$$B_{3k+1} = 2(2k+1)B_{3(k-1)+1} + B_{3(k-2)+1} \quad \text{para} \quad k \geq 2.$$

Ahora vamos a ver algunas propiedades de las series de potencias que surgen de las potencias de e. Fijamos un $m \in \mathbb{N}$ y para cada $n \geq 0$ definimos:

$$\psi_n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2r+2n+1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r+2n+1)} \cdot \frac{2r+2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2r+2)} \cdot \frac{1}{m^{2r}}.$$

Es fácil ver que esta serie converge usando, por ejemplo, el criterio del cociente. Además, observamos que:

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{m}} + e^{\frac{-1}{m}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{-1}{m}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1+(-1)^k}{m^k}$$

(si k es par, $1+(-1)^k = 2$; si k es impar, $1+(-1)^k = 0$)

$$\overset{k=2r}{=} \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r)!} \cdot \frac{2}{m^{2r}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r)!} \cdot \frac{1}{m^{2r}} = \psi_0.$$

Análogamente,

$$\frac{m}{2}\left(e^{\frac{1}{m}} - e^{\frac{-1}{m}}\right) = \frac{m}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^k - \frac{m}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{-1}{m}\right)^k = \frac{m}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1-(-1)^k}{m^k}]$$

(si k es par, $1-(-1)^k = 0$; si k es impar, $1-(-1)^k = 2$)

$$\overset{k=2r+1}{=} \frac{m}{2}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)!} \cdot \frac{2}{m^{2r+1}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)!} \cdot \frac{1}{m^{2r}} = \psi_1.$$

Ahora nos fijamos en que estas ψ_n cumplen la siguiente relación:

$$m^2\psi_n = (2n+1)m^2\psi_{n+1} + \psi_{n+2} \tag{3.2}$$

Procedemos a probar la relación anterior:

$$\begin{aligned}
m^2\psi_n-(2n+1)m^2\psi_{n+1} &= m^2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2r+2n+1)(2r+2n+3)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r+2n+3)}\cdot\frac{2r+2}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2r+2)}\cdot\frac{1}{m^{2r}}\\
&\quad-(2n+1)m^2\sum_{r=0}^{\infty}\frac{2r+2n+3}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r+2n+3)}\cdot\frac{2r+2}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2r+2)}\cdot\frac{1}{m^{2r}}\\
&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{m^2(2r+2n+3)[(2r+2n+1)-(2n+1)]}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r+2n+3)}\cdot\frac{2r+2}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2r+2)}\cdot\frac{1}{m^{2r}}\\
&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{m^2(2r+2n+3)2r}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r+2n+3)}\cdot\frac{2r+2}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2r+2)}\cdot\frac{1}{m^{2r}}
\end{aligned}$$

(para $r=0$ el sumando es 0)

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{m^2(2r+2n+3)2r}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2r+2n+3)}\cdot\frac{2r+2}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2r+2)}\cdot\frac{1}{m^{2r}}$$

(hacemos el cambio de variable $s=r-1$)

$$\begin{aligned}
&=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{m^2(2s+2n+5)2(s+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s+2n+5)}\cdot\frac{2s+4}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2s+4)}\cdot\frac{1}{m^{2s+2}}\\
&=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{2s+2n+5}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s+2n+5)}\cdot\frac{2s+2}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2s+2)}\cdot\frac{1}{m^{2s}}=\psi_{n+2}.
\end{aligned}$$

Es claro que $\psi_n>0\ \forall n$. Podemos definir $\omega_n=\frac{m\psi_n}{\psi_{n+1}}$, $n=0,1,2,\dots$

Dividiendo entre $m\psi_{n+1}$ en (3.2), llegamos a:

$$\omega_n=(2n+1)m+\frac{1}{\omega_{n+1}},\qquad n=0,1,2,\dots$$

Se sigue que $\omega_n>1\ \forall n$ y el desarrollo en fracción continua de $\omega_0=[m;3m,5m,\dots,(2^n+1)m,\dots]$ Ahora tenemos que:

$$\omega_0=\frac{m\psi_0}{\psi_1}=\frac{m\cdot\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{m}}+e^{\frac{-1}{m}})}{\frac{m}{2}(e^{\frac{1}{m}}-e^{\frac{-1}{m}})}=\frac{e^{\frac{1}{m}}+e^{\frac{-1}{m}}}{e^{\frac{1}{m}}-e^{\frac{-1}{m}}}\cdot\frac{e^{\frac{1}{m}}}{e^{\frac{1}{m}}}=\frac{e^{\frac{2}{m}}+1}{e^{\frac{2}{m}}-1},$$

por lo que, en particular, para $m=2$ obtenemos:

$$\frac{e+1}{e-1}=[2;6,10,14,\dots,2(2n+1),\dots].$$

Llegados a este punto, podemos deducir que como las fracciones continuas infinitas representan números irracionales, tenemos que el número e no es racional. Más aún, que no es un irracional cuadrático (es decir, no es solución de una ecuación de segundo grado) ya que la fracción continua que nos ha aparecido no es periódica, como habíamos visto en la sección 2.2.

