



## Trabajo Fin de Grado

Análisis de un modelo estocástico de corrupción  
Analysis of a stochastic model of corruption

Autor/es

Ángel Javier Gamazo Tejero

Director/es

Luis Mario Floría Peralta  
Jesús Gómez Gardeñas

Facultad de Ciencias  
2016-2017

---

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Modelo inicial</b>	<b>3</b>
2.1. Método de Monte Carlo . . . . .	4
2.2. Proceso de Markov . . . . .	8
2.2.1. Estado estacionario del proceso de Markov . . . . .	9
2.2.2. Proceso de Markov: aproximación de campo medio . . . . .	10
2.3. Discusión de los resultados . . . . .	11
<b>3. Modelo 4p</b>	<b>14</b>
3.1. Proceso de Markov . . . . .	14
3.1.1. Proceso de Markov: aproximación de campo medio . . . . .	14
3.1.2. Límite continuo de la aproximación de campo medio al proceso de Markov .	16
3.1.3. Proceso de Markov en redes . . . . .	20
3.2. Método de Monte Carlo . . . . .	21
3.3. Discusión de los resultados . . . . .	22
<b>4. Conclusiones</b>	<b>25</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>26</b>

---

# Capítulo 1

## Introducción

El interés por parte de la comunidad científica en los modelos matemáticos que predicen el comportamiento de agentes infecciosos dentro de una población ha crecido a ritmo vertiginoso en las últimas décadas [1, 2] y han ido surgiendo novedosos avances metodológicos que han permitido ahondar en la física de sistemas complejos. Para realizar el presente trabajo se han tomado como base dichos avances con el objetivo de modelizar el fenómeno de la corrupción. El trabajo se inscribe en el campo de las dinámicas sociales [3], parte importante de la física interdisciplinar de sistemas complejos [4, 5].

La modelización matemática del fenómeno de la corrupción ha sido abordada desde diferentes puntos de vista. Como ejemplo se pueden consultar [6, 7], estudios que se enmarcan en el contexto de la gestión de ecosistemas y la conservación de la biodiversidad, y en el marco de la gestión de bienes públicos, respectivamente, pero en ambos casos usando teoría evolutiva de juegos. El modelo estocástico que aquí se estudia ha sido inspirado por los modelos económicos de [8–10], y en él consideramos una red de contactos [11] entre agentes (nodos) que pueden adoptar tres estados: honesto, corrupto o reservado (temporalmente suspendido por habersele encontrado corrupto). Junto a probabilidades de transición de carácter endógeno o efecto de la inspección administrativa, se consideran interacciones entre agentes: un agente corrupto puede infectar a sus contactos honestos, que a su vez pueden delatarlo.

En primer lugar, se implementa el método de Monte Carlo sobre el modelo, cuyos resultados se comparan con los del resto de acercamientos usados al analizar el mismo. Se diseña, más tarde, un proceso de Markov no estacionario y se realizan aproximaciones posteriores que permiten caracterizarlo analíticamente, como la aproximación de campo medio tanto para intervalos de tiempo discretos como continuos.

Debe notarse que, si bien el modelo que se propone en el capítulo siguiente recoge aspectos centrales del fenómeno de la corrupción en sus hipótesis, sería presuntuoso otorgarle validez universal. Solo podemos estar seguros de que los resultados a los que se llega, aunque sorprendentes sobre todo en el capítulo 3, son una consecuencia rigurosa de dichas hipótesis, que con toda seguridad no agotan la esencia de un fenómeno social tan complejo como el de la corrupción.

Una vez expuesta la motivación inicial, los objetivos del trabajo se dibujan rápidamente: se trata de estudiar el modelo poniendo en práctica los conocimientos adquiridos durante el grado y utilizando algunas de las técnicas aprendidas. Se caracterizarán además las bifurcaciones que puedan aparecer ante la variación de los parámetros utilizados haciendo uso para ello de conceptos de la teoría de sistemas dinámicos.

---

## Capítulo 2

# Modelo inicial

Como se ha indicado en la introducción, el propósito de este trabajo es analizar un modelo de corrupción de un conjunto de  $N$  funcionarios desde el punto de vista de un modelo matemático de epidemia. Se considerará para ello que para cada individuo (agente) hay tres estados disponibles:  $H$  (honesto),  $C$  (corrupto) y  $R$  (reservado). En términos generales, la descripción de cada estado es:

$R$ : Los agentes reservados son aquellos individuos que han sido descubiertos tras haber cometido algún hecho delictivo y que por lo tanto se encuentran cumpliendo una condena temporal.

$H$ : Los agentes que cumplen dicha condena temporal pasan a ser honestos, siendo de nuevo propensos a delinquir.

$C$ : Un agente corrupto puede tanto arrepentirse y volver al estado  $H$  como ser descubierto.

Con el fin de describir el paso de un estado a otro, se considerará que existen diversos parámetros que indican la probabilidad de que un agente sea más o menos propenso a ello. Así, un individuo honesto ( $H$ ) puede convertirse en corrupto ( $C$ ) según los siguientes mecanismos:

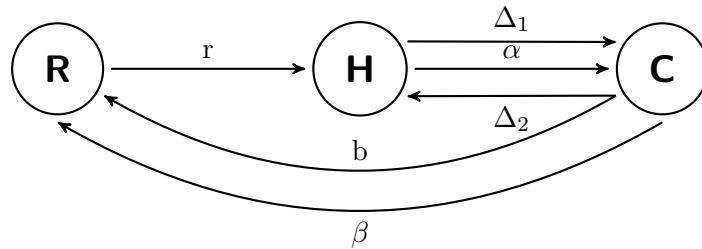
- Estímulos endógenos para obtener beneficios adicionales, como sobornos otorgados por empresarios para que se les permita llevar a cabo sus proyectos. La probabilidad de que dichos estímulos afecten al funcionario honesto será cuantificada por medio del parámetro  $\Delta_1$ .
- Contagio por parte de un vecino corrupto. Dicha tasa de contagio vendrá representada por la letra  $\alpha$ .

Un agente corrupto ( $C$ ), por su parte, tiene las siguientes posibilidades:

- Volver al estado  $H$ , al sentir miedo por ser descubierto, con una probabilidad  $\Delta_2$
- Ser descubierto, pasando a ser  $R$ , tanto por una inspección oficial (con probabilidad  $b$ ) como tras haber sido delatado por sus compañeros, lo que se modelará con otra tasa de contagio,  $\beta$ .

Finalmente, los agentes reservados ( $R$ ), son devueltos al estado honesto con una probabilidad  $r$ .

Para ilustrar lo anteriormente expuesto, en el siguiente esquema se representan tanto los tres estados disponibles para un agente como las probabilidades descritas.



La dinámica de este sistema puede analizarse desde diferentes puntos de vista. Computacionalmente, el método de Monte Carlo puede ser implementado fácilmente en redes complejas de diversos tipos. Analíticamente, sin embargo, el proceso podrá ser desarrollado como un proceso de Markov.

## 2.1. Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo permite abordar problemas que analíticamente tendrían una solución muy complicada desde un punto de vista probabilístico. Aplicado a este problema, se considerará que el estado de cada agente  $i$  en cada paso de tiempo  $t$  viene dado por  $S(i; t)$ . Así, como puede estar en uno de los tres estados descritos más arriba,  $S(i; t) = R, H$ , o  $C$ .

Se considerará además que los agentes son los nodos de una red compleja, por lo que cada uno tiene un número de vecinos con los que puede interactuar.

Para desarrollar el método de Monte Carlo se parte de una configuración inicial  $S(i; 0)$  y en cada paso de tiempo se actualiza ese estado según las siguientes acciones:

- Si  $S(i; t) = R$ , con probabilidad  $r$  cambia al estado  $H$ , por lo que permanece en el estado  $R$  con probabilidad  $1 - r$ :

$$S(i; t + 1) = R \text{ con prob. } 1 - r ,$$

$$S(i; t + 1) = H \text{ con prob. } r ,$$

$$S(i; t + 1) = C \text{ con prob. } 0 .$$

- Si  $S(i; t) = H$ , cambia a  $C$  con probabilidad  $\Delta_1$ . Si esto no ha funcionado (probabilidad  $1 - \Delta_1$ ), interacciona con sus vecinos, designados por  $j$ , hasta que es infectado por uno de ellos (teniendo en cuenta que solo pueden infectarlo aquellos con  $S(j; t) = C$ ) o hasta que ha interaccionado con todos. Por lo tanto:

$$S(i; t + 1) = R \text{ con prob. } 0 ,$$

$$S(i; t + 1) = H \text{ con prob. } (1 - \Delta_1) \prod_j (1 - \alpha A_{ij} \delta_{S(j; t), C}) ,$$

$$S(i; t + 1) = C \text{ con prob. } 1 - (1 - \Delta_1) \prod_j (1 - \alpha A_{ij} \delta_{S(j; t), C})$$

Donde  $\delta_{x,y}$  es la delta de Kronecker y  $A_{ij}$  es la matriz de adyacencia de la red <sup>1</sup>

- Si  $S(i; t) = C$ , pasa a ser  $H$  con probabilidad  $\Delta_2$ . En caso de que no haya sucedido (probabilidad  $1 - \Delta_2$ ), puede ser descubierto por una inspección oficial con probabilidad  $b$ . Si esto tampoco ha funcionado (probabilidad  $(1 - \Delta_2)(1 - b)$ ), empieza una secuencia de interacciones

<sup>1</sup>En una red con  $N$  nodos, la matriz de adyacencia es una matriz cuadrada  $A$  de dimensiones  $N \times N$  tal que el elemento  $A_{ij}$  es 1 cuando los nodos  $i$  y  $j$  están conectados y 0 cuando no lo están.

con sus vecinos  $j$  hasta que uno de los honestos lo delata. Por lo tanto:

$$S(i; t+1) = R \text{ con prob. } (1 - \Delta_2) \left[ 1 - (1-b) \prod_j (1 - \beta A_{ij} \delta_{S(j;t), H}) \right] ,$$

$$S(i; t+1) = H \text{ con prob. } \Delta_2 ,$$

$$S(i; t+1) = C \text{ con prob. } (1 - \Delta_2)(1-b) \prod_j (1 - \beta A_{ij} \delta_{S(j;t), H}) .$$

Es importante remarcar el hecho de que en el último caso se ha tenido en cuenta un orden pre establecido, ya que se ha considerado que primero actúe  $\Delta_2$ , después  $b$  y por último empiece a interaccionar con sus vecinos. Designaremos por tanto tres tipos de eventos: (e) es la decisión endógena de hacerse honesto, (c) es ser cazado y (d), ser delatado. Esto implica que en las probabilidades anteriores la ordenación ha sido (e, c, d).

