Anexo A

Solución exacta del proceso de Markov en el modelo 4p

Durante todo el trabajo se ha observado que parece muy difícil analizar el modelo 4p sin tener que recurrir a métodos de simulación o a resolver sistemas numéricamente. Sin embargo, merece la pena examinar un caso simple para ver qué se puede esperar del modelo antes de realizar las simulaciones. El caso que se va a estudiar en este apéndice corresponde a la solución estacionaria del proceso de Markov en el modelo 4p en los nodos de la red con conectividad alta, los llamados hubs. Recordemos primero las ecuaciones del campo medio en el subespacio reducido y para la ordenación (e, c, d):

$$\begin{aligned} H(t+1) &= r + \Big((1-\alpha C(t))^k - r\Big) H(t) + (1-r-H(t)-C(t))C(t) \\ C(t+1) &= \Big(1-(1-\alpha C(t))^k\Big) H(t) + (H(t)+C(t))(1-b)(1-\beta H(t))^k C(t) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Estas ecuaciones pueden aplicarse a una red sustituyendo $(1-\alpha X(t))^k$ por $\Pi_j\,(1-\alpha A_{ij}X_j)$, donde A_{ij} es la matriz de adyacencia. El resultado sería

$$\begin{aligned} H(t+1) &= r + (\Pi_j\,(1-\alpha A_{ij}C_j) - r)\, H(t) + (1-r-H(t)-C(t))C(t) \\ C(t+1) &= (1-\Pi_j\,(1-\alpha A_{ij}C_j))\, H(t) + (H(t)+C(t))(1-b)\Pi_j\,(1-\beta A_{ij}H_j)\, C(t), \end{aligned} \tag{A.2}$$

nótese que estás ecuaciones pueden obtenerse de igual forma a partir de 2.3 y particularizando los $(T_i)_{jk}$ al modelo 4p.

Observamos que los factores que componen los productos de A.2 son siempre positivos y menores o iguales que la unidad. Cuando $A_{ij}=0$ los nodos i y j no están conectados y $(1-\alpha A_{ij}C_j)=1$, en cambio, si $A_{ij}=1$, i y j están conectados y $(1-\alpha A_{ij}C_j)<1$ en función del valor de la tasa de contagio y de C_j. De esta forma, en los nodos con muchas conexiones (los hubs) habrá muchos factores menores que 1 dentro del producto, haciendo que este pueda aproximarse a 0 sin, esperamos, perder información. Por lo tanto, las ecuaciones que rigen la evolución temporal de la proporción de honestos y corruptos pueden simplificarse significativamente, quedando

$$\begin{aligned} H(t+1) &= r - rH(t) + (1-r-H(t)-C(t))C(t) \\ C(t+1) &= H(t) \end{aligned} \tag{A.3}$$

Este es un resultado sorprendente, ya que implica que la proporción de corruptos (C) solo depende de la cantidad de honestos en el paso de tiempo anterior. Además, es también notable que la evolución de ambas magnitudes solo dependa de uno de los parámetros: r.

Un paso más allá sería encontrar la solución en el estado estacionario, caracterizado por $X(t+1) = X(t)$. Lo que nos lleva a un sistema de ecuaciones con solución [1]

$$H(t) = C(t) = \frac{-r + \sqrt{r(r+2)}}{2} \tag{A.4}$$

Parece importante recordar por qué $H = C$ no implica $H = C = 0.5$. En todo momento se está trabajando en el subespacio reducido, pero no hay que olvidar que esta simplificación es posible gracias a que $H + C + R = 1$. Cabe destacar además que se habría llegado al mismo resultado si en las ecuaciones de campo medio (A.1) se hubiera impuesto $k \to \infty$, pero, aunque quizá menos didáctico, parece más lógico proceder como se ha hecho, utilizando las ecuaciones de evolución en redes ya que es ahí donde tiene verdadero sentido la existencia de nodos con conectividad alta.

Resta ahora comprobar la validez del resultado anterior (A.4). Para ello se han utilizado redes libres de escala de tipo Barabási–Albert ya que en ellas se cumple que hay nodos con conectividad muy superior al grado medio. En la Figura A.1 se puede observar el resultado de representar la proporción de H, C y R en función del grado de los nodos en 20 redes Barabási–Albert de 1000 nodos y $\langle k \rangle = 6$. Las líneas continuas representan el estado estacionario obtenido usualmente con la ecuación general y promediando a todos los nodos.

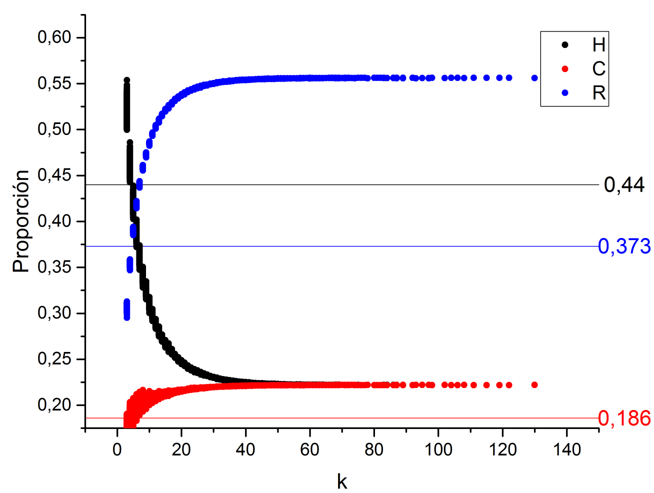

Figura A.1: Proporción de H, C y R en función del grado de los nodos para 20 redes BA en el estado estacionario. Las líneas continuas representan el estado estacionario general. Se ha utilizado $r = 0.25$ y el resto de parámetros, 0.5

Se observa que a partir de $k = 40$ las proporciones apenas no cambian y además se demuestra que se cumple que $H = C$. Con $r = 0.25$, la ecuación A.4 da como resultado $H = C = 0.25$. En la simulación se ha obtenido $H = C = 0.22$ en los nodos con mayor conectividad.

[1]Se ha descartado la solución negativa al no estar dotada de sentido físico.

Anexo B

Código utilizado

El código comentado y una pequeña explicación pueden ser consultado y descargado en la dirección https://javirk.github.io/Corruption/. Se puede acceder al mismo también a través del siguiente código QR:

En dicha web se ha incluido además un retrato de fases creado con el código de la carpeta "Scripts". Este retrato de fases cambia en tiempo real al variar los parámetros. Es útil para hacerse una idea aproximada del valor de H y C en la aproximación de campo medio.