Escribiendo los convergentes $\frac{P_k}{Q_k}$ del número $\frac{e+1}{e-1}$, vemos que $\frac{P_0}{Q_0}=\frac{2}{1}$, $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{13}{6}$, y para $k>0$

$$\begin{aligned}
P_k&=2(2k+1)P_{k-1}+P_{k-2},\\
Q_k&=2(2k+1)Q_{k-1}+Q_{k-2}.
\end{aligned}$$

Pero estas fórmulas recursivas son las mismas de los convergentes A_{3k+1} y B_{3k+1} de ξ. Como

$$\begin{aligned}
A_1=P_0+Q_0\quad &y\quad B_1=P_0-Q_0,\\
A_4=P_1+Q_1\quad &y\quad B_4=P_1-Q_1.
\end{aligned}$$

Se sigue por inducción que:

$$A_{3k+1} = P_k + Q_k \quad y \quad B_{3k+1} = P_k - Q_k \quad para \quad k \geq 0.$$

Esto es así porque si P_k y Q_k cumplen esa recurrencia, cualquier combinación lineal de ellas también la cumplirá, en particular $P_k + Q_k$. Como antes hemos visto que A_{3k+1} también cumple la misma recurrencia, y, como ambos tienen las mismas condiciones iniciales, tenemos que ambas sucesiones son iguales. Para B_{3k+1} es análogo. Por tanto, ahora tenemos que:

$$\xi = \lim_{k\to\infty} \frac{A_k}{B_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{A_{3k+1}}{B_{3k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{P_k + Q_k}{P_k - Q_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{P_k}{Q_k} + 1}{\frac{P_k}{Q_k} - 1} = \frac{\left(\frac{e+1}{e-1}\right) + 1}{\left(\frac{e+1}{e-1}\right) - 1} = e$$

Y por tanto la conjetura (3.1) está probada. □

3.2. Trascendencia de e

Terminamos este trabajo demostrando la trascendencia de e. Como vemos, la técnica se aparta de lo que hemos visto hasta ahora. Para simplificar los posteriores cálculos introducimos un símbolo h^r, definido por $h^r = r!$ para $r \geq 0$ (y entero).

Si $f(x)$ es cualquier polinomio en x de grado m,

$$f(x) = \sum_{r=0}^{m} c_r x^r,$$

entonces definimos $f(h) = \sum_{r=0}^{m} c_r h^r = \sum_{r=0}^{m} c_r r! = \sum_{r=0}^{m} f^{(r)}(0)$. Y definimos $f(x+h) = \sum_{r=0}^{m} f^{(r)}(x)$. Si $f(x+y) = F(y)$, entonces $f(x+h) = F(h)$. Definimos ahora $u_r(x)$ y $\varepsilon_r(x)$ para $r = 0,1,2,\dots$ como:

$$u_r(x) = \frac{x}{r+1} + \frac{x^2}{(r+1)(r+2)} + \frac{x^3}{(r+1)(r+2)(r+3)} + \cdots = e^{|x|}\varepsilon_r(x). \tag{3.3}$$

Es obvio que $|u_r(x)| < e^{|x|}$ y entonces,

$$|\varepsilon_r(x)| < 1 \quad \forall x. \tag{3.4}$$

Necesitaremos dos lemas previos.

Lema 3.1. *Si $\phi(x)$ es cualquier polinomio y*

$$\phi(x) = \sum_{r=0}^{s} c_r x^r, \qquad \psi(x) = \sum_{r=0}^{s} c_r \varepsilon_r(x) x^r,$$

entonces

$$e^x \phi(h) = \phi(x+h) + \psi(x)e^{|x|}. \tag{3.5}$$

Demostración. Por las definiciones anteriores tenemos que:

$$\begin{aligned}(x+h)^r &= h^r + rxh^{r-1} + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}x^2h^{r-2} + \cdots + x^r \\ &= r! + r(r-1)!x + \frac{r(r-1)}{2}(r-2)!x^2 + \cdots + x^r \\ &= r!\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^r}{r!}\right) = r!e^x - u_r(x)x^r = e^x h^r - u_r(x)x^r.\end{aligned}$$

Entonces $e^x h^r = (x+h)^r + u_r(x)x^r = (x+h)^r + e^{|x|}\varepsilon_r(x)x^r$. Multiplicando esto por c_r y sumando, obtenemos (3.5). □

Lema 3.2. *Si $m \geq 2$, $f(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros en x y definimos*

$$F_1(x) = \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} f(x), \qquad F_2(x) = \frac{x^m}{(m-1)!} f(x),$$

entonces $F_1(h), F_2(h)$ son enteros y $F_1(h) \equiv f(0)$ y $F_2(h) \equiv 0$ mod m.