Como ejemplo, con ordenación (c, e, d) resultaría:

$$S(i; t+1) = R \text{ con prob. } b + (1-b)(1 - \Delta_2) \left[ 1 - \prod_j (1 - \beta A_{ij} \delta_{S(j;t), H}) \right] ,$$

$$S(i; t+1) = H \text{ con prob. } (1-b)\Delta_2 ,$$

$$S(i; t+1) = C \text{ con prob. } (1 - \Delta_2)(1-b) \prod_j (1 - \beta A_{ij} \delta_{S(j;t), H}) .$$

Como se puede comprobar fácilmente, hay 6 ordenaciones posibles diferentes. Sin embargo, solo 4 son diferentes, al haber 2 pares equivalentes.

Se espera que a través del método de Monte Carlo se llegue a un estado estacionario estadísticamente en el que algunas cantidades como la fracción de agentes en cada estado se mantenga constante con el tiempo.

Como se ha mencionado anteriormente, las interacciones llevadas a cabo en el método de Monte Carlo se simulan sobre una red. A lo largo de todo el trabajo se han utilizado redes de tipo Erdős–Rényi (ER) y Barabási–Albert (BA). Las redes que se han empleado han sido generadas por un código escrito ex profeso para la realización de este trabajo, no han sido tomadas de ningún tercero. Si bien son dos tipos de redes muy conocidos, se debe realizar una breve explicación de los mismos.

Las **redes Erdős–Renyi** o ER, como serán denominadas a partir de ahora, se caracterizan porque cada par de nodos se elige aleatoriamente y se conecta atendiendo a una probabilidad  $p$ . Así, se trata de redes aleatorias y cuyo coeficiente de clustering tiende a 0 conforme aumenta el número de nodos  $N$ .

A lo largo de este trabajo se han utilizado redes con una conectividad media  $\langle k \rangle = 6$ . Se puede demostrar que dicha conectividad media está relacionada con la probabilidad de unión de una pareja

de nodos  $p$  de la forma:

$$\langle k \rangle = p(N - 1) \Rightarrow p = \frac{\langle k \rangle}{N - 1}$$

De la misma forma, se puede demostrar que la distribución de grado de las redes Erdős-Rényi sigue en general una distribución binomial. En el caso de que el número de nodos y de enlaces sea suficientemente grande (es decir,  $N \rightarrow \infty$  y  $E \rightarrow \infty$ ), se puede aproximar a una distribución de Poisson, con ecuación:

$$P(k) \approx e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$$

En la figura 2.1 puede verse un ejemplo de distribución de grado de una red ER generada por el programa descrito en los apéndices con  $N = 2000$  y  $\langle k \rangle = 20$  y la correspondiente distribución de Poisson con esas características:

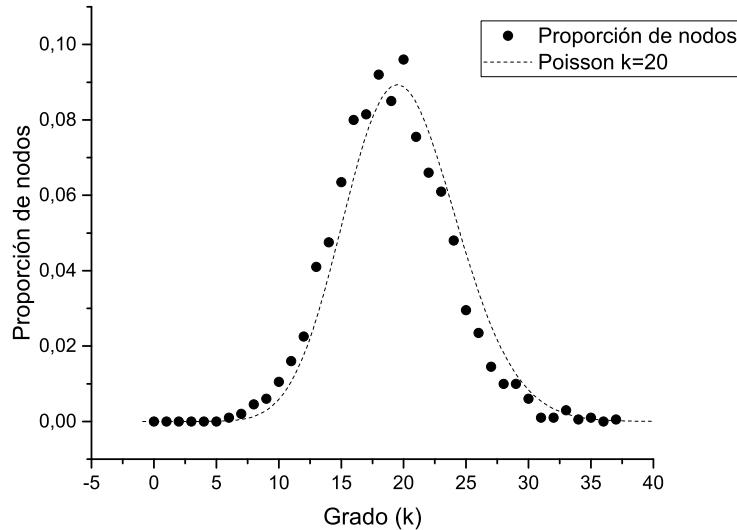


Figura 2.1: Distribución de grado de una red ER con  $\langle k \rangle = 20$  y distribución de Poisson con los mismos parámetros

Por su parte, las **redes Barabási–Albert** o BA se engloban dentro de las llamadas redes aleatorias complejas libres de escala, y son de especial importancia a la hora de modelar sistemas reales. Se construyen siguiendo un mecanismo de conexión preferencial: la probabilidad de que un nodo reciba un link de otro nodo es directamente proporcional a su grado. Esta regla de conexión preferencial da lugar inexorablemente a la formación de *clusters*.

Si bien en las redes de tipo ER la distribución de grado seguía la distribución de Poisson, en el caso de las redes Barabási–Albert sigue una ley potencial como la siguiente:

$$P(k) = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)} \approx k^{-3}$$

Donde  $m$  representa la cantidad de enlaces que un nodo lanza cuando es añadido a la red y se

relaciona con el grado medio de la forma  $2m = \langle k \rangle$

En la figura 2.2 se ha representado en ejes logarítmicos la distribución de grado de una red Barabási-Albert con 1000 nodos y  $\langle k \rangle = 10$ . Puede observarse en dicha figura a través del ajuste que sigue una ley potencial con exponente -2,61.

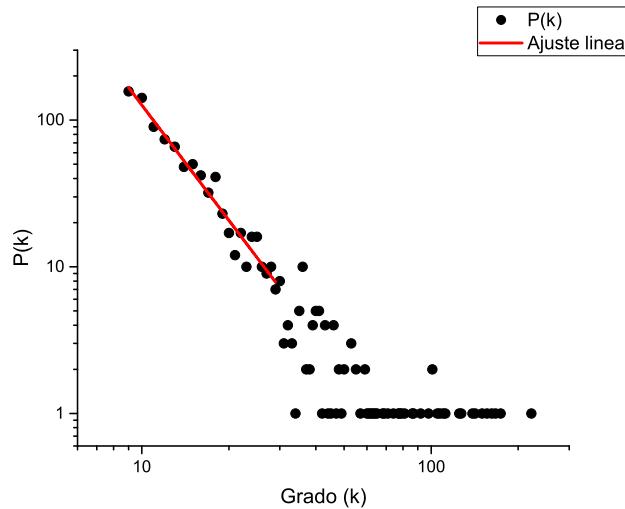


Figura 2.2: Distribución de grado de una red BA con  $\langle k \rangle = 10$  y 1000 nodos y ajuste lineal. Los ejes están en escala logarítmica, por lo que  $P(k)$  sigue una ley potencial.

Con las redes generadas, podemos ya proceder a comparar el comportamiento del modelo propuesto en cada una de ellas. En la figura 2.3 se muestra la evolución temporal de la proporción de cada uno de los estados en una población con  $N = 1000$  y con todos los parámetros ( $\Delta_1, \alpha$ , etc.) iguales a 0.5. Dicha evolución ha sido tomada tras una termalización de 1000 pasos de tiempo y ha sido promediada a 20 redes de cada tipo. Este promedio se muestra en la figura como una línea constante en el tiempo, siendo la zona sombreada la desviación estándar. Las líneas que no son constantes indican la evolución temporal de cada estado en una de las redes.

Se puede observar que, al menos en este caso, los resultados no dependen excesivamente de la red ya que la incertidumbre de la media es muy pequeña. Además, no se aprecian diferencias significativas entre ambos tipos de redes en este caso. Con el fin de generalizar esta última conclusión, en la gráfica 2.4 se ha representado la proporción de corruptos obtenida en cada red para 250 valores distintos de  $\alpha$ .

El comportamiento ascendente con  $\alpha$  observado en la gráfica 2.4 es el que se espera tras analizar el modelo: aumentar  $\alpha$  es aumentar la probabilidad de que una persona honesta se contagie de una corrupta y en definitiva pase a ser corrupta. Se observa en la Figura 2.4 que el ascenso es continuo, sin apreciarse bifurcaciones.

Es importante señalar que no se van a mostrar en este trabajo todas las gráficas que se han estudiado para escribirlo, puesto que ello ocuparía buena parte del espacio que se va a dedicar a la discusión. No obstante, todos los códigos utilizados se encuentran en una dirección web indicada en los apéndices.

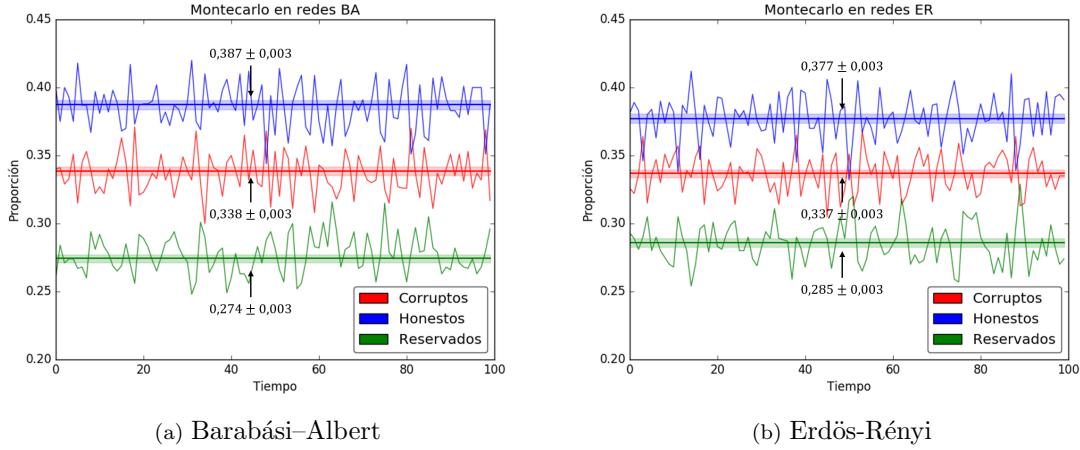


Figura 2.3: Evolución temporal del método de Monte Carlo en dos tipos de redes. Los resultados constantes corresponden al promedio de 20 redes y el sombreado indica la desviación estandar. Además, se ha representado la evolución temporal de las proporciones en una sola red para no sobrecargar el gráfico.

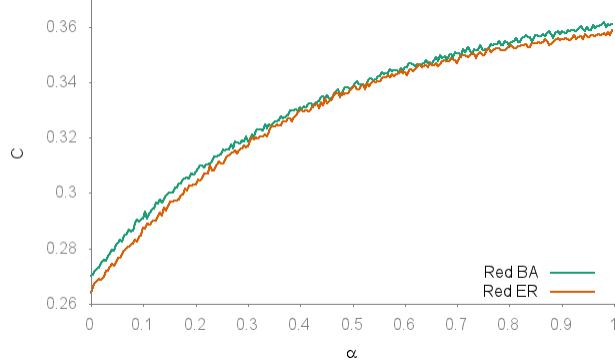


Figura 2.4: Proporción de corruptos en redes Erdős-Rényi (naranja) y Barabási-Albert (verde) al variar el valor de  $\alpha$ . El resto de parámetros se han mantenido constantes e iguales a 0.5. Antes de tomar los resultados para cada valor se ha ejecutado el programa el tiempo suficiente para que llegara a un estado estacionario.

## 2.2. Proceso de Markov

La otra forma de abordar el problema es a través del diseño de un proceso de Markov análogamente a como se realiza en modelos epidemiológicos [12, 13]. Sea  $\mathbf{S}_i(t) = (R_i(t), H_i(t), C_i(t))^T$  un vector cuyas componentes sean la probabilidad de que el agente  $i$  se encuentre en cada uno de los estados en un tiempo  $t$ . La evolución temporal de  $\mathbf{S}_i(t)$  se puede describir como un proceso de Markov no estacionario representado por la matriz  $\mathbf{T}_i(t)$  de probabilidades de transición. Como se ha visto en la sección anterior, el orden en el que interacciona cada agente corrupto es determinante, dando en este caso lugar a 4 matrices de probabilidades de transición diferentes que varían solo en los elementos  $(\mathbf{T}_i(t))_{13}$  y  $(\mathbf{T}_i(t))_{23}$ .

La matriz de probabilidades de transición para la ordenación (e,c,d), equivalente a (e,d,c), es:

$$\mathbf{T}_i(t) = \begin{pmatrix} 1-r & 0 & (1-\Delta_2) \left[ 1 - (1-b)\Pi_\beta^i \right] \\ r & (1-\Delta_1)\Pi_\alpha^i & \Delta_2 \\ 0 & 1 - (1-\Delta_1)\Pi_\alpha^i & (1-\Delta_2)(1-b)\Pi_\beta^i, \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

donde se han designado  $\Pi_\alpha^i \equiv \prod_j (1 - \alpha A_{ij} C_j)$  y  $\Pi_\beta^i \equiv \prod_j (1 - \beta A_{ij} H_j)$  para simplificar la notación.

Veamos cómo cambian los elementos  $(\mathbf{T}_i(t))_{13}$  y  $(\mathbf{T}_i(t))_{23}$  según la ordenación escogida:

	$(e, c, d) \equiv (e, d, c)$	$(c, d, e) \equiv (d, c, e)$	$(d, e, c)$	$(c, e, d)$
$(\mathbf{T}_i)_{13}$	$(1-\Delta_2) \left[ 1 - (1-b)\Pi_\beta^i \right]$	$1 - \Pi_\beta^i + \Pi_\beta^i b$	$1 - \Pi_\beta^i + \Pi_\beta^i (1-\Delta_2)b$	$b + (1-b)(1-\Delta_2)(1-\Pi_\beta^i)$
$(\mathbf{T}_i)_{23}$	$\Delta_2$	$(1-b)\Pi_\beta^i \Delta_2$	$\Pi_\beta^i \Delta_2$	$(1-b)\Delta_2$

Cuadro 2.1: Elementos de la matriz de probabilidades de transición para un agente corrupto según la ordenación

### 2.2.1. Estado estacionario del proceso de Markov

Las soluciones estacionarias  $\mathbf{S}_i^*$  del proceso de Markov vienen dadas por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{T}_i^* \mathbf{S}_i^* = \mathbf{S}_i^* \quad \text{para todo } i, \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{T}_i^*$  es la matriz (2.1) independiente del tiempo, es decir  $\mathbf{T}_i^* = \mathbf{T}_i(\{\mathbf{S}_i^*\})$ . Esta matriz puede ser expresada para todas las ordenaciones en función de 4 de los 9 elementos que la componen:

$$\mathbf{T}_i^* = \begin{pmatrix} 1 - (\mathbf{T}_i^*)_{21} & 0 & (\mathbf{T}_i^*)_{13} \\ (\mathbf{T}_i^*)_{21} & 1 - (\mathbf{T}_i^*)_{32} & 1 - (\mathbf{T}_i^*)_{13} - (\mathbf{T}_i^*)_{33} \\ 0 & (\mathbf{T}_i^*)_{32} & (\mathbf{T}_i^*)_{33} \end{pmatrix}$$

Así, la ecuación (2.2) da lugar a un sistema de  $3N$  ecuaciones que puede resolverse numéricamente. Sin embargo, este sistema puede reducirse a  $2N$  ecuaciones teniendo en cuenta que  $1 = H + C + R$ . Así, para evitar la redundancia, es conveniente utilizar el subespacio reducido  $\mathbf{s}_i(t) = (H_i(t), C_i(t))^T$ , como se hará a partir de ahora.

Podemos analizar el comportamiento de la ecuación (2.2) para una ordenación y con ello verificar que el sentido que cada parámetro ha recibido inicialmente queda patente en la ecuación. Así, para la ordenación (e, c, d) se observa, como se esperaba, que:

- $H_i^*$  aumenta con  $r$  y  $\Delta_2$ , y disminuye con  $\Delta_1$  y  $\alpha$ .
- $C_i^*$  aumenta con  $r$ ,  $\Delta_1$ , y  $\alpha$ , y disminuye con  $b$  y  $\beta$ .

Para analizar la estabilidad lineal del estado estacionario  $\mathbf{S}_i^*$  partiremos de la ecuación maestra en el subespacio reducido  $\mathbf{s}_i(t)$ , que resulta:

$$\mathbf{s}_i(t+1) = \begin{pmatrix} (\mathbf{T}_i)_{22} - (\mathbf{T}_i)_{21} & (\mathbf{T}_i)_{23} - (\mathbf{T}_i)_{21} \\ 1 - (\mathbf{T}_i)_{22} & (\mathbf{T}_i)_{33} \end{pmatrix} \mathbf{s}_i(t) + (\mathbf{T}_i)_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Donde en general todos los elementos, salvo  $(\mathbf{T}_i)_{21} = r$ ,  $(\mathbf{T}_i)_{jk}$  dependen del tiempo, al incluir o  $H_i(t)$  o  $C_i(t)$ . Será esta ecuación 2.3 la que nos permita comprobar el modelo de Markov en redes para así compararlo con los resultados del método de Monte Carlo descritos en la sección anterior.

Las ecuaciones del movimiento linealizadas para pequeñas desviaciones  $\delta\mathbf{s}_i(t)$  en torno a  $\mathbf{s}_i^*$  son:

$$\delta\mathbf{s}_i(t+1) = \begin{pmatrix} (\mathbf{T}_i^*)_{22} - r & (\mathbf{T}_i^*)_{23} - r \\ 1 - (\mathbf{T}_i^*)_{22} & (\mathbf{T}_i^*)_{33} \end{pmatrix} \delta\mathbf{s}_i(t) + \begin{pmatrix} \delta(\mathbf{T}_i^*)_{22} & \delta(\mathbf{T}_i^*)_{23} \\ -\delta(\mathbf{T}_i^*)_{22} & \delta(\mathbf{T}_i^*)_{33} \end{pmatrix} \mathbf{s}_i^*$$

Así, las ecuaciones del movimiento linealizadas para pequeñas desviaciones  $\delta\mathbf{s} = (\delta H_1, \delta C_1, \dots, \delta H_N, \delta C_N)^T$  pueden expresarse como:

$$\delta\mathbf{s}(t+1) = \mathbf{M}\delta\mathbf{s}(t), \quad (2.4)$$

donde  $\mathbf{M}$  representa la matriz de estabilidad y tiene dimensiones  $(2N \times 2N)$ . Esta matriz puede a su vez ser interpretada como  $N^2$  matrices de dimensiones  $(N \times N)$  y con la siguiente estructura:

Las matrices de la diagonal ( $\mathbf{M}_{ij}$  con  $i = j$  para  $i, j = 1, \dots, N$ ),

$$\mathbf{M}_{ii} = \begin{pmatrix} (\mathbf{T}_i^*)_{22} - r & (\mathbf{T}_i^*)_{23} - r \\ 1 - (\mathbf{T}_i^*)_{22} & (\mathbf{T}_i^*)_{33} \end{pmatrix}$$

y para  $i \neq j$ ,

$$\mathbf{M}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha(1 - \Delta_1)A_{ij}H_i^* \prod_{k \neq j, i} (1 - \alpha A_{ik}C_k^*) \\ -\beta(1 - \Delta_2)(1 - b)A_{ij}C_i^* \prod_{k \neq j, i} (1 - \beta A_{ik}H_k^*) & \alpha(1 - \Delta_1)A_{ij}H_i^* \prod_{k \neq j, i} (1 - \alpha A_{ik}C_k^*) \end{pmatrix}$$

El espectro de la matriz de estabilidad  $\mathbf{M}$  proporciona toda la información necesaria para conocer la estabilidad lineal del estado estacionario. No obstante, salvo para casos especiales como el de un agente aislado, en el que se obvian las interacciones ( $\alpha = \beta = 0$ ), o el de dos agentes interactuantes, el análisis de dicha matriz se torna muy complicado.

### 2.2.2. Proceso de Markov: aproximación de campo medio

Como se ha comentado más arriba, las soluciones estacionarias del proceso de Markov vienen dadas por la ecuación (2.2), que puede resolverse numéricamente bajo algunas condiciones especiales.

Es de especial interés una aproximación de campo medio en la que se asume una población bien

mezclada de agentes corruptos, dejando de lado la red y admitiendo que cada agente interaccione en cada paso de tiempo con  $k$  agentes elegidos al azar.