Demostración. Supongamos que $f(x) = \sum_{l=0}^{L} a_l x^l$ donde $a_0, \ldots, a_L$ son enteros. Entonces,

$$F_1(x) = \sum_{l=0}^{L} a_l \frac{x^{l+m-1}}{(m-1)!} \qquad \text{y} \qquad F_1(h) = \sum_{l=0}^{L} a_l \frac{(l+m-1)!}{(m-1)!}.$$

Pero $\frac{(l+m-1)!}{(m-1)!} = (l+m-1)(l+m-2)\cdots m$ es un múltiplo de m si $l \geq 1$ y por eso $F_1(h) \equiv a_0 = f(0)$ (mod m). De manera similar:

$$F_2(x) = \sum_{l=0}^{L} a_l \frac{x^{l+m}}{(m-1)!} \qquad \text{y} \qquad F_2(h) = \sum_{l=0}^{L} a_l \frac{(l+m)!}{(m-1)!} \equiv 0 \text{ (mod } m). \qquad \square$$

Procedemos a probar la trascendencia de e.

Teorema 3.2. *El número e es trascendente.*

Demostración. Si e fuera algebraico, tendríamos que

$$\sum_{t=0}^{n} C_t e^t = 0 \qquad \text{con } n \geq 1, C_0, C_1, ..., C_n \text{ enteros y } C_0 \neq 0. \tag{3.6}$$

Suponemos que p es un primo mayor que $\max(n, |C_0|)$ y definimos

$$\phi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]^p. \tag{3.7}$$

Tomaremos p grande. Si multiplicamos (3.6) por $\phi(h)$ y usamos (3.5), obtenemos:

$$\underbrace{\sum_{t=0}^{n} C_t \phi(t+h)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{t=0}^{n} C_t \psi(t) e^t}_{S_2} = 0, \qquad \text{que equivale a} \qquad S_1 + S_2 = 0. \tag{3.8}$$

Por el lema 3.2, con $m = p$, $\phi(h)$ es entero y $\phi(h) = (-1)^{pn}(n!)^p$ (mod p). De nuevo, si $1 \leq t \leq n$:

$$\phi(t+x) = \frac{(t+x)^{p-1}}{(p-1)!}\left[(x+t-1)\cdots x \cdot (x-1)\cdots(x+t-n)\right]^p = \frac{x^p}{(p-1)!} f(x).$$

donde $f(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros en x. Se sigue otra vez del lema 3.2 que $\phi(t+h)$ es un entero divisible por p. Entonces,

$$S_1 = \sum_{t=0}^{n} C_t \phi(t+h) \equiv (-1)^{pn} C_0 (n!)^p \not\equiv 0 \quad (\text{mod } p),$$

ya que $C_0 \neq 0$ y $p > \max(n, |C_0|)$. Por tanto, S_1 es un entero distinto de cero, y por eso

$$|S_1| \geq 1. \tag{3.9}$$

Por otro lado, $|\varepsilon_r(x)| < 1$ por (3.4) y, usando la definición de $\phi(x)$ en (3.7) y en el lema 3.1, vemos que

$$\sum_{r=0}^{s} |c_r| x^r = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}[(x+1)(x+2)\cdots(x+n)]^p,$$

por tanto, nos queda:

$$|\psi(t)| < \sum_{r=0}^{s} |c_r| t^r = \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} [(t+1)(t+2)\cdots(t+n)]^p \xrightarrow{p\to\infty} 0.$$

Entonces $S_2 \longrightarrow 0$ y podemos hacer que, cogiendo un valor de p suficientemente grande,

$$|S_2| < \frac{1}{2}. \tag{3.10}$$

Las fórmulas (3.8), (3.9) y (3.10) son una contradicción, por tanto llegamos a que (3.6) es imposible, y hemos probado que e es trascendente. $\square$

Bibliografía

[1] E. APARICIO, *Teoría de los números*, Universidad del País Vasco, Bilbao, 1993.

[2] P. GARRETT, *Liouville's theorem on diophantine approximation*, `http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/mfms/notes_2013-14/04b_Liouville_approx.pdf`, disponible en `http://www-users.math.umn.edu/~garrett/m/mfms/`. (Visto el 10 de abril de 2017).

[3] G. H. HARDY, E. M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth Edition*, Clarendon Press, Oxford, 1979.

[4] HUA LOO KENG, *Introduction to number theory*, Springer, Berlín, 1982.

[5] C. IVORRA CASTILLO, *Teoría de números*, `https://www.uv.es/ivorra/Libros/Numeros.pdf`. (Visto el 3 de marzo de 2017).

[6] I. NIVEN, H. S. ZUCKERMAN, *An Introduction to the Theory of Numbers, Third Edition*, John Wiley, Nueva York, 1972.

[7] C. D. OLDS, *Continued Fractions*, Random House, Nueva York, 1963.

[8] A. M. ROCKETT, P. SZÜSZ, *Continued Fractions*, World Scientific, Singapur, 1992.