Se asumirá para esta aproximación la hipótesis de campo medio  $H_i^* = \langle H^* \rangle$  y  $C_i^* = \langle C^* \rangle$ , donde se ha usado la notación  $\langle H^* \rangle = N^{-1} \sum_j H_j^*$  y  $\langle C^* \rangle = N^{-1} \sum_j C_j^*$ . Aplicándola para todos los agentes se obtiene:

$$\Pi_\beta^* = (1 - \beta \langle H^* \rangle)^k , \quad (2.5)$$

y

$$\Pi_\alpha^* = (1 - \alpha \langle C^* \rangle)^k , \quad (2.6)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones no lineales que permite determinar los valores medios  $\langle H^* \rangle$  y  $\langle C^* \rangle$  puede obtenerse sustituyendo (2.5) y (2.6) en la ecuación principal (2.2):

$$\begin{aligned} \langle H^* \rangle &= Z^{-1} r \left( \Delta_2 + (1 - \Delta_2) \left( 1 - (1 - b) (1 - \beta \langle H^* \rangle)^k \right) \right) \\ \langle C^* \rangle &= Z^{-1} r \left( 1 - (1 - \Delta_1) (1 - \alpha \langle C^* \rangle)^k \right) \\ Z &= (1 - \Delta_2) \left( 1 - (1 - b) (1 - \beta \langle H^* \rangle)^k \right) \left( 1 - (1 - \Delta_1) (1 - \alpha \langle C^* \rangle)^k \right) + \\ &\quad r \left( \Delta_2 + (1 - \Delta_2) \left( 1 - (1 - b) (1 - \beta \langle H^* \rangle)^k \right) \right) + r \left( 1 - (1 - \Delta_1) (1 - \alpha \langle C^* \rangle)^k \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Estas ecuaciones son válidas siempre que sea válida la hipótesis de campo medio, ya que no se han hecho asunciones en cuanto a las tasas de delación e infección  $\alpha$  y  $\beta$ .

Se puede ir incluso más allá realizando el desarrollo en serie de  $\Pi_\alpha^*$  y  $\Pi_\beta^*$  y, en el caso de que  $\alpha$  y  $\beta$  sean pequeños, truncar la serie en el orden deseado:  $\Pi_\alpha^* = 1 - \alpha k \langle C^* \rangle + \frac{1}{2} k(k-1)(\alpha \langle C^* \rangle)^2 + \dots$  y  $\Pi_\beta^* = 1 - \beta k \langle H^* \rangle + \frac{1}{2} k(k-1)(\beta \langle H^* \rangle)^2 + \dots$ . Este desarrollo a primer orden será interesante en el capítulo 3.

## 2.3. Discusión de los resultados

En las secciones anteriores se han obtenido, a través de diversos enfoques, ecuaciones aparentemente diferentes para el mismo problema. En este apartado se van a comparar los resultados que arroja cada uno de los siguientes enfoques:

1. Proceso de Monte Carlo sobre redes Erdős–Rényi y Barabási–Albert
2. Evolución temporal del proceso de Markov en redes a partir de la ecuación (2.3)
3. Aproximación de campo medio en el proceso de Markov, resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales (2.7).

Con el objetivo de comprobar que las redes se comportan igual en ambos procesos, se van a analizar primero los puntos 1 y 2. En las figuras 2.5b y 2.5a se ha representado la proporción de corruptos frente a uno de los parámetros ( $\alpha$ ) y puede observarse que la evolución temporal del

proceso de Markov y el proceso de Monte Carlo prácticamente no difieren. Los datos corresponden a una sociedad con todos los parámetros iguales a 0.5.

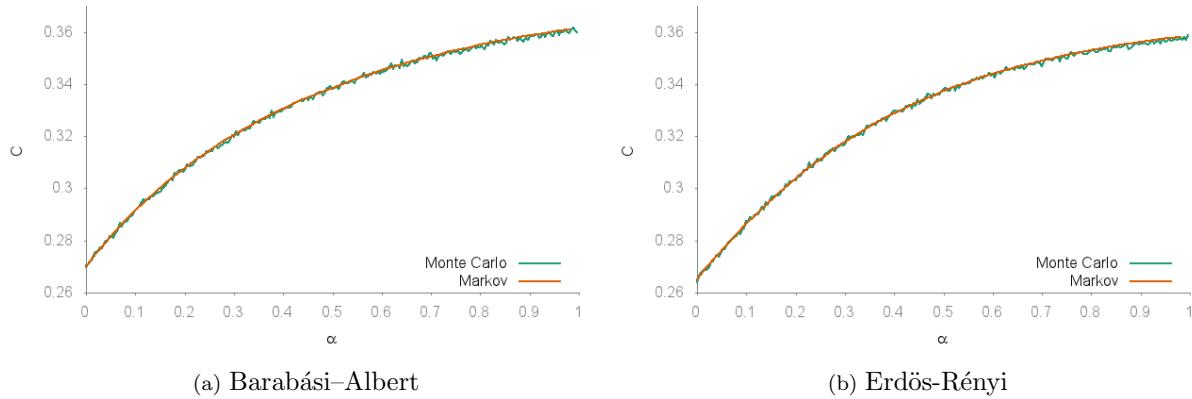


Figura 2.5: Proporción de corruptos frente a  $\alpha$  para dos tipos de redes y dos métodos: proceso de Monte Carlo y evolución temporal del proceso de Markov

Veamos ahora cómo se comporta la aproximación de campo medio explicada en la sección 2.2.2 a través de la resolución del sistema de ecuaciones no lineales (2.7). Se ha utilizado el método de Newton para ello [14]. Los resultados, comparados con los del modelo de Markov en ambas redes, pueden verse en la figura 2.6.

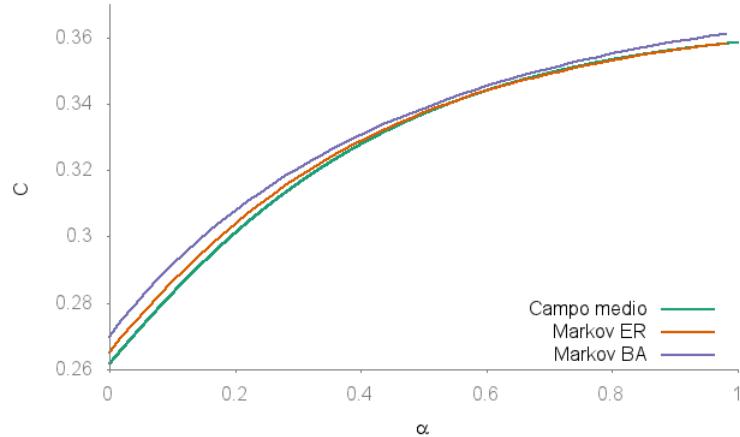


Figura 2.6: Comparación entre el comportamiento del proceso de Markov en dos tipos de redes y el modelo de campo medio descrito en la sección 2.2.2. Todos los parámetros salvo  $\alpha$  son iguales a 0.50.

Como puede observarse en la figura anterior 2.6, no existen grandes diferencias entre los dos modelos aunque el grado medio de los nodos en las redes utilizadas ( $\langle k \rangle = 6$ ) sea muy bajo. Así, al aumentar el grado de las redes se esperaría que los resultados fueran acercándose cada vez más a los de campo medio. Es este mismo argumento el que permite explicar por qué las redes BA se alejan algo más que las ER: en las redes BA existen muchas diferencias entre los grados de los nodos, existiendo *hubs*, o nodos muy conectados, por lo tanto la diferencia entre ellas y el modelo de campo medio es mucho mayor, lo que queda patente en los resultados.

Se revela con este análisis que el modelo inicial con seis parámetros es demasiado robusto, sin presentar modificaciones sustanciales del estado estacionario (no se han encontrado bifurcaciones, solo un desplazamiento gradual del mismo al modificar los parámetros). Por ello, a partir del próximo capítulo se utilizará una versión modificada del modelo presentado en este capítulo, denominada **Modelo 4p**.

---

# Capítulo 3

## Modelo 4p

Aunque la exploración fina del espacio de los seis parámetros del modelo desborda el marco de este trabajo, la que se ha llevado a cabo (necesariamente muy gruesa) revela la robustez del estado estacionario del modelo, en el sentido de que parece existir siempre un único estado estacionario, que varía continuamente con los parámetros, sin presentar bifurcaciones (transiciones de fase). Con la doble motivación de reducir el número de parámetros y encontrar comportamientos de transición de fase, se procedió a asumir que los agentes honestos no se ven influidos por un estímulo endógeno que los haga volverse corruptos, es decir  $\Delta_1 = 0$ , de modo que la corrupción de los agentes honestos solo depende de la tasa de contagio  $\alpha$ . Además, asumiremos que el miedo que sienten los agentes corruptos por ser descubiertos ( $\Delta_2$ ) es la fracción de agentes reservados, o  $\Delta_2 = \langle R \rangle$ . Realizando estas modificaciones se consigue un modelo con cuatro parámetros ( $r, b, \alpha$  y  $\beta$ ), por lo que nos referiremos al mismo como **Modelo 4p**. Notemos que ambas modificaciones desfavorecen la corrupción, posibilitando la existencia de regiones libres de corrupción en el espacio de parámetros.

Igual que en el capítulo anterior, en éste explicaremos primero las diferentes versiones y al final compararemos los resultados.

### 3.1. Proceso de Markov

Al ser el Modelo 4p una variación del modelo original, no existen grandes diferencias entre la implementación del proceso de Markov en ambos casos y la ecuación que rige la evolución temporal sigue siendo 2.3, pero siempre con  $\Delta_1 = 0$  y  $\Delta_2 = \langle R \rangle = 1 - \langle H \rangle - \langle C \rangle$ .

#### 3.1.1. Proceso de Markov: aproximación de campo medio

Consideramos la aproximación de campo medio de vecinos aleatorios con grado  $k$  explicada en el capítulo anterior (ecuaciones (2.5) y (2.5)). La ecuación maestra en el subespacio reducido y para la ordenación (e,c,d), que es la que se utilizará a partir de ahora si no se indica lo contrario, toma la forma:

$$\begin{aligned} H(t+1) &= r + \left( (1 - \alpha C(t))^k - r \right) H(t) + (1 - r - H(t) - C(t))C(t) \\ C(t+1) &= \left( 1 - (1 - \alpha C(t))^k \right) H(t) + (H(t) + C(t))(1 - b)(1 - \beta H(t))^k C(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

En el estado estacionario, es decir, cuando  $H(t+1) = H(t)$  y  $C(t+1) = C(t)$ , la ecuación (3.1) se convierte en un sistema de dos ecuaciones no lineales que puede resolverse para obtener  $\langle H \rangle$  y  $\langle C \rangle$ . Otra forma de obtener esta solución es hacer evolucionar el sistema hasta que se alcance dicho estado estacionario.

Es fácil observar que el estado de honestidad total ( $H = 1, C = 0$ ) es siempre un punto fijo (punto al que llamaremos “de honestidad total”). Para analizar su estabilidad escribimos  $H(t) = 1 + \delta H(t)$  y  $C(t) = \delta C(t)$ , con  $\delta H(t) \ll 1$  y  $\delta C(t) \ll 1$ . Así, despreciando los términos de orden superior a 1 y en forma matricial:

$$\delta s(t+1) = \begin{pmatrix} 1-r & -\alpha k + r \\ 0 & \alpha k + (1-b)(1-\beta)^k \end{pmatrix} \delta s \quad (3.2)$$

Esta matriz tiene dos autovalores:  $\lambda_1 = 1 - r$  y  $\lambda_2 = \alpha k + (1-b)(1-\beta)^k$ ; ambos reales y no negativos.  $\lambda_1 \leq 1$  siempre, sin embargo,  $\lambda_2$  es mayor que la unidad si

$$\alpha k > 1 - (1-b)(1-\beta)^k, \quad (3.3)$$

haciendo que el estado de honestidad total sea linealmente inestable (punto silla), de modo que el espacio de fases presenta una bifurcación. Puede observarse que  $\lambda_2$  está de acuerdo con la intuición: se espera que al aumentar el valor del ratio de “infección” sea más fácil salir del estado de honestidad total y, sin embargo, debería ocurrir lo contrario al aumentar  $b$  y  $\beta$ . El comportamiento de la función  $\lambda_2$  es exactamente así: creciente con  $\alpha$  y  $k$  y decreciente con  $b$  y  $\beta$ .

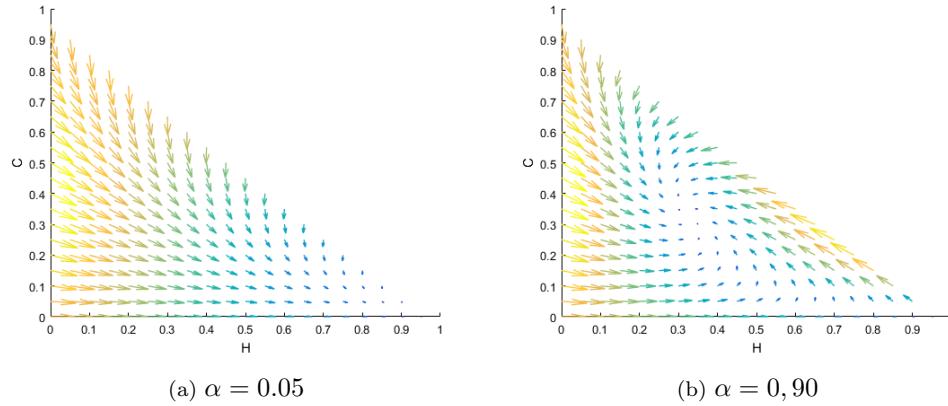


Figura 3.1: Retratos de fases de las ecuaciones (3.1) para dos valores de  $\alpha$ . En ambos casos se ha tomado  $\beta = b = r = 0.5$  y  $k = 6$

Con todos los parámetros iguales a 0.5 y  $k = 6$ , haciendo uso de la ecuación (3.3) se obtiene que la posible transición entre el estado de honestidad total y el otro punto fijo debería darse para  $\alpha = 0.165$ . En la Figura 3.1, se representa el retrato de fases obtenido para dos valores de  $\alpha$ . En el primero (Fig. 3.1a) se ha utilizado  $\alpha = 0.05$ , valor alejado de la transición para estos parámetros, por lo que  $\lambda_2 < 1$  en este punto y el punto de honestidad total es estable. Por el contrario, en el segundo retrato de fases (Fig. 3.1b) se ha utilizado  $\alpha = 0.90$ , punto en el que el punto de honestidad total es inestable y, según se aprecia en dicha figura, las trayectorias convergen a un punto fijo interior.

Podemos obtener el nuevo punto fijo de dos formas: o resolviendo numéricamente el sistema (3.1) con  $H(t+1) = H(t)$  y  $C(t+1) = C(t)$  (estado estacionario) o simulando la evolución temporal durante un tiempo suficientemente largo. Se ha optado por la primera opción debido a su velocidad

y simplicidad. Los resultados se han representado en la Figura 3.2. El punto fijo interior, que existe fuera del triángulo de soluciones con significado ( $0 \leq H \leq 1, 0 \leq C \leq 1$ ) para valores de  $\alpha < \alpha_c = 0.165$ , colisiona con el estado de honestidad total en  $\alpha = \alpha_c$  intercambiando su estabilidad con éste (bifurcación de intercambio de estabilidad), de modo que para  $\alpha > \alpha_c$ , es estable y punto interior del triángulo de soluciones factibles.

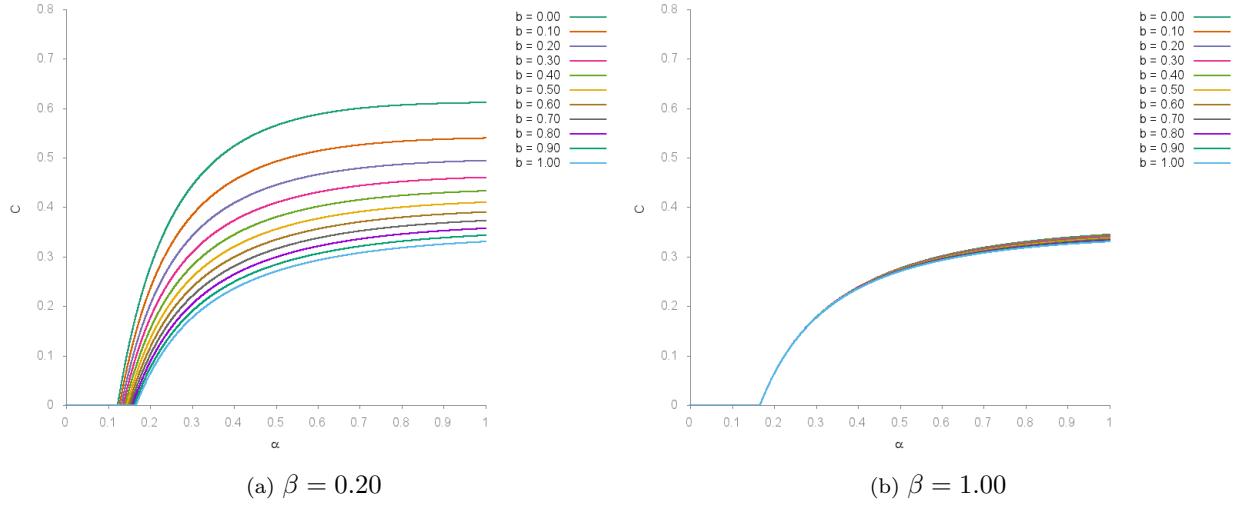


Figura 3.2: Evolución con el parámetro  $\alpha$  del estado estacionario de (3.1). En ambas gráficas se ha tomado  $r = 0.75$ .

De estas dos figuras pueden extraerse conclusiones muy interesantes acerca del comportamiento del modelo: como se esperaba, al aumentar  $b$  disminuye la proporción de corruptos y lo mismo sucede al aumentar  $\beta$ . Lo más importante, sin embargo, reside en la Figura 3.2b, cuando tanto la tasa de delación,  $\beta$ , como la efectividad de una inspección oficial,  $b$ , son máximas: se observa aún así que la proporción de agentes corruptos no se anula en el estado estacionario para valores de  $\alpha > 1/k$ , lo que indica que solo en una sociedad en la que no existieran conexiones entre los agentes se daría la honestidad total, sin importar el esfuerzo ni de las personas honestas por delatar a corruptos ni el del gobierno por aumentar la efectividad de las inspecciones.<sup>1</sup>

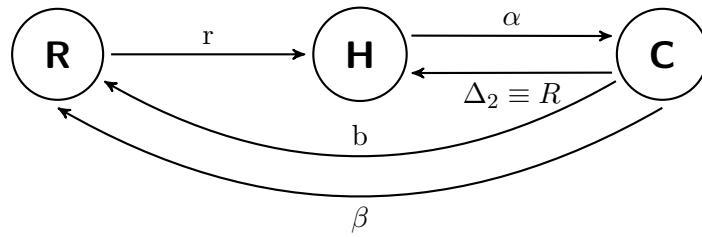
### 3.1.2. Límite continuo de la aproximación de campo medio al proceso de Markov

El límite continuo de la aproximación de campo medio al proceso de Markov puede obtenerse de las ecuaciones (3.1) escribiendo  $\dot{X} = X(t+1) - X(t)$ , obteniendo así dos ecuaciones diferenciales no lineales acopladas, cuyo estado estacionario no difiere del obtenido con el map discreto. Nuestro interés en este límite está motivado por su relación con los llamados modelos compartimentales en epidemiología (SIR, SIS, etc.) donde, a partir de esquemas como el que se ha dibujado en el capítulo anterior, se escribe directamente la derivada temporal de la fracción de individuos en cada estado como suma de “ganancias y pérdidas del compartimento correspondiente”. Como en dichos modelos epidemiológicos solo hay trasvase directo de un compartimento a otro único compartimento, no hay

<sup>1</sup>Se está tomando en todo momento una población que se rige según este modelo, que, si bien parece que tiene bastantes componentes realistas, no es modelo de ninguna población concreta.

problema de ordenamiento en los trasvases. Sin embargo, en nuestro caso sí existe este problema (ver 2.1). Además en nuestro caso los posibles contagios resultan de la interacción de un agente con otros  $k$  agentes, y en los pocos casos en la literatura en que situaciones similares se han considerado en contextos epidemiológicos, siempre se ha procedido a efectuar la aproximación lineal equivalente a lo que en nuestro problema consiste en aproximar  $(1 - \beta H)^k \simeq 1 - \beta k H$  y  $(1 - \alpha C)^k \simeq 1 - \alpha k C$ , véase, por ejemplo, [15]. Por una parte, se quiere verificar que el ordenamiento puede tenerse en cuenta de modo correcto en la obtención directa de las derivadas, y por otra, analizar si la linealización anteriormente usada distorsiona, y en qué medida, los resultados, ya que esperamos que solo pueda ser válida, en el mejor de los casos, si  $\alpha C$  y  $\beta H$  son muy pequeños.

Para el modelo 4p, el diagrama que se ha dibujado en el capítulo anterior quedaría:



A partir de este esquema, para la ordenación  $(e, c, d) \equiv (e, d, c)$ , la variación  $\dot{H}$  de la fracción de agentes honestos tiene dos contribuciones positivas (ganancias),  $rR$  (fracción de reservados que se incorporan) y  $\Delta_2 C$  (fracción de corruptos que pasan a honestos), y una contribución negativa (pérdida),  $-\alpha k H C$ . Análogamente, la variación  $\dot{C}$  de la fracción de agentes corruptos es la suma de la ganancia  $\alpha k H C$  y las pérdidas  $-\Delta_2 C$ ,  $(1 - \Delta_2) \beta k H C$ , y  $(1 - \Delta_2)(1 - \beta k H) b C$  dado el orden pre establecido<sup>2</sup>.

Por lo tanto, las ecuaciones que rigen el modelo 4p de Markov en el límite continuo y en el subespacio reducido quedan:

$$\begin{aligned}\dot{H} &= rR + \Delta_2 C - \alpha k H C = r - (r + \alpha k C)H + (\Delta_2 - r)C, \\ \dot{C} &= \alpha k H C - (\Delta_2 + (1 - \Delta_2) \beta k H C + (1 - \Delta_2)(1 - \beta k H) b C).\end{aligned}\quad (3.4)$$

Podemos ahora eliminar el parámetro  $\Delta_2 \equiv R = 1 - H - C$ , con lo que las ecuaciones anteriores resultan:

$$\begin{aligned}\dot{H} &= r - (r + \alpha k C + C)H + (1 - r)C - C^2, \\ \dot{C} &= \alpha k H C - (1 - H - C + (H + C) \beta k H + (H + C)(1 - \beta k H) b)C.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Por analogía con la aproximación de campo medio en tiempos discretos, vamos a comprobar si se produce una transición desde el estado de honestidad total al variar alguno de los parámetros. Para

<sup>2</sup>Se ha decidido escribir primero las ecuaciones con el parámetro  $\Delta_2$  incluido porque se considera que de esta forma se entiende mejor el origen de cada sumando

ello comprobaremos los autovalores de la matriz Jacobiana evaluada en el punto  $[H, C] = (1, 0)$ :

$$M = \left. \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{H}}{\partial H} & \frac{\partial \dot{H}}{\partial C} \\ \frac{\partial \dot{C}}{\partial H} & \frac{\partial \dot{C}}{\partial C} \end{pmatrix} \right|_{\substack{C=0 \\ H=1}} = \begin{pmatrix} -r & -r - \alpha k \\ 0 & \alpha k - b - (1-b)\beta k \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

En general, los autovalores vienen dados por la ecuación característica  $\det(M - \lambda \mathbb{I}) = 0$ . En este caso, al ser la matriz triangular superior, los autovalores son los elementos de la diagonal, por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -r, \\ \lambda_2 &= \alpha k - b - (1-b)\beta k. \end{aligned}$$

Como ahora estamos haciendo uso de un modelo continuo, debemos atender al signo de los autovalores.  $\lambda_1$  siempre es negativo, pero  $\lambda_2$  es positivo solo si  $\alpha k \geq b + (1-b)\beta k$ , lo que indica la presencia de una bifurcación. Es además notable que, como en el caso anterior, dicha bifurcación no depende del valor de  $r$ .

Para comprobar que, como en el modelo discreto, existen más puntos fijos aparte del de honestidad total se ha representado en la figura 3.3 el retrato de fases con  $\alpha = \beta = r = b = 0.5$  y  $k = 6$ . En dicho retrato de fases se ha añadido una de las nulclinas correspondiente a  $\dot{H} = 0$ , el resto de nulclinas quedan fuera de la región de interés. Con ese valor de  $\alpha$ ,  $\lambda_2 \geq 0$  y nos encontramos en una situación en la que la honestidad total es inestable. En dicha figura se observa la presencia de otro punto fijo atractor en torno a  $(0.3, 0.3)$  para estos valores de parámetros.

Tomemos ahora los siguientes parámetros:  $\beta = 0.70$ ,  $b = 0.25$ ,  $r = 0.75$  y  $k = 6$ . En principio, se esperaría que la aparición de corrupción se produjera en  $\alpha = 0.567$ . En la Figura 3.4 se representa la proporción de corruptos frente a  $\alpha$ . Dejando a un lado que la transición es muy distinta a la del caso anterior (Fig. 3.2), se observa que ésta se produce mucho antes de lo esperado, en  $\alpha = 0.5077$ . En el caso de  $\beta = 0.90$  sucede algo similar:  $\lambda_2 > 0$  cuando  $\alpha > 0.716$ , pero por el contrario, la transición se produce en  $\alpha = 0.610$ .

Se observa además en la Figura 3.4 que hay un valor de  $\alpha$  para el que la proporción de corruptos no depende de  $b$ . Se cree que este comportamiento se debe a la débil dependencia de las ecuaciones del sistema con  $b$  (véase (3.5)), en ese punto el sumando que contiene este parámetro se anula debido a que se cumple la condición  $\beta k H = 1$ . Es asimismo notable que el punto en el que se esto se produce varíe en función de  $\beta$ , desplazándose hacia la derecha al aumentarlo. Siguiendo este razonamiento se puede obtener que existirá un valor a partir del cual se produzca el cruce. Este valor estará caracterizado por  $H = 1$ , por lo tanto,  $\beta = 1/k (= 1/6$  en nuestro caso).

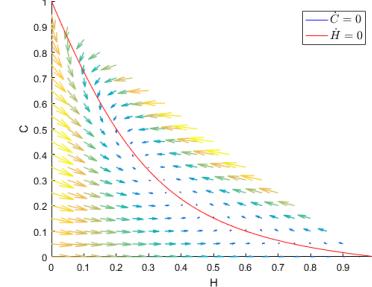
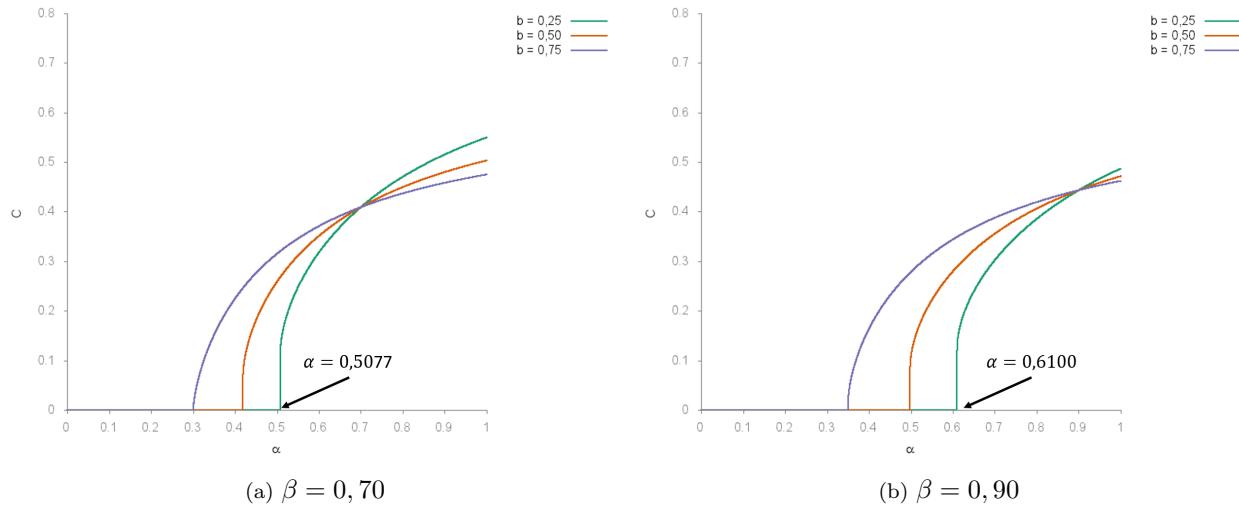
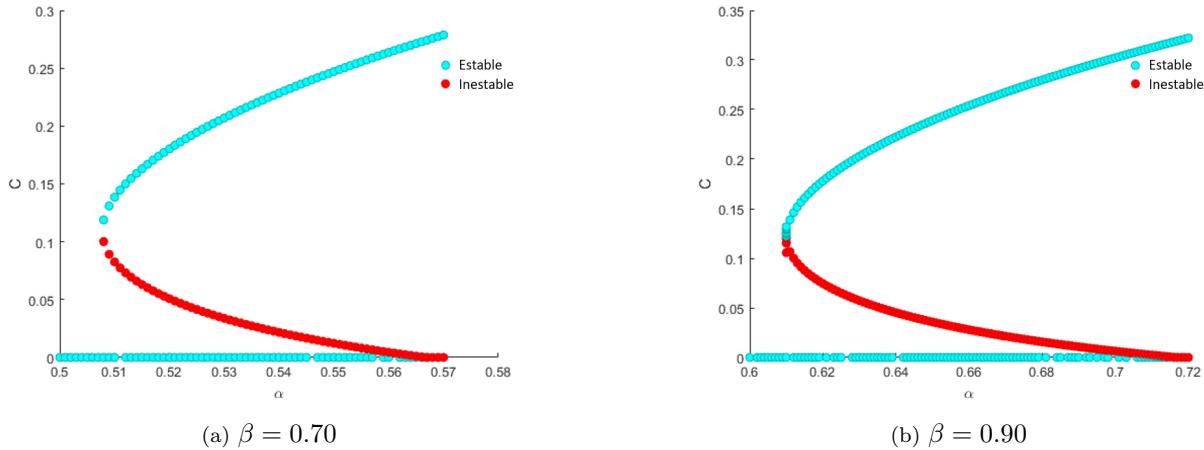


Figura 3.3: Retrato de fases de (3.5) con  $\alpha = \beta = r = b = 0.5$  y  $k = 6$ . En rojo se ha representado una de las nulclinas de  $\dot{H} = 0$ .

Figura 3.4:  $C$  frente a  $\alpha$  con  $r = 0,75$  y  $k = 6$  para dos valores de  $\beta$ .

Todo ello parece sugerir que existe un rango de valores de  $\alpha$  en el que el estado de honestidad total es estable y coexiste con otro estado distinto pero igualmente estable. Para comprobar esta suposición, se pueden calcular numéricamente los puntos fijos para cada valor de  $\alpha$  sin más que ejecutando repetidamente el programa que resuelve el sistema de ecuaciones (3.5) y calculando  $\lambda_2$  en todos los puntos que resulten del programa (recordemos que  $-1 < \lambda_1 < 0$  siempre). Hecho esto, los puntos se pueden representar distinguiendo entre puntos estables e inestables según el signo de  $\lambda_2$ , obteniéndose las gráficas de la Figura 3.5.

Figura 3.5: Estabilidad de los puntos fijos en dos situaciones. Los puntos azules indican puntos fijos estables y los azules, inestables.  $b = 0.25$ ,  $r = 0.75$  y  $k = 6$ .

Prestando atención a la Figura 3.5 ya se puede explicar por qué no coincidían el punto en el que la honestidad total deja de ser estable con el que se obtenía en 3.4: en los cálculos para obtener dicha Figura 3.4, el sistema empezaba a resolverse con  $\alpha = 1$  y se disminuía progresivamente hasta  $\alpha = 0$  utilizando en cada punto la solución anterior para aumentar la velocidad de ejecución, por lo que siempre se estaban calculando soluciones de la rama estable superior hasta que ésta llegaba a su

fin. Cuando se comienza aumentando  $\alpha$  desde  $\alpha = 0$  no se sale del punto fijo que indica honestidad total ya que éste solo cambia su estabilidad (intercambio de estabilidad con la rama inestable), siendo siempre solución de (3.5) en el estacionario.

Vemos, en consecuencia, que la aproximación  $(1 - \beta H)^k \simeq 1 - \beta k H$  y  $(1 - \alpha C)^k \simeq 1 - \alpha k C$  genera un comportamiento espúreo cualitativamente muy diferente: aparición de biestabilidad, que no ocurre si la aproximación no se lleva a cabo. Obviamente, la distorsión introducida es solo cuantitativa para valores de  $\alpha C$  y  $\beta H$  bajos (véase figura 3.6a).

El comportamiento sorprendente ya abordado unos párrafos atrás y también fruto de dicha aproximación es el hecho de que para valores no muy altos de  $\beta$  (se observa a partir de  $\beta = 1/k$ ), el aumento de  $b$  favorece la aparición de corrupción (Fig. 3.4), produciendo que la transición de fase ocurra para  $\alpha$  más pequeños. Esto significa que, en el marco de este modelo, el hecho de que el gobierno aumente las inspecciones no es sino contraproducente en la lucha contra la corrupción en caso de que la sociedad ya delate a los agentes corruptos.

Durante toda la disertación se ha utilizado la ordenación (e,c,d). Sin embargo, es muy interesante también cómo dependen los resultados de este factor. En la Figura 3.6 se observan dos gráficas en las que se deja patente cuán determinante es al alejarnos del punto en el que se produce la transición de fase. Los resultados varían apreciablemente según el orden, aunque el análisis que se ha realizado más arriba es válido en todos los casos.

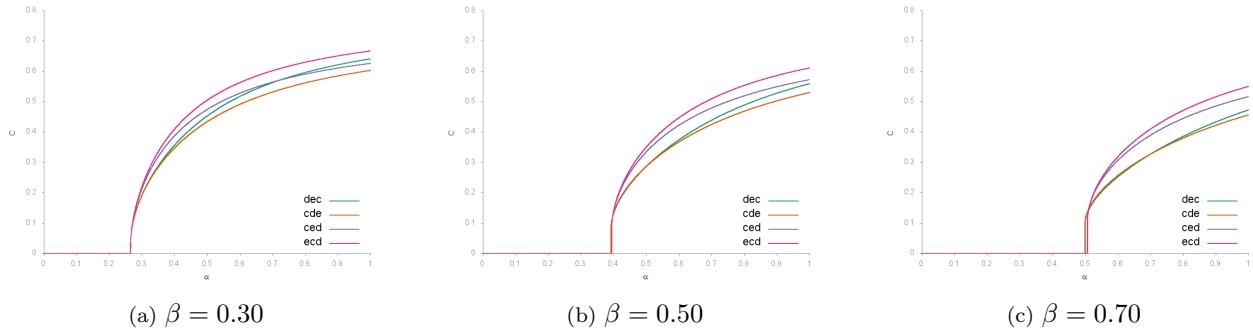


Figura 3.6: Importancia del orden en el límite continuo del modelo de Markov.  $b = 0.25$ ,  $r = 0.75$ .

### 3.1.3. Proceso de Markov en redes

La visión del proceso de Markov no debe limitarse al ámbito de las aproximaciones de campo medio. Su límite continuo desarrollado más arriba se puede modificar ligeramente para ser implementado en redes y así disponer de más resultados con los que comparar.

La modificación que debe llevarse a cabo es simple: en los términos donde se haya realizado la aproximación de campo medio, debe añadirse la matriz de adyacencia para contar solo los vecinos de un nodo:

$$(1 - \alpha C)^k \rightarrow \Pi_j (1 - \alpha A_{ij} C_j) , \quad (3.7)$$

$$(1 - \beta H)^k \rightarrow \Pi_j (1 - \beta A_{ij} H_j) \quad (3.8)$$

Por la topología propia de las redes, esperaríamos que, en caso de que también se diera transición de fase, ésta ocurriera antes (para valores menores de  $\alpha$ ) en las redes libres de escala (Barabási-Albert): como se ha explicado en el capítulo anterior, en el modelo de Markov en red cada nodo tiene una probabilidad de ser honesto, corrupto o reservado. Si añadimos además que en una red BA hay nodos que tienen mucha mayor conectividad que los demás, obtenemos que, si uno de estos *hubs* se “infecta” y adquiere un valor de corrupción alto, en el siguiente paso de tiempo todos sus vecinos estarán expuestos y se necesitará un valor menor de  $\alpha$  para que se infecte gran cantidad de ellos.

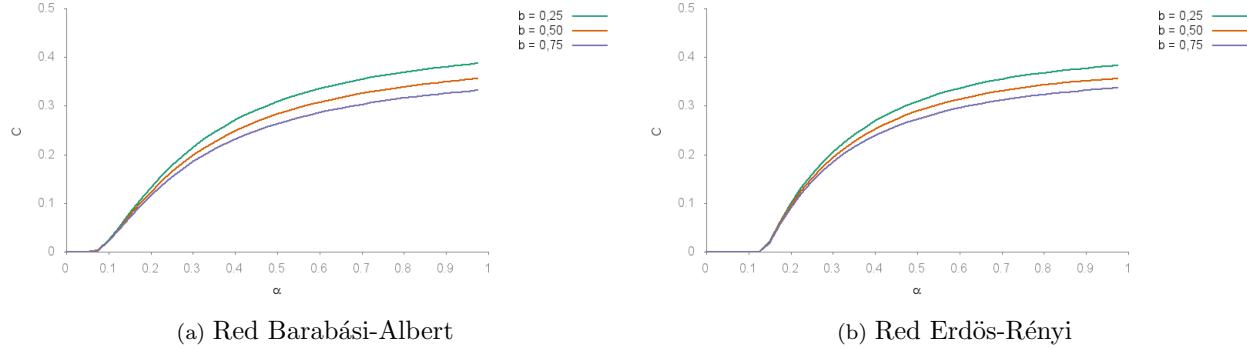


Figura 3.7: Proceso de Markov en redes BA o ER. En ambas figuras se ha utilizado  $\beta = 0.5$  y  $r = 0.75$ .

En la Figura 3.7 se observa que el comportamiento al aumentar  $\alpha$  es el mismo que en los dos casos anteriores: existe honestidad total para valores de  $\alpha$  pequeños y se produce una transición de fase. Se comprueba además en dicha Figura que se cumple lo predicho con el análisis anterior: hablando en términos cualitativos, en las redes Barabási-Albert la transición se produce en  $\alpha < 0.1$  y en las redes Erdős-Rényi, en  $\alpha > 0.1$  para estos valores de parámetros.

Es asimismo reseñable que en el proceso de Markov en redes el valor de  $b$  no juegue papel alguno a la hora de determinar la posición de la transición de fase para valores de  $\beta$  no muy elevados (en las redes ER la transición se desplaza hacia  $\alpha$  mayores al aumentar  $b$  cuando  $\beta = 0.10$ , pero ya en  $\beta = 0.30$  no hay diferencia. Con estos resultados, las conclusiones que pueden extraerse son las mismas que las del proceso de Markov con la aproximación de campo medio.

## 3.2. Método de Monte Carlo

Como en el caso del proceso de Markov en redes, el método de Monte Carlo no difiere apreciablemente del utilizado en el capítulo 2. En su implementación se ha utilizado  $\Delta_1 = 0$  y la probabilidad que representa  $\Delta_2$  se ha sustituido en cada paso de tiempo por la proporción de reservados en la población.

La experiencia adquirida en el punto anterior puede ser valiosa en este caso, ya que se vuelve a trabajar con dos tipos de redes que pueden dar lugar de nuevo a resultados diferentes:

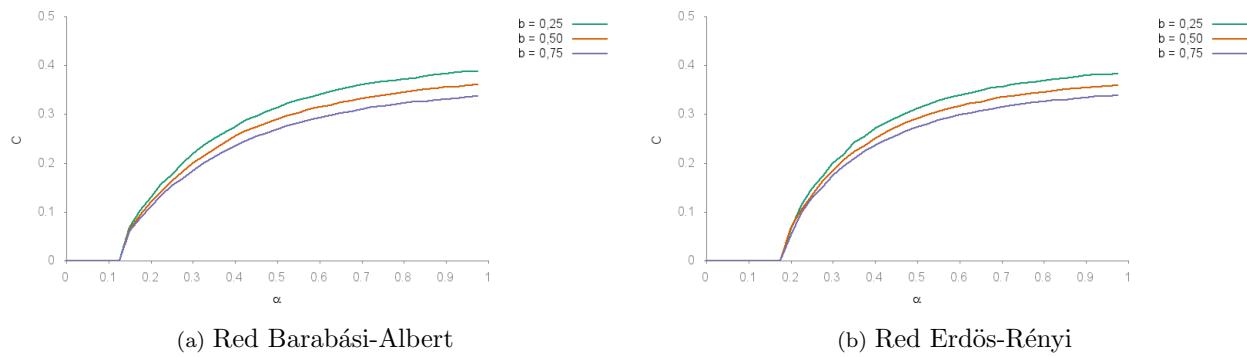


Figura 3.8: Proceso de Markov en redes BA o ER. En ambas figuras se ha utilizado  $\beta = 0.5$  y  $r = 0.75$ .

En la Figura 3.8 se observa que el método de Monte Carlo también produce una transición de fase muy marcada. Además, como se preveía, se vuelve a repetir el comportamiento del punto anterior por el mismo motivo: la bifurcación tiene lugar para valores de  $\alpha$  menores en las redes de tipo Barabási-Albert.

Por las razones expuestas en los párrafos precedentes, el método de Monte Carlo no será en realidad de más utilidad que la de verificar inicialmente los resultados obtenidos con el proceso de Markov para así comprobar su validez. Además, el método que se ha implementado tiene una desventaja muy importante: es hasta un 33 % más lento que el proceso de Markov en redes, por lo que, en caso de que se observe que éste último reproduce satisfactoriamente los resultados, aportará una ventaja muy significativa en cuanto a tiempo de ejecución a la hora de analizar los resultados.

### 3.3. Discusión de los resultados

Como ya se ha apuntado más arriba, cualitativamente se observa que los puntos de vista que se han tomado en este capítulo en torno al modelo 4p no ofrecen resultados muy diferentes puesto que en todos ellos se encuentran transiciones de fase desde la honestidad total al aumentar el valor del parámetro  $\alpha$ . Sin embargo, no se ha realizado todavía una comparación cuantitativa de los resultados. Esta comparación cuantitativa se va a realizar comparando con los resultados del método de Monte Carlo ya que se entiende que es éste el que en realidad reproduce la realidad de forma más precisa. La comparación de los resultados está motivada por el dilatado tiempo de ejecución que requiere el método de Monte Carlo, mucho mayor que el de los demás acercamientos que se han realizado al modelo. Así, en caso de que alguno de los modelos presentados arrojara resultados similares a los del proceso de Monte Carlo, no solo nos valdría para ratificar su validez sino para hacer uso del mismo posteriormente como aproximación coherente.

Como recordatorio, los modelos de los que se tienen resultados son:

1. Aproximación de campo medio del proceso de Markov (ecuación (3.1)).
2. Límite continuo de la aproximación de campo medio al proceso de Markov (ecuación (3.5)).

3. Proceso de Markov en redes Erdős-Rényi o Barabási-Albert.

4. Proceso de Monte Carlo.

Ya se ha hecho hincapié en que los resultados del límite continuo del proceso de Markov al realizar la aproximación de  $\alpha C$  y  $\beta H$  pequeños no pueden compararse con los demás, ya que en general no nos encontramos en esa situación. Por este motivo serán descartados de la discusión.

Los resultados comparando todos los modelos se han representado en la Figura 3.9 para los parámetros  $b = \beta = 0.50$ ,  $r = 0.75$  y  $k = 6$ . Se perciben en dicha Figura varios aspectos francamente interesantes:

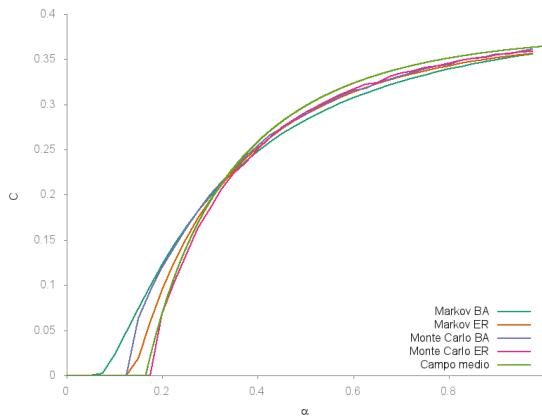


Figura 3.9: Comparación entre los modelos descritos en este capítulo para  $b = \beta = 0.50$ ,  $r = 0.75$  y  $k = 6$ .

- Como se ha explicado para cada caso en concreto, en los modelos con redes Barabási-Albert la transición se produce para valores de  $\alpha$  menores, lo que da cuenta de la distribución de la red.
- La transición en el caso del modelo de campo medio se da casi a la vez que para el Monte Carlo en redes Erdős-Rényi, lo que se debe a la estructura de las redes de este tipo: son redes aleatorias en las que no es probable que se formen *hubs* y en las que, por lo tanto, el grado de cada nodo no se aleja significativamente del grado medio  $\langle k \rangle$  de la red.
- Para valores de  $\alpha$  no superiores a 0.4, se observa una separación clara entre los tipos de red. Este aspecto se pierde en valores de  $\alpha$  más elevados, cuando la estructura de la red deja de tener tanta importancia. Para ilustrar este comportamiento, en la Figura 3.10, donde se ha utilizado  $\beta = 0.1$ , se observa que la separación se conserva durante todo el rango de valores de  $\alpha$ , lo que se debe a que el valor de  $\beta$  es demasiado pequeño y la estructura de la red es crítica en el comportamiento del modelo.
- Más allá de las diferencias de los anteriores puntos, todas las aproximaciones al modelo muestran una sorprendente similitud, por lo que pueden darse por válidas todas ellas. Es sobre todo notable la aproximación de campo medio ya que, si bien puede parecer algo simplista al

inicio, reproduce los datos del modelo de Monte Carlo asombrosamente bien y su tiempo de ejecución es mucho menor debido a que se reduce a la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales.

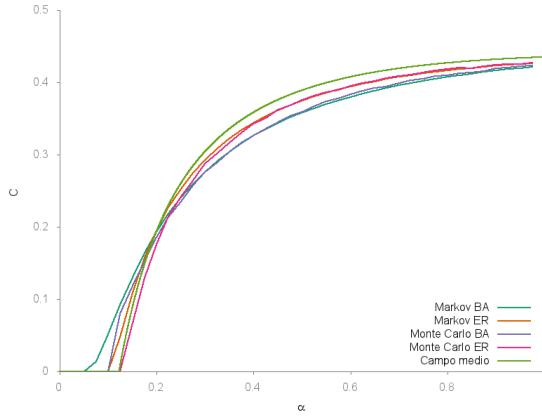


Figura 3.10: Comparación entre los modelos descritos en este capítulo para  $b = 0.50$ ,  $r = 0.75$ ,  $\beta = 0.10$  y  $k = 6$ .

Para finalizar este capítulo, la conclusión más reseñable que se extrae del análisis de los datos es la ya desarrollada en el punto 3.1.1: el modelo predice que siempre que  $\alpha$  sea mayor que un cierto valor existirá corrupción, sin importar los valores de  $b$  y  $\beta$ .

---

# Capítulo 4

## Conclusiones

Para concluir este trabajo se repasarán los objetivos que se pretendían alcanzar y que fueron expuestos en la introducción: en general, se buscaba analizar un modelo matemático basado en los modelos de epidemias para más tarde caracterizar y estudiar con detalle los puntos más interesantes como las transiciones de fase. Se trataba además de indagar en la posibilidad de realizar aproximaciones al modelo que permitieran reducir los tiempos de computación necesarios para obtener resultados fiables.

Los objetivos se han cumplido satisfactoriamente a lo largo del trabajo puesto que el problema se ha analizado desde varios puntos de vista. En primer lugar, en el capítulo 2 se ha expuesto el modelo y se han sentado las bases para desarrollar el método de Monte Carlo sobre el mismo, haciendo uso de redes de dos tipos con el fin de confrontarlas y probar la robustez del susodicho ante el cambio de red. En ese mismo capítulo se ha diseñado un proceso de Markov haciendo especial énfasis en una cuestión crucial como es el orden de elección de los agentes. Se ha desarrollado su estado estacionario, observando que solo puede ser resuelto analíticamente en casos concretos. Motivado por la indistinguibilidad al cambio de red, se ha presentado una aproximación de campo medio válida y que reduce la compleja tarea de encontrar el estado estacionario a un sistema de ecuaciones. Al comparar los resultados que se obtienen al ejecutar los diferentes métodos se observa una gran igualdad incluso en el caso del campo medio.

Analizando el modelo inicial no se encontraron puntos especialmente interesantes, probablemente debido a la gran cantidad de parámetros que en este se incorporaban. Así, con la intención de disminuir el número de parámetros se modificó el modelo original en un modelo 4p al inicio del capítulo 3, lo que posibilitaba la existencia de regiones libres de corrupción en el espacio de parámetros. Como en el anterior, en este capítulo se estudia una aproximación de campo medio al proceso de Markov y se hace especial hincapié en su límite continuo debido a las implicaciones que puede tener en posteriores trabajos en modelos de epidemias. Se pone de manifiesto en dicho apartado 3.1.2 que el orden puede tenerse en cuenta a la hora de obtener directamente las ecuaciones de evolución del sistema y que la aproximación que suele realizarse en la literatura puede dar lugar a interpretaciones erróneas del modelo en casos concretos (en el problema que nos ataña, cuando  $\beta H$  y  $\alpha C$  no son muy pequeños). Así, en nuestro caso se produce un hecho insólito además de la transición de fase de intercambio de estabilidad:  $b$ , definido como la probabilidad de ser descubierto, deja de tener sentido ya que aumentar su valor pasa a favorecer la aparición de corrupción. Además de las aproximaciones de campo medio, se ha implementado el proceso de Markov en redes, advirtiendo que ahora la red sí juega un papel importante ya que la bifurcación se produce antes en redes BA debido a los hubs.

Ignorando los resultados del límite continuo de la aproximación de campo medio del proceso de

---

Markov, el resto de acercamientos al modelo arrojan resultados similares para todos los valores de parámetros. Como ya se ha indicado en el punto 3.3, el hecho de que la aproximación de campo medio produzca resultados acordes a los demás hace que este problema pueda abordarse en el futuro limitándose a este aspecto de campo medio. Mucho más manejable analíticamente que el proceso de Markov sin aproximar.

La última conclusión que merece la pena resaltar es la relacionada con la aparición de corrupción a partir de un valor de  $\alpha$  sin importar que  $b$  y  $\beta$  adopten su valor máximo, implicando que en caso de que los agentes de la red estén conectados, casi siempre existirá una proporción no nula de ellos en estado corrupto.

## Bibliografía

- [1] R.M. Anderson and R.M. May *Infection diseases in humans: Dynamics and control*. Oxford University Press (1991).
- [2] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3200 (2001).
- [3] C. Castellano, S. Fortunato and V. Loreto *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591 (2009).
- [4] N. Boccara *Modeling complex systems*. Springer Verlag (2004).
- [5] A. Barrat, M. Barthélémy and A. Vespignani *Dynamical processes in networks*. Cambridge University Press (2008).
- [6] J-H. Lee, K. Sigmund, U. Dieckmann and Y. Iwasa *J. Theor. Biol.* **367**, 1-13 (2015).
- [7] M. Jusup *J. Theor. Biol.* (submitted 2017) [<https://www.researchgate.net/publication/317405610>]
- [8] V.N. Kolokoltsov *Int. J. Stat. Prob.* **1**, 77 (2012).
- [9] V.N. Kolokoltsov, and O.A. Malafeyev *Dyn. Games Appl.* DOI 10.1007/s13235-015-0175-x (2015).
- [10] V.N. Kolokoltsov, and O.A. Malafeyev **arXiv**: 1607.07350v1 [math.oc]
- [11] M.E.J. Newman *Networks. An Introduction*. Oxford University Press (2011).
- [12] S. Gómez, A. Arenas, J. Borge-Holthoefer, S. Meloni and Y. Moreno *Europhys. Lett.* **89**, 38009 (2010).
- [13] S. Gómez, J. Gómez-Gardenes, Y. Moreno and A. Arenas *Phys. Rev. E* **84**, 036105 (2011).
- [14] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky and William T. Vetterling *Numerical recipes in C: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 1992
- [15] P. Van Mieghem, F. Darabi Sahneh and C. Scoglio *53rd IEEE Conference on Decision and Control* **978-1-4673-6090-6/14**, 6228 (2